CHAPITRE V

QUELQUES APPLICATIONS

On donne ici quelques applications des résultats obtenus dans les chapitres précédents.
Les théorèmes de localisation sont étendus à des ensembles d'opérateurs.
Le théorème de relèvement fournit quelques théorèmes d'homomorphismes.
On étend le théorème du graphe fermé, dans un cas assez particulier, à des espaces (de départ) non bornologiques. D'autre part on l'utilise pour généraliser le théorème de Bessaga-Pelczynski sur les bases de Schauder.

1. Localisation d'ensembles d'opérateurs

Si E est de Fréchet et si F est à réseau strict, le théorème de localisation affirme qu'il existe une suite de semi-boules b_k de E et une suite $e_{n_1,\dots,n_k}$ d'ensembles du réseau de F tels que

$$\mathrm{T}b_k \subset e_{n_1,\dots,n_k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

ce qui fournit des renseignements plus précis que la continuité de T. Par exemple, dans le cas particulier où F est limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet F_k, on en déduit que TE appartient à un F_k et que T est continu de E dans cet F_k (cf. corollaire 1, chap. III, p. 54).

On peut se demander dans quelle mesure cette propriété s'étend à des ensembles d'opérateurs. La question a été formulée dans le cas particulier des limites inductives de suites d'espaces de Fréchet par R. Hirschfeld et résolue par G. Köthe dans [25]. Elle trouve ici un cadre général naturel et se ramène simplement aux théorèmes de localisation du chapitre III.

THÉORÈME 1. — *Soient* E *de Banach et* F *à réseau strict. Notons* B *la boule unité de* E *et*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau strict de F. *Pour tout ensemble* $\mathscr{B}$, *absolument convexe, borné et sq-complet dans* $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$,

— *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{C}_1 > 0$ *tels que*

$$\mathscr{B}\mathrm{B} \subset \mathrm{C}_1\, e_{n_1}\ ;\ (*)$$

— *si*

$$\mathscr{B}\mathrm{B} \subset \mathrm{C}_k\, e_{n_1,\dots,n_k},$$

il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{C}_{k+1} > 0$ *tels que*

$$\mathscr{B}\mathrm{B} \subset \mathrm{C}_{k+1}\, e_{n_1,\dots,n_{k+1}}.$$

(*) On note

$$\mathscr{B}\mathrm{B} = \{\mathrm{T}f : \mathrm{T} \in \mathscr{B},\ f \in \mathrm{B}\}.$$

Corollaire. — *Avec les notations du théorème, si* F *est limite inductive d'une suite d'espaces* F_k *à réseau strict,*

— *il existe un* k *tel que* $\mathscr{B}E \subset F_k$,

— *si* $\mathscr{B}E \subset F_k$, $\mathscr{B}$ *est équicontinu de* E *dans* F_k.

Remarque. — On peut prendre au lieu de $\mathscr{L}_b(E, F)$, $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$ pour un $\mathscr{F}$ quelconque. En fait, on a choisi l'hypothèse la plus faible : comme E est de Fréchet, tout s-borné donc tout $\mathscr{F}$-borné est équicontinu et, d'autre part, tout ensemble sq-complet dans $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$ est sq-complet dans $\mathscr{L}_b(E, F)$.

On peut aussi, en restreignant un peu la généralité, supposer F sq-complet. Il suffit alors que $\mathscr{B}$ soit b-borné (ou équicontinu, c'est équivalent), car $\mathscr{L}_b(E, F)$ est sq-complet, donc l'enveloppe absolument convexe fermée de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{L}_b(E, F)$ y est sq-complète.

Démonstration. — Dans les conditions de l'énoncé, on a vu au théorème 1, chap. IV, p. 65, que l'espace $\mathscr{L}_b(E, F)$ admet un réseau strict, formé des ensembles

$$\{T : TB \subset e_{n_1,\ldots,n_k}\}.$$

Le corollaire 2 du théorème de localisation (chap. III, p. 54), appliqué aux bornés de cet espace, conduit aux conclusions de l'énoncé.

Pour le corollaire, on note qu'un réseau strict de F est formé des ensembles $e_{n_1} = F_{n_1}$ et

$$e_{n_1,\ldots,n_k} = e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k}, \ \forall k > 1, n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N},$$

où les $e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k}$ constituent un réseau strict de chaque F_{n_1}. Il existe donc une suite de b_k, de C_k et de n_k tels que $\mathscr{B}E \subset F_{n_1}$ et

$$\mathscr{B}b_k \subset C_k\, e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k}, \ \forall k < 1. \ (*)$$

Les relations (*) entraînent l'équicontinuité de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{L}(E, F_{n_1})$, puisque, pour toute semi-norme q de F_{n_1} et pour un choix convenable des λ_k,

$$\lambda_k e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k} \subset b_q \ (1)$$

dès que k est assez grand.

Théorème 2. — *Si* E *est de Fréchet ou de Baire et si* F *est sq-complet et admet un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

pour tout ensemble $\mathscr{B}$ *équicontinu dans* $\mathscr{L}(E, F)$,

— *il existe une semi-boule* b_1 *de* E, $n_1 \in \mathbb{N}$ *et* $C_1 > 0$ *tels que*

$$\mathscr{B}b_1 \subset C_1\, e_1,$$

— *si on a*

$$\mathscr{B}b_k \subset C_k\, e_{n_1,\ldots,n_k},$$

il existe b_{k+1}, n_{k+1}, C_{k+1} *tels que*

$$\mathscr{B}b_{k+1} \subset C_{k+1}\, e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

Corollaire. — *Avec les notations du théorème, si* F *est sq-complet et s'il est limite inductive d'une suite d'espaces* F_k *à réseau strict,*

— *il existe un* k *tel que* $\mathscr{B}E \subset F_k$,

— *si* $\mathscr{B}E \subset F_k$, $\mathscr{B}$ *est équicontinu de* E *dans* F_k.

Si E est de Fréchet et si le réseau $\mathscr{R}$ de F est constitué d'ensembles absolument convexes et *sq*-fermés, vu le théorème 2, chap. IV, p. 68, l'espace $\mathscr{L}_b(E, F)$ admet un réseau strict. En outre, comme F est *sq*-complet, $\mathscr{L}_b(E, F)$ est *sq*-complet.

