MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE

Collection in-8°
Cinquième série

Année 1969
Tome XVIII — Fasc. 2

RÉSEAUX
DANS LES ESPACES LINÉAIRES
A SEMI-NORMES

PAR

MARC DE WILDE
Docteur en Sciences

Nec temere, nec timide

Publié avec le concours de la *Fondation Universitaire de Belgique*,
du *Patrimoine de l'Université de Liège* et
du *Ministère de l'Éducation Nationale et de la Culture*

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE

CINQUIÈME SÉRIE
TOME XVIII
FASCICULE 2

RÉSEAUX DANS LES ESPACES LINÉAIRES A SEMI-NORMES

par

MARC DE WILDE
Docteur en Sciences

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE DE BELGIQUE,
DU PATRIMOINE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE ET
DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA CULTURE

SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ :
UNIVERSITÉ
7, PLACE DU XX AOÛT
LIÈGE, BELGIQUE

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 9

CHAPITRE I

Réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes

1. Espaces linéaires à semi-normes 13
2. Réseaux de type $\mathscr{C}$ 14
3. Exemples 18
4. Propriétés de permanence 22

CHAPITRE II

Théorèmes du graphe fermé dans les espaces à réseau

1. Théorèmes du graphe fermé 28
2. Relations linéaires et variantes des théorèmes du graphe fermé . . . 33
3. Nouveaux types de réseaux et applications à des théorèmes du graphe fermé 40
4. Relations entre les différents types de réseaux 46
5. Extension à des limites inductives 47

CHAPITRE III

Théorèmes de localisation et de relèvement

1. Un théorème général 48
2. Réseaux stricts 50
3. Théorèmes de localisation 53
4. Suites très convergentes et ensembles très compacts 55
5. Théorème de relèvement 60

CHAPITRE IV

Réseaux dans les espaces d'opérateurs

1. Espaces d'opérateurs 65
2. Produits tensoriels 77

CHAPITRE V

Quelques applications

1. Localisation d'ensembles d'opérateurs 82
2. Théorèmes d'homomorphisme 87
3. Un théorème sur les bases de Schauder 90
4. Théorèmes du graphe fermé pour des espaces non bornologiques . . . 96

CHAPITRE VI

Ensembles sousliniens et théorème du graphe borélien

1. Ensembles sousliniens 100
2. Propriétés de permanence 102
3. Exemples 107
4. Quelques théorèmes de catégorie 110
5. Théorème du graphe borélien 117
6. Théorèmes de localisation et de relèvement 119
7. Nouvelles propriétés de permanence 123

APPENDICE

Limites inductives d'espaces linéaires à semi-normes 130

BIBLIOGRAPHIE 141
INDEX TERMINOLOGIQUE 144

INTRODUCTION

Le présent travail est consacré à l'étude des réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes et à leur application au théorème du graphe fermé et aux propositions connexes.

Précisons le contenu de ce mémoire en rappelant rapidement les diverses améliorations apportées jusqu'ici au théorème du graphe fermé de S. Banach ([4] (*), 1932). Considérons deux espaces linéaires à semi-normes et un opérateur linéaire agissant de l'un, appelé espace de départ, dans l'autre, appelé espace d'arrivée. Le théorème du graphe fermé vise à conclure que l'opérateur est continu quand son graphe est fermé, moyennant des hypothèses convenables sur les deux espaces.

Le théorème de Banach s'appliquait entre des espaces métriques complets. J. Dieudonné et L. Schwartz ([15], 1950) l'étendent entre des limites strictes d'espaces de Fréchet. La même année, G. Köthe ([24]) généralise leur résultat entre des limites inductives dénombrables mais non strictes.

V. Ptak ([37], 1953) constate que le théorème de Banach est valable pour un espace de départ tonnelé et introduit, pour l'espace d'arrivée, la notion d'espace B-complet. Des travaux ultérieurs de A. P. et W. Robertson et V. Ptak notamment contribuent à développer la théorie des espaces B-complets. Les résultats obtenus dans cette voie donnent une analyse fine de la démonstration du théorème du graphe fermé par le dual, mais n'enrichissent guère ses possibilités d'application. En effet, on connait peu d'exemples d'espaces B-complets et leurs propriétés de permanence sont relativement pauvres.

A. Grothendieck ([19], 1955) démontre qu'on peut prendre l'espace de départ ultrabornologique, l'espace d'arrivée limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet et le graphe de l'opérateur fermé pour les suites. Il conjecture que son énoncé est valable pour une classe d'espaces d'arrivée qui contienne, outre les espaces de Banach, les espaces qui s'en déduisent par les opérations suivantes : produit, somme directe, limites inductive et projective dénombrables, passage à un quotient et à un sous-espace linéaire fermé.

Les premières contributions à la solution du problème de A. Grothendieck sont dues à W. Slowikowski ([49] et [50], 1961) et D. A. Raikov ([41], 1966). Ces auteurs décrivent une classe d'espaces d'arrivée admissibles qui contient les espaces métriques complets et qui est stable pour les opérations décrites plus haut. Toutefois la définition de ces espaces est très compliquée et leur maniement lourd. En outre, le cas où le graphe de l'opérateur est seulement fermé pour les suites n'est pas envisagé.

S'appuyant sur sa théorie de la mesure, L. Schwartz ([45], 1966) établit qu'on peut supposer l'espace de départ ultrabornologique, l'espace d'arrivée souslinien et le graphe de l'opérateur borélien. A. Martineau ([31], 1966) démontre le théorème

(*) Cf. bibliographie.

de L. Schwartz en n'utilisant que des propriétés de catégorie. Les espaces sousliniens jouissent de propriétés de permanence assez larges qui permettent d'en fournir un certain nombre d'exemples intéressants. Toutefois, ils sont nécessairement séparables et, de ce fait, l'énoncé de L. Schwartz ne recouvre pas celui de S. Banach. En outre, il ne permet pas de supposer le graphe fermé pour les suites, hypothèse essentielle dans les applications.

Une tentative d'unification des résultats de S. Banach et de L. Schwartz nous a conduit à introduire les espaces à réseau, qui constituent une classe d'espaces d'arrivée admissibles plus générale que celle des espaces sousliniens. Ces espaces s'avèrent répondre en tout point à la conjecture de A. Grothendieck. Ils possèdent de larges propriétés de permanence, qui s'étendent notamment à des duaux, des espaces d'opérateurs et des produits tensoriels. Les exemples en sont nombreux et s'obtiennent, pour la plupart, par des procédés élémentaires. Enfin la notion de réseau permet d'améliorer les conclusions du théorème du graphe fermé et donne naissance à des propriétés nouvelles de localisation et de relèvement.

* * *

Décrivons succinctement le contenu de notre travail.

Dans le chapitre I, nous introduisons les réseaux de type $\mathscr{C}$ et nous en fournissons quelques exemples simples. Nous démontrons ensuite qu'ils possèdent les propriétés de permanence qui correspondent à la conjecture de A. Grothendieck.

Le chapitre II est consacré au théorème du graphe fermé et aux propositions connexes pour des espaces à réseau de type $\mathscr{C}$. En variant les hypothèses sur le graphe de l'opérateur et sur les espaces considérés, on obtient une profusion d'énoncés que l'introduction de relations linéaires permet d'unifier. L'hypothèse que le graphe de l'opérateur soit fermé est, dans la plupart des cas, remplacée par l'hypothèse beaucoup plus simple à vérifier qu'il soit fermé pour les suites.

Un examen précis des démonstrations montre que la notion de réseau de type $\mathscr{C}$ peut être affaiblie de diverses façons. Nous introduisons les types de réseau correspondant à ces affaiblissements et nous démontrons les théorèmes du graphe fermé et les propriétés de permanence auxquels ils donnent lieu.

Au chapitre III, l'étude des théorèmes du type du graphe fermé est poussée plus loin. Dans leur forme classique, ils expriment qu'un opérateur est continu ou ouvert, donc ils établissent des comparaisons entre les voisinages des espaces entre lesquels il agit. En fait, les voisinages d'un des espaces se comparent aux ensembles du réseau de l'autre. Cette constatation conduit à deux sortes de résultats : des théorèmes de localisation et des théorèmes de relèvement qui correspondent respectivement aux théorèmes du graphe fermé et de l'opérateur ouvert. Pour exprimer les propriétés de relèvement avec une généralité correcte, nous introduisons les notions de suites très convergentes et d'ensembles très compacts, qui nous ont été suggérées par L. Schwartz. D'autre part, les propriétés de localisation s'expriment de manière particulièrement simple pour un type de réseau un peu moins général que les réseaux de type $\mathscr{C}$, les réseaux stricts. Les exemples que nous en donnons et leurs propriétés de permanence leur confèrent une généralité quasi égale à celle des réseaux de type $\mathscr{C}$.

