APPENDICE

LIMITES INDUCTIVES D'ESPACES LINÉAIRES A SEMI-NORMES

On développe ici une théorie des limites inductives dénombrables assez générale pour unifier les limites inductives strictes de J. Dieudonné et L. Schwartz ([15]), les limites inductives de J. S. E. Silva ([48]) et les généralisations de celles-ci ([4], [22], [30], [40]). On démontre quelques propriétés des bornés qui échappent à ces différents cas et qui unifient et précisent certains résultats obtenus dans les chapitres précédents.

1. — Soient E_n une suite d'espaces linéaires à semi-normes [séparables par semi-norme] et tels que, pour tout n,

— E_n soit un sous-espace linéaire de E_{n+1},

— l'opérateur identité de E_n dans E_{n+1} soit continu.

Appelons E l'union des E_n. C'est visiblement un espace linéaire.

Soit π une suite formée en choisissant une semi-norme dans chaque E_n,

$$\pi = (p_1, p_2, \ldots),$$

et γ une suite de constantes positices c_n.

Proposition 1. — a) *L'expression*

$$p_{\pi,\gamma}(f) = \inf_{\substack{f=\sum_{(n)} f_n \\ f_n \in E_n}} \sum_{(n)} c_n p_n(f_n)$$

est une semi-norme de E, *si la borne inférieure porte sur toutes les décompositions finies de* f *en éléments appartenant aux différents* E_n. (*)

b) *Les semi-normes* $p_{\pi,\gamma}$ *associées à toutes les suites* π *et* γ *forment un ensemble filtrant de semi-normes.*

c) *La semi-boule ouverte de centre* 0, *de semi-norme* $p_{\pi,\gamma}$ *et de rayon* 1 *est l'ensemble*

$$\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_{p_n}(1/c_n) \rangle,$$

où les semi-boules $b_{p_n}(1/c_n)$ *sont prises ouvertes.*

d) *Soient* $\mathcal{T}$ *une fonctionnelle linéaire dans* E, $\mathcal{T}^{(n)}$ *sa restriction à chaque* E_n.

(*) Nous indiquons que les sommes considérées sont finies en plaçant l'indice sous Σ entre parenthèses.

On a

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant p_{\pi,\gamma}(f), \forall f \in \mathrm{E},$$

si et seulement si

$$| \mathcal{T}^{(n)}(f) | \leqslant c_n p_n(f), \forall f \in \mathrm{E}_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus,

$$|| \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}} = \sup_n \frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n}.$$

La démonstration des points a), b) et c) est facile et ne sera pas reprise ici (cf. par exemple [17], chap. VIII).

Démontrons d). La condition est évidemment nécessaire :

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant p_{\pi,\gamma}(f) \leqslant c_n p_n(f), \forall f \in \mathrm{E}_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Elle est suffisante. De fait, quelle que soit la décomposition $f = \sum_{(n)} f_n$, de

$$| \mathcal{T}^{(n)}(f_n) | \leqslant c_n p_n(f_n), \forall n \in \mathbb{N},$$

on déduit

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant \sum_{(n)} c_n p_n(f_n)$$

et, comme la décomposition choisie de f est arbitraire,

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant p_{\pi,\gamma}(f).$$

Enfin, pour établir l'égalité proposée, on note que

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant \sum_{(n)} | \mathcal{T}^{(n)}(f_n) | \leqslant \sum_{(n)} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n} p_n(f_n)$$

$$\leqslant (\sup_n \frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n}) \sum_{(n)} c_n p_n(f_n)$$

quel que soit $f = \sum_{(n)} f_n$, d'où

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant (\sup_n \frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n})\, p_{\pi,\gamma}(f), \forall f \in \mathrm{E},$$

et

$$|| \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}} \leqslant \sup_n \frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n}.$$

Inversement,

$$| \mathcal{T}^{(n)}(f) | \leqslant || \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}} p_{\pi,\gamma}(f) \leqslant || \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}} c_n p_n(f), \forall f \in \mathrm{E}_n.$$

d'où

$$\frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n} \leqslant || \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. — Définition. On appelle *limite inductive des* E_n, l'espace E muni des semi-normes $p_{\pi,\gamma}$, pour autant que celles-ci constituent un système de semi-normes de E.