On conclut comme dans le théorème 1.

Le cas général est plus compliqué.

La démonstration est entièrement différente de celle du théorème 1, car on ne peut plus affirmer que $\mathscr{L}_b(E, F)$ admet un réseau strict.

Soit f fixé dans E.

Comme F est *sq*-complet,

$$\mathscr{B}f = \{Tf : T \in \mathscr{B}\}$$

est contenu dans un borné absolument convexe et *sq*-complet de F, d'où

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $C_1 > 0$ tels que

$$\mathscr{B}f \subset C_1\, e_{n_1},$$

— si

$$\mathscr{B}f \subset C_k\, e_{n_1,\dots,n_k},$$

il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $C_{k+1} > 0$ tels que

$$\mathscr{B}f \subset C_{k+1}\, e_{n_1,\dots,n_{k+1}}.$$

On peut même, quitte à modifier $\mathscr{R}$, supposer que les C_k sont tous égaux à 1.

De là, si

$$\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k} = \{f : \mathscr{B}f \subset e_{n_1,\dots,n_k}\},$$

les $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ forment un réseau de E, et, comme E est de Baire,

— il existe n_1 tel que $\mathscr{E}_{n_1}$ ne soit pas maigre,

— si $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ n'est pas maigre, il existe n_{k+1} tel que $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k+1}}$ ne soit pas maigre.

Démontrons à présent que, si $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}$ n'est pas maigre, il contient une semi-boule de centre 0. La proposition sera ainsi établie.

On fixe d'abord une suite n_k, $k > k_0$, telle que $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ ne soit maigre pour aucun $k > k_0$. Comme les $e_{n_1,\dots,n_k}$ sont absolument convexes, les $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ le sont aussi, donc leur adhérence contient une semi-boule de centre 0 :

$$\overline{\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}} \supset b_k,\ \forall k > k_0,$$

Si λ_k est la suite de nombres associée aux n_k dans $\mathscr{R}$, on a alors

$$\lambda_{k_0}\overline{\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}} \subset \mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}.$$

De fait, soit $f \in \lambda_{k_0}\overline{\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}}$. Il existe successivement

— $f_{k_0} \in \lambda_{k_0}\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}$, tel que

$$f - f_{k_0} \in \lambda_{k_0+1} b_{k_0+1} \subset \lambda_{k_0+1}\overline{\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0+1}}}\ ;$$

— $f_{k_0+1} \in \lambda_{k_0+1}\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0+1}}$, tel que

$$f - f_{k_0} - f_{k_0+1} \in \lambda_{k_0+2} b_{k_0+2} \subset \lambda_{k_0+2}\overline{\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0+2}}}\,;$$

et ainsi de suite. On peut sans restriction supposer que les $\lambda_k b_k$ sont emboîtés en décroissant.

Fixons T dans $\mathscr{B}$. Comme $\mathrm{T}f_k \in \lambda_k e_{n_1,\ldots,n_k}$ pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\sum_{k=k_0}^{\mathrm{N}} \mathrm{T}f_k$$

converge dans F et sa limite g appartient à $e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$.

Démontrons que $g = \mathrm{T}f$.

On a

$$\begin{aligned} b_k &\subset \overline{\{f : \mathscr{B}f \subset e_{n_1,\ldots,n_k}\}} \\ &\subset \overline{\{f : \mathrm{T}f \in e_{n_1,\ldots,n_k}\}} \\ &\subset \mathrm{T}_{-1}\overline{(e_{n_1,\ldots,n_k})}, \end{aligned}$$

la dernière appartenance découlant de la continuité de T. De là, quel que soit $b_q(\varepsilon)$,

$$\lambda_k \mathrm{T} b_k \subset b_q(\varepsilon)$$

pour k assez grand, d'où

$$\mathrm{T}f - g = \lim\,(\mathrm{T}f - \sum_{k=k_0}^{\mathrm{N}} \mathrm{T}f_k) \in b_q(\varepsilon).$$

Dès lors,

$$\mathrm{T}f \in e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$$

quel que soit $\mathrm{T} \in \mathscr{B}$, ce qui entraîne

$$\mathscr{B}f \subset e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$$

et

$$f \in \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}.$$

Variantes. — Dans le théorème 2, on peut faire les variantes suivantes.

a) *Si* E *est de Fréchet, on peut supposer* F *limite inductive d'une suite d'espaces sq-complets et munis de réseaux de type* $\mathscr{C}$ *formés d'ensembles fermés et absolument convexes et* $\mathscr{B}$ *équicontinu, absolument convexe et sq-complet dans* $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

b) *Sans restriction sur* E, *au lieu de supposer* F *sq-complet, on suppose* $\mathscr{B}$ *absolument convexe et compact dans* $\mathscr{L}_s(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

L'intérêt de ces variantes tient dans le fait que les conditions pour qu'une limite inductive, même d'espaces de Fréchet, soit *sq*-complète sont assez restrictives.

Pour a), on note que, vu le théorème 2, chap. IV, p. 68, $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est à réseau strict et on applique à $\mathscr{B}$ le corollaire 2 du théorème de localisation, chap. III, p. 54.

Pour b), on procède comme dans le cas général de la démonstration ci-dessus, en notant que $\mathscr{B}f$ est borné, absolument convexe et compact donc *sq*-complet dans F.

Voici encore une propriété moins précise mais un peu plus générale que le théorème 2.

THÉORÈME 3. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables, si* F *est sq-complet et admet un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

et si $\mathscr{B} \subset \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est équicontinu,*

— *il existe* n_1 *tel que*

$$\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \rangle e_{n_1} \langle,$$

— *si*

$$\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \rangle e_{n_1,\ldots,n_k} \langle$$

il existe n_{k+1} *tel que*

$$\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \rangle e_{n_1,\ldots,n_{k+1}} \langle.$$

COROLLAIRE. — *Aves les notations du théorème, si* F *est sq-complet et limite inductive d'une suite d'espaces* F_k *à réseau strict, il existe un* k *tel que* $\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \mathrm{F}_k$.