Au chapitre IV, nous montrons comment les propriétés de localisation permettent d'engendrer de nouveaux réseaux, principalement dans les espaces d'opérateurs et, partant, dans les produits tensoriels.

Le chapitre V est consacré à quelques applications des résultats des chapitres précédents.

Nous examinons d'abord le problème suivant. Étant donné un ensemble d'opérateurs linéaires agissant d'un espace E dans un espace F, limite inductive d'une suite d'espaces F_i, dans quelles conditions peut-on affirmer que ces opérateurs agissent de E dans un des F_i et qu'ils sont équicontinus dans cet F_i? La question a été formulée par R. A. Hirschfeld et résolue par G. Köthe ([25]) dans le cas où E et F_i sont des espaces de Fréchet. C'est en fait un problème de localisation et nous montrons que les théorèmes de localisation mentionnés plus haut en fournissent une solution plus générale.

Les théorèmes de relèvement sont appliqués à démontrer des théorèmes d'homomorphisme et permettent notamment de vérifier une conjecture de L. Schwartz sur le relèvement des parties bornées d'un quotient d'un dual d'espace $\mathscr{L}\mathscr{F}$.

Nous illustrons le théorème du graphe fermé proprement dit en démontrant l'équivalence des bases faibles et des bases de Schauder dans les espaces bornologiques séquentiellement complets et à réseau de type $\mathscr{C}$.

Enfin, sur la base d'une idée de A. Mac Intosh ([29]), nous montrons qu'il est parfois possible d'améliorer l'hypothèse d'ultrabornologie imposée dans les théorèmes du graphe fermé, ce qui fournit des possibilités d'application à des espaces usuels non bornologiques.

Au chapitre VI, nous abordons l'étude des ensembles sousliniens et du théorème du graphe borélien de L. Schwartz, dans la version de A. Martineau. Nous démontrons d'abord que l'axiome de Zorn peut y être évité pour l'essentiel des résultats. Nous prouvons que le théorème de L. Schwartz s'étend à des opérateurs à graphe *sq*-borélien donc notamment à graphe fermé pour les suites. Enfin, en faisant intervenir explicitement le crible des espaces sousliniens, nous obtenons des théorèmes de localisation. Ceux-ci débouchent, d'une part, sur de nouvelles propriétés de permanence des espaces sousliniens, concernant principalement les espaces d'opérateurs et les produits tensoriels et, d'autre part, sur un théorème de relèvement des suites très convergentes.

L'exigence d'une théorie suffisamment générale des limites inductives dénombrables nous a conduit à leur consacrer un appendice, où l'on trouve une synthèse des propriétés utilisées dans le texte.

* * *

Dans l'ensemble du travail, nous nous plaçons dans le cadre des espaces linéaires à semi-normes, ou espaces vectoriels topologiques localement convexes et séparés, tels qu'ils sont étudiés dans [17]. Les espaces usuels de l'analyse apparaissent naturellement équipés de semi-normes et c'est à partir de ces semi-normes qu'on y définit des topologies adéquates. Leur étude directe à partir de leurs semi-normes permet de les aborder de manière simple et efficace, sans l'acquis d'un bagage important de topologie. C'est pourquoi elle nous paraît plus aisée pour les applicateurs familiers des espaces de Banach. D'autre part, pour qui connait les espaces vectoriels topologiques généraux, la transposition en termes topologiques découle immédiatement du fait que les semi-normes sont les jauges associées aux voisinages absolument convexes de l'origine.

Nous adoptons la terminologie généralement reçue. Les définitions et les notations universellement admises ne sont pas rappelées. Celles dont l'acception varie selon les auteurs ou dont l'usage n'est pas courant sont explicitées dans le texte. Un index terminologique permet de s'y référer rapidement.

Dans [17], l'analyse fonctionnelle est développée sans qu'il soit fait usage de l'axiome de Zorn ou d'axiomes équivalents. Ici, son intervention est discutée dans tous les résultats obtenus. Nous adoptons à cet égard les conventions suivantes :

a) un énoncé qui disparaît quand on n'utilise pas l'axiome de Zorn est précédé de (Z) ;

b) si son intervention peut être évitée par une hypothèse supplémentaire, cette hypothèse est mentionnée entre crochets ;

c) tout énoncé non précédé de (Z) et sans hypothèse entre crochets en est complètement indépendant.

Bien entendu, dans cette analyse, nous nous sommes appuyé sur les résultats de [17].

* * *

Nous exprimons notre gratitude à Monsieur le Professeur L. Schwartz qui a suivi avec une bienveillante attention le développement de ce travail et nous a encouragé par ses précieux conseils.

Nous sommes redevable à Monsieur le Professeur H. G. Garnir de notre formation en analyse fonctionnelle. Les nombreuses discussions que nous avons eues avec lui et l'intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à nos travaux nous ont été une stimulation constante. Nous l'en remercions vivement.

Nous remercions également Monsieur J. Schmets pour maintes discussions profitables.

CHAPITRE I

RÉSEAUX DANS LES ESPACES LINÉAIRES A SEMI-NORMES

On introduit dans ce chapitre les réseaux de type $\mathscr{C}$. On en donne quelques exemples simples et on examine leurs propriétés de permanence.

1. Espaces linéaires à semi-normes

Dans l'ensemble du travail, nous nous plaçons dans le cadre des *espaces linéaires à semi-normes,* ou *espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés.* L'étude autonome de ces espaces à partir de leur système de semi-normes peut être trouvée dans [17]. Le lecteur qui adopte le point de vue des espaces topologiques généraux trouvera dans les définitions qui suivent le raccord avec les notions topologiques usuelles.

DÉFINITIONS. — Nous appelons *espace linéaire à semi-normes* un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Nous caractérisons sa topologie par un *système de semi-normes,* c'est-à-dire un ensemble filtrant et séparant de semi-normes.

Chaque fois que nous considérons un espace linéaire à semi-normes, nous le supposons muni d'un tel système.

La comparaison des topologies d'un espace s'exprime simplement en termes d'inégalités, au moyen des systèmes de semi-normes associés : si $\mathfrak{t}_{\{p\}}$ est la topologie associée à $\{p\}$, on dit que $\{p\}$ est *plus fort que* $\{q\}$ *dans* E et on note $\{p\} \geqslant \{q\}$ si $\mathfrak{t}_{\{p\}}$ est plus fin que $\mathfrak{t}_{\{q\}}$.

On a $\{p\} \geqslant \{q\}$ *si et seulement si, à tout* $q \in \{q\}$, *il correspond* $C > 0$ *et* $p \in \{p\}$ *tels que*

$$q(f) \leqslant C\, p(f), \ \forall f \in E.$$

En outre $\{p\}$ est *plus faible que* $\{q\}$ *dans* E si $\{q\} \geqslant \{p\}$ et $\{p\}$ est *équivalent à* $\{q\}$ *dans* E si $\{p\} \geqslant \{q\} \geqslant \{p\}$.

Si p est une semi-norme dans E, on appelle *semi-boule ouverte* (resp. *fermée*) *de centre* $f \in E$, *de rayon* $r > 0$ *et de semi-norme* p l'ensemble

$$b_p(f, r) = \{g \in E : p(f - g) < \text{(resp. } \leqslant) \ r\}.$$

Quand $f = 0$, on emploie la notation $b_p(r)$ pour $b_p(0, r)$.

Les semi-boules $b_p(0, r)$, $p \in \{p\}$, $r > 0$, constituent une base de voisinages de 0 dans E pour la topologie $\mathfrak{t}_{\{p\}}$.

Quand on parlera de semi-normes ou de semi-boules dans E, *il s'agira, sauf mention explicite, de semi-normes et de semi-boules relatives au système de semi-normes fixé dans* E.

Pour les diverses autres notions dont on fera usage dans ce travail, nous suivons la terminologie généralement admise. Pour prévenir toute confusion, nous les préciserons chaque fois que ce sera utile.