Pour cela, il faut que ces semi-normes séparent E.

Voici une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi.

C'est une amélioration des lemmes 3, p. 450 et 4, p. 453 de [1].

Proposition 2. — *S'il existe une suite d'ensembles absolument convexes* $\beta_n \subset E_{n+1}$, *croissants avec* n, *tels que*

— β_n *contienne une semi-boule de* E_n,

— β_n *soit fermé dans* E_{n+2},

— *dans* β_n, *l'opérateur identité de* E_{n+2} *dans* $(E_{n+1})_a$ *soit continu*,

alors la limite inductive des E_n *est séparée.*

Établissons d'abord un

Lemme. — *L'intersection avec* β_n *d'un fermé absolument convexe de* E_{n+1} *est fermée dans* E_i *quel que soit* $i > n+1$.

Soit $F = F' \cap \beta_n$, où F' est fermé dans E_{n+1}.

Comme F' est absolument convexe, il est faiblement fermé dans E_{n+1}.

Vu l'hypothèse, F est alors fermé dans β_n pour les semi-normes induites par E_{n+2}.

Comme β_n est fermé dans E_{n+2}, F est fermé dans E_{n+2}.

On passe de proche en proche au cas général : F est maintenant fermé dans E_{n+2} et contenu dans β_{n+1}, car $\beta_n \subset \beta_{n+1}$. Il est donc fermé dans E_{n+3}, et ainsi de suite.

Passons à la démonstration de la proposition 2.

Soit $g \neq 0$ dans E. Il existe une suite d'ensembles F_n, $n > 1$, absolument convexes et fermés dans E_{n+1}, emboîtés en croissant et tels que

— $g \notin F_n$,

— $F_n \subset \beta_n$,

— $F_n \supset b_{n-1}$, semi-boule de E_{n-1}.

On les construit de proche en proche.

Déterminons F_2. Il existe une semi-boule b_2 de E_2 telle que $g \notin b_2$. On peut la supposer fermée dans E_2. Alors

$$F_2 = b_2 \cap \beta_1$$

est fermé dans E_3, vu le lemme. Il contient une semi-boule de E_1. De fait, la restriction de b_2 à E_1 contient une semi-boule β_1' de E_1. Il existe alors b_1 contenu dans $\beta_1 \cap \beta_1'$ donc tel que $b_1 \subset F_2$.

Supposons F_n déterminé. Comme il est fermé dans E_{n+1} et ne contient pas g, il existe une semi-boule b_{n+1} de E_{n+1} telle que

$$g \notin F_n + 2b_{n+1}$$

d'où

$$g \notin \overline{F_n + b_{n+1}}^{E_{n+1}}.$$

A fortiori

$$g \notin \overline{(\mathrm{F}_n + b_{n+1})}^{\mathrm{E}_{n+1}} \cap \beta_n.$$

Appelons F_{n+1} l'ensemble du second membre. Il est fermé dans E_{n+2}, vu le lemme. Il est absolument convexe et contient F_n, car $\mathrm{F}_n \subset \beta_n$. Il contient une semi-boule b_n de E_n : il suffit de choisir $b_n \subset b_{n+1} \cap \beta_n$.

Comme les F_n sont emboîtés, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}_n$ est absolument convexe. Or il contient b_n pour tout n, donc il contient

$$\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_n \rangle,$$

semi-boule de E si on prend les semi-boules b_n ouvertes (cf. c), p. 130).