Ce corollaire, de même que ceux des théorèmes 1 et 2, étend partiellement les résultats obtenus par G. Köthe dans [25], qui sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathscr{B}\mathrm{E}$ appartienne à un F_k et (ou) y soit équicontinu, quand les F_k sont de Fréchet.

Passons à la démonstration du théorème.

Il suffit de prouver qu'il existe n_1 tel que

$$\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \rangle e_{n_1} \langle.$$

En effet, on a vu (proposition 1, d), chap. III, p. 52), que $\rangle e_{n_1,\ldots,n_k} \langle$ admet le réseau strict formé des ensembles

$$e'_{m_1} = m_1 e_{n_1,\ldots,n_k},\ m_1 \in \mathbb{N},$$

$$e'_{m_1,\ldots,m_i} = m_1 e_{n_1,\ldots,n_k,m_2,\ldots,m_i},\ i > 1,\ m_1, \ldots, m_i \in \mathbb{N}.$$

Supposons que $\mathscr{B}\mathrm{E}$ n'appartienne à $\rangle e_{n_1} \langle$ pour aucun n_1.

Il existe alors une suite $f_k \in \mathrm{E}$ et une suite $\mathrm{T}_k \in \mathscr{B}$ telles que $\mathrm{T}_k f_k \notin \rangle e_k \langle$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Posons

$$1/c_k = 2^k\, [1 + p_k(f_k)],$$

où $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ est le système de semi-normes de E. La suite $c_k f_k$ tend vers 0 dans E, puisque, pour tout i,

$$p_i(c_k f_k) \leqslant p_k(c_k f_k) \leqslant 2^{-k},$$

dès que k dépasse i.

Comme la suite T_k est équicontinue, la suite $c_k \mathrm{T}_k f_k$ tend vers 0 dans F, donc y est bornée. Comme F est *sq*-complet, il existe alors $\mathrm{C} > 0$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$c_k \mathrm{T}_k f_k \subset \mathrm{C}\, e_{n_1},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

(Corollaire 2, chap. III, p. 54). C'est absurde, puisque $\mathrm{T}_{n_1} f_{n_1} \notin \rangle e_{n_1} \langle$.

2. Théorèmes d'homomorphisme

Le théorème de relèvement (chap. III, p. 61) a des applications intéressantes à des théorèmes d'homomorphisme.

Théorème 4. — *Soient* E *un espace de Schwartz,* F *la limite inductive d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables [et séparables],* T *un opérateur linéaire continu de* E *dans* F.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

α. T^*F^* *est fermé dans* E^*_s,

β. T *est un homomorphisme de* E_a *dans* F_a,

γ. T *est un homomorphisme de* E *dans* F.

Les implications $\gamma \Rightarrow \alpha$, $\beta \Rightarrow \alpha$ et $\alpha \Rightarrow \beta$ sont classiques et n'exigent pas d'hypothèse sur E et F.

Rappelons brièvement leur démonstration.

$\gamma \Rightarrow \alpha$.

Soient T un homomorphisme de E dans F et $\widetilde{T}$ l'opérateur qu'il induit de $E/N(T)$ dans F ($N(T)$ désigne le noyau de T, $\{f : Tf = 0\}$). L'inverse $\widetilde{T}^{-1}$ de $\widetilde{T}$ est défini et continu de F dans $E/N(T)$. Donc son adjoint applique $[E/N(T)]^*$ dans F^*. Or $[E/N(T)]^*$ peut être assimilé au polaire $[N(T)]^\Delta$ de $N(T)$, donc on obtient $T^*F^* \supset [N(T)]^\Delta$. L'inclusion inverse est triviale, d'où $T^*F^* = [N(T)]^\Delta$ est fermé dans E^*_s.

$\beta \Rightarrow \alpha$.

La démonstration est entièrement analogue à la précédente.

$\alpha \Rightarrow \beta$.

Il est immédiat que T^*F^* est s-dense dans $[N(T)]^\Delta$: si $\mathcal{T}(f) = 0$ pour tout $\mathcal{T} \in T^*F^*$, on a $\mathcal{Q}(Tf) = (T^*\mathcal{Q})(f) = 0$ pour tout $\mathcal{Q} \in F^*$, donc $Tf = 0$ et $f \in N(T)$.

S'il est en outre fermé dans E^*_s, on a $T^*F^* = [N(T)]^\Delta$, ce qui prouve que l'image par $(\widetilde{T}^{-1})^*$ de $[E/N(T)]^*$ appartient à F^*, donc que $\widetilde{T}^{-1}$ est continu de F_a dans $[E/N(T)]_a = E_a/N(T)$.

Passons à présent à la partie essentielle de l'énoncé :

$\alpha \Rightarrow \gamma$.

Comme E est de Schwartz, à toute semi-boule b de E, il correspond une semi-norme p telle que b^Δ soit précompact dans E^*_p.

Si T^*F^* est s-fermé, l'ensemble $(T^*F^*) \cap b^\Delta$ est fermé et précompact dans E'_p, intersection de E^*_p avec T^*F^*. Comme E'_p est de Banach, $(T^*F^*) \cap b^\Delta$ y est aussi compact et, par conséquent, il est très compact dans T^*F^*, muni du système de semi-normes induit par E^*_b.

Or l'espace F^*_b admet un réseau strict (cf. exemple 2, chap. III, p. 51). Donc, comme T^* est continu de F^*_b sur T^*F^*, en appliquant le théorème de relèvement, on voit qu'il existe un compact $\mathscr{K}$ de F^*_b, tel que

$$b^\Delta \cap T^*F^* = T^*\mathscr{K}.$$

Puisque F est évaluable, $\mathscr{K}$ est équicontinu : il existe une semi-boule β de F telle que $\beta^\Delta \supset \mathscr{K}$.

Comme $T^*F^* = [N(T)]^\Delta$, il vient

$$b^\Delta \cap [N(T)]^\Delta \subset T^*\beta^\Delta$$

ce qui entraîne

$$T_{-1}\beta \subset \{[N(T)]^\Delta \cap b^\Delta\}^\nabla \subset \overline{N(T) + b} \subset N(T) + 2b,$$

ce qui démontre que T est ouvert.

REMARQUE. — La démonstration fournit un peu plus que l'énoncé ne contient.