Signalons dès à présent que nous appelons *sq-complet* ou complet pour les suites un ensemble e dont les suites de Cauchy convergent vers un élément de e. Un ensemble est dit *sq-fermé* ou fermé pour les suites s'il contient les limites de ses suites convergentes dans E. Ainsi, tout ensemble *sq*-complet est *sq*-fermé.

2. Réseaux de type $\mathscr{C}$

Définitions. — Soit E un espace linéaire à semi-normes. On appelle *réseau* de E et on désigne par $\mathscr{R}$ une famille d'ensembles de E,

$$e_{n_1,\ldots,n_k}, \quad k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N},$$

caractérisés par un nombre fini variable d'indices entiers positifs, tels que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1}$$

et

$$e_{n_1,\ldots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e_{n_1,\ldots,n_k},$$

quels que soient $k > 1$ et $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$.

On dit que le réseau $\mathscr{R}$ est *fermé, absolument convexe*, ..., si les différents ensembles qui le constituent sont fermés, absolument convexes, ...

Il est immédiat que

$$e_{n_1,\ldots,n_{k-1}} \subset e_{n_1,\ldots,n_k}$$

quels que soient $k > 1$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

S'il existe dans E une famille d'ensembles $e'_{n_1,\ldots,n_k}$ tels que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e'_{n_1}$$

et

$$e'_{n_1,\ldots,n_{k-1}} \subset \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e'_{n_1,\ldots,n_k},$$

quels que soient $k > 1$ et $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$, on en déduit sans peine un réseau, constitué par les ensembles

$$e_{n_1,\ldots,n_k} = e'_{n_1} \cap e'_{n_1,n_2} \cap \ldots \cap e'_{n_1,\ldots,n_k}.$$

Un réseau $\mathscr{R}$ de E est *de type* $\mathscr{C}$ s'il satisfait à la condition suivante.

Pour toute suite d'indices n_k, $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite de $\lambda_k > 0$ tels que, quels que soient $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$$

converge dans E.

Cette condition sera mentionnée plus loin sous le nom de *condition* ($\mathscr{C}$).

La suite λ_k, $k \in \mathbb{N}$, sera appelée « *suite associée aux* n_k *dans* $\mathscr{R}$ ».

Enfin, quand on parlera d'une *suite d'ensembles de* $\mathscr{R}$, on entendra toujours une suite $e_{n_1, \ldots n_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

On peut souvent substituer à la condition $\mathscr{C}$ une condition plus simple à vérifier.

Lemme. — *Si* B *est absolument convexe, borné et sq-complet, pour toute suite* $f_n \in \mathrm{B}$ *et toute suite de nombres* $c_n \in \mathbb{C}$ *tels que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n | < \infty,$$

la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

converge dans E.

La suite des sommes partielles $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n f_n$ est de Cauchy, car, pour toute semi-norme p,

$$p\,(\sum_{n=r}^{s} c_n f_n) \leqslant \sum_{n=r}^{s} | c_n | \, p(f_n)$$
$$\leqslant \sum_{n=r}^{s} | c_n | \sup_{f \in \mathrm{B}} p(f) \to 0$$

si $\inf (r, s) \to \infty$.

Or, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant c,$$

comme B est absolument convexe, on a

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n f_n \in c\mathrm{B}, \ \forall \mathrm{N},$$

où cB est *sq*-complet, d'où la convergence de la série.

Proposition 1. — *Un réseau* $\mathscr{R}$ *de* E *est de type* $\mathscr{C}$ *si, pour toute suite* n_k, $k \in \mathbb{N}$, *il existe* $\lambda_k > 0$ *tels que, quels que soient* $f_k \in e_{n_1, \ldots, n_k}$, *la suite* $\lambda_k f_k$ *soit contenue dans un borné absolument convexe et sq-complet de* E.

En particulier, si E *est sq-complet, il suffit que cette suite soit bornée.*

De fait, si on pose $\lambda'_k = 2^{-k}\lambda_k$, quels que soient $f_k \in e_{n_1, \ldots, n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda'_k]$, on a

$$\mu_k f_k = c_k \lambda_k f_k,$$

avec

$$\sum_{k=1}^{\infty} | c_k | < \infty,$$

d'où, vu le lemme, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$ converge.

Si E est *sq*-complet et si la suite $\lambda_k f_k$ est bornée, on note qu'elle est contenue dans son enveloppe absolument convexe fermée, qui est *sq*-complète.

Voici encore quelques résultats utiles.

PROPOSITION 2. — *Si* $\mathscr{R}$ *est un réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* E, *on peut lui associer un réseau* $\mathscr{R}'$ *de type* $\mathscr{C}$, *formé d'ensembles* $e'_{n_1,\dots,n_k}$ *radiaux, c'est-à-dire tels que*

$$\lambda e'_{n_1,\dots,n_k} \subset e'_{n_1,\dots,n_k}, \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

Il suffit de substituer aux $e_{n_1,\dots,n_k}$ les ensembles

$$e'_{n_1,\dots,n_k} = \bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \lambda e_{n_1,\dots,n_k}.$$

En effet, on a

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e'_{n_1}$$

et

$$\begin{aligned} e'_{n_1,\dots,n_{k-1}} &= \bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \ \bigcup_{n_k=1}^{\infty} \lambda e_{n_1,\dots,n_k} \\ &= \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e'_{n_1,\dots,n_k}, \end{aligned}$$

quels que soient $k > 1$ et $n_1, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$.

De plus, si, quand $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$ converge, c'est encore vrai quand on substitue aux $e_{n_1,\dots,n_k}$ les $e'_{n_1,\dots,n_k}$, car $f_k \in e'_{n_1,\dots,n_k}$ s'écrit $\nu_k g_k$, avec $\nu_k \in [0, 1]$ et $g_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$, d'où $\mu_k f_k = (\mu_k \nu_k) g_k$, avec $\mu_k \nu_k \in [0, \lambda_k]$ et $g_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$.

PROPOSITION 3. — *Si* $\mathscr{R}$ *est un réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* E, *on peut lui associer un réseau*

$$\mathscr{R}' = \{e'_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

de type $\mathscr{C}$ *et tel que tout ensemble e absorbé par une suite d'ensembles de* $\mathscr{R}$ *soit contenu dans une suite d'ensembles de* $\mathscr{R}'$. *Autrement dit, s'il existe* $\nu_k > 0$ *et* $n_k \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$e \subset \nu_k e_{n_1,\dots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

il existe $n'_k \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$e \subset e'_{n'_1,\dots,n'_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vu la proposition précédente, on peut supposer que $\mathscr{R}$ est formé d'ensembles radiaux.

Le réseau $\mathscr{R}'$ est alors constitué de la façon suivante.

On appelle $e'_{n'_1}$ les ensembles

$$m_1 e_{n_1},\ m_1,\ n_1 \in \mathbb{N},$$

renumérotés avec un seul indice $n'_1 \in \mathbb{N}$.

Les $e'_{n'_1, n'_2}$ s'obtiennent en renumérotant avec un seul indice n'_2 les ensembles

$$m_1 e_{n_1} \cap m_2 e_{n_1, n_2},\ m_2,\ n_2 \in \mathbb{N},$$

où (m_1, n_1) est le couple d'indices associé à n'_1.

De même, quel que soit k, les $e'_{n'_1, \ldots, n'_k}$ sont les ensembles

$$e'_{n'_1, \ldots, n'_{k-1}} \cap m_k e_{n_1, \ldots, n_k},\ m_k,\ n_k \in \mathbb{N},$$

où $n_1, \ldots, n_{k-1}$ sont les indices correspondant à $n'_1, \ldots, n'_{k-1}$.

Les ensembles $e'_{n'_1, \ldots, n'_k}$ constituent visiblement un réseau de E.

Vérifions que ce réseau est de type $\mathscr{C}$.

Fixons une suite n'_k, $k \in \mathbb{N}$ et notons (m_k, n_k) les couples d'indices correspondant aux n'_k.