Cette semi-boule ne contient pas g, donc il existe une semi-norme $p_{\pi,\gamma}$ telle que $p_{\pi,\gamma}(g) \neq 0$ et les $p_{\pi,\gamma}$ séparent E.

Proposition 3. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2, *pour tout borné* B *de* E, *il existe* $\lambda > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $\mathrm{B} \subset \lambda\beta_n$.

Si ce n'est pas le cas, quel que soit n, il existe $g_n \in \mathrm{B}$ tel que $g_n \notin n\beta_n$. Comme B est borné, la suite g_n/n tend vers 0 dans E.

On va montrer qu'il existe une semi-boule β de E, de centre 0 et ne contenant aucun g_n/n. C'est absurde, donc il faudra que $\mathrm{B} \subset n\beta_n$ pour au moins un n.

Posons $f_n = g_n/n$.

On détermine de proche en proche une suite d'ensembles F_n, $n > 1$, absolument convexes et fermés dans E_{n+1}, emboîtés en croissant et tels que

— $f_i \notin \mathrm{F}_n$, $\forall i < n$,

— $\mathrm{F}_n \subset \beta_n$,

— $\mathrm{F}_n \supset b_{n-1}$, semi-boule de E_{n-1}.

On pose $\mathrm{F}_2 = \beta_1$.

Soit F_n déterminé. Il est fermé dans E_{n+1} et ne contient pas $f_1, \ldots, f_{n-1}$. Comme il est contenu dans β_n, il ne contient pas f_n. Il existe donc une semi-boule b_{n+1} de E_{n+1} telle que

$$f_1, \ldots, f_n \notin \mathrm{F}_n + 2b_{n+1}$$

et

$$f_1, \ldots, f_n \notin \overline{\mathrm{F}_n + b_{n+1}}^{\mathrm{E}_{n+1}}.$$

Pour les $f_i \in \mathrm{E}_{n+1}$, cela résulte de la fermeture de F_n, pour les autres, du fait que

$$\overline{\mathrm{F}_n + b_{n+1}}^{\mathrm{E}_{n+1}} \subset \mathrm{E}_{n+1}.$$

On a encore

$$f_1, \ldots, f_n \notin \overline{(\mathrm{F}_n + b_{n+1})}^{\mathrm{E}_{n+1}} \cap \beta_n.$$

Appelons F_{n+1} l'ensemble du second membre.

Il contient F_n puisque $F_n \subset \beta_n$.

Il est fermé dans E_{n+2} vu le lemme.

Il est absolument convexe ; il est contenu dans β_{n+1} et enfin, il contient une semi-boule b_n de E_n. Il suffit de prendre $b'_n \subset b_{n+1} \cap \beta_n$.

Les F_n étant déterminés, posons

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

L'ensemble F ne contient aucun f_n. Or il contient une semi-boule b_n de chaque E_n et, comme il est absolument convexe, il contient

$$\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_n \rangle,$$

semi-boule de E si on prend les b_n ouverts.

Remarque. — *Les hypothèses de la proposition 2 sont satisfaites s'il existe une suite d'ensembles absolument convexes $\beta_n \subset E_{n+1}$, croissants avec n, tels que*

— *β_n contienne une semi-boule de E_n,*

— *β_n soit fermé dans E_{n+1},*

— *dans β_n, l'opérateur identité est continu de E_{n+1} dans $(E_n)_a$.*

D'une part, comme $\beta_n \subset \beta_{n+1}$, l'opérateur identité y est continu de E_{n+2} dans $(E_{n+1})_a$.

D'autre part, β_n est fermé donc faiblement fermé dans E_{n+1}. Or il est contenu dans β_{n+1}, où l'identité est continue de E_{n+2} dans $(E_{n+1})_a$, donc il est fermé dans E_{n+2}.

3. — La proposition 3 précédente n'apporte que peu de renseignements sur les bornés de E. Pour obtenir une caractérisation plus précise, il faut introduire une hypothèse supplémentaire.