— *On peut supposer que* F *soit évaluable et que* F_b^* *admette un réseau strict.*

— On démontre que, *si* T^*F^* *est s-fermé,* T *est ouvert de* E *dans* F *muni des semi-normes*

$$\sup_n |\lambda_n \mathscr{Q}_n(g)|,$$

associées aux suites $\lambda_n \to 0$ *et aux suites équicontinues* $\mathscr{Q}_n$ *de* F^*.

En effet, on peut supposer $\mathscr{K}$ très compact dans F_b^*. Il est alors dans l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite très convergente vers 0 dans F_b^*. Celle-ci s'écrit sous la forme $\lambda_n \mathscr{Q}_n$, où $\lambda_n \to 0$ et où la suite $\mathscr{Q}_n$ est b-bornée, donc équicontinue. Donc on a

$$\sup_{\mathscr{Q}\in\mathscr{K}} |\mathscr{Q}(g)| \leqslant \sup_n |\lambda_n \mathscr{Q}_n(g)|, \ \forall g \in F.$$

Or, si on poursuit la démonstration sans substituer à $\mathscr{K}$ un β^Δ qui le contient, il vient

$$T_{-1}\mathscr{K}^\nabla \subset N(T) + 2b,$$

d'où la conclusion.

— *Au lieu que* E *soit de Schwartz, il suffit de supposer que tout ensemble absolument convexe, fermé et équicontinu soit très compact dans* E_b^* *et même dans* E_s^*.

Notons que, si E est évaluable, ce raffinement n'est qu'apparent. De fait, si b_p^Δ est très compact dans E_s^*, il existe un s-compact absolument convexe $\mathscr{K}$ tel qu'il soit compact dans l'enveloppe linéaire de $\mathscr{K}$, munie de la norme associée à $\mathscr{K}$ (cf. proposition 8, chap. III, p. 57). Or $\mathscr{K}$ est b-borné. Si E est évaluable, il est donc équicontinu : soit $\mathscr{K} \subset C\, b_{p'}^\Delta(1)$. Il s'ensuit que b_p^Δ est précompact pour la norme associée à $b_{p'}^\Delta$ et, par précompacité réciproque, que $b_{p'}$ est précompact pour p et que E est de Schwartz.

Du théorème 4 découle le théorème de relèvement suivant, conjecturé par L. Schwartz.

THÉORÈME 5. — *Soit* E *limite inductive d'une suite d'espaces de Schwartz à semi-normes dénombrables* E_i. *Si* L, *sous-espace linéaire de* E, *a le même dual quand on le munit du système de semi-normes induit par* E *ou du système de semi-normes de la limite inductive des* $L \cap E_i$, *ces deux systèmes de semi-normes sont équivalents dans* L.

Si, en outre, la limite inductive est stricte,

— *les systèmes de semi-normes de* E_b^*/L^Δ *et de* L_b^* *sont équivalents,*

— *tout borné de* E_b^*/L^Δ *est relevable par un borné de* E_b^*.

Le système de semi-normes induit par E est plus faible, dans chaque $L \cap E_i$, que celui de $L \cap E_i$. Donc il est plus faible dans L que celui de la limite inductive des $L \cap E_i$.

Inversement, soit J l'opérateur identité de L, limite inductive des $L \cap E_i$, dans E. L'espace L est de Schwartz puisque les $L \cap E_i$ le sont. L'espace E est limite inductive d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables. L'opérateur J est continu d'après ce qu'on vient de voir.

En outre, J^*E^* est l'ensemble des restrictions à L des fonctionnelles linéaires continues dans E, c'est-à-dire L^*, par hypothèse. On se trouve donc dans les conditions du théorème 4 et J est un homomorphisme, ce qui établit l'équivalence des deux systèmes de semi-normes considérés.

Passons à la deuxième assertion de l'énoncé.

Avec les notations précédentes, $J^*\mathcal{C}$, où $\mathcal{C} \in E^*$, est la restriction de $\mathcal{C}$ à L. L'opérateur J^* est visiblement continu de E_b^* dans L_b^*.

L'espace L est limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Schwartz à semi-normes dénombrables, donc L_b^* est bornologique et *sq*-complet (cf. Appendice, proposition 11, p. 140).

D'autre part, E_b^* admet un réseau strict.

Dès lors, vu le corollaire 2, chap. I, p. 29, J^* est un homomorphisme, ce qu'il fallait démontrer.

Cela étant, tout borné $\mathscr{B}$ de E_b^*/L^Δ est borné dans L_b^*, donc vu l'exemple 3, chap. III, p. 59, il est contenu dans un ensemble très compact de L_b^*. Celui-ci peut être relevé par un ensemble très compact dans E_b^*, donc par un ensemble équicontinu : soit b une semi-boule de E, telle que $J^*b^\Delta \supset \mathscr{B}$. On a alors

$$J^*(b^\Delta \cap J_{-1}^*\mathscr{B}) = \mathscr{B},$$

d'où la conclusion.

Voici encore un théorème d'homomorphisme du même genre que le théorème 4.

THÉORÈME 6. — *Soit* T *continu de* E *à réseau strict dans* F, *limite inductive stricte d'une suite* F_n *d'espaces de Fréchet* [*séparables*].

Les conditions suivantes sont équivalentes :

α. TE *est fermé dans* F,

β. T^* *est un homomorphisme de* F_c^* *dans* E_{ca}^*.

$\alpha \Rightarrow \beta$.

Soit K un compact de F. Etant contenu dans un des F_n, il est très compact. On peut le supposer absolument convexe, quitte à lui substituer son enveloppe absolument convexe fermée.

Si TE est fermé, $(TE) \cap K$ est aussi très compact dans TE, donc il existe un ensemble très compact K_0 de E tel que

$$K \cap TE = TK_0.$$

Vu la proposition 7, chap. III, p. 56, on peut même supposer K_0 absolument convexe.

Passons aux polaires dans F^* : il vient

$$T_{-1}^*K_0^\Delta = (K \cap TE)^\Delta \subset \overline{K^\Delta + (TE)^\Delta}^{s}.$$

Or on a $(\mathrm{TE})^{\Delta} = \mathrm{N}(\mathrm{T}^*)$. De plus, comme $\mathrm{K}^{\Delta} + (\mathrm{TE})^{\Delta}$ est absolument convexe, son adhérence simple est aussi son adhérence dans E^*_{τ}. Enfin, K est absolument convexe et compact dans F, donc K^{Δ} est une semi-boule de E^*_{τ}.