Comme $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{C}$, aux n_k correspondent λ_k tels que

$$\left.\begin{array}{l} f_k \in e_{n_1, \ldots, n_k} \\ 0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k \text{ converge.}$$

On pose alors $\lambda'_k = \lambda_k / m_k$. Comme visiblement

$$e'_{n'_1, \ldots, n'_k} \subset m_k e_{n_1, \ldots, n_k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

on a

$$\left.\begin{array}{l} f_k \in e'_{n'_1, \ldots, n'_k} \\ 0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda'_k \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k \text{ converge.}$$

Enfin, soit e tel que

$$e \subset \nu_k e_{n_1, \ldots, n_k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Fixons $m_k \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_k \leqslant m_k$. Comme les $e_{n_1, \ldots, n_k}$ sont radiaux, on a alors

$$e \subset \bigcap_{i=1}^{k} m_i e_{n_1, \ldots, n_i},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

où les ensembles du second membre forment une suite $e'_{n'_1, \ldots, n'_k}$ de $\mathscr{R}'$.

Proposition 4. — *Supposons $\mathscr{R}$ de type $\mathscr{C}$. Pour toute suite n_k fixée, il existe une suite de nombres λ_k tels que, quels que soient $p \in \{p\}$ et $\varepsilon > 0$,*

$$\lambda_k e_{n_1, \ldots, n_k} \subset b_p(\varepsilon)$$

pour k assez grand.

Prenons pour λ_k la suite associée aux n_k dans $\mathscr{R}$. Elle répond à la question.

En effet, si ce n'est pas le cas pour p et ε, il existe une suite f_{k_i}, avec $k_i \uparrow \infty$, telle que

$$f_{k_i} \in e_{n_1,\dots,n_{k_i}} \text{ et } \lambda_{k_i} f_{k_i} \notin b_p(\varepsilon).$$

Si $k \neq k_i$ quel que soit i, choisissons f_k arbitrairement dans $e_{n_1,\dots,n_k}$ et posons $\mu_k = 0$. Pour $k = k_i$, posons $\mu_{k_i} = \lambda_{k_i}$.

Vu la définition du réseau, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$$

converge dans E, donc son terme général tend vers 0 et, en particulier, $\lambda_{k_i} f_{k_i} \in b_p(\varepsilon)$ dès que i est assez grand, ce qui est absurde.

3. Exemples

Les espaces usuels de l'analyse fonctionnelle admettent un réseau de type $\mathscr{C}$. Avant d'en donner des exemples, précisons quelques définitions.

DÉFINITIONS. — Si le système de semi-normes de E est dénombrable, on dit que E est *à semi-normes dénombrables*. Il revient au même de dire qu'il est *métrisable*. On peut alors supposer que ses semi-normes sont croissantes :

$$p_1(f) \leqslant p_2(f) \leqslant \dots, \forall f \in \mathrm{E}.$$

Les semi-boules $b_{p_n}(1/n)$ forment alors une suite fondamentale de voisinages de 0.

Un espace à semi-normes dénombrables et sq-complet est un espace *de Fréchet*.

Soit $\mathcal{T}$ une fonctionnelle linéaire dans E. Elle est *continue* s'il existe $p \in \{p\}$ et $\mathrm{C} > 0$ tels que

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant \mathrm{C}\, p(f), \forall f \in \mathrm{E}.$$

Cela revient à dire qu'elle est continue par rapport à la topologie $\mathfrak{t}_{\{p\}}$. Elle est *sq-continue* si $\mathcal{T}(f_m) \to \mathcal{T}(f)$ quand $f_m \to f$ dans E.

Un ensemble $\mathscr{A}$ de fonctionnelles linéaires dans E est *équicontinu* s'il existe $p \in \{p\}$ et $\mathrm{C} > 0$ tels que

$$\sup_{\mathcal{T} \in \mathscr{A}} | \mathcal{T}(f) | \leqslant \mathrm{C}\, p(f), \forall f \in \mathrm{E}.$$

Le *dual* de E est l'ensemble des fonctionnelles linéaires continues dans E. On le note E*. On y définit des systèmes de semi-normes de la manière suivante.

Soit $\mathscr{F}$ un ensemble de bornés de E tel que

— quels que soient $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_\mathrm{N} \in \mathscr{F}$, il existe $\mathrm{B} \in \mathscr{F}$ et $\mathrm{C} > 0$ tels que

$$\mathrm{B}_1, \dots, \mathrm{B}_\mathrm{N} \subset \mathrm{CB}.$$

— $\mathrm{E} = \bigcup_{\mathrm{B} \in \mathscr{F}} \mathrm{B}$.

Les expressions

$$\sup_{f \in \mathrm{B}} | \mathcal{T}(f) |, \mathrm{B} \in \mathscr{F},$$

constituent un système de semi-normes de E^*. On note $E^*_{\mathscr{F}}$ l'espace E^* muni de ce système de semi-normes. Voici les exemples usuels d'ensembles $\mathscr{F}$ et les notations correspondantes pour $E^*_{\mathscr{F}}$:

— E^*_s : $\mathscr{F} = \{$ensembles finis de E$\}$.
— E^*_b : $\mathscr{F} = \{$bornés de E$\}$.
— E^*_{pc} : $\mathscr{F} = \{$précompacts de E$\}$.
— E^*_c : $\mathscr{F} = \{$compacts de E$\}$.
— E^*_{ca} : $\mathscr{F} = \{$compacts absolument convexes de E$\}$.
— E^*_τ : $\mathscr{F} = \{$compacts faibles absolument convexes de E$\}$.

Soient E et F deux espaces linéaires munis respectivement des systèmes de semi-normes $\{p\}$ et $\{q\}$ et soit T un opérateur linéaire de E dans F.

L'opérateur T est *continu* si, à toute semi-norme q de F, il correspond une semi-norme p de E et une constante positive C telles que

$$q(Tf) \leqslant C\, p(f), \; \forall f \in E.$$

Il est *sq-continu* si $Tf_m \to Tf$ dans F quand $f_m \to f$ dans E.

Un ensemble $\mathscr{B}$ d'opérateurs linéaires de E dans F est *équicontinu* si, pour tout $q \in \{q\}$, il existe $p \in \{p\}$ et $C > 0$ tels que

$$\sup_{T\in\mathscr{B}} q(Tf) \leqslant C\, p(f), \; \forall f \in E.$$

L'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F est un espace linéaire, noté $\mathscr{L}(E, F)$. On y définit des systèmes de semi-normes de la même manière que dans E^* : soit $\mathscr{F}$ la famille de bornés de E considérée ci-dessus. Les expressions

$$\sup_{f\in B} q(Tf),$$

où B parcourt $\mathscr{F}$ et q l'ensemble $\{q\}$ des semi-normes de F, constituent un système de semi-normes de $\mathscr{L}(E, F)$. Muni de ces semi-normes, il est noté $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$.

Par analogie avec les conventions relatives à $E^*_{\mathscr{F}}$, à $\mathscr{F}$, ensemble des ensembles finis de E, correspond $\mathscr{L}_s(E, F)$; à $\mathscr{F}$, ensemble des bornés de E, correspond $\mathscr{L}_b(E, F)$; etc.

Exemple 1. — *Tout espace de Fréchet admet un réseau de type $\mathscr{C}$.*

Soit $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, le système de semi-normes de E. Considérons les ensembles

$$e_{n_1,\ldots,n_k} = b_{p_1}(n_1) \cap \ldots \cap b_{p_k}(n_k),\; k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Ils constituent visiblement un réseau de E. De plus, pour toute suite n_k fixée, si $0 \leqslant \mu_k \leqslant 1/(2^k n_k)$ et si $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$ est absolument convergente, donc convergente dans E.

Exemple 2. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et $\mathscr{F}$ de Fréchet, $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$ quel que soit $\mathscr{F}$.*

On en déduit immédiatement le

Corollaire. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables, $E^*_{\mathscr{F}}$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$ quel que soit $\mathscr{F}$.*

Soient E et F munis respectivement des systèmes de semi-normes $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $\{q_j : j \in \mathbb{N}\}$, où l'on peut supposer que $p_i(f) \leqslant p_{i+1}(f)$ pour tout i et tout $f \in \mathrm{E}$. Posons

$$e_n^{(k)} = \{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) : q_k(\mathrm{T}f) \leqslant n\, p_n(f),\ \forall f \in \mathrm{E}\}.$$

Les ensembles

$$e_{n_1,\dots,n_k} = e_{n_1}^{(1)} \cap \dots \cap e_{n_k}^{(k)},\ k,\ n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

constituent un réseau de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ car, si T est continu de E dans F, pour tout k, il existe n_k tel que $\mathrm{T} \in e_{n_k}^{(k)}$.

Soit n_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée arbitrairement.

Si $\mathrm{T}_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite T_k est équicontinue.

