CHAPITRE VI

ENSEMBLES SOUSLINIENS ET THÉORÈME DU GRAPHE BORÉLIEN

Ce chapitre est consacré au théorème du graphe borélien de L. Schwartz et à l'examen de ses relations avec nos résultats et des améliorations qu'on peut y apporter à la lumière des techniques développées dans les chapitres précédents.

On définit les ensembles sousliniens soit comme image continue d'espaces métriques, séparables et complets, soit comme ensembles munis d'un crible, qui est une sorte de réseau particulier.

Nous adoptons le deuxième point de vue. Par la considération explicite des cribles, il permet d'obtenir, outre des théorèmes du graphe fermé dans leur forme classique, c'est-à-dire des critères de continuité d'opérateur, des propriétés de localisation analogues à celles du chapitre III. Moins générales que dans les espaces à réseau strict, ces propriétés débouchent néanmoins sur des théorèmes de permanence des espaces sousliniens, analogues à ceux du chapitre IV.

1. Ensembles sousliniens

Comme dans le reste du travail, nous supposons que les espaces E et F considérés dans ce chapitre sont des espaces linéaires à semi-normes.

Bien entendu, on peut définir les ensembles sousliniens dans un contexte plus général, mais nous ne les utiliserons que dans le cadre des espaces linéaires à semi-normes auquel il faut nécessairement se restreindre pour les propriétés que nous nous proposons d'établir plus loin.

Définition. — Un ensemble $e \subset E$ est *souslinien* s'il existe des sous-ensembles de e,

$$e_{n_1,\ldots,n_k},\ k,\ n_1,\ \ldots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

tels que

(a) $$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1},$$

$$e_{n_1,\ldots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k > 1,\ \forall n_1,\ \ldots,\ n_{k-1} \in \mathbb{N},$$

(b) pour toute suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, fixée,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} e_{n_1,\ldots,n_k}$$

se réduit à un seul élément f de e et, quels que soient $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$, la suite f_k tend vers f dans E.

L'ensemble des $e_{n_1,\ldots,n_k}$ est appelé un *crible* de e.

Proposition 1. — *Pour que e soit souslinien, il faut et il suffit qu'il existe des sous-ensembles de e*

$$e_{n_1,\dots,n_k},\ k,\ n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

tels que

$$\text{(a}'\text{)}\qquad e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1},$$

$$e_{n_1,\dots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e_{n_1,\dots,n_k},\ \forall k > 1,\ \forall n_1,\ \dots,\ n_{k-1} \in \mathbb{N},$$

(b′) *pour toute suite n_k fixée, il existe $f \in e$ tel que*

$$f = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{e_{n_1,\dots,n_k}}$$

et, pour toute semi-boule $b_p(\varepsilon)$ de centre 0 *dans* E,

$$e_{n_1,\dots,n_k} \subset f + b_p(\varepsilon)$$

dès que k est assez grand.

Pour établir la condition nécessaire, montrons que, si

$$\{e_{n_1,\dots,n_k} : k,\ n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un crible de E, il satisfait aux conditions de l'énoncé. Il suffit de vérifier (b′). Prenons pour f l'intersection des $e_{n_1,\dots,n_k}$. Si $e_{n_1,\dots,n_k} \not\subset f + b_p(\varepsilon)$ pour k assez grand, il existe une suite $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$ telle que $p(f - f_k) \geqslant \varepsilon$ pour une infinité de valeurs de k, ce qui est absurde car $f_k \rightarrow f$, par définition du crible.

Passons à la condition suffisante. Supposons que

$$e_{n_1,\dots,n_k},\ k,\ n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

vérifient les conditions (a′) et (b′) de la proposition.

Pour tous $n_1, \dots, n_{k_0} \in \mathbb{N}$, désignons par $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites

$$\vec{m} = (m_k : k \in \mathbb{N}),$$

telles que

$$m_i = n_i,\ \forall i \leqslant k_0,$$

et posons

$$\widetilde{e_{n_1,\dots,n_{k_0}}} = \bigcup_{\vec{m}\in\mathscr{S}} \ \bigcap_{k=k_0+1}^{\infty} \overline{e_{m_1,\dots,m_k}}.$$

Il est immédiat que

$$e_{n_1,\dots,n_{k_0}} \subset \widetilde{e_{n_1,\dots,n_{k_0}}} \subset \overline{e_{n_1,\dots,n_{k_0}}}. \quad (*)$$

La première inclusion tient au fait que si $f_k \in e_{n_1,\dots,n_{k_0}}$, il existe une suite n_k, $k > k_0$, telle qu'il appartienne aussi à $e_{n_1,\dots,n_k}$ pour tout k, donc, pour cette suite,

$$f \in \bigcap_{k=k_0+1}^{\infty} e_{n_1,\dots,n_k}.$$

La seconde est triviale.

Les $\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}$ constituent un crible de e.

Quel que soit $n_1 \in \mathbb{N}$, on a

$$\widetilde{e_{n_1}} \subset e.$$

En effet, si $f \in \widetilde{e_{n_1}}$, il existe une suite n_k, $k > 1$, telle que

$$f \in \overline{e_{n_1,\dots,n_k}},\ \forall k > 1,$$

ce qui entraîne que f appartient à e, par la condition (b′) ci-dessus.

On a donc

$$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1} \subset \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \widetilde{e_{n_1}} \subset e$$

et

$$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \widetilde{e_{n_1}}.$$

De même, on voit sans peine que, pour tous $k > 1$ et $n_1, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{e_{n_1,\dots,n_{k-1}}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} \widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}.$$

Donc la condition (a) est satisfaite.

Vu (*), on a

$$\overline{e_{n_1,\dots,n_k}} = \overline{\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}}$$

quels que soient $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, d'où, pour toute suite n_k fixée,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}}$$

se réduit à un élément $f \in e$. Il est immédiat, d'après leur définition, que les $\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}$ contiennent f, donc

$$f = \bigcap_{k=1}^{\infty} \widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}.$$

Soient enfin $f_k \in \widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Quel que soit $b_p(\varepsilon)$ fermé, pour k assez grand,

$$\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}} \subset \overline{e_{n_1,\dots,n_k}} \subset f + b_p(\varepsilon),$$

donc $f_k \to f$ dans E.

2. Propriétés de permanence

Examinons les propriétés de permanence des ensembles sousliniens. Ces propriétés sont pour la plupart celles de Bourbaki ([8]). Dans [8], les espaces sousliniens sont supposés métrisables, restriction inutile dont on se débarasse sans difficulté (cf. Schwartz, [45]). Les démonstrations données ici sont évidemment différentes puisqu'elles reposent sur la définition par les cribles que nous avons adoptée (Pour l'équivalence des deux définitions, on se référera par exemple à [8], ex. 6, p. 143).

PROPOSITION 2. — *Si e est souslinien et si $e' \subset e$ est sq-fermé dans e, alors e' et $\complement_e e'$ sont sousliniens.*

Soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de e.

Si e' est sq-fermé, les ensembles

$$e'_{n_1,\ldots,n_k} = e_{n_1,\ldots,n_k} \cap e'$$

constituent un crible de e', si on élimine ceux d'entre eux qui sont vides. Après cette élimination, les n_k ne parcourent plus $\mathbb{N}$ mais une partie de $\mathbb{N}$. Pour rester en accord avec la définition adoptée, il suffit de les renuméroter par un indice parcourant $\mathbb{N}$, quitte, si les n_k sont en nombre fini, à associer le même n_k à une suite de $\mathbb{N}$.

On a visiblement

$$e' = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e' \cap e_{n_1}$$

et

$$e' \cap e_{n_1,\ldots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e' \cap e_{n_1,\ldots,n_k}, \forall k > 1, n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N}.$$

De plus, soit n_k une suite fixée, telle que

$$e' \cap e_{n_1,\ldots,n_k} \neq \varnothing, \forall k \in \mathbb{N},$$

et soit f l'intersection des $e_{n_1,\ldots,n_k}$.

Si $f_k \in e' \cap e_{n_1,\ldots,n_k}$, la suite f_k converge vers f. Comme e' est sq-fermé et contient les f_k, il contient aussi f, d'où la conclusion.

Démontrons à présent que, si e' est sq-fermé,

$$e'' = \complement_e e'$$

est souslinien.

On a

$$e'' = \bigcup_{e_{n_1,\ldots,n_k} \subset e''} e_{n_1,\ldots,n_k}.$$

L'inclusion $\supset$ est triviale. D'autre part, si $f \in e''$, il existe une suite n_k telle que

$$f \in e_{n_1,\ldots,n_k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pour k assez grand,

$$e_{n_1,\ldots,n_k} \subset e''.$$

En effet, si ce n'est pas le cas, il existe une suite

$$f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k} \cap e', \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cette suite converge vers f, d'où, comme e' est sq-fermé, f appartient à e', ce qui est absurde.

On vérifie immédiatement que les ensembles

$$e''_{m_1,\ldots,m_k}$$

définis ci-dessous forment un crible de e''.

Les ensembles e''_{m_1} sont les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ contenus dans e'', renumérotés avec un seul indice. Si $e''_{m_1} = e_{n_1,\ldots,n_k}$, on pose

$$e''_{m_1,m_2,\ldots,m_i} = e_{n_1,\ldots,n_k,m_2,\ldots,m_i},\ \forall i > 1,\ m_2,\ \ldots,\ m_i \in \mathbb{N}.$$

PROPOSITION 3. — *Toute union et toute intersection dénombrables d'ensembles sousliniens contenus dans* E *sont sousliniennes.*

Si e_n sont les ensembles sousliniens considérés et

$$\{e^{(n)}_{n_1,\ldots,n_k} : k,\ n_1,\ \ldots,\ n_k \in \mathbb{N}\}$$

leurs cribles respectifs, les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = e_{n_1},\ n_1 \in \mathbb{N},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k} = e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k},\ k > 1,\ n_1,\ \ldots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

constituent visiblement un crible de $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$.