Proposition 4. — *S'il existe une suite d'ensembles absolument convexes $\beta_n \subset E_{n+1}$, croissants avec n, tels que, pour tout n,*

— *β_n contienne une semi-boule de E_n,*

— *β_n soit fermé dans E_{n+2},*

— *dans β_n, l'opérateur identité soit continu de E dans $(E_{n+1})_a$,*

alors E *possède les propriétés suivantes :*

a) *un ensemble $B \subset E$ est borné dans E si et seulement si il est contenu dans un E_n et y est borné.*

b) *toute suite convergente dans E est contenue dans un E_n et y converge faiblement.*

c) *toute suite de Cauchy dans E est contenue dans un E_n et y est faiblement de Cauchy.*

d) *tout ensemble compact, précompact ou extractable dans E est contenu dans un E_n et y est faiblement compact, précompact ou extractable.*

e) *toute suite très convergente dans* E *est contenu dans un* E_n *et y est très convergente.*

f) *tout ensemble très compact dans* E *est contenu dans un* E_n *et y est très compact.*

Démontrons a).

Comme l'opérateur identité de E_n dans E est visiblement continu quel que soit n, les hypothèses de la proposition 3 sont vérifiées, donc B est contenu dans un $n\beta_n$.

Dans $n\beta_n$, l'opérateur identité est continu de E dans $(E_{n+1})_a$. Alors B est borné dans $(E_{n+1})_a$.

De fait, pour toute semi-norme p de $(E_{n+1})_a$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une semi-norme π de E et $\eta > 0$ tels que

$$\pi(f) \leqslant \eta, f \in n\beta_n \Rightarrow p(f) \leqslant \varepsilon.$$

Soit

$$\sup_{f\in B} \pi(f) \leqslant C.$$

Si $C \leqslant \eta$,

$$\sup_{f\in B} p(f) \leqslant \varepsilon.$$

Si $C > \eta$,

$$f \in \frac{\eta}{C} B \Rightarrow \pi(f) \leqslant \eta, f \in n\beta_n \Rightarrow p(f) \leqslant \varepsilon,$$

d'où

$$\sup_{f\in B} p(f) \leqslant \frac{C}{\eta} \varepsilon.$$

Par le théorème de Mackey, B est alors borné dans E_{n+1}, d'où la conclusion.

Démontrons à présent b), c) et d).

Toute suite convergente et sa limite, toute suite de Cauchy, tout compact, extractable ou précompact de E sont bornés dans E.

Dès lors, ils sont contenus dans un E_n et y sont bornés. Ils sont donc contenus dans un $n\beta_n$. Dans celui-ci, l'identité de E dans $(E_{n+1})_a$ est continue et même uniformément continue.

De là, la propriété de la suite et de l'ensemble vis-à-vis des semi-normes de E est encore vraie vis-à-vis des semi-normes de $(E_{n+1})_a$.

Démontrons enfin e) et f).

Si la suite f_m est très convergente ou si K est très compact dans E, il existe un compact absolument convexe K_0 de E tel que f_m (resp. K) converge (resp. soit compact) dans E_{K_0}.

Or K_0, compact de E, est contenu dans un E_n et y est faiblement compact, donc borné. Dès lors, l'opérateur identité de E_{K_0} dans E_n est continu et, comme E_{K_0} est de Banach, la suite f_m (resp. l'ensemble K) est très convergente (resp. très compact) dans cet E_n.

4. — On peut encore renforcer l'hypothèse sur les E_n.

Voici d'abord une remarque utile.

LEMME. — *L'opérateur identité de* $(E_n)_a$ *dans* E_a *est continu quel que soit* n.

En effet, il résulte de la proposition 1, d), p. 130, que la restriction à E_n d'une fonctionnelle linéaire continue dans E est une fonctionnelle linéaire continue dans cet E_n.