Il vient alors

$$\mathrm{T}^*_{-1}\mathrm{K}^{\Delta}_0 \subset \overline{(\mathrm{TE})^{\Delta} + \mathrm{K}^{\Delta}}^{\tau} \subset (\mathrm{TE})^{\Delta} + 2\mathrm{K}^{\Delta} = \mathrm{N}(\mathrm{T}^*) + 2\mathrm{K}^{\Delta}$$

et

$$2\mathrm{T}^*\mathrm{K}^{\Delta} \supset \mathrm{K}^{\Delta}_0 \cap \mathrm{T}^*\mathrm{F}^*,$$

ce qui prouve que T^* est ouvert de F^*_c dans E^*_{ca}.

$\beta \Rightarrow \alpha$.

Quel que soit $g \in \mathrm{F}$,

$$\pi(\mathcal{Q}) = |\, \mathcal{Q}(g) \,|$$

est une semi-norme de F^*_c.

Si $g \in \overline{\mathrm{TE}}$, on a aussi $\mathcal{U}(g) = 0$ pour tout $\mathcal{U} \in (\mathrm{TE})^{\Delta} = \mathrm{N}(\mathrm{T}^*)$. Or, si T^* est ouvert de F^*_c dans E^*_{ca}, il existe un compact absolument convexe K_0 de E tel que

$$\inf_{\mathcal{U} \in \mathrm{N}(\mathrm{T}^*)} \pi(\mathcal{Q} + \mathcal{U}) \leqslant \sup_{f \in \mathrm{K}_0} |\, \mathrm{T}^*\mathcal{Q}(f) \,|.$$

Donc

$$|\, \mathcal{Q}(g) \,| \leqslant \sup_{h \in \mathrm{TK}_0} |\, \mathcal{Q}(h) \,|, \ \forall \mathcal{Q} \in \mathrm{F}^*,$$

ce qui entraîne $g \in \mathrm{TK}_0 \subset \mathrm{TE}$ et $\overline{\mathrm{TE}} = \mathrm{TE}$.

3. Un théorème sur les bases de Schauder

Définitions. — Une suite $f_k \in \mathrm{E}$ est une *base* dans E si tout $f \in \mathrm{E}$ se développe de façon unique en série

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) f_k.$$

C'est une *base faible* si la série converge dans E_a.

Une *base de Schauder* est une base où les $c_k(f)$ sont des fonctionnalles linéaires continues dans E.

Le problème de savoir si une base faible de E est une base de Schauder a été résolu affirmativement par Banach dans le cas des espaces de Banach.

En 1959, Bessaga et Pelczynski, dans [7], ont étendu la propriété aux espaces de Fréchet. Arsove et Edwards ont considéré diverses généralisations du problème pour certaines limites inductives d'espaces de Fréchet (cf. [2] et [3]).

Une application des théorèmes du graphe fermé qui précèdent permet d'atteindre le cas des espaces bornologiques, *sq*-complets et à réseau de type $\mathcal{C}$.

Théorème 7. — *Si* E *est bornologique, sq-complet, à réseau de type* $\mathcal{C}$ [*et séparable par semi-norme*], *toute base faible de* E *est une base de Schauder.*

De plus, le développement en série des éléments de E *par rapport aux éléments de la base converge uniformément sur les précompacts de* E.

Soit e_m, $m \in \mathbb{N}$, une base faible de E et soient $c_m(f)$ les coefficients des développements :

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(f) e_m, \ \forall f \in \mathrm{E},$$

la série convergeant dans E_a.

a) Les $c_m(f)$ sont des fonctionnelles linéaires dans E.

De fait, si

$$f = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i f_i, \ \alpha_i \in \mathbb{C},$$

on a

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i c_m(f_i)] \, e_m,$$

d'où, vu l'unicité du développement,

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i c_m(f_i) = c_m \, (\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i f_i), \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

b) Posons

$$\mathrm{T}_{\mathrm{M}} = \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} c_m(.) e_m.$$

Si $\{p\}$ est le système de semi-normes de E, les expressions

$$p'(f) = \sup_m p(\mathrm{T}_m f), \ p \in \{p\},$$

constituent un système de semi-normes de E, plus fort que $\{p\}$.

En effet,

— les $p'(f)$ sont définis.

Comme $\mathrm{T}_m f$ converge faiblement vers f, la suite $\mathrm{T}_m f$ est faiblement bornée, donc bornée en vertu du théorème de Mackey, ce qui entraîne l'existence de p' pour tout $p \in \{p\}$.

— il est alors immédiat que ce sont des semi-normes.

— ces semi-normes sont filtrantes.

Si, à $p_1, \ldots, p_{\mathrm{N}}$, il correspond p et $\mathrm{C} > 0$ tels que

$$p_i(f) \leqslant \mathrm{C}\, p(f), \ \forall i \leqslant \mathrm{N}, \ \forall f \in \mathrm{E},$$

il est trivial qu'on a aussi

$$p_i'(f) \leqslant \mathrm{C}\, p'(f), \ \forall i \leqslant \mathrm{N}, \ \forall f \in \mathrm{E}.$$

— pour tout p,

$$p(f) \leqslant p'(f).$$

Si la semi-boule $b_p(1)$ est fermée, elle est faiblement fermée. Donc, si $p'(f) \leqslant 1$, on a

$$p(\mathrm{T}_m f) \leqslant 1, \forall m \in \mathbb{N},$$

et, en passant à la limite,

$$p(f) \leqslant 1.$$

Il en résulte que $\{p' : p \in \{p\}\}$ sépare E et que c'est bien un système de semi-normes, plus fort que $\{p\}$.

c) L'espace $\mathrm{E}_{\{p'\}}$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$.

Si E admet un réseau strict, la démonstration est assez facile. Soit

$$\mathscr{R} = \{\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un tel réseau.

On a démontré en b) que, pour tout f, l'enveloppe absolument convexe fermée B_f de

$$\{f, \mathrm{T}_1 f, \mathrm{T}_2 f, \ldots\}$$

est bornée dans E. Comme E est sq-complet, B_f est aussi sq-complet.