Passons au cas de l'intersection et posons

$$e = \bigcap_{n=1}^{\infty} e_n.$$

Considérons les $e^{(1)}_{n_1} \cap e$ non vides et désignons par $\mathscr{E}_{m_1}$ les ensembles ainsi déterminés, renumérotés par un indice parcourant $\mathbb{N}$.

Si

$$\mathscr{E}_{m_1} = e^{(1)}_{n_1} \cap e,$$

les $\mathscr{E}_{m_1,m_2}$ sont les ensembles

$$e^{(1)}_{n_1,n_2} \cap e^{(2)}_{n'_1} \cap e$$

non vides, renumérotés par un indice m_2 parcourant $\mathbb{N}$. On définit de proche en proche les $\mathscr{E}_{m_1,\ldots,m_k}$ de façon analogue.

Les $\mathscr{E}_{m_1,\ldots,m_k}$ constituent un crible de e.

D'une part, il est immédiat que

$$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e^{(1)}_{n_1} \cap e,$$

$$e^{(1)}_{n_1} \cap e = \left(\bigcup_{n_2=1}^{\infty} e^{(1)}_{n_1,n_2}\right) \cap \left(\bigcup_{n'_1=1}^{\infty} e^{(2)}_{n'_1}\right) \cap e = \bigcup_{n_2,n'_1=1}^{\infty} (e^{(1)}_{n_1,n_2} \cap e^{(2)}_{n'_1} \cap e)$$

et ainsi de suite.

D'autre part, soit m_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soient n_k, n'_k, n''_k, …, $k \in \mathbb{N}$, les suites d'indices correspondantes dans les cribles de e_1, e_2, … . Il existe des éléments f, f', … de E tels que

$$f = \bigcap_{n_k=1}^{\infty} e^{(1)}_{n_1,\ldots,n_k},\ f' = \bigcap_{n'_k=1}^{\infty} e^{(2)}_{n'_1,\ldots,n'_k},\ \ldots\ .$$

Si

$$f_k \in \mathscr{E}_{m_1,\ldots,m_k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

la suite f_k, répartie dans les $e^{(1)}_{n_1,\ldots,n_k}$ successifs, converge vers f dans E. Comme, à partir de f_2, elle se répartit aussi dans les $e^{(2)}_{n'_1,\ldots,n'_k}$, elle converge vers f' et ainsi de suite.

De là, on a

$$f \in e_1,\ f' \in e_2,\ \ldots$$

et, comme la limite de la suite f_k est unique,

$$f = f' = \ldots .$$

Donc f appartient à e, ce qui établit la proposition.

On sait que les ensembles boréliens de E constituent le plus petit ensemble de parties de E (relativement à $\subset$) qui contient les complémentaires, les unions et intersections dénombrables de ses éléments et les ensembles fermés de E.

On peut introduire une notion analogue relative aux ensembles sq-fermés.

Définition. — On appelle *sq-boréliens* de E le plus petit ensemble de parties de E qui contient les complémentaires, les unions et intersections dénombrables de ses éléments et les ensembles sq-fermés de E.

Visiblement, *tout borélien de* E *est sq-borélien.*

La propriété suivante résume et complète la proposition 2 ci-dessus.

Proposition 4. — *Si $e \subset$ E est souslinien et e' sq-borélien dans* E, *alors $e \cap e'$ est souslinien.*

Considérons l'ensemble $\mathscr{F}$ des parties de E tels que $e \cap e'$ et $e \cap \complement e'$ soient sousliniens.

En vertu de la proposition 2, $\mathscr{F}$ contient les ensembles sq-fermés de E. De plus, par la proposition 3, $\mathscr{F}$ contient les unions et intersections dénombrables de ses éléments. Enfin, $\mathscr{F}$ contient visiblement les complémentaires de ses éléments.

Dès lors, $\mathscr{F}$ contient les ensembles sq-boréliens de E, ce qui établit la proposition.

Proposition 5. — *Si φ est une application sq-continue de e dans* F, *c'est-à-dire telle que*

$$f_m \to f \text{ dans } e \Rightarrow \varphi f_m \to \varphi f \text{ dans F},$$

et si e est souslinien, $\varphi(e)$ est souslinien.

Il est immédiat que si les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ forment un crible de e, les $\varphi(e_{n_1,\ldots,n_k})$ forment un crible de $\varphi(e)$.

Combiné avec la proposition 3, cet énoncé donne le

Corollaire 1. — *Si e est union dénombrable d'images par des applications sq-continues d'ensembles sousliniens, il est souslinien.*

En particulier, *si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces sousliniens, il est souslinien.*

Voici un autre corollaire utile.

Corollaire 2. — *Si* L *est un sous-espace linéaire fermé de* E *et si* e *est souslinien dans* E, *son image dans* E/L *est souslinienne.*

Proposition 6. — *Tout produit dénombrable d'ensembles sousliniens est souslinien.*

Soient $e^{(i)}$ sousliniens et soit

$$\{e^{(i)}_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

un crible de $e^{(i)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Les ensembles

$$e^{(1)}_{n_1} \times e^{(2)} \times e^{(3)} \times \ldots, n_1 \in \mathbb{N},$$
$$e^{(1)}_{n_1,n_2} \times e^{(2)}_{n'_1} \times e^{(3)} \times \ldots, n_1, n_2, n'_1 \in \mathbb{N},$$
$$e^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \times e^{(2)}_{n'_1,n'_2} \times e^{(3)}_{n''_1} \times \ldots, n_1, n_2, n_3, n'_1, n'_2, n''_1 \in \mathbb{N}, \ldots$$

forment un crible de

$$\prod_{i=1}^{\infty} e^{(i)},$$

si on renumérote (n_2, n'_1) (resp. (n_3, n'_2, n''_1), ...) avec un seul indice, parcourant $\mathbb{N}$.

Proposition 7. — *Soient* E_n, $n \in \mathbb{N}$, *une suite d'espaces emboîtés en décroissant et tels que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *l'identité de* E_{n+1} *dans* E_n *soit sq-continue. Appelons* E *la limite projective des* E_n.

Si $e_n \subset \mathrm{E}_n$ *est souslinien dans* E_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$e = \bigcap_{n=1}^{\infty} e_n$$

est souslinien dans E.

Avec les notations de la démonstration précédente, un crible de e est défini par les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = e^{(1)}_{n_1} \cap e, n_1 \in \mathbb{N},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1)} = e^{(1)}_{n_1,n_2} \cap e^{(2)}_{n'_1} \cap e, n_1, n_2, n'_1 \in \mathbb{N},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1),(n_3,n'_2,n''_1)} = e^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \cap e^{(2)}_{n'_1,n'_2} \cap e^{(3)}_{n''_1}, n_1, n_2, n_3, n'_1, n'_2, n''_1 \in \mathbb{N},$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots .$$

Ces ensembles satisfont visiblement à la condition (a) de la définition du crible, si on les renumérote comme ci-dessus.

Fixons une suite n_1, (n_2, n'_1), (n_3, n'_2, n''_1), ... Si les f_m appartiennent aux ensembles correspondants, la suite f_m converge dans chaque E_i vers un élément $f^{(i)}$ de e_i. Le fait que la convergence dans E_{i+1} entraîne la convergence dans E_i montre que les $f^{(i)}$ sont tous égaux entre eux, d'où, si f est leur valeur commune,

$$f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = e.$$

Il est alors immédiat que f est dans l'intersection des ensembles du crible correspondants à la suite d'indices fixée.

PROPOSITION 8. — *Si e est souslinien et si*

$$\{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un crible de e, les $e_{n_1,\dots,n_k}$ *sont sousliniens.*

C'est immédiat, chaque $e_{n_1,\dots,n_{k_0}}$ admettant

$$\{e_{n_1,\dots,n_k} : k > k_0, n_{k_0+1}, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

pour crible.

3. Exemples

Voici un exemple très important d'ensemble souslinien.

De cet exemple et des propriétés de permanence, on déduit aisément que de nombreux espaces usuels de l'analyse fonctionnelle sont sousliniens.

EXEMPLE 1. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et si* $e \subset \mathrm{E}$ *est sq-complet et séparable, e est souslinien.*

Soient p_i, $i \in \mathbb{N}$, les semi-normes dénombrables de E et soit

$$\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$$

un ensemble dénombrable dense dans e.

Les ensembles

$$e_{n_1} = [f_{n_1} + b_{p_1}(1)] \cap e,$$

où n_1 parcourt $\mathbb{N}$,

$$e_{n_1,n_2} = [f_{n_2} + b_{p_2}(1/2)] \cap e_{n_1} \cap e,$$

où n_2 prend les valeurs pour lesquelles e_{n_1,n_2} n'est pas vide, et ainsi de suite, constituent un crible de e, après renumérotation convenable des indices, à condition de prendre les semi-boules considérées fermées.

La condition (a) de la définition est trivialement satisfaite.

De plus, si on fixe une suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, et si on prend un élément g_k dans chaque $e_{n_1,\dots,n_k}$, la suite g_k est de Cauchy, car, si $k \leqslant i \leqslant r, s$,

$$p_k(g_r - g_s) \leqslant p_i(g_r - g_s) \leqslant 2^{-i+1} \to 0$$

si $\inf(r, s) \to \infty$, pour tout k fixé.

Comme e est sq-complet, la suite g_k converge donc dans e. Comme les $e_{n_1,\dots,n_k}$ sont fermés, sa limite g leur appartient, d'où la conclusion.

COROLLAIRE. — *Si* E *est un espace de Fréchet séparable ou la limite inductive d'une suite de tels espaces, il est souslinien.*

Le premier cas découle immédiatement de l'exemple 1.