PROPOSITION 5. — *S'il existe une suite d'ensembles absolument convexes* $\beta_n \subset E_{n+1}$, *croissants avec* n, *tels que, pour tout* n,

— β_n *contienne une semi-boule de* E_n,

— β_n *soit fermé dans* E_{n+2},

— *dans chaque* β_n, *l'opérateur identité de* E *dans* E_{n+1} (resp. *de* E_a *dans* $(E_{n+1})_a$) *soit continu*,

l'espace E *possède les propriétés suivantes* :

a) *une suite converge dans* E (resp. *dans* E_a) *si et seulement si elle est contenue dans un* E_n *et y converge* (resp. *y converge faiblement*).

b) *une suite est de Cauchy dans* E (resp. *dans* E_a) *si et seulement si elle est contenue dans un* E_n *et y est de Cauchy* (resp. *faiblement de Cauchy*).

c) *un ensemble est compact, extractable ou précompact dans* E (resp. *dans* E_a) *si et seulement si il est contenu dans un* E_n *et est compact, extractable ou précompact dans* E_n (resp. *dans* $(E_n)_a$).

Les conditions nécessaires se démontrent comme dans la proposition 4.

Pour les conditions suffisantes, il suffit d'appliquer le lemme ci-dessus.

5. — Examinons quelques exemples de limites inductives et d'abord, traitons le cas des limites inductives hyperstrictes.

DÉFINITION. — On dit qu'une limite inductive est *stricte* si, pour tout n, le système de semi-normes induit par E_{n+1} dans E_n est équivalent à celui de E_n.

Elle est *hyperstricte* si elle est stricte et si chaque E_n est fermé dans E_{n+1}.

PROPOSITION 6. — *Si la limite inductive est stricte, quel que soit* n, *le système de semi-normes induit par* E *dans* E_n *est équivalent à celui de* E_n.

Soit b_n une semi-boule arbitraire de E_n.

On détermine de proche en proche une suite de semi-boules b_i de E_i, $i > n$, telles que $b_n \supset b_{n+1} \cap E_n$ et $b_i \supset b_{i+1} \cap E_i$, pour tout $i > n$.

D'autre part, pour tout $i < n$, il existe une semi-boule b_i de E_i telle que $b_i \subset b_n$.

On a alors

$$\langle \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i \rangle \cap E_n = b_n.$$

De fait,

$$\langle \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i \rangle = \langle \bigcup_{i=n}^{\infty} b_i \rangle$$

$$= \{ \sum_{i=n}^{p} \theta_i f_i : f_i \in b_i,\, \theta_i \geqslant 0,\, \sum_{i=n}^{p} \theta_i = 1, p \geqslant n \}.$$

Soit $\sum_{i=n}^{p} \theta_i f_i$ un élément de cet ensemble et supposons qu'il appartienne à E_n. Alors

$$\theta_p f_p = \sum_{i=n}^{p} \theta_i f_i - \sum_{i=n}^{p-1} \theta_i f_i \in E_{p-1}$$

et

$$f_p \in b_p \cap E_{p-1} \subset b_{p-1}.$$

De même,

$$\theta_p f_p + \theta_{p-1} f_{p-1} \subset (\theta_{p-1} + \theta_p) b_{p-1} \cap E_{p-2} \subset (\theta_{p-1} + \theta_p) b_{p-2}.$$

En poursuivant le même raisonnement, de proche en proche, on arrive à

$$\sum_{i=n}^{p} \theta_i f_i \in (\sum_{i=n}^{p} \theta_i) b_n = b_n.$$

COROLLAIRE. — *Les limites inductives hyperstrictes satisfont aux hypothèses de la proposition* 5. *D'où leurs propriétés.*

6. — Soit E la limite inductive d'une suite d'espaces de Banach E_n tels que, pour tout n, la boule unité b_n de E_n soit contenue dans un compact de E_{n+1}.