En effet, soit k_0 fixé. On a, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$q_{k_0}(\mathrm{T}_k f) \leqslant n_{k_0} p_{n_{k_0}}(f),\ \forall f \in \mathrm{E}.$$

De plus, pour $k < k_0$, il existe $\mathrm{C}_k > 0$ et $\nu_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$q_{k_0}(\mathrm{T}_k f) \leqslant \mathrm{C}_k p_{\nu_k}(f),\ \forall f \in \mathrm{E}.$$

Il existe alors C et p tels que

$$\mathrm{C}_1 p_{\nu_1}(f),\ \dots,\ \mathrm{C}_{k_0-1} p_{\nu_{k_0-1}}(f),\ n_{k_0} p_{k_0}(f) \leqslant \mathrm{C}\, p(f),\ \forall f \in \mathrm{E},$$

donc tels que

$$q_{k_0}(\mathrm{T}_k f) \leqslant \mathrm{C}\, p(f),\ \forall f \in \mathrm{E},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or tout ensemble équicontinu de la forme

$$\{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) : q_i(\mathrm{T}f) \leqslant \mathrm{C}_i\, p_{k_i}(f),\ \forall f \in \mathrm{E},\ \forall i\}$$

est absolument convexe et *sq*-complet dans $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, d'où la conclusion, par la proposition 1, p. 15.

Remarque. — Dans le corollaire, pour obtenir la forme explicite du réseau de $\mathrm{E}^*_{\mathscr{F}}$, il suffit, dans ce qui précède, de remplacer $q_k(\mathrm{T}f)$ par $|\,\mathcal{T}(f)\,|$. En fait, le résultat obtenu est inutilement compliqué et le réseau suivant est de type $\mathscr{C}$ dans $\mathrm{E}^*_{\mathscr{F}}$:

$$e_{n_1} = \{\mathcal{T} \in \mathrm{E}^*_{\mathscr{F}} : |\,\mathcal{T}(f)\,| \leqslant n_1 p_{n_1}(f),\ \forall f \in \mathrm{E}\},\ n_1 \in \mathbb{N},$$

$$e_{n_1,\dots,n_k} = e_{n_1},\ k > 1,\ n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N}.$$

Exemple 3. — *Si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables* E_i, $\mathrm{E}^*_{\mathscr{F}}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ *quel que soit* $\mathscr{F}$.

Soit $\{p_n^{(i)} : n \in \mathbb{N}\}$ le système de semi-normes de chaque E_i. Posons

$$e_n^{(i)} = \{\mathcal{T} \in \mathrm{E}^* : |\,\mathcal{T}(f)\,| \leqslant n\, p_n^{(i)}(f),\ \forall f \in \mathrm{E}_i\}.$$

Les ensembles

$$e_{n_1,\dots,n_k} = e_{n_1}^{(1)} \cap \dots \cap e_{n_k}^{(k)},\ k,\ n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

constituent visiblement un réseau de $\mathrm{E}^*_{\mathscr{F}}$.

Montrons que ce réseau est de type $\mathscr{C}$. Il suffit pour cela de prouver que, pour toute suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, fixée, si $\mathcal{T}_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$, la suite $\mathcal{T}_k$ est équicontinue. En effet, son enveloppe absolument convexe est alors sq-complète dans $E^*_{\mathscr{F}}$ et on conclut par la proposition 1, p. 15.

Pour que l'ensemble des $\mathcal{C}_k$ soit équicontinu dans E, il suffit qu'il le soit dans chaque E_i. Or, pour $k \geqslant i$, les $\mathcal{C}_k$ sont équicontinus dans E_i. De même, $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{i-1}\}$, ensemble fini, y est équicontinu. D'où la conclusion.

EXEMPLE 4. — *Si* E *est sq-complet et s'il est souslinien ou* K-*souslinien, il admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Supposons d'abord E souslinien (cf. p. 100). Il admet alors un réseau

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

tel que, pour toute suite n_k fixée, si $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$, f_k converge vers une limite qui ne dépend que des n_k. Cette suite f_k est donc bornée et on conclut par la proposition 1, p. 15.

Supposons à présent E K-souslinien.

Cela signifie (cf. Martineau [32] ou [33]), qu'il existe un espace E_0 souslinien (qui n'est pas nécessairement un espace vectoriel topologique) et une application φ définie de E_0 dans l'ensemble des compacts de E, tels que

$$E = \bigcup_{f \in E_0} \varphi(f)$$

et que, pour tout $f_0 \in E_0$, tout $p \in \{p\}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de f_0 tel que

$$f \in V \Rightarrow \varphi(f) \subset \varphi(f_0) + b_p(\varepsilon).$$

On vérifie aisément que l'image par φ d'une suite convergente de E_0 est bornée dans E.

En effet, soit $f_n \to f_0$. Pour n assez grand, soit $n > n_0$, on a $f_n \in V$, d'où

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(f_n) \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} \varphi(f_n) \cup [\varphi(f_0) + b_p(\varepsilon)] \subset b_p(r)$$

pour r assez grand.

Soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

le crible de E_0 (cf. p. 100).

Les ensembles $\varphi(e_{n_1,\ldots,n_k})$ forment un réseau de E, puisque

$$E = \varphi(E_0) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \varphi(e_{n_1}).$$

De plus, pour toute suite n_k fixée, si $g_k \in \varphi(e_{n_1,\ldots,n_k})$, il existe $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ tel que $g_k \in \varphi(f_k)$. La suite f_k converge dans E_0, donc son image par φ est bornée. De là, la suite g_k est bornée et on conclut par la proposition 1, p. 15.

REMARQUE. — La liste d'exemples donnée ici est loin d'être exhaustive et vise seulement à illustrer, dans quelques cas essentiels, la notion de réseau. Les propriétés de permanence permettent d'en déduire un certain nombre d'autres. En outre, le cas des espaces d'opérateurs et des produits tensoriels est étudié en détails au chapitre IV.

UN CONTRE-EXEMPLE. — En utilisant l'axiome de Zorn et en recourant anticipativement au théorème du graphe fermé, on peut donner un exemple d'espace à semi-normes dénombrables qui n'admet pas de réseau de type $\mathscr{C}$.

Soit E un espace de Fréchet et soit $\mathcal{T}$ une fonctionnelle linéaire *non continue* dans E. On peut affirmer l'existence d'une telle fonctionnelle *en s'appuyant sur l'axiome de Zorn.*

En effet, on sait alors qu'il existe une base de Hamel f_α, $\alpha \in \mathscr{I}$, de E. Si $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ désigne le système de semi-normes de E, on définit $\mathcal{T}$ par

$$\mathcal{T}(f_{\alpha_i}) = i\,[1 + p_i(f_{\alpha_i})],$$

pour une suite fixée α_i d'indices α, et

$$\mathcal{T}(f_\alpha) = 0$$

si $\alpha \neq \alpha_i$, pour tout i.

Considérons les expressions

$$p'_k(f) = \sup\,(p_k(f), \mid \mathcal{T}(f) \mid),\ k \in \mathbb{N}.$$

Il est immédiat que ce sont des semi-normes. Elles sont filtrantes : si les semi-normes p_k sont croissantes, les p'_k le sont aussi. Enfin,

$$\{p'_k : k \in \mathbb{N}\} \geqslant \{p_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

L'opérateur identité J de $E_{\{p_k\}}$ dans $E_{\{p'_k\}}$ est à graphe fermé, puisque son inverse est continu.

Si $E_{\{p'_k\}}$ admettait un réseau de type $\mathscr{C}$, comme $E_{\{p_k\}}$ est de Fréchet, vu le théorème 1, p. 28, J serait continu et, dès lors, $\mathcal{T}$ serait continu dans $E_{\{p_k\}}$, ce qui est absurde.

4. Propriétés de permanence

La propriété d'avoir un réseau de type $\mathscr{C}$ est stable pour les opérations usuelles entre espaces.

Examinons d'abord les opérations sur un seul espace.

DÉFINITIONS. — Nous désignons par E_b^- l'espace E muni du système de semi-normes associé à ses ensembles absolument convexes fermés et bornivores.

L'espace E est *évaluable* si les systèmes de semi-normes de E et de E_b^- sont équivalents, donc si tout tonneau bornivore de E est d'intérieur non vide.

L'espace E_a désigne E muni du système de *semi-normes affaiblies*

$$\sup_{i \leqslant N} \mid \mathcal{T}_i(f) \mid,$$

où $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_N \in E^*$.