Dès lors, par le corollaire 2, chap. III, p. 54,

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{C}_1 > 0$ tels que

$$\mathrm{B}_f \subset \mathrm{C}_1 \mathscr{E}_{n_1},$$

— si

$$\mathrm{B}_f \subset \mathrm{C}_k \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k},$$

il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{C}_{k+1} > 0$ tels que

$$\mathrm{B}_f \subset \mathrm{C}_{k+1} \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

Quitte à changer $\mathscr{R}$, on peut supposer que les constantes introduites sont toutes égales à 1 (cf. proposition 3, chap. I, p. 16).

Appelons $\mathscr{E}'_{n_1,\ldots,n_k}$ l'ensemble des f tels que

$$\mathrm{B}_f \subset \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}.$$

Les ensembles $\mathscr{E}'_{n_1,\ldots,n_k}$, $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, constituent alors visiblement un nouveau réseau de E.

Ce réseau est de type $\mathscr{C}$ dans $\mathrm{E}_{\{p'\}}$.

Soit n_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soit λ_k, $k \in \mathbb{N}$, la suite de nombres correspondante dans $\mathscr{R}$. On peut supposer que ces λ_k sont décroissants et plus petits que 1.

Démontrons que, quels que soient $f_k \in \mathscr{E}'_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k^2]$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$$

converge dans $\mathrm{E}_{\{p'\}}$.

Comme

$$f_k,\ T_m f_k \in \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k,\ m \in \mathbb{N},$$

les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k T_m f_k$$

convergent dans E. En outre, vu le choix des μ_k,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k T_m f_k \in \lambda_{k_0} \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0}},\ \forall k_0,\ m \in \mathbb{N},\ (*)$$

car, par exemple, $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k$ s'écrit sous la forme

$$\lambda_{k_0} \Big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu'_k f_k \Big),\ \mu'_k \in [0, \lambda_k].$$

Appelons h (resp. h_m) la limite de

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k \quad \text{(resp.} \ \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_m f_k).$$

Du fait que

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k c_1(f_k) e_1 = \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_1 f_k \to h_1,$$

on déduit que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_1(f_k)$$

converge dans $\mathbb{C}$ et, si α_1 est sa limite, que

$$h_1 = \alpha_1 e_1.$$

De même, pour tout $m > 1$, du fait que

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k c_m(f_k) e_m = \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_m f_k - \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_{m-1} f_k \to h_m - h_{m-1},$$

on déduit que

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k c_m(f_k) \to \alpha_m \in \mathbb{C}$$

et que

$$h_m - h_{m-1} = \alpha_m e_m.$$

De là,

$$h_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

Montrons que

$$\alpha_i = c_i(h), \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Vu l'unicité du développement de h, il suffit pour cela que la série

$$h_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$$

converge faiblement vers h. Or, pour tout $\mathcal{T} \in E^*$,

$$| \mathcal{T}(h - h_m) |$$

$$\leqslant \underbrace{| \mathcal{T} (h - \sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k) |}_{A} + \underbrace{| \mathcal{T} (\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k - \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_m f_k) |}_{B} + \underbrace{\sup_m | \mathcal{T} (\sum_{k=1}^{N} \mu_k T_m f_k - h_m) |}_{C}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour N assez grand, A et C sont majorés par $\varepsilon/3$.

De fait, il existe $p \in \{p\}$ et $r > 0$ tels que

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant r\, p(f), \ \forall f \in E,$$

et, vu (*),

$$h - \sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k \ \text{ et } \ h_m - \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_m f_k \in \lambda_{N+1} \mathscr{E}_{n_1, \ldots, n_{N+1}} \subset b_p(\varepsilon/r)$$

dès que N est assez grand. Pour cet N fixé, B est majoré par $\varepsilon/3$ dès que m est assez grand, puisque, par hypothèse,

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k T_m f_k = T_m (\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k)$$

converge faiblement vers

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k.$$

Prouvons enfin que

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$$

converge vers h dans $E_{\{p'\}}$.

D'après ce qu'on vient d'établir, $h_m = T_m h$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Dès lors, vu (*), on a

$$h - \sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k, \ T_m h - T_m (\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k) \in \lambda_{N+1} \mathscr{E}_{n_1, \ldots, n_{N+1}} \subset b_p(\varepsilon),$$

d'où

$$p'(h - \sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k) \leqslant \varepsilon$$

pour p et ε arbitraires, dès que N est assez grand.

c') Supposons à présent que le réseau

$$\mathscr{R} = \{\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

soit seulement de type $\mathscr{C}$. Vu la proposition 2, chap. I, p. 16, on peut supposer que les $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}$ sont radiaux.

En vertu du théorème 1, chap. III, p. 48, où on prend pour espace de départ l'enveloppe linéaire de B_f muni de la norme associée à B_f, qui est un espace de Banach, pour espace d'arrivée l'espace E et pour R l'opérateur identité de E_{B_f} dans E,

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $C_1 > 0$ tels que la restriction de $\mathscr{E}_{n_1}$ à E_{B_f} n'y soit pas maigre et que

$$B_f \subset C_1 \overline{\langle \mathscr{E}_{n_1} \rangle},$$

— si $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}$ restreint à E_{B_f} n'y est pas maigre, il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $C_{k+1} > 0$ tels que $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ restreint à E_{B_f} n'y soit pas maigre et que

$$B_f \subset C_{k+1} \overline{\langle \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}} \rangle}.$$

Comme les $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}$ sont radiaux, on peut supposer que les C_k sont des nombres entiers.

On définit alors les ensembles $\mathscr{E}'_{n_1,\ldots,n_k}$ de la manière suivante.

L'ensemble $\mathscr{E}'_{(m_1,n_1)}$ est l'ensemble des f tels que $\mathscr{E}_{n_1}$ restreint à E_{B_f}, n'y soit pas maigre et que

$$B_f \subset m_1 \overline{\langle \mathscr{E}_{n_1} \rangle}.$$

On renumérote (m_1, n_1) par un seul indice n'_1.