DÉFINITION. — Une telle limite inductive est appelée *limite inductive de Silva.*

PROPOSITION 7. — *Une limite inductive de Silva vérifie les hypothèses de la proposition* 5. *D'où ses propriétés.*

De fait, soit β_n l'adhérence de b_n dans E_{n+1}.

C'est un compact absolument convexe de E_{n+1}. Il est encore compact dans E_{n+2}, donc il y est fermé. Comme il est compact dans E_{n+1}, l'identité de E_{n+2} dans E_{n+1} y est continue. De là, vu la proposition 2, p. 132, E est séparé et les $p_{\pi,\gamma}$ y forment un système de semi-normes. Dès lors, dans β_n, l'identité est aussi continue de E dans E_{n+1}.

Les β_n répondent donc aux conditions de la proposition 5.

La limite inductive de Silva possède des propriétés supplémentaires, liées à sa nature très spéciale. Pour celles-ci, nous renvoyons à [48], [34] ou [17].

PROPOSITION 8. — *Soit* E *la limite inductive d'une suite d'espaces* E_n, *tels que, pour tout* n, *l'opérateur identité de* E_n *dans* E_{n+1} *soit faiblement compact.*

Cette limite inductive vérifie les hypothèses de la proposition 5. *D'où ses propriétés.*

Pour tout n, il existe une semi-boule b_n de E_n et un compact faible absolument convexe K_n de E_{n+1} tels que $b_n \subset K_n$.

Les ensembles $\beta_n = K_n$ vérifient les conditions de la proposition 2, p. 132, si on les emboîte en croissant.

De fait, β_n est faiblement compact donc fermé dans E_{n+2}.

L'identité est continue de $(E_{n+1})_a$ dans $(E_{n+2})_a$ puisqu'elle est continue de E_{n+1}

dans E_{n+2}. De là, comme K_n est compact dans $(E_{n+1})_a$, dans K_n, elle est aussi continue de $(E_{n+2})_a$ dans $(E_{n+1})_a$ et a fortiori de E_{n+2} dans $(E_{n+1})_a$.

Donc la limite inductive de E est séparée.

On note alors que, dans K, l'identité est continue de E_a dans $(E_{n+1})_a$, d'où la conclusion.

7. — Si on suppose a priori que la limite inductive des E_n est séparée, voici une autre voie d'approche de l'étude de ses bornés, qui fournit des résultats plus généraux.

Proposition 9. — *Soit* E *la limite inductive des* E_n *et supposons-la séparée.*

Soit β_n *une suite croissante de semi-boules des* E_n *successifs. Quel que soit le borné* B *de* E, *il existe* $C > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$B \subset C\, \overline{\beta_n}^{E}.$$

Si ce n'est pas le cas, il existe, pour tout n, f_n appartenant à B et n'appartenant pas à $\overline{n\beta_n}^{E}$. Posons $g_n = \frac{1}{n} f_n$. La suite g_n tend vers 0 dans E, puisque la suite f_n est bornée.

Pour tout n, il existe $\mathcal{C}_n \in E^*$, tel que

$$\mathcal{C}_n(g_n) > 1 \text{ et } \sup_{f \in \beta_n} |\, \mathcal{C}_n(f)\, | \leqslant 1.$$

La suite $\mathcal{C}_n$ est équicontinue dans E. Il suffit pour cela qu'elle le soit dans chaque E_i, vu la proposition 1, d), p. 130. Or

$$\sup_{n \geqslant i} \sup_{f \in \beta_i} |\, \mathcal{C}_n(f)\, | \leqslant \sup_{n \geqslant i} \sup_{f \in \beta_n} |\, \mathcal{C}_n(f)\, | \leqslant 1,$$

d'où, comme $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{i1}\}$ est équicontinu, il existe $b_i \subset \beta_i$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in b_i} |\, \mathcal{C}_n(f)\, | \leqslant \sup_{n < i} \sup_{f \in b_i} |\, \mathcal{C}_n(f)\, | + 1 < \infty.$$

Il existe donc une semi-norme π de E telle que

$$|\, \mathcal{C}_n(f)\, | \leqslant \pi(f), \forall f \in E, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$1 \leqslant |\, \mathcal{C}_n(g_n)\, | \leqslant \pi(g_n),$$

ce qui est absurde puisque $g_n \to 0$ dans E.