L'espace E est à *semi-normes représentables* si toute semi-boule fermée $b_p(r)$, $p \in \{p\}$, $r > 0$, est fermée dans E_a. Si on utilise l'axiome de Zorn, on sait qu'il en est toujours ainsi. Si on le rejette, on doit le vérifier, ce qui, dans les espaces usuels, ne présente aucune difficulté.

L'espace E est *séparable par semi-norme* si, pour tout $p \in \{p\}$, il contient un ensemble dénombrable D tel que, pour tout $f \in E$, il existe $f_m \in D$ tel que $p(f - f_m) \to 0$.

L'espace E_a est toujours séparable par semi-norme.

En outre, [si E est séparable par semi-norme], tout ensemble fermé et absolument convexe dans E est fermé dans E_a et, en particulier, E est à semi-normes représentables.

Ainsi, [si E est séparable par semi-norme], on a $E_b^- = (E_a)_b^-$.

En effet, par le théorème de Mackey, tout ensemble borné dans E_a est borné dans E, donc dans E_b^-.

THÉORÈME 1. — *Supposons que* E *admette un réseau de type* $\mathscr{C}$,

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

a) *Si* L *est un sous-espace linéaire sq-fermé de* E,

$$\mathscr{R}_L = \{e_{n_1,\dots,n_k} \cap L : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est de type $\mathscr{C}$ *dans* L *muni du système de semi-normes induit par* E.

b) *Si* T *est sq-continu de* E *dans* F,

$$T\mathscr{R} = \{Te_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est de type $\mathscr{C}$ *dans* TE *muni du système de semi-normes induit par* F.

c) $\mathscr{R}$ *est de type* $\mathscr{C}$ *dans* E_b^-.

Signalons immédiatement les principaux corollaires.

COROLLAIRE 1. — *Si* $\{p\} \leqslant \{q\}$ *dans* E, *tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* $E_{\{q\}}$ *est de type* $\mathscr{C}$ *dans* $E_{\{p\}}$.

COROLLAIRE 2. — *Si* E *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *tout quotient séparé de* E *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

COROLLAIRE 3. — *Tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* E_a *est de type* $\mathscr{C}$

— *dans* E [*si* E *est à semi-normes représentables*],

— *dans* E_b^- [*si* E *est à semi-normes représentables*].

COROLLAIRE 4. — *Si* E *est tonnelé, quel que soit* $\mathscr{F}$,

— *tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* E_s^* *est de type* $\mathscr{C}$ *dans* $E_{\mathscr{F}}^*$,

— *tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *dans* $\mathscr{L}_s(E, F)$ *est de type* $\mathscr{C}$ *dans* $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$.

En effet, tout ensemble borné dans E_s^* (resp. dans $\mathscr{L}_s(E, F)$) est équicontinu, donc borné dans $E_{\mathscr{F}}^*$ (resp. dans $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$) et les semi-boules fermées relatives aux semi-normes

$$\sup_{f \in B} |\,\mathcal{C}(f)\,| \text{ (resp. } \sup_{f \in B} q(Tf))$$

sont visiblement fermées dans E_s^* (resp. $\mathscr{L}_s(E, F)$).

Démonstration du théorème 1. — Les points a) et b) sont immédiats.

Passons à c).

Soit n_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soit λ_k la suite qui lui correspond dans $\mathscr{R}$.

Si $\lambda'_k = 2^{-k}\lambda_k$, prouvons que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$ converge dans E_b^-, quels que soient $\mu_k \in [0, \lambda'_k]$ et $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$.

On sait que cette série converge dans E. Soit f sa limite.

La série converge aussi vers f dans E_b^-. De fait, comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \mu_k f_k$$

converge dans E, la suite $2^k \mu_k f_k$ est bornée dans E. Elle est alors bornée dans E_b^-.

De là, pour toute semi-norme π de E_b^-,

$$\pi\left(\sum_{k=r}^{s} \mu_k f_k\right) \leqslant \sum_{k=r}^{s} 2^{-k} \sup_m \pi(2^m \mu_m f_m) \leqslant \varepsilon$$

pour $r, s \geqslant N(\varepsilon)$. Comme $b_\pi(\varepsilon) = \{f : \pi(f) \leqslant \varepsilon\}$ est fermé dans E, en passant à la limite sur s, il vient

$$\pi\left(\sum_{k=1}^{r-1} \mu_k f_k - f\right) = \pi\left(\sum_{k=r}^{\infty} \mu_k f_k\right) \leqslant \varepsilon,$$

d'où $\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$ converge vers f dans E_b^-.

Passons aux opérations portant sur une suite d'espaces.

THÉORÈME 2. — *Si* E *est l'union d'une suite d'espaces, images par des opérateurs sq-continus d'espaces à réseau de type* $\mathscr{C}$, E *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Vu le théorème 1, b), chaque E_n est muni d'un réseau de type $\mathscr{C}$,

$$\mathscr{R}_n = \{e^{(n)}_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

L'espace E admet lui-même un réseau $\mathscr{R}$, formé des ensembles

$$e_{n_1} = E_{n_1},\ n_1 \in \mathbb{N},$$

et

$$e_{n_1,\ldots,n_k} = e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k},\ k > 1,\ n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Ce réseau est visiblement de type $\mathscr{C}$, puisque les séries considérées dans $\mathscr{R}$ ne diffèrent de celles considérées dans les $\mathscr{R}_n$ que par addition d'un élément.

COROLLAIRE. — *Toute limite inductive dénombrable d'espaces à réseau de type* $\mathscr{C}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

THÉORÈME 3. — *Soient* E_n *une suite d'espaces emboîtés en décroissant et tels que, pour tout* n, *l'opérateur identité de* E_{n+1} *dans* E_n *soit sq-continu.*

Si chaque E_n *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *la limite projective des* E_n *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Rappelons que, si chaque E_n est muni d'un système de semi-normes $\mathscr{P}_n$, on définit un système de semi-normes de la limite projective E des E_n en restreignant à E les semi-normes des différents $\mathscr{P}_n$ et en filtrant les semi-normes obtenues. On voit immédiatement qu'une suite f_n tend vers f dans E si elle tend vers f dans chaque E_n.

Soit

$$\mathscr{R}_n = \{e^{(n)}_{n_1, \dots, n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de type $\mathscr{C}$ dans chaque E_n.

Considérons les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = e^{(1)}_{n_1} \cap E, \ n_1 \in \mathbb{N},$$

puis les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1, (n_2, n'_1)} = e^{(1)}_{n_1, n_2} \cap e^{(2)}_{n'_1} \cap E, \ n_1, n_2, n'_1 \in \mathbb{N},$$

où on renumérote les couples (n_2, n'_1) avec un seul indice parcourant $\mathbb{N}$, puis

$$\mathscr{E}_{n_1, (n_2, n'_1), (n_3, n'_2, n''_1)} = e^{(1)}_{n_1, n_2, n_3} \cap e^{(2)}_{n'_1, n'_2} \cap e^{(3)}_{n''_1}, \ n_1, n_2, n_3, n'_1, n'_2, n''_1 \in \mathbb{N},$$

où on numérote (n_3, n'_2, n''_1) avec un seul indice parcourant $\mathbb{N}$, et ainsi de suite.

Ces ensembles constituent visiblement un réseau $\mathscr{R}$ de E.

Démontrons que $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{C}$ dans E.

Soient $n_1, (n_2, n'_1), (n_3, n'_2, n''_1), \dots$ fixés. Aux n_k correspondent $\lambda_k > 0$ tels que, si $f_k \in e^{(1)}_{n_1, \dots, n_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$, $\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$ converge dans E_1. De même, aux n'_k correspondent $\lambda'_k > 0$ tels que, si $f_k \in e^{(2)}_{n'_1, \dots, n'_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda'_k$, $\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$ converge dans E_2, et ainsi de suite.

Posons alors

$$\nu_1 = \lambda_1, \ \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda'_1), \ \nu_3 = \inf(\lambda_3, \lambda'_2, \lambda''_1), \ \dots .$$

Si $f_1 \in \mathscr{E}_{n_1}$, $f_2 \in \mathscr{E}_{n_1, (n_2, n'_1)}$, ... et si $0 \leqslant \mu_k \leqslant \nu_k$, la suite $\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$ converge dans E_n quel que soit n, car $\sum_{k=1}^{n-1} \mu_k f_k \in E \subset E_n$ et $\sum_{k=n}^{N} \mu_k f_k$ converge dans E_n.