Pour le second, on applique le corollaire 1 de la proposition 5, p. 105.

Avant de passer aux exemples suivants, rappelons le théorème de Banach-Steinhaus : *toute suite* $\mathrm{T}_m \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, *équicontinue et telle que* $\mathrm{T}_m f$ *converge dans* F *pour tout* $f \in \mathrm{E}$ (*ou même pour tout* f *appartenant à un ensemble dense dans* E *si* F *est sq-complet*) *converge dans* $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Exemple 2. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et séparable,* E^*_{pc} *est souslinien.*

En particulier, E^* *est souslinien pour tout système de semi-normes plus faible que celui de* E^*_{pc}.

Si p_i, $i \in \mathbb{N}$, désignent les semi-normes de E, b_i les semi-boules $b_{p_i}(1/i)$ et b_i^Δ leur polaire, on a

$$E^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i^\Delta.$$

Or chaque b_i^Δ est *sq*-complet et séparable dans E^* muni des semi-normes dénombrables

$$\sup_{j\leq N} | \mathcal{T}(f_j) |,$$

où $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E. Il est donc souslinien dans cet espace, et, vu le théorème de Banach-Steinhaus, il est souslinien dans E^*_{pc}.

L'union des b_i^Δ est donc aussi souslinienne, d'où la conclusion.

Exemple 3. — *Si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables et séparables,* E^*_{pc} *est souslinien.*

Appelons E^*_χ l'espace E^* muni des semi-normes

$$\sup_{f\in K} | \mathcal{T}(f) |,$$

où K parcourt l'ensemble des précompacts des différents E_i.

Comme on ne suppose pas la limite inductive stricte, on ne peut pas affirmer que tout précompact de E est contenu dans un E_i et y est précompact. Donc le système de semi-normes de E^*_χ est plus faible que celui de E^*_{pc}.

Toutefois, l'opérateur identité de E^*_χ dans E^*_{pc} est *sq*-continu.

De fait, soit $\mathcal{T}_m$ tendant vers 0 dans E^*_χ.

Les restrictions des $\mathcal{T}_m$ à E_i convergent vers 0 dans $(E_i)^*_{pc}$. Donc elles sont équicontinues dans E_i. Comme c'est vrai pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $\mathcal{T}_m$ est équicontinue dans E. Donc la suite $\mathcal{T}_m$ tend vers 0 dans E^*_{pc}.

Pour prouver que E^*_{pc} est souslinien, il suffit donc, en vertu de la proposition 5, p. 105, de démontrer que E^*_χ est souslinien.

L'espace E^* s'identifie au sous-espace $\mathscr{L}$ de

$$\prod_{i=1}^{\infty} E_i^*$$

formé des éléments

$$(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \ldots)$$

tels que

$$\mathcal{T}_i(f) = \mathcal{T}_{i+1}(f), \forall f \in E_i, \forall i \in \mathbb{N}.$$

En outre, le système de semi-normes de E^*_χ est celui qu'induit dans $\mathscr{L}$ le produit

$$\prod_{i=1}^{\infty} (E_i)^*_{pc}.$$

Le produit en question est souslinien, vu la proposition 6, p. 106 et l'exemple 2 ci-dessus. Or $\mathscr{L}$ est visiblement un sous-espace fermé de ce produit, d'où la conclusion.

Exemple 4. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et séparable et si* F *est un espace de Fréchet séparable, l'espace* $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$ *est souslinien.*

On sait que F est souslinien. Soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de F. Soient d'autre part p_i, $i \in \mathbb{N}$, les semi-normes dénombrables de E, q_j, $j \in \mathbb{N}$, celles de F et soit

$$\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$$

un ensemble dénombrable dense dans E.

On forme les ensembles

$$\{T \in \mathscr{L}(E, F) : Tf_1 \in e_{n_1} ;\ q_1(Tf) \leqslant m_1 p_{i_1}(f),\ \forall f \in E\},\ i_1, m_1, n_1 \in \mathbb{N},$$

et on les baptise $\mathscr{E}_{\nu_1}$, après numérotation des (i_1, m_1, n_1) par $\nu_1 \in \mathbb{N}$. On forme ensuite

$$\mathscr{E}_{\nu_1} \cap \{T \in \mathscr{L}(E, F) : Tf_1 \in e_{n_1,n_2} ;\ Tf_2 \in e_{n'_1} ;\ q_2(Tf) \leqslant m_2 p_{i_2}(f),\ \forall f \in E\},$$
$$i_2, m_2, n_2, n'_1 \in \mathbb{N},$$

qu'on baptise $\mathscr{E}_{\nu_1,\nu_2}$ après numérotation des (i_2, m_2, n_2, n'_1) par $\nu_2 \in \mathbb{N}$.

Et ainsi de suite.

Il est facile de voir que les $\mathscr{E}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$ forment un réseau de E donc satisfont à la condition (a) de la définition des cribles (cf. p. 100).

Pour toute suite ν_k fixée, choisissons T_k dans les $\mathscr{E}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$ successifs.

La suite T_k est équicontinue. De fait, pour tout j, il existe i_j et m_j tels que, si $k > j$,

$$q_j(T_k f) \leqslant m_j p_{i_j}(f),\ \forall f \in E.$$

Comme l'ensemble fini $\{T_1, \ldots, T_j\}$ est équicontinu, il existe m'_j et i'_j tels que

$$q_j(T_k f) \leqslant m'_j p_{i'_j}(f),\ \forall f \in E,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vu le mode de construction des $\mathscr{E}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$, la suite $T_k f_i$ converge pour tout f_i. Dès lors, par le théorème de Banach-Steinhaus, elle converge dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

Enfin, il est trivial que sa limite T est l'intersection des $\mathscr{E}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$, d'où la conclusion.

Exemple 5. — *Si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces* E_i *à semi-normes dénombrables et séparables et si* F *est un espace de Fréchet séparable, l'espace* $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$ *est souslinien.*

On trouve dans Schwartz ([45]), un théorème analogue, où E est supposé limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet séparables et où F est réunion d'une suite d'images continues d'espaces de Fréchet séparables.

On se débarrasse ici de l'hypothèse que la limite inductive soit stricte en restreignant le choix sur F. En gardant l'hypothèse de Schwartz sur E, on verra (cf. théorème 3, p. 123), qu'on peut améliorer l'hypothèse sur F.

Démontrons que $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est souslinien.

Désignons par $\mathscr{L}_{\chi}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'espace $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ muni des semi-normes

$$\sup_{f \in \mathrm{K}} q(\mathrm{T}f)$$

où q parcourt l'ensemble des semi-normes de F et K l'ensemble des précompacts des différents E_i.

En procédant comme dans la démonstration de l'exemple 3, p. 108, on voit que l'opérateur identité de $\mathscr{L}_{\chi}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est sq-continu, donc il suffit de démontrer que le premier espace est souslinien.

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on peut assimiler $\mathscr{L}(\mathrm{E}_{i+1}, \mathrm{F})$ à un sous-espace de $\mathscr{L}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$ et le plongement de $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}_{i+1}, \mathrm{F})$ dans $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$ est continu. On a alors

$$\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$$

et les semi-normes de $\mathscr{L}_{\chi}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ sont celles induites dans $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ par les différents $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$.

De là, par la proposition 7, p. 106, $\mathscr{L}_{\chi}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est souslinien.

4. Quelques théorèmes de catégorie

Le théorème du graphe borélien de Schwartz, qu'il a démontré à partir de sa théorie de la mesure, a été établi par Martineau ([31]) à partir de propriétés des ensembles maigres beaucoup plus fines que celles utilisées jusqu'ici, que l'on trouve, pour la plupart, dans l'ouvrage de Banach [4].

Si on se réfère aux sources citées par Martineau ([4] et [8]), il semble que sa démonstration, qui repose essentiellement sur la proposition 10, p. 111, soit inféodée à l'axiome de Zorn. Une discussion précise du théorème en question montre qu'il n'en est rien, pour l'essentiel des résultats.

Les théorèmes qui suivent se trouvent pour la plupart dans [4], [8] ou [33], où on ne discute toutefois pas leur dépendance vis-à-vis de l'axiome de Zorn.

Définitions. — Soit $e \subset \mathrm{E}$. On note $\mathrm{D}(e)$ l'ensemble des $f \in \mathrm{E}$ tels que, pour toute semi-boule b de centre 0 dans E,

$$(f + b) \cap e$$

ne soit pas maigre. On note $0(e)$ l'intérieur de e.

Voici d'abord quelques propriétés élémentaires de $\mathrm{D}(e)$ et $0(e)$.

Proposition 9. — a) $\mathrm{D}(e)$ *est fermé et contenu dans* $\bar{e}$.

b) *Si* $e_1 \subset e_2$, *on a* $\mathrm{D}(e_1) \subset \mathrm{D}(e_2)$.

c) *On a* $f \in 0(e)$ *si et seulement si il existe une semi-boule* b *de centre* 0 *telle que, pour toute semi-boule* b' *contenue dans* $f + b$, $b' \cap e$ *ne soit pas maigre.*

d) *Si* e *est absolument convexe,* $\mathrm{D}(e)$ *et* $0(e)$ *sont absolument convexes.*

a) On note que, si $f_0 \in \overline{\mathrm{D}(e)}$, $f_0 + \frac{1}{2} b$ contient $f \in \mathrm{D}(e)$. Alors $\left(f + \frac{1}{2} b\right) \cap e$ et a fortiori $(f_0 + b) \cap e$ ne sont pas maigres, donc $f_0 \in \mathrm{D}(e)$.

c) La condition est nécessaire.