Signalons un corollaire utile. C'est un cas particulier d'un théorème de Köthe ([26], p. 405).

Corollaire. — *Si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces normés* E_n *et est séparé, tout borné de* E *est dans l'adhérence dans* E *de la boule unité* B_n *d'un* E_n.

De là, le système de semi-normes de E_b^* *est équivalent au système de semi-normes dénombrables*

$$\sup_{f \in B_n} |\, \mathcal{C}(f)\, |, n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, E_b^* *est limite projective des* $(E_n)_b^*$ *et il est de Fréchet.*

Si, dans la proposition 9, on prend pour β_n les B_n, qu'on peut évidemment supposer emboîtés en croissant, il vient, pour tout borné B de E,

$$B \subset C\, \overline{B_n}^{E}$$

pour au moins un $C > 0$ et un $n \in \mathbb{N}$. De là,

$$\sup_{f \in B} |\mathcal{T}(f)| \leqslant C \sup_{f \in B_n} |\mathcal{T}(f)|.$$

Comme les B_n sont eux-mêmes bornés dans E, l'équivalence annoncée est démontrée.

Ainsi, E_b^* est à semi-normes dénombrables et, comme E est bornologique, il est complet, donc il est de Fréchet.

On peut étendre le corollaire à des espaces à semi-normes dénombrables mais sous des conditions assez restrictives.

Démontrons d'abord une version un peu généralisée d'un théorème de Grothendieck ([11], théorème 10, p. 85).

Proposition 10. — *Soit* E *la limite inductive stricte d'une suite d'espaces évaluables* E_n.

Si $(E_n)_b^*$ *est bornologique pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il en est de même pour* E^*, *muni du système de semi-normes*

$$\sup_{f \in B} |\mathcal{T}(f)|,$$

où B *parcourt l'ensemble des bornés des différents* E_n.

Soit E_β^* l'espace E^* muni de ce système de semi-normes et soit Θ un ensemble absolument convexe qui absorbe les bornés de E_β^*.

Il existe n_0 tel que $E_{n_0}^{\Delta} \subset \Theta$.

De fait, sinon, pour tout n, on peut trouver $\mathcal{T}_n \notin \Theta$ tel que $\mathcal{T}_n(E_n) = 0$. La suite $n\mathcal{T}_n$ tend vers 0 dans E_β^*. En effet, pour tout borné $B \subset E_i$, $n\mathcal{T}_n(B) = 0$ dès que $n > i$. C'est absurde, car Θ absorbe les bornés, donc notamment la suite $n\mathcal{T}_n$, et

$$\{n\mathcal{T}_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C\,\Theta \;\Rightarrow\; \mathcal{T}_n \in \frac{C}{n}\,\Theta \subset \Theta$$

dès que n dépasse C.

Soit alors Θ_{n_0} l'ensemble des $\mathcal{T}_{n_0} \in E_{n_0}^*$ qui ont un prolongement $\mathcal{T} \in \Theta$.