Soit $f^{(n)}$ sa limite dans chaque E_n. Comme l'opérateur identité de E_{n+1} dans E_n est *sq*-continu, pour tout n, $\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$ converge dans E_n à la fois vers $f^{(n)}$ et $f^{(n+1)}$, d'où $f^{(n)} = f^{(n+1)}$. Si f est la valeur commune des $f^{(n)}$, on a

$$f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E$$

et $\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k$ tend vers f dans E, d'où la conclusion.

REMARQUE. — On notera qu'au lieu de supposer que l'opérateur identité de E_{n+1} dans E_n soit *sq*-continu, il suffit de le supposer à graphe *sq*-fermé.

En effet, cela suffit pour que

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k \to f^{(n)} \text{ dans } E_n \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k \to f^{(n+1)} \text{ dans } E_{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{(n)} = f^{(n+1)}.$$

THÉORÈME 4. — *Tout produit dénombrable d'espaces à réseau de type $\mathscr{C}$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$.*

Soient E_n les espaces et

$$\mathscr{R}_n = \{e^{(n)}_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de type $\mathscr{C}$ dans chacun d'eux.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = e^{(1)}_{n_1} \times E_2 \times E_3 \times \ldots, n_1 \in \mathbb{N},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1)} = e^{(1)}_{n_1,n_2} \times e^{(2)}_{n'_1} \times E_3 \times \ldots, n_1, n_2, n'_1 \in \mathbb{N},$$

où (n_2, n'_1) sont numérotés par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$,

$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1),(n_3,n'_2,n''_1)} = e^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \times e^{(2)}_{n'_1,n'_2} \times e^{(3)}_{n''_1} \times E_4 \times \ldots, n_1, n_2, n_3, n'_1, n'_2, n''_1 \in \mathbb{N},$$

où (n_3, n'_2, n''_1) sont numérotés par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$, et ainsi de suite, constituent visiblement un réseau $\mathscr{R}$ de

$$E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Démontrons que $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{C}$.

Soient $n_1, (n_2, n'_1), (n_3, n'_2, n''_1), \ldots$ fixés. Il existe $\lambda_k > 0$ tels que, si $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$ et $f^{(1)}_k \in e^{(1)}_{n_1,\ldots,n_k}$, la série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f^{(1)}_k$ converge dans E_1. Il existe aussi $\lambda'_k > 0$ tels que si $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda'_k$ et si $f^{(2)}_k \in e^{(2)}_{n'_1,\ldots,n'_k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f^{(2)}_k$ converge dans E_2, et ainsi de suite.

Soient alors

$$\nu_1 = \lambda_1, \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda'_1), \nu_3 = \inf(\lambda_3, \lambda'_2, \lambda''_1), \ldots .$$

Si $0 \leqslant \mu_k \leqslant \nu_k$ et si

$$f_k = (f^{(1)}_k, f^{(2)}_k, \ldots) \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1),\ldots,(n_k,n'_{-1},\ldots)},$$

la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$$

converge dans E puisque chaque série $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f^{(i)}_k$ converge dans E_i.

Corollaire. — *Toute somme directe dénombrable d'espaces à réseau de type $\mathscr{C}$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$.*

Il suffit de noter que c'est la limite inductive des produits finis $\prod_{i=1}^{n} E_i$, $n \in \mathbb{N}$, des espaces E_i considérés et d'appliquer le théorème 4 et le corollaire du théorème 2, p. 24.

CHAPITRE II

THÉORÈMES DU GRAPHE FERMÉ DANS LES ESPACES A RÉSEAU

On développe dans ce chapitre les améliorations que la notion de réseau de type $\mathscr{C}$ permet d'apporter au théorème du graphe fermé et aux théorèmes analogues (théorème de l'opérateur ouvert, ...). L'introduction des relations linéaires fournit un essai d'unification des divers résultats obtenus. Enfin, on examine quelques variantes de la définition des réseaux et on établit les théorèmes qui leur correspondent.

Théorèmes du graphe fermé

Rappelons quelques définitions et quelques faits élémentaires utilisés plus loin.

Définitions. — Un ensemble $e \subset \mathrm{E}$ est *maigre* dans E s'il est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide dans E.

Il est immédiat que *toute union dénombrable d'ensembles maigres est maigre.*

Donc, si $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ n'est pas maigre, un des e_n n'est pas maigre.

Si e n'est pas maigre, l'intérieur de $\bar{e}$ n'est pas vide.

En effet, e est contenu dans le fermé $\bar{e}$.

L'espace E est *de Baire* si tout ouvert non vide de E est non maigre.

On sait que *tout espace de Fréchet est de Baire.*

L'espace E est *bornologique* si tout ensemble absolument convexe bornivore de E est d'intérieur non vide. Il est *ultrabornologique* s'il est limite inductive d'une famille d'espaces de Banach. Notons que *tout espace bornologique sq-complet est ultrabornologique.*

Soit d'autre part T un opérateur linéaire de E dans F. On a défini p. 19 sa continuité. Il est *ouvert* si, pour tout ouvert ω de E, $\mathrm{T}\omega$ est ouvert dans F. Évidemment, on a alors $\mathrm{TE} = \mathrm{F}$. C'est un *homomorphisme* s'il est à la fois continu et ouvert. Enfin, on désignera par $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ le graphe de T.

Passons maintenant aux théorèmes annoncés.

Théorème 1. — *Si* E *est de Fréchet et si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *tout opérateur linéaire à graphe sq-fermé de* E *dans* F *est continu.*

Corollaire 1. — *Si* E *est ultrabornologique et si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *tout opérateur linéaire à graphe sq-fermé de* E *dans* F *est continu.*

Le corollaire se déduit facilement du théorème : si E est limite inductive des espaces de Banach E_α, pour que T soit continu de E dans F, il suffit que sa restriction

T_α à chaque E_α soit continue de E_α dans F. Or il est trivial que T_α est à graphe sq-fermé dans $E_\alpha \times F$, donc il vérifie le théorème 1.

COROLLAIRE 2. — *Si* E *est ultrabornologique et si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, *tout opérateur* T *continu de* F *sur* E *est un homomorphisme.*

Soit $N(T) = \{f \in F : Tf = 0\}$ le noyau de T. Il est fermé dans F, donc $F/N(T)$ est séparé et admet un réseau de type $\mathscr{C}$. Si $\widetilde{T}$ est l'opérateur de $F/N(T)$ sur E déduit de T, $\widetilde{T}$ est continu, donc à graphe sq-fermé. Dès lors, $\widetilde{T}^{-1}$ est aussi à graphe sq-fermé et, par le corollaire 1, il est continu.

REMARQUES. — a) Ces deux corollaires constituent, du point de vue des applications, les résultats essentiels de ce chapitre.

b) Une condition usuelle pour que E soit ultrabornologique est qu'il soit bornologique et sq-complet.

Dans ce cas, on peut donner des corollaires une démonstration élémentaire en ce sens qu'elle évite le concept de limite inductive. En effet, si E est bornologique, pour que T soit continu de E dans F, il suffit que, pour toute suite bornée $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble $\{Tf_n : n \in \mathbb{N}\}$ soit borné dans F.

Soient B l'enveloppe absolument convexe fermée de la suite et E_B l'enveloppe linéaire de B normée par la norme associée à B. Comme E est sq-complet, B est sq-complet et E_B est de Banach. Or, si le graphe de T est sq-fermé dans $E \times F$, le graphe de sa restriction à E_B est sq-fermé dans $E_B \times F$. Donc, par le théorème 1, la restriction de T à E_B est continue de E_B dans F et $\{Tf_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans F, ce qui prouve le corollaire 1.

La démonstration du corollaire 2 reste inchangée.

Démonstration du théorème 1. — Soit T linéaire et à graphe sq-fermé de E dans F et soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de type $\mathscr{C}$ de F.

Comme $E = T_{-1}F$, on a visiblement

$$E = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} T_{-1}e_{n_1}.$$

De plus, quels que soient $k > 1$, $n_1, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$,

$$T_{-1}e_{n_1,\dots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} T_{-1}e_{n_1,\dots,n_k}.$$

Comme E est de Baire, on peut choisir n_1 tel que $T_{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre, puis, pour cet n_1, on peut choisir n_2 tel que $T_{-1}e_{n_1,n_2}$ ne soit pas maigre et ainsi de suite.