Si $f_0 \in 0(e)$, il existe b tel que $f_0 + b \subset D(e)$. Dès lors, quelle que soit la semi-boule ouverte $b' \subset f_0 + b$, si $f \in b'$, il existe b'' tel que $(f + b'') \cap e$ ne soit pas maigre et que $f + b'' \subset b'$, ce qui prouve que $b' \cap e$ n'est pas maigre.

La condition est suffisante.

Si toute semi-boule contenue dans $f_0 + b$ rencontre e suivant un ensemble non maigre, tout f appartenant à $f_0 + \frac{1}{2} b$ est dans $D(e)$, donc f_0 appartient à l'intérieur $0(e)$ de $D(e)$.

d) Démontrons que $D(e)$ est absolument convexe. Il est alors immédiat que $0(e)$ l'est aussi.

Soient $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} |c_i| \leqslant 1$ et soient $f_1, \ldots, f_n \in D(e)$. Supposons que $c_{i_0} \neq 0$. Soit b une semi-boule donnée de centre 0 dans E. Il existe, pour tout $i \neq i_0$, $g_i \in (f_i + b) \cap e$ puisque ces ensembles sont non maigres, donc non vides. On a alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i\right) + b \supset \sum_{i \neq i_0} c_i g_i + c_{i_0} f_{i_0} + c_{i_0} b.$$

L'intersection du second membre avec e contient $c_{i_0}\,[(f_{i_0} + b) \cap e]$, qui est non maigre. Donc $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i \in D(e)$, ce qu'il fallait démontrer.

Les ensembles $0(e)$ possèdent quelques propriétés remarquables. Nous n'exposons ici que celles qui seront nécessaires plus loin.

Proposition 10. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et séparable,* $e \setminus 0(e)$ *est maigre, quel que soit* $e \subset$ E.

De là, e *est maigre si et seulement si* $0(e)$ *est vide.*

(Z) *Le même théorème est valable sans hypothèse sur* E, *moyennant recours à l'axiome de Zorn.*

a) Supposons d'abord E à semi-normes dénombrables et séparable.

Désignons par p_i, $i \in \mathbb{N}$, les semi-normes de E, par

$$\{f_k : k \in \mathbb{N}\},$$

un ensemble dénombrable dense dans E et par β_l, $l \in \mathbb{N}$, les semi-boules ouvertes

$$f_k + b_{p_i}(1/i)$$

dont l'intersection avec e est maigre, renumérotées avec un seul indice.

On a

$$e \setminus 0(e) \subset \overline{\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l}. \quad (*)$$

De fait, si $f \notin 0(e)$, pour toute semi-boule b de centre 0, il existe une semi-boule $\beta \subset f + b$ telle que $\beta \cap e$ soit maigre. Or β contient au moins une semi-boule

$f_k + b_{p_i}(1/i)$. Cette dernière semi-boule fait partie des β_l et, par conséquent, $f + b$ rencontre l'union des β_l quel que soit b, ce qui entraîne

$$e \diagdown 0(e) \subset \overline{\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l}.$$

De (*), on tire

$$e \diagdown 0(e) \subset (\overline{\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l}) \cap e \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} (\beta_l \cap e) \cup (\overset{\bullet}{\widehat{\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l}}).$$

L'ensemble

$$\overset{\bullet}{\widehat{\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l}}$$

est la frontière d'un ouvert, donc c'est un fermé d'intérieur vide et il est maigre. Les $\beta_l \cap e$ sont également maigres. Comme ils sont dénombrables, leur union est maigre et on obtient que $e \diagdown 0(e)$ est maigre.

Pour le cas particulier, on note, en se reportant à sa définition, que $0(e)$ est vide si e est maigre.

Inversement, si $0(e)$ est vide, $e \subset e \diagdown 0(e)$ est maigre.

b) La généralisation du théorème au cas d'un espace E quelconque est due à Banach ([5]). En fait, il a traité le cas d'un espace métrique non séparable, mais il suffit de substituer des ouverts aux sphères qu'il considère pour obtenir le cas général.

Avant de traiter le cas général, voici d'abord un lemme utile.

Lemme. — *Soit*

$$\mathcal{O} = \{\omega_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$$

un ensemble d'ouverts deux à deux disjoints de E.

Si

$$e \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \omega_\alpha$$

et si, pour tout $\alpha \in \mathcal{I}$, $\overline{e \cap \omega_\alpha}$ *est d'intérieur vide, alors* $\bar{e}$ *est d'intérieur vide.*

Si

$$e \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \omega_\alpha$$

et si, pour tout $\alpha \in \mathcal{I}$, $e \cap \omega_\alpha$ *est maigre, alors* e *est maigre.*

Traitons le premier cas. Supposons que $\omega = \mathring{\bar{e}}$ ne soit pas vide.

Comme la frontière de l'ouvert

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \omega_\alpha$$

est d'intérieur vide, l'ouvert ω rencontre nécessairement l'union des ω_α, donc rencontre un ω_{α_0}. Il existe alors un ouvert non vide ω' contenu dans $\bar{e}$ et ω_{α_0}. Or il est trivial que

$$\bar{e} \cap \omega_{\alpha_0} \subset \overline{e \cap \omega_{\alpha_0}},$$

d'où ω' est contenu dans un fermé d'intérieur vide, ce qui est absurde.

Pour le second cas, on note que, si chaque $e \cap \omega_\alpha$ est maigre, il est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide :

$$e \cap \omega_\alpha \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}_{n,\alpha}.$$

Posons

$$e_n = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} (\mathrm{F}_{n,\alpha} \cap \omega_\alpha).$$

On a encore

$$e \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{e_n}.$$

Or les $\overline{e_n}$ sont d'intérieur vide, puisque

$$\overline{e_n \cap \omega_\alpha} = \overline{\mathrm{F}_{n,\alpha} \cap \omega_\alpha} \subset \mathrm{F}_{n,\alpha}$$

est d'intérieur vide quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathscr{I}$. D'où la conclusion.

Cela étant, si E est quelconque, la proposition 10 se démontre comme suit.

Désignons par $\mathscr{O}$ les ensembles

$$\{\omega_\alpha : \alpha \in \mathscr{I}\}$$

d'ouverts deux à deux disjoints de E, tels que $\omega_\alpha \cap e$ soit maigre pour tout $\alpha \in \mathscr{I}$.

L'inclusion est un ordre partiel dans l'ensemble des $\mathscr{O}$.

Si Ω est un ensemble totalement ordonné d'ensembles $\mathscr{O}$, l'ensemble des ouverts qui appartiennent aux différents $\mathscr{O}$ est un ensemble de type $\mathscr{O}$, qui contient tous les $\mathscr{O} \in \Omega$, donc c'est une borne supérieure de Ω.

Dès lors, il découle de l'axiome de Zorn qu'il existe un $\mathscr{O}$ maximal, c'est-à-dire tel que tout $\mathscr{O}'$ qui contient $\mathscr{O}$ lui soit nécessairement égal.

Soit

$$\mathscr{O} = \{\omega_\alpha : \alpha \in \mathscr{I}\}$$

un tel ensemble maximal.

On a

$$\complement 0(e) \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha}. \quad (*)$$

De fait, si $f \notin 0(e)$, tout ouvert ω contenant f contient un ouvert ω' dont l'intersection avec e est maigre.

Si ω' ne rencontre pas les ω_α, en l'adjoignant à $\mathscr{O}$, on obtient un ensemble $\mathscr{O}'$ qui contient strictement $\mathscr{O}$, ce qui est impossible.

Donc ω' et a fortiori ω rencontrent

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha,$$

ce qui établit la relation (*).

De (*) découle alors que

$$e \setminus 0(e) \subset \dot{\widehat{\left(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha\right)}} \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha \cap e\right).$$

L'ensemble

$$\overset{\bullet}{\widehat{\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha}},$$

frontière d'un ouvert, est maigre. De même, comme $\omega_\alpha \cap e$ est maigre pour tout $\alpha \in \mathscr{I}$, en vertu du lemme ci-dessus,

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha \cap e$$

est maigre, d'où $e \setminus 0(e)$ est maigre, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 11. — *Soient* e_n, $n \in \mathbb{N}$, *des ensembles contenus dans* E. [*Si* E *est à semi-normes dénombrables et séparable,*]

$$0\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n) \setminus [\bigcup_{n=1}^{\infty} 0(e_n)]$$

est maigre.

Il suffit d'établir que

$$0\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} 0(e_n)},$$

puisque le second membre diffère de

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} 0(e_n)$$

par la frontière d'un ouvert, qui est maigre.

Or, si

$$f \in 0\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n),$$

pour toute semi-boule b de centre 0,

$$(f + b) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f + b) \cap e_n$$

n'est pas maigre. Pour au moins un $n \in \mathbb{N}$,

$$(f + b) \cap e_n$$

n'est donc pas maigre.

Or, vu la proposition 10,

$$(f + b) \cap e_n \subset [(f + b) \cap 0(e_n)] \cup [e_n \setminus 0(e_n)],$$

où $e_n \setminus 0(e_n)$ est maigre. Donc

$$(f + b) \cap 0(e_n)$$

n'est pas vide et $f + b$ rencontre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} 0(e_n)$$

quel que soit b, ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION 12. — *Soit* E *un espace de Baire.*

Si $0(e)$ *n'est pas vide et si* $0(e) \setminus e$ *est maigre, on a*

$$0(e) - 0(e) \subset e - e.$$

Soit $f \in 0(e) - 0(e)$. L'ensemble

$$0(e) \cap [0(e) - f] \quad (*)$$

est un ouvert non vide de E. Il n'est donc pas maigre.