C'est évidemment un ensemble absolument convexe. Il absorbe les bornés B de $(E_{n_0})_b^*$. En effet, un tel borné est équicontinu puisque E_{n_0} est évaluable. Soit $B \subset C\, b_{p_{n_0}}^{\Delta}$. Comme la limite inductive est stricte, il existe une semi-norme π de E telle que

$$p_{n_0}(f) \leqslant \pi(f),\ \forall f \in E_{n_0}.$$

Alors, par le théorème de Hahn-Banach, tout $\mathcal{T}_{n_0} \in C\, b_{p_{n_0}}^{\Delta}$ se prolonge par $\mathcal{T} \in C\, b_\pi^{\Delta}$. Or, pour λ bien choisi, λb_π^{Δ} est contenu dans Θ, d'où

$$\frac{\lambda}{C} B \subset \lambda b_{p_{n_0}}^{\Delta} \subset \Theta_{n_0}.$$

Comme les $(E_n)^*_b$ sont bornologiques, Θ_{n_0} contient une semi-boule de $(E_{n_0})^*_b$: il existe un borné de E_{n_0} tel que

$$\{\mathcal{C}_{n_0} \in E^*_{n_0} : \sup_{f \in B} |\mathcal{C}_{n_0}(f)| \leqslant \varepsilon\} \subset \Theta_{n_0}. \ (*)$$

On a alors

$$\{\mathcal{C} \in E^* : \sup_{f \in B} |\mathcal{C}(f)| \leqslant \varepsilon\} \subset 2\Theta,$$

ce qui établit la proposition. En effet, si $\mathcal{C}$ appartient au premier membre, sa restriction $\mathcal{C}_{n_0}$ à E_{n_0} appartient au premier membre de (*), donc à Θ_{n_0}.

Il existe alors $\mathcal{C}' \in \Theta$, tel que $\mathcal{C}'_{n_0} = \mathcal{C}_{n_0}$. Cela signifie que $\mathcal{C}' - \mathcal{C}$ est nul dans E_{n_0}, ce qui entraîne

$$\mathcal{C} - \mathcal{C}' \in \Theta \text{ et } \mathcal{C} = \mathcal{C}' + (\mathcal{C} - \mathcal{C}') \in 2\Theta.$$

PROPOSITION 11. — *Soit* E *la limite inductive stricte d'espaces* E_n *évaluables et à dual* $(E_n)^*_b$ *bornologique. Tout borné* B *de* E *est dans l'adhérence dans* E *d'un borné d'un* E_n.

De là, E^*_b *est limite projective des* $(E_n)^*_b$ *et il est bornologique.*

Notons E^*_β l'espace E^* muni des semi-normes associées aux bornés des différents E_n.

Pour établir la proposition, il suffit de prouver que l'identité de E^*_β dans E^*_b est un opérateur continu. En effet, pour tout borné B de E, il existera alors B_0, borné dans un certain E_n, tel que

$$\sup_{f \in B} |\mathcal{C}(f)| \leqslant \sup_{f \in B_0} |\mathcal{C}(f)|, \forall \mathcal{C} \in E^*,$$

soit $B_0^\Delta \subset B^\Delta$, ce qui entraîne

$$B \subset B_0^{\Delta\nabla} = \overline{B_0}^E,$$

si on prend B_0 absolument convexe.

Or, par la proposition précédente, on sait que E^*_β est bornologique. Il suffit donc que tout borné de E^*_β soit borné dans E^*_b. Si $\mathscr{B}$ est borné dans E^*_β, l'ensemble des restrictions à E_n des fonctionnelles $\mathcal{C} \in \mathscr{B}$ est borné dans $(E_n)^*_b$, donc équicontinu dans E^*_n. Par conséquent, $\mathscr{B}$ est équicontinu dans E^* et a fortiori borné dans E^*_b.

8. — Signalons enfin que les théorèmes de localisation du chapitre III fournissent d'autres critères de bornation dans le cas où on sait que E est séparé :

— si E est *sq*-complet et si les E_n sont à réseau strict, tout borné de E est contenu dans un E_n et y est borné.

— si les E_n sont à réseau strict, tout borné absolument convexe et *sq*-complet de E est contenu dans un E_n et y est borné, tout ensemble très compact dans E est contenu dans un E_n et y est très compact, toute suite très convergente de E est contenue dans un E_n et y est très convergente.