Soit n_k la suite ainsi déterminée.

Soit β une semi-boule fermée centrée en 0 dans F. Pour tout k,

$$T_{-1}e_{n_1,\dots,n_k} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} T_{-1}(e_{n_1,\dots,n_k} \cap m\beta),$$

donc il existe m_k tel que

$$T_{-1}(e_{n_1,\dots,n_k} \cap m_k\beta)$$

ne soit pas maigre.

Aux n_k, associons $\lambda_k > 0$ tels que toute série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k, \; g_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}, \; 0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k,$$

converge dans F. Soient alors $\nu_k \in [0, \lambda_k]$ tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k m_k \leqslant \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est fixé arbitrairement.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_k = \nu_k \mathrm{T}_{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m_k\beta) = \mathrm{T}_{-1}\,[(\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap (\nu_k m_k \beta)]$$

ne sont pas maigres. Leur adhérence contient donc un point intérieur : $\overline{\mathscr{E}}_k \supset f_k + b_k$, où b_k est une semi-boule de E, de centre 0.

On peut sans restriction supposer que $f_k \in \mathscr{E}_k$. De fait, comme $f_k \in \overline{\mathscr{E}}_k$, on a

$$\left(f_k + \frac{1}{2}\, b_k\right) \cap \mathscr{E}_k \neq \varnothing$$

et, si f'_k appartient à cette intersection,

$$f'_k + \frac{1}{2}\, b_k \subset \overline{\mathscr{E}}_k.$$

De plus, si on désigne par p_k, $k \in \mathbb{N}$, les semi-normes de E, on peut supposer que $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$ pour tout k, de sorte que, si $g_k \in b_k$ pour tout k, on a $g_k \to 0$ dans E.

Soit donc

$$\overline{\mathscr{E}}_k \supset f_k + b_k,$$

où $f_k \in \mathscr{E}_k$ et $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$ pour tout k.

Démontrons que

$$\overline{\mathrm{T}_{-1}\beta} \subset (1 + 2\varepsilon)\mathrm{T}_{-1}\beta.$$

Comme $\mathrm{E} = \bigcup_{m=1}^{\infty} m\mathrm{T}_{-1}\beta$, $\mathrm{T}_{-1}\beta$ n'est pas maigre et $\overline{\mathrm{T}_{-1}\beta}$ contient une semi-boule b de centre 0 dans E. On aura donc ainsi établi que T est continu.

Soit $f \in \overline{\mathrm{T}_{-1}\beta}$. Il existe $g_1 \in \mathrm{T}_{-1}\beta$, tel que $f - g_1 \in b_1$. On a donc

$$g_1 \in \mathrm{T}_{-1}\beta \;;\; f - g_1 \in b_1 \;;\; f - g_1 + f_1 \in \overline{\mathscr{E}}_1.$$

Il existe alors $g_2 \in \mathscr{E}_1$ tel que $f - g_1 + f_1 - g_2 \in b_2$, d'où

$$g_2 \in \mathscr{E}_1 \;;\; f - g_1 + f_1 - g_2 \in b_2 \;;\; f - g_1 + f_1 - g_2 + f_2 \in \overline{\mathscr{E}}_2.$$

De proche en proche, on détermine ainsi une suite g_k telle que

$$g_k \in \mathscr{E}_{k-1} \;;\; f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k-1} f_i \in b_k \;;\; f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} f_i \in \overline{\mathscr{E}}_k.$$

Par construction, on a

$$\mathrm{T}f_i \in \nu_i e_{n_1,\ldots,n_i}$$

pour tout i, donc

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}f_i$$

converge dans F. De même

$$\mathrm{T}g_i \in \nu_{i-1} e_{n_1,\ldots,n_{i-1}},$$

pour tout $i > 1$, d'où

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i$$

converge également dans F. Enfin, on a

$$\mathrm{T}g_1 \in \beta \; ; \; \mathrm{T}g_i \in \nu_{i-1} m_{i-1}\beta, \; \forall i > 1 \; ; \; \mathrm{T}f_i \in \nu_i m_i \beta, \; \forall i \geqslant 1,$$

d'où, comme on a supposé β fermé,

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{T}f_i \rightarrow g \in (1 + 2\varepsilon)\beta.$$

Vu le choix des b_k, $\sum_{i=1}^{k} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} f_i$ converge vers f dans E, d'où, comme T est à graphe sq-fermé,

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} f_i \rightarrow f \\ \sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{T}f_i \rightarrow g \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{T}f = g.$$

Il en résulte que $\mathrm{T}f \in (1 + 2\varepsilon)\beta$ et $f \in (1 + 2\varepsilon)\mathrm{T}_{-1}\beta$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Si on suppose que les ensembles qui constituent le réseau de F sont absolument convexes, ce qui est toujours le cas en pratique, la démonstration se simplifie de façon importante et se réduit, à des variantes mineures près, à la démonstration de la proposition 4, p. 44, dans le cas des réseaux de type $\mathscr{S}\mathscr{E}$.

L'hypothèse que E soit de Fréchet a été utilisée de deux manières : on a utilisé le fait qu'il est alors de Baire, puis le fait qu'il est à semi-normes dénombrables.

On peut éviter cette dernière hypothèse et on est conduit au théorème suivant.

Théorème 2. — *Soit* T *un opérateur linéaire défini d'une partie de* E *dans* F, $\mathscr{D}$(T) *son ensemble de définition.*

Si $\mathscr{D}$(T) *n'est pas maigre dans* E *et si* T *est à graphe fermé et* F *à réseau de type* $\mathscr{C}$, *alors* $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$ *et* T *est continu.*

Si E *est à semi-normes dénombrables, il suffit même que le graphe de* T *soit sq-fermé au lieu d'être fermé.*

Ainsi, on voit que l'hypothèse sur le graphe de T est lié au caractère dénombrable ou non des semi-normes de E.

On procède comme dans la démonstration précédente.

Ici, si

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

désigne encore un réseau de type $\mathscr{C}$ dans F, on a

$$\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{T}_{-1}e_{n_1},$$

d'où, comme $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ n'est pas maigre, un des $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1}$ n'est pas maigre. On peut donc de nouveau déterminer une suite de n_k tels que les $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ ne soient pas maigres, puis, si β est une semi-boule fermée de centre 0 dans F, des m_k tels que

$$\mathrm{T}_{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m_k\beta)$$

ne soit maigre pour aucun k.

Si E est à semi-normes dénombrables, la fin de la démonstration est inchangée.

S'il ne l'est pas, on fixe ν_k, $\mathscr{E}_k$, f_k, b_k comme dans la démonstration précédente, à cette différence près que la précision $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$ disparaît.

On en arrive ainsi à démontrer que

$$\overline{\mathrm{T}_{-1}\beta} \subset (1 + 2\varepsilon)\mathrm{T}_{-1}\beta.$$

Cela prouve non seulement que T est continu, mais aussi que $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$, car, si $\mathrm{T}_{-1}\beta$ est d'intérieur non vide, c'est aussi le cas pour $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ d'où, comme il est linéaire, $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$.

Soit $f \in \overline{\mathrm{T}_{-1}\beta}$. On détermine de proche en proche g_k tels que

$$g_1 \in \mathrm{T}_{-1}\beta \; ; \; f - g_1 \in b_1 \; ; \; f - g_1 + f_1 \in \overline{\mathscr{E}}_1$$

et

$$g_k \in \mathscr{E}_{k-1} \; ; \; f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k-1} f_i \in b_k \; ; \; f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} f_i \in \overline{\mathscr{E}}_k,$$

pour tout $k > 1$.

La suite

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{T}f_i$$

converge encore dans F et sa limite g est contenue dans $(1 + 2\varepsilon)\beta$.

Par contre, on ignore si

$$\sum_{i=1}^{k} g_i - \sum_{i=1}^{k-1} f_i$$

converge vers f.

Montrons que néanmoins

$$(f, g) \in \overline{\mathscr{G}(\mathrm{T})} = \mathscr{G}(\mathrm{T}).$$

On en déduira que $\mathrm{T}f = g$ et $f \in (1 + \varepsilon)\mathrm{T}_{-1}\beta$.

Soient b et b' des semi-boules de centre 0 dans E et F respectivement. On a

$$f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} f_i \in \overline{\mathscr{