Par hypothèse,

$$0(e) \subset e \cup \mathscr{E},$$

où $\mathscr{E}$ est maigre. De là,

$$\begin{aligned} 0(e) \cap [0(e) - f] &\subset (e \cup \mathscr{E}) \cap [(e \cup \mathscr{E}) - f] \\ &\subset [e \cap (e - f)] \cup \mathscr{E}', \end{aligned}$$

où

$$\mathscr{E}' \subset \mathscr{E} \cup (\mathscr{E} - f)$$

est maigre, ce qui exige que

$$e \cap (e - f) \neq \varnothing.$$

Il en résulte que f appartient à $e - e$, d'où la thèse.

PROPOSOTION 13. — [*Soit* E *à semi-normes dénombrables et séparable.*]

Si $e \subset$ E *est absolument convexe, non maigre et tel que* $0(e) \setminus e$ *soit maigre,* e *est d'intérieur non vide.*

Comme e n'est pas maigre, vu la proposition 10, p. 111, $0(e)$ n'est pas vide. En outre, comme $e \setminus 0(e)$ est maigre, $0(e)$ n'est pas maigre.

Pour démontrer le théorème, il suffit d'établir que

$$0(e) \subset e - e.$$

En effet, $e - e$ est contenu dans $2e$, donc on aura ainsi que $2\mathring{e}$ n'est pas vide, de même que $\mathring{e}$.

Si $f \in 0(e)$, l'ensemble

$$0(e) \cap [0(e) - f]$$

n'est pas maigre. En effet, si $f \in 0(e)$, comme $0(e)$ est ouvert et absolument convexe, (cf. proposition 9, d), p. 110), il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que

$$f \in \lambda 0(e).$$

De là,

$$(1 - \lambda)0(e) - f \subset 0(e) \cap [0(e) - f]$$

et, par conséquent, le second membre n'est pas maigre.

Or, comme $0(e) \setminus e$ est maigre, en procédant comme dans la démonstration précédente, on voit que

$$0(e) \cap [0(e) - f] \subset [e \cap (e - f)] \cup \mathscr{E}',$$

où $\mathscr{E}'$ est maigre, ce qui exige que $e \cap (e - f)$ soit non maigre, donc non vide, et que f appartienne à $e - e$.

Les propositions 12 et 13 ci-dessus sont inspirées du théorème 3 de Martineau [31].

Voici enfin un théorème dû à O. Nikodym (cf. [35]).

Proposition 14. — *[Soit* E *à semi-normes dénombrables et séparable.]*

Si e est souslinien, $0(e) \setminus e$ *est maigre.*

Si, en outre, e est absolument convexe et non maigre, il est d'intérieur non vide.

Soit

$$\{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de e.

Comme

$$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1},$$

en vertu de la proposition 11, p. 114, on a

$$0(e) \subset \bigcup_{n_1=1}^{\infty} 0(e_{n_1}) \cup \mathscr{E}_0,$$

où $\mathscr{E}_0$ est maigre.

De même, quels que soient $k > 1$ et $n_1, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$,

$$e_{n_1,\dots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e_{n_1,\dots,n_k},$$

d'où

$$0(e_{n_1,\dots,n_{k-1}}) \subset \bigcup_{n_k=1}^{\infty} 0(e_{n_1,\dots,n_k}) \cup \mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k-1}},$$

où $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k-1}}$ est maigre.

Posons

$$\mathscr{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_k=1}^{\infty} \mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k} \cup \mathscr{E}_0.$$

C'est un ensemble maigre. De plus, on a

$$0(e) \subset e \cup \mathscr{E}.$$

En effet, si $f \in 0(e) \setminus \mathscr{E}$,

$$f \in \bigcup_{n_1=1}^{\infty} 0(e_{n_1}),$$

d'où $f \in 0(e_{n_1})$ pour au moins un $n_1 \in \mathbb{N}$. Pour cet n_1 fixé, on a aussi

$$f \in \bigcup_{n_2=1}^{\infty} 0(e_{n_1,n_1}),$$

d'où $f \in 0(e_{n_1,n_2})$ pour au moins un $n_2 \in \mathbb{N}$. De proche en proche, on détermine ainsi une suite n_k telle que

$$f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} 0(e_{n_1,\dots,n_k}).$$

Or

$$0(e_{n_1,\ldots,n_k}) \subset \overline{e_{n_1,\ldots,n_k}}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où

$$f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{e_{n_1,\ldots,n_k}},$$

où le second membre se réduit à un élément de e, ce qui entraîne que f appartient à e.

Si en outre e est absolument convexe et non maigre, les hypothèses de la proposition 13 sont satisfaites, donc l'intérieur de e n'est pas vide.

5. Théorème du graphe borélien

Le théorème du graphe borélien de L. Schwartz ([45]) s'énonce comme suit.

Théorème 1. — *Soient* E *ultrabornologique et* F *souslinien.*

Si T *est un opérateur linéaire de* E *dans* F, *à graphe sq-borélien dans* E $\times$ F, T *est continu de* E *dans* F.

Même énoncé si, au lieu d'être ultrabornologique, E *est limite inductive* (quelconque) *d'espaces de Baire sousliniens* [*à semi-normes dénombrables*].

En fait, Schwartz suppose T à graphe borélien. Il paraissait surprenant que, dans les cas usuels où son théorème s'applique, on puisse aussi supposer le graphe de T *sq*-fermé, en appliquant le théorème 1, chap. II, p. 28. L'hypothèse que le graphe de T soit *sq*-borélien contient à la fois le cas où il est borélien et celui où il est *sq*-fermé, ce qui règle la question. La possibilité d'améliorer l'hypothèse tient au fait que toute partie *sq*-borélienne d'un souslinien est souslinienne (cf. proposition 4, p. 105). C'est la propriété formulée dans Bourbaki ([8]) pour les ensembles boréliens et qu'il y a intérêt à formuler pour les *sq*-boréliens quand on lève l'hypothèse de métrisabilité qu'il impose aux ensembles sousliniens.

Pour démontrer le théorème, procédons d'abord à deux réductions de l'énoncé.

a) *On peut supposer* E *de Banach.*

Si E est ultrabornologique, il est limite inductive d'espaces de Banach E_α. Pour que T soit continu de E dans F, il suffit que sa restriction T_α à E_α soit continue de E_α dans F quel que soit α.

Or le graphe de T_α est encore *sq*-borélien dans $E_\alpha \times F$.

De fait, si $\mathscr{E}$ est l'ensemble des ensembles de $E \times F$ dont la restriction à $E_\alpha \times F$ est *sq*-borélienne dans $E_\alpha \times F$, il est trivial que $\mathscr{E}$ contient les ensembles *sq*-fermés dans $E \times F$, les complémentaires et les unions et intersections dénombrables de ses éléments. Dès lors, $\mathscr{E}$ contient les *sq*-boréliens de $E \times F$, ce qui entraîne que tout *sq*-borélien dans $E \times F$ est tel que sa restriction à $E_\alpha \times F$ soit *sq*-borélienne dans $E_\alpha \times F$.

Donc, si le théorème est vrai pour E de Banach, il est vrai pour E ultrabornologique.

b) *On peut en outre supposer* E *séparable.*

Pour que T soit continu de l'espace de Banach E dans F, il suffit que l'image par T de toute suite convergente dans E soit convergente dans F. Il suffit donc que T soit continu dans l'enveloppe linéaire fermée de la suite, qui est un espace de Banach séparable.

Or, si L est un sous-espace de E et si $\mathscr{G}(T)$ est *sq*-borélien dans $E \times F$, le graphe de la restriction de T à L est *sq*-borélien dans $L \times F$. La démonstration est analogue à celle de la réduction précédente.

c) Supposons donc que E soit un espace de Banach séparable.

L'espace $E \times F$ est souslinien puisque E et F le sont. De même, $\mathscr{G}(T)$, partie *sq*-borélienne de $E \times F$, est souslinien.

Soit β une semi-boule fermée de centre 0 dans F. En notant pr_E la projection de $E \times F$ sur E, il vient

$$T_{-1}\beta = pr_E\,(\{(f, Tf) : Tf \in \beta\}).$$

L'ensemble

$$\{(f, Tf) : Tf \in \beta\}$$

est fermé dans $\mathscr{G}(T)$, donc il est souslinien. Dès lors, sa projection sur E, $T_{-1}\beta$, est aussi souslinienne.

L'ensemble $T_{-1}\beta$ est en outre absolument convexe et absorbant. Il en résulte qu'il n'est pas maigre, car

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} mT_{-1}\beta,$$

où E n'est pas maigre.

Dès lors, vu la proposition 14, p. 116, $T_{-1}\beta$ est d'intérieur non vide et contient une semi-boule de centre 0, ce qui prouve que T est continu.

Si E est limite inductive d'espaces de Baire sousliniens, on procède de façon analogue.

On se ramène d'abord à supposer E de Baire et souslinien.

On poursuit alors la démonstration comme ci-dessus.

Comme E est souslinien, il est séparable : on obtient un ensemble dénombrable dense dans E en fixant un élément dans chaque $e_{n_1,\ldots,n_k}$. S'il est en outre à semi-normes dénombrables, la proposition 14, p. 116, s'y applique sans recours à l'axiome de Zorn.

Théorème 2. — *Soient* E *ultrabornologique et* F *souslinien. Si* T *est un opérateur linéaire défini d'une partie de* F *sur* E *à graphe sq-borélien dans* $E \times F$, T *est ouvert.*

Même énoncé si, au lieu d'être ultrabornologique, E *est limite inductive* (quelconque) *d'espaces de Baire sousliniens* [*à semi-normes dénombrables*].

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

Soit β une semi-boule de F. On doit démontrer qu'il existe une semi-boule b de E contenue dans $T\beta$.

Si E est limite inductive des E_α, il suffit qu'il existe une semi-boule b_α de chaque E_α contenue dans $T\beta$.

On peut donc se borner à démontrer que T est ouvert de F dans chaque E_α. Pour cela, il suffit encore que, pour toute semi-boule β de F et toute suite f_m tendant vers 0 dans E_α, f_m appartienne à $T\beta$ pour m assez grand.

En effet, si B est la boule unité de E_α et si, pour aucun $\varepsilon > 0$, on n'a $\varepsilon B \subset T\beta$, il existe f_m appartenant à $\frac{1}{m}B$ et n'appartenant pas à $T\beta$, quel que soit $m \in \mathbb{N}$.

On se ramène au cas où E est un espace de Banach séparable en substituant à E_α l'enveloppe linéaire fermée de la suite f_m.

En procédant comme dans la démonstration précédente, on voit que T est encore à graphe *sq*-borélien dans $F \times E'$, où E' désigne l'espace de Banach séparable auquel on s'est ramené. Comme $F \times E'$ est souslinien, $\mathscr{G}(T)$ est donc aussi souslinien.

Si β est fermé, de

$$T\beta = pr_E\,[\mathscr{G}(T) \cap pr_{F,-1}\beta],$$

on déduit alors que $T\beta$ est également souslinien.

Il est aussi absolument convexe et absorbant dans E', de Banach, donc il n'est pas maigre. De là, vu la proposition 14, p. 116, $T\beta$ contient une boule de E', d'où la conclusion.

Raisonnement analogue si E est limite inductive d'espaces de Baire sousliniens. S'ils ne sont pas à semi-normes dénombrables, il faut recourir à l'axiome de Zorn pour pouvoir appliquer la proposition 14.

Remarques. — a) Dans les énoncés précédents, on peut encore supposer que E est limite inductive d'espaces E_α sousliniens et que $\mathscr{D}(T)$ (resp. TF) rencontre chaque E_α suivant une partie non maigre de E_α. Cela implique que chaque E_α soit de Baire, donc l'amélioration ne porte que sur T. On trouve alors que $\mathscr{D}(T)$ (resp. TF) est égal à E.

b) La considération de relations linéaires permet, comme au chapitre II, de formuler quelques variantes des théorèmes 1 et 2. Leur formulation ne présente aucune difficulté ; nous ne les développerons pas ici.

c) Dans le théorème 2, si T est continu, on revient au théorème 1 en considérant $\tilde{T}^{-1}$ défini de E dans F/N(T), le quotient étant séparé car N(T) est fermé.

6. Théorèmes de localisation et de relèvement

On peut préciser le théorème du graphe borélien en faisant jouer au crible de l'espace souslinien qui y intervient un rôle explicite.

Au théorème 1, p. 117, correspond le théorème suivant.

Théorème de localisation. — *Soient* E *un espace de Fréchet,* F *un espace souslinien,* T *un opérateur linéaire de* E *dans* F, *à graphe sq-borélien.*

Si

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un crible de F,

— *il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $T_{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre dans* E. *Pour cet n_1, il existe une semi-boule b_1 de* E *telle que*

$$Tb_1 \subset e_{n_1} - e_{n_1}.$$

— *si $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ n'est pas maigre dans* E, *il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ ne soit pas maigre dans* E. *Pour cet n_{k+1}, il existe une semi-boule b_{k+1} de* E *telle que*

$$Tb_{k+1} \subset e_{n_1,\ldots,n_{k+1}} - e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

En particulier, il existe une suite $n_k \in \mathbb{N}$ telle que $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ ne soit maigre pour aucun $k \in \mathbb{N}$ et une suite de semi-boules b_k de E telles que

$$\mathrm{T}b_k \subset \bar{e}_{n_1,\ldots,n_k} - \bar{e}_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Même énoncé si E *est de Baire, souslinien [et à semi-normes dénombrables].*

On a

$$\mathrm{E} = \mathrm{T}_{-1}\mathrm{F} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{T}_{-1}e_{n_1}.$$

Comme E est de Baire, un des $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1}$ n'est donc pas maigre.

De même, quels que soient $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k} = \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} \mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k+1}},$$

d'où, si $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ n'est pas maigre, un des $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ n'est pas maigre.

Supposons $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ non maigre.

Vu la proposition 8, p. 107, $\bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ est souslinien. Donc $\mathrm{E} \times \bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ est souslinien, son intersection avec $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ aussi et enfin

$$\mathrm{T}_{-1}\bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}} = pr_{\mathrm{E}}\,[(\mathrm{E} \times \bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) \cap \mathscr{G}(\mathrm{T})]$$

est souslinien.

Vu la proposition 14, p. 116, l'ensemble

$$0(\mathrm{T}_{-1}\bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) \setminus \mathrm{T}_{-1}\bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$$

est donc maigre dans E. En outre, comme $\mathrm{T}_{-1}\bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ n'est pas maigre, $0(\mathrm{T}_{-1}\bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}})$ n'est pas vide (cf. proposition 10, p. 110). Donc en appliquant la proposition 12, p. 115, on obtient

$$0(\bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) - 0(\bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) \subset \bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}} - \bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}.$$

Le premier membre est un ouvert contenant 0, donc il contient une semi-boule b_{k_0} de centre 0 et il vient

$$b_{k_0} \subset \bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}} - \bar{e}_{n_1,\ldots,n_{k_0}},$$

d'où la thèse.

Voici un corollaire curieux du théorème de localisation.

(Z) Corollaire. — *Tout espace de Baire souslinien est un espace à semi-normes dénombrables.*

En effet, soit E l'espace et soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de E.

Prenons pour T l'opérateur identité de E dans lui-même.

Les conditions du théorème de localisation sont satisfaites et, dès lors, il existe une suite d'indices n_k et une suite de semi-boules b_k tels que

$$b_k \subset \bar{e}_{n_1,\ldots,n_k} - \bar{e}_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or, pour toute semi-boule b de centre 0 dans E, on a

$$e_{n_1,\ldots,n_k} - e_{n_1,\ldots,n_k} \subset b$$

dès que k est assez grand, car il existe f tel que

$$e_{n_1,\ldots,n_k} \subset f + \frac{1}{2}\, b$$

dès que k est assez grand.

Donc les semi-normes de E sont équivalentes aux semi-normes associées aux b_k.

On ne voit pas, comme c'était le cas pour les espaces à réseau strict (cf. corollaire 3, chap. III, p. 54) la possibilité d'établir que E est *sq*-complet.

Remarque. — Ce corollaire prouve que le gain de généralité qu'on obtient en utilisant l'axiome de Zorn dans le théorème du graphe borélien est illusoire.

En effet, tout espace de Baire souslinien étant à semi-normes dénombrables, il fait partie des espaces qu'on atteint sans recourir à l'axiome de Zorn.

Théorème de relèvement. — *Soit* E *souslinien et soit* T *un opérateur linéaire défini d'une partie de* E *sur* F, *à graphe sq-borélien.*

Pour toute suite $g_n \in$ F, *très convergente vers* 0, *il existe une suite* $f_n \in$ E, *convergente vers* 0, *telle que*

$$\mathrm{T}f_n = g_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si, en outre, E *est sq-complet et si* T *est à graphe sq-fermé, pour tout ensemble très compact* K *de* F, *il existe un compact* K′ *de* E, *tel que*

$$\mathrm{TK}' = \mathrm{K}.$$

Si la suite g_n est très convergente vers 0 dans F, il existe un espace de Fréchet F_0, un opérateur linéaire continu T′ de F_0 dans F et une suite h_n tendant vers 0 dans F_0, tels que

$$g_n = \mathrm{T}'h_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

On peut même supposer F_0 séparable, quitte à lui substituer l'enveloppe linéaire fermée de la suite h_n.

Soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de E.

Considérons les ensembles

$$e'_{n_1,\ldots,n_k} = \mathrm{T}'_{-1}\,(\mathrm{T}e_{n_1,\ldots,n_k}).$$

On a

$$\mathrm{F}_0 = \mathrm{T}'_{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{T}'_{-1}(\mathrm{TE}) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e'_{n_1}$$

et

$$e'_{n_1,\ldots,n_k} = \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} e'_{n_1,\ldots,n_{k+1}}, \forall k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Vu la proposition 8, p. 107, les $e_{n_1,\dots,n_k}$ sont sousliniens.

Les $e'_{n_1,\dots,n_k}$ le sont aussi. En effet, on note d'abord que

$$\{(f, g) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}_0 : \mathrm{T}f = \mathrm{T}'g\}$$

est sq-borélien dans $\mathrm{E} \times \mathrm{F}_0$, comme image inverse par l'opérateur continu $(1, \mathrm{T}')$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}_0$ dans $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ du graphe de T. De là,

$$\{(f, g) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}_0 : \mathrm{T}'g \in \mathrm{T}e_{n_1,\dots,n_k}\} = \{(f, g) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}_0 : \mathrm{T}f = \mathrm{T}'g\} \cap (e_{n_1,\dots,n_k} \times \mathrm{F}_0)$$

est souslinien, puisque $e_{n_1,\dots,n_k} \times \mathrm{F}_0$ est souslinien. Sa projection sur F_0 est aussi souslinienne et c'est l'ensemble $\mathrm{T}'_{-1}(\mathrm{T}e_{n_1,\dots,n_k})$.

De plus, comme F_0 est de Baire, on voit qu'il existe une suite d'indices n_k tels que les $e'_{n_1,\dots,n_k}$ ne soient pas maigres. Pour ces n_k, par les propositions 10, 12 et 14, les ensembles $0(e'_{n_1,\dots,n_k})$ ne sont pas vides et on a

$$0(e'_{n_1,\dots,n_k}) - 0(e'_{n_1,\dots,n_k}) \subset e'_{n_1,\dots,n_k} - e'_{n_1,\dots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Dans (*), les premiers membres sont des ouverts non vides contenant 0. Donc ils contiennent h_n dès que n est assez grand.