Si $\mathscr{E}'_{(m_1,n_1),\ldots,(m_k,n_k)}$ est fixé, on appelle

$$\mathscr{E}'_{(m_1,n_1),\ldots,(m_{k+1},n_{k+1})}$$

l'ensemble des f contenus dans $\mathscr{E}'_{(m_1,n_1),\ldots,(m_k,n_k)}$ tels que $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ restreint à E_{B_f} n'y soit pas maigre et que

$$B_f \subset m_{k+1} \overline{\langle \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}} \rangle}.$$

On renumérote (m_{k+1}, n_{k+1}) par n'_{k+1} parcourant $\mathbb{N}$.

Ces ensembles constituent encore visiblement un réseau de E.

Soit n'_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soient (m_k, n_k) les couples d'indices associés aux n'_k. Aux n_k correspondent $\lambda_k > 0$ dans $\mathscr{R}$. On peut les supposer tels que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \lambda_k \leqslant \lambda_{k_0}/m_{k_0}, \forall k_0 \in \mathbb{N},$$

quitte à leur substituer

$$\lambda'_k = \inf\left(\frac{\lambda_1}{2^{k-1}m_1}, \frac{\lambda_2}{2^{k-2}m_2}, \ldots, \frac{\lambda_{k-1}}{2m_{k-1}}, \lambda_k\right).$$

La démonstration se poursuit alors comme dans le cas où $\mathscr{R}$ est strict, en substituant $\lambda_{k-1}\,\overline{\langle \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k-1}} \rangle}$ à $\lambda_k \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}$ dans la relation (*) et celles qui s'en déduisent.

d) L'opérateur identité de $E_{\{p\}}$ dans $E_{\{p'\}}$ est à graphe fermé, puisqu'il est continu de $E_{\{p'\}}$ dans $E_{\{p\}}$. Or $E_{\{p\}}$ est bornologique et *sq*-complet et $E_{\{p'\}}$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$. Donc, par le théorème du graphe fermé (corollaire 1, chap. II, p. 28), il est continu.

Dès lors, à toute semi-norme $p' \in \{p'\}$, il correspond $C > 0$ et $q \in \{p\}$ tels que

$$\sup_m p(T_m f) = p'(f) \leqslant C\, q(f),\ \forall f \in E,\ (**)$$

ce qui prouve que les T_m forment un ensemble équicontinu dans $\mathscr{L}(E, E)$.

e) Les $c_m(f)$ sont des fonctionnelles linéaires continues dans E.

De fait, pour tout m, $p(e_m)$ diffère de 0 au moins un m, sinon e_m serait égal à 0 et le développement

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f) e_i$$

ne serait pas unique, car on pourrait y remplacer $c_m(f)$ par un nombre arbitraire $c_m \in \mathbb{C}$.

Il vient alors, en appliquant l'inégalité (**),

$$|\, c_m(f)\,| = \frac{p(T_m f - T_{m-1} f)}{p(e_m)} \leqslant C'\, q(f),\ \forall f \in E,$$

ce qui prouve que $c_m(.)$ est continu.

f) La suite $T_m f$ converge vers f dans E et même uniformément sur les précompacts de E.

Comme la suite T_m forme un ensemble équicontinu, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, il suffit de démontrer qu'elle converge aux points d'un ensemble total dans E pour assurer qu'elle converge uniformément sur les précompacts de E.

Or elle converge pour $f = e_i$, $i \in \mathbb{N}$, puisque $T_m e_i = e_i$ dès que $m \geqslant i$. De plus, les e_i forment un ensemble total dans E : leur enveloppe linéaire y est faiblement dense par hypothèse, donc elle y est dense.

D'où la conclusion.

4. Théorèmes du graphe fermé pour des espaces non bornologiques

Dans un travail récent sur les théorèmes du graphe fermé du type de Ptak et de Schwartz ([29]), A. Mac Intosh démontre qu'on peut éviter l'hypothèse de bornologie sur E quand F est semi-réflexif, c'est-à-dire quand tout borné de F est contenu dans un compact faible. L'hypothèse qui la remplace, sans être particulièrement facile à vérifier, est néanmoinss atisfaitedans que lques cas intéressants.

Nous examinons ici ce que donne l'adaptation de ces résultats aux espaces à réseau.

Définition. — Appelons *réseau réflexif* de F un réseau strict

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

tel que, pour toute suite d'indices n_k et toute suite de $\lambda_k > 0$,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_{n_1, \ldots, n_k} \quad (*)$$

soit contenu dans un compact faible de F.

On notera que *les ensembles* (*) *sont bornés.*

Ainsi, *si* E *est semi-réflexif, tout réseau strict de* E *est réflexif.*

Pour prouver que (*) est borné, il suffit d'établir que, pour une suite c_m tendant vers 0 fixée, la suite $c_m f_m$ tend vers 0 quels que soient les $f_m \in (*)$ (cf. [17], p. 71).

Soit ν_k la suite de nombres positifs associée aux n_k dans $\mathscr{R}$. Posons

$$c_k = \inf(2^{-k}, \nu_k/\lambda_k).$$

Quels que soient $f_k \in (*)$, on a

$$c_k f_k = \mu_k g_k,$$

où $\mu_k \in [0, \nu_k]$ et $g_k \in e_{n_1, \ldots, n_k}$, d'où $c_k f_k$ tend vers 0 dans F.

Si E *est sq-complet et admet un réseau réflexif, il est semi-réflexif.*

En effet, on sait alors que tout borné de E est contenu dans une intersection du type (*), donc dans un compact faible de E.

Toutefois, il existe des exemples de tels réseaux dans des espaces qui ne sont pas nécessairement semi-réflexifs. Ainsi,

— *la limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet semi-réflexifs admet* visiblement *un réseau réflexif*, même si la limite inductive n'est pas stricte.

— *si* E *est à semi-normes dénombrables* [*et séparable*] *ou limite inductive d'une suite de tels espaces,* E^*_τ *admet un réseau réflexif.*

C'est en fait le réseau de type $\mathscr{C}$ qu'on y a construit dans les exemples 2 et 3, chap. I, p. 19-20, puisque les ensembles (*) associés à ce réseau sont équicontinus dans E*, donc contenus dans un compact de $E^*_s = (E^*_\tau)_a$.