Il existe alors une suite d'indices ν_k, croissants avec k, tels que

$$h_n \in 0(e'_{n_1,\dots,n_k}) - 0(e'_{n_1,\dots,n_k}) \subset e'_{n_1,\dots,n_k} - e'_{n_1,\dots,n_k}$$

pour tout n compris entre ν_k et ν_{k+1} et tout $k \in \mathbb{N}$.

A chaque h_n tel que $\nu_k \leqslant n < \nu_{k+1}$, on peut donc associer f_n, $f'_n \in e_{n_1,\dots,n_k}$ tels que

$$\mathrm{T}f_n - \mathrm{T}f'_n = \mathrm{T}'h_n = g_n.$$

La suite $f_n - f'_n$ tend vers 0 dans E, par définition du crible de E, puisque f_n et f'_n tendent vers l'élément

$$f_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} e_{n_1,\dots,n_k}.$$

Donc elle satisfait aux conditions de l'énoncé. Il reste à relever les éléments $g_1, \dots, g_{\nu_1-1}$, qu'on relève par n'importe quoi vu qu'ils sont en nombre fini.

Supposons à présent E sq-complet et soit K un ensemble très compact dans F.

Il existe une suite g_n, très convergente vers 0 dans F, telle que

$$\mathrm{K} \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1\}.$$

Si la suite g_n est relevée par la suite f_n tendant vers 0 dans E, comme E est sq-complet, l'ensemble

$$\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1\}$$

est compact dans E.

Démontrons que

$$\mathrm{T}(\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1\}) = \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle}.$$

De fait, comme $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ est *sq*-fermé, si g appartient au second membre, pour un choix convenable de la suite c_n, il vient

$$\left.\begin{array}{l} g = \lim \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n g_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n = \lim \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n f_n \end{array}\right\} \Rightarrow g = \mathrm{T}\,(\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n).$$

Enfin, K est relevé par

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} |\, c_n \,| \leqslant 1\} \cap \mathrm{T}_{-1}\mathrm{K},$$

où le premier membre est *sq*-fermé, donc compact, vu le lemme du chap. III, p. 60.

Remarque. — Ce théorème et le théorème de relèvement du chap. III, p. 61, sont assez voisins mais ne se recouvrent pas. Ainsi, si E admet un réseau strict, il n'est pas nécessairement souslinien : il suffit pour cela qu'il ne soit pas séparable. Inversement, soit E souslinien. S'il est *sq*-complet, on sait qu'il admet un réseau de type $\mathscr{C}$, mais on ignore si ce réseau est strict. Ainsi la seule considération des réseaux ne permet pas d'atteindre le théorème de relèvement établi ici.

7. Nouvelles propriétés de permanence

Comme c'était le cas pour les espaces à réseau strict ou de type $\mathscr{C}$, le théorème de localisation permet d'enrichir les propriétés de permanence des espaces sousliniens et conduit aux résultats suivants.

Théorème 3. — *Soit* E *un espace de Fréchet séparable ou la limite inductive d'une suite de tels espaces et soit* F *un espace souslinien sq-complet ou la limite inductive d'une suite de tels espaces.*

L'espace $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est souslinien.*

a) Supposons d'abord E de Fréchet et séparable et F souslinien et *sq*-complet. Soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de F.

Pour tout opérateur T linéaire et continu de E dans F, en vertu du théorème de localisation p. 119,

— il existe un indice $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre dans E et une semi-boule b_1 de E telle que

$$\mathrm{T}b_1 \subset e_{n_1} - e_{n_1},$$

— si $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ n'est pas maigre dans E, il existe un indice $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ ne soit pas maigre dans E et une semi-boule b_{k+1} de E telle que

$$\mathrm{T}b_{k+1} \subset e_{n_1,\ldots,n_{k+1}} - e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

Soient $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ le système de semi-normes de E et b_i les semi-boules $b_{p_i}(1/i)$. Soit en outre

$$\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$$

un ensemble dénombrable dense dans E.

Considérons les ensembles $\mathscr{E}_{(n_1,i_1,\nu_1)}$, $n_1, i_1, \nu_1 \in \mathbb{N}$, formés des $T \in \mathscr{L}(E, F)$ tels que

— $T_{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre,

— $Tb_{i_1} \subset e_{n_1} — e_{n_1}$,

— $Tf_1 \in e_{\nu_1}$.

Leur union est visiblement $\mathscr{L}(E, F)$. Renumérotons-les par un seul indice $m_1 \in \mathbb{N}$.

Formons ensuite les ensembles $\mathscr{E}_{(n_1,i_1,\nu_1),(n_2,i_2,\nu_2,\nu_1')}$, $n_2, i_2, \nu_2, \nu_1' \in \mathbb{N}$, formés des $T \in \mathscr{L}(E, F)$ tels que

— $T \in \mathscr{E}_{(n_1,i_1,\nu_1)}$,

— $T_{-1}e_{n_1,n_2}$ ne soit pas maigre,

— $Tb_{i_2} \subset e_{n_1,n_2} — e_{n_1,n_2}$,

— $Tf_1 \in e_{\nu_1,\nu_2}$; $Tf_2 \in e_{\nu_1'}$.

On renumérote encore $(n_2, i_2, \nu_2, \nu_1')$ avec un seul indice parcourant $\mathbb{N}$ et on poursuit la construction, de proche en proche.

Les ensembles ainsi formés constituent un crible de $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

Ils vérifient visiblement la condition (a) de la définition du crible (p. 100).

De plus, soit m_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soient $n_k, i_k, \nu_k, \nu_k', \ldots$ les suites correspondantes.

Si la suite T_m est telle que

$$T_1 \in \mathscr{E}_{m_1} = \mathscr{E}_{(n_1,i_1,\nu_1)},\ T_2 \in \mathscr{E}_{m_1,m_2} = \mathscr{E}_{(n_1,i_1,\nu_1),(n_2,i_2,\nu_2,\nu_1')}, \ldots,$$

elle est équicontinue.

En effet, soit q une semi-norme de F. On a

$$e_{n_1,\ldots,n_k} — e_{n_1,\ldots,n_k} \subset b_q(1) \quad (*)$$

dès que k est assez grand, puisque, si g est l'intersection des $e_{n_1,\ldots,n_k}$,

$$e_{n_1,\ldots,n_k} \subset g + b_q(1/2)$$

pour k assez grand (cf. (b'), p. 101). Supposons que (*) est vérifié pour $k = k_0$. Il vient, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$T_k b_{i_{k_0}} \subset e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} — e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \subset b_q(1),$$

d'où

$$q(T_k f) \leqslant \frac{1}{i_{k_0}} p_{i_{k_0}}(f),\ \forall k \geqslant k_0,\ \forall f \in E.$$

Comme $T_1, \ldots, T_{k_0-1}$ sont en nombre fini, ils sont équicontinus, donc il existe $i \geqslant i_{k_0}$ tel que

$$q(T_k f) \leqslant \frac{1}{i} p_i(f),\ \forall f \in E,$$

pour tout $k < k_0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, et la suite T_m est bien équicontinue.

La suite $T_m f_j$ converge dans F pour tout j fixé.

Cela résulte de la définition du crible de F, puisque les $T_m f_j$ se répartissent dans une suite $e_{n_1,\ldots,n_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Si F est sq-complet, il résulte alors du théorème de Banach-Steinhaus que la suite T_m converge dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

La limite T des T_m ne dépend que de la suite des m_k fixée. De fait, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$Tf_j = \lim_m T_m f_j = \bigcap_{m=1}^{\infty} e_{\mu_1,\ldots,\mu_m}$$

ne dépend que des m_k. Or, comme les f_j sont denses dans E, T est complètement déterminé par les valeurs qu'il leur associe.

Enfin, T est visiblement l'intersection de la suite d'ensembles du crible qui lui correspond, d'où la conclusion.

b) Supposons à présent que E soit un espace de Fréchet séparable et que F soit limite inductive d'une suite d'espaces sousliniens sq-complets F_j.

On ne sait pas si F est sq-complet, donc on ne peut pas appliquer a).

Soit

$$\{e^{(j)}_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de chaque F_j. Les ensembles

$$e_{n_1} = F_{n_1},\ n_1 \in \mathbb{N},$$

$$e_{n_1,\ldots,n_k} = e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k},\ k > 1,\ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N},$$

constituent alors visiblement un crible de F.

Construisons encore les ensembles

$$\mathscr{E}_{m_1,\ldots,m_k},\ k, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N},$$

déterminés en a) relatifs à ce crible.

On obtient un crible de $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

Il vérifie, pour les mêmes raisons qu'en a), la condition (a) de la définition des cribles.

De plus, pour toute suite m_k fixée, si

$$T_k \in \mathscr{E}_{m_1,\ldots,m_k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

la suite T_k appartient à $\mathscr{L}(E, F_{m_1})$, par définition de $\mathscr{E}_{m_1}$. De plus, en procédant comme en a), on voit qu'elle converge dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F_{m_1})$. Or les semi-normes de F_{m_1} sont plus fortes que celles induites par F dans F_{m_1}, donc la suite T_m converge alors dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$, ce qui permet de conclure comme en a).

c) Soit enfin E limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet séparables E_i, F satisfaisant à l'une ou l'autre des conditions de l'énoncé.

La démonstration comporte deux étapes.

Désignons par $\mathscr{L}_\chi(E, F)$ l'espace $\mathscr{L}(E, F)$ muni des semi-normes

$$\sup_{f \in K} q(Tf),$$

où q parcourt l'ensemble des semi-normes de F et K l'ensemble des précompacts des différents E_i.

L'espace $\mathscr{L}_\chi(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est souslinien.

En effet, il s'identifie au sous-espace $\mathscr{L}$ de

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F}), \quad (*)$$

formé des

$$(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots)$$

tels que

$$\mathrm{T}_i f = \mathrm{T}_{i+1} f, \ \forall f \in \mathrm{E}_i, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Or (*) est souslinien comme produit dénombrable d'espaces sousliniens et $\mathscr{L}$ est visiblement un sous-espace fermé de (*), donc il est aussi souslinien.

Si la limite inductive E est stricte, tout précompact de E est précompact dans un des E_i, donc $\mathscr{L}_\chi(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est en fait $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Ce n'est pas le cas en général, mais on va démontrer que l'opérateur identité de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans lui-même est *sq*-continu de $\mathscr{L}_\chi(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On en déduit alors immédiatement que $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est souslinien.

Soit T_m une suite convergeant vers 0 dans $\mathscr{L}_\chi(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Les restrictions des T_m à E_i forment une suite bornée dans $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$, donc équicontinue puisque les E_i sont de Fréchet. Dès lors les T_m sont équicontinus et, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, ils convergent dans $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Remarque. — Ce théorème est énoncé par Schwartz dans [45], dans le cas particulier où E est limite inductive stricte des E_i et où les F_j sont des espaces de Fréchet séparables.

Théorème 4. — *Si* E *est un espace de Schwartz à semi-normes dénombrables et* F *un espace souslinien sq-complet ou la limite inductive d'une suite de tels espaces,* $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}_b^*, \mathrm{F})$ *est souslinien.*

Comme E est de Schwartz et à semi-normes dénombrables,

$$\mathscr{L}_b(\mathrm{E}_b^*, \mathrm{F}) \equiv \mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}_b^*, \mathrm{F}).$$

Il suffit donc de démontrer que E_b^* est limite inductive d'une suite d'espaces de Banach séparables.

Soient p_i les semi-normes de E, b_i les semi-boules $b_{p_i}(1/i)$, b_i^Δ leur polaire. Appelons E_i^* l'enveloppe linéaire de b_i^Δ munie de la norme associée à b_i^Δ. C'est un espace de Banach.

Dans le choix des semi-normes de E, on peut supposer que, pour tout i, b_{i+1} est précompact pour p_i. Alors b_i^Δ est précompact dans E_{i+1}^*. Notons E_i' l'enveloppe linéaire fermée de b_i^Δ dans $\mathrm{E}_{p_{i+1}}^*$, munie de la norme de E_{i+1}^*. C'est un espace de Banach, séparable puisque b_i^Δ est séparable dans E_{i+1}^*.

Comme E est de Schwartz, E_b^* est bornologique et, dès lors, c'est la limite inductive des E_i^* (cf. [17], p. 257 et p. 262). C'est aussi la limite inductive des E_i', puisque

$$\mathrm{E}_i^* \subset \mathrm{E}_i' \subset \mathrm{E}_{i+1}^*, \ \forall i,$$

l'opérateur identité de chaque espace dans le suivant étant continu. D'où la conclusion.

THÉORÈME 5. — *Soit* E *limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Schwartz à semi-normes dénombrables.*

Soit F *un espace souslinien sq-complet, muni d'un système de semi-normes* $\{q\}$ *tel qu'à toute suite* $q_n \in \{q\}$, *il corresponde* $q \in \{q\}$ *et* $C_n > 0$ *tels que*

$$q_n(g) \leqslant C_n\, q(g),\ \forall g \in F,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

ou la limite inductive d'une suite de tels espaces.

L'espace $\mathscr{L}_b(E_b^*, F)$ *est souslinien.*

REMARQUE. — On se référera à la proposition 1, chap. IV, p. 74, pour des exemples de tels espaces F.

Soit E limite inductive stricte des E_i.

Comme les E_i sont de Schwartz,

$$E_b^* \equiv E_{pc}^* \text{ et } (E_i)_b^* \equiv (E_i)_{pc}^*,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Or, on a démontré en b), chap. IV, p. 72, que

$$\mathscr{L}(E_{pc}^*, F) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_i\, \mathscr{L}\,[(E_i)_{pc}^*, F],$$

où τ_i est un opérateur linéaire continu de $\mathscr{L}_b\,[(E_i)_{pc}^*, F]$ dans $\mathscr{L}_b(E_{pc}^*, F)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

De plus, vu le théorème 4, chaque $\mathscr{L}_b\,[(E_i)_{pc}^*, F]$ est souslinien, d'où la conclusion, par les propriétés de permanence des ensembles sousliniens.

Passons à présent au cas des produits tensoriels. Leur interprétation comme espaces d'opérateurs, pour laquelle nous renvoyons au paragraphe 2, chap. IV, p. 77, fournit quelques exemples de produits tensoriels sousliniens.

THÉORÈME 6. — *Si* E *est un espace de Fréchet et de Schwartz et* F *un espace complet et souslinien, le produit tensoriel* $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *est souslinien.*

De fait, le produit tensoriel $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ s'assimile à un sous-espace fermé de $\mathscr{L}_\Gamma(E_{ca}^*, F)$.

Or, comme E est de Fréchet et de Schwartz, $E_{ca}^* \equiv E_b^*$ et, comme tout ensemble équicontinu dans E^* est précompact dans E_b^* et inversement,

$$\mathscr{L}_\Gamma(E_{ca}^*, F) \equiv \mathscr{L}_b(E_b^*, F).$$

Vu le théorème 4, p. 126, $\mathscr{L}_b(E_b^*, F)$ est souslinien, d'où la conclusion.

THÉORÈME 7. — *Soit* E *limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet et de Schwartz. Soit* F *un espace souslinien, complet et tel qu'à toute suite de semi-normes* $q_n \in \{q\}$, *il corresponde* $q \in \{q\}$ *et* $C_n > 0$ *tels que*

$$q_n(g) \leqslant C_n\, q(g),\ \forall g \in F,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'espace $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *est souslinien.*

Ici encore, $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}_\Gamma(E^*_{ca}, F)$ et on a

$$\mathscr{L}_\Gamma(E^*_{ca}, F) \equiv \mathscr{L}_b(E^*_b, F),$$

où le second membre est souslinien, vu le théorème 5, p. 127.

Théorème 8. — *Si* E *est un espace de Fréchet séparable ou la limite inductive d'une suite de tels espaces et si* F *est souslinien et complet, le produit tensoriel* $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *est souslinien.*

Comme E est bornologique, E^*_{ca} est complet. De plus, $(E^*_{ca})^*_{ca}$ s'assimile à E muni de ses semi-normes naturelles.

Enfin, comme F est complet, c'est aussi le cas pour $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$ et $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$. Or ce dernier espace est souslinien, vu le théorème 3, p. 123. D'où la conclusion.

Remarque. — Comme au paragraphe 2, chap. IV, p. 79, on peut se débarrasser de l'hypothèse de complétion pour les filtres au profit de la complétion pour les suites dans la plupart des cas usuels.

Le plus simple est de traiter directement les cas particuliers qu'on rencontre. En voici un exemple typique.

Si E *est sq-complet et souslinien, l'espace* $C_\infty(\Omega\,;E)$ *est souslinien.*

Soit $f(x) \in C_\infty(\Omega\,;E)$. Associons-lui l'opérateur T_f défini de $[C_\infty(\Omega)]^*$ dans E de la manière suivante.

A tout $\mathcal{T} \in [C_\infty(\Omega)]^*$, de la forme

$$\mathcal{T}(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leqslant n} \int D^\alpha \varphi \, d\mu_\alpha, \ \forall \varphi \in C_\infty(\Omega),$$

où $[\mu_\alpha] \subset K_n$ pour tout α, on fait correspondre

$$T_f\mathcal{T} = \sum_{|\alpha|\leqslant n} \int D^\alpha f(x) d\mu_\alpha.$$

Les intégrales (à valeurs dans E) ont un sens, puisque E est *sq*-complet et $D^\alpha f(x)$ continu dans Ω pour tout α.

L'opérateur T_f est visiblement linéaire.

Il est continu de $[C_\infty(\Omega)]^*_b$ dans E. De fait,

$$\begin{aligned} p(T_f\mathcal{T}) &= \sup_{\mathscr{Q}\in b_p^\Delta} \Big| \sum_{|\alpha|\leqslant n} \int D^\alpha \mathscr{Q}\,[f(x)] d\mu_\alpha \Big| \\ &= \sup_{\mathscr{Q}\in b_p^\Delta} | \mathcal{T}\{\mathscr{Q}\,[f(x)]\} |, \end{aligned}$$

où l'ensemble

$$\{\mathscr{Q}\,[f(x)] : \mathscr{Q} \in b_p^\Delta\}$$

est visiblement borné dans $C_\infty(\Omega)$.

On peut donc assimiler $C_\infty(\Omega\,;\,E)$ à un sous-espace linéaire de $\mathscr{L}_b([C_\infty(\Omega)]^*_b, E)$, muni des semi-normes induites par cet espace, puisque

$$\sup_{x\in K_n}\ \sup_{|\alpha|\leqslant n}\ p\,[D^\alpha_x f(x)] = \sup_{\mathscr{Q}\in b^\Delta_p}\ \sup_{x\in K_n}\ \sup_{|\alpha|\leqslant n}\ |\,D^\alpha\,\mathscr{Q}\,[f(x)]\,|$$

$$= \sup_{\mathscr{Q}\in b^\Delta_p}\ \sup_{\mathcal{T}\in\mathscr{B}}\ |\,\mathcal{T}\{\mathscr{Q}\,[f(x)]\}\,| = \sup_{\mathcal{T}\in\mathscr{B}}\ p(T_f\mathcal{T}),$$

où $\mathscr{B}$ est un borné de $[C_\infty(\Omega)]^*_b$.

Comme $C_\infty(\Omega\,;\,E)$ est *sq*-complet, il est fermé pour les suites dans $\mathscr{L}_b([C_\infty(\Omega)]^*_b, E)$. Or, vu le théorème 4, p. 126, ce dernier espace est souslinien, d'où la conclusion.