Rappelons d'abord un

Lemme. — *Si* T *est à graphe fermé,*

$$\mathscr{D}(T^*) = \{\mathscr{Q} \in F^* : T^*\mathscr{Q} \in E^*\}$$

est s-dense dans F*.

De fait, si b parcourt l'ensemble des semi-boules de centre 0 dans E, on a

$$\mathscr{D}(T^*) = \bigcup_b \{\mathscr{Q} : |\mathscr{Q}(Tf)| \leqslant 1, \forall f \in b\} = \bigcup_b (Tb)^\Delta.$$

A $b_1, \ldots, b_n$ quelconques, il correspond b tel que $b \subset b_i$ donc tel que $b_i^\Delta \subset b^\Delta$ pour tout i. Il en résulte que

$$\bigcup_b (Tb)^\Delta$$

4

est absolument convexe. Il vient alors

$$\overline{\bigcup_b (\mathrm{T}b)^{\Delta}}^{s} = \overline{\langle \bigcup_b (\mathrm{T}b)^{\Delta} \rangle}^{s} = (\bigcup_b (\mathrm{T}b)^{\Delta})^{\nabla\Delta}.$$

Or

$$(\bigcup_b (\mathrm{T}b)^{\Delta})^{\nabla} = \bigcap_b (\mathrm{T}b)^{\Delta\nabla} = \bigcap_b \overline{\mathrm{T}b}$$

et, comme $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ est fermé, le dernier ensemble se réduit à 0. Donc son polaire est F^*, ce qui établit le lemme.

Théorème 8. — *Soit* E *sq-complet, tel que* E_b^* *soit complet et que* $\mathrm{E} \equiv (\mathrm{E}_\tau^*)_\tau^*$.

Supposons que F [*séparable par semi-norme*], *admette un réseau réflexif ou qu'il soit semi-réflexif et admette un réseau de type* $\mathscr{C}$ ($\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$),

Tout opérateur linéaire et à graphe fermé de E *dans* F *est continu.*

Supposons d'abord F semi-réflexif.

Soit E_0 l'espace E muni des semi-normes associées aux ensembles absolument convexes et bornivores de E. C'est la limite inductive des espaces de Banach associés aux bornés absolument convexes et fermés de E, donc il est ultrabornologique.

Dès lors, vu le corollaire 1, chap. II, p. 28, T est continu de E_0 dans F.

Son adjoint T^* est défini et continu de F_b^* dans $(\mathrm{E}_0)_b^*$. Comme il est complet, E_b^* est un sous-espace fermé de $(\mathrm{E}_0)_b^*$, donc $\mathscr{D}(\mathrm{T}^*) = \mathrm{T}_{-1}^*\mathrm{E}^*$ est fermé dans F_b^*.

Or F est semi-réflexif, donc F_b^* est en fait F_τ^*. Comme il découle du lemme que $\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$ est τ-dense dans F^*, on obtient qu'il lui est identique, donc que T^* est défini de F^* dans E^*.

L'opérateur T^* est aussi continu de F_s^* dans $(\mathrm{E}_0)_s^*$, donc de F_s^* dans E_s^*. De là, pour toute semi-boule β de F, $\mathrm{T}^*\beta^{\Delta}$, image d'un s-compact absolument convexe de F^*, est compact dans E_s^*, donc équicontinu dans E^* :

$$\mathrm{T}^*\beta^{\Delta} \subset b^{\Delta},$$

où b est une semi-boule de E. Si β est fermé, il en découle que $\mathrm{T}b \subset \beta$ et, par conséquent, T est continu de E dans F.

Supposons à présent F muni d'un réseau réflexif

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Comme dans la démonstration précédente, on voit que T est continu de E_0 dans F.

De plus, pour tout borné B de E, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{C}_k > 0$ tels que

$$\mathrm{TB} \subset \mathrm{C}_k\, e_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc TB est contenu dans un compact faible absolument convexe de F et il en découle que T^* est continu de F_τ^* dans $(\mathrm{E}_0)_b^*$.

On a supposé E_b^* complet, donc il est fermé dans $(\mathrm{E}_0)_b^*$ et $\mathscr{D}(\mathrm{T}^*) = \mathrm{T}_{-1}^*\mathrm{E}^*$ est fermé dans F_τ^*. Comme on sait qu'il y est dense, on a donc

$$\mathscr{D}(\mathrm{T}^*) = \mathrm{F}^*$$

et T^* est défini de F^* dans E^*.

On conclut comme dans la démonstration précédente.

Voici un exemple qui illustre l'intérêt du théorème précédent.

COROLLAIRE. — *Soit* E *de Fréchet [et séparable] ou limite inductive stricte d'une suite de tels espaces et soit* F *à semi-normes dénombrables [et séparable] ou limite inductive d'une suite de tels espaces.*

Si T' *est linéaire et à graphe fermé de* E_s^* *dans* F_s^*, *il est l'adjoint d'un opérateur linéaire continu de* F *dans* E. *Il est donc continu de* E_s^* *dans* F_s^*, *de* E_b^* *dans* F_b^*, ...

Si E *et* F *sont de Fréchet, il suffit même que* $\mathscr{G}(T')$ *soit sq-fermé au lieu de fermé dans* $E_s^* \times F_s^*$.

L'espace E_τ^* est *sq*-complet et son dual fort, qu'on peut assimiler à E muni de ses semi-normes naturelles, est complet. Il satisfait donc aux conditions du théorème 8.

L'espace F_τ^* admet un réseau réflexif [et il est séparable].

Enfin $\mathscr{G}(T')$, fermé dans $E_s^* \times F_s^*$, est a fortiori fermé dans $E_\tau^* \times F_\tau^*$.

Il découle alors du théorème 8 que T' est continu de E_τ^* dans F_τ^*. C'est donc l'adjoint d'un opérateur T, linéaire de F dans E.

Il reste à voir que T est continu, ce qui résulte du fait que F est évaluable.

Si E et F sont de Fréchet, comme $E_s^* \times F_s^* = (E \times F)_s^*$ est le dual d'un espace de Fréchet [séparable], il résulte du théorème de Krein-Smulian que $\mathscr{G}(T')$ y est s-fermé si et seulement si il y est s-fermé pour les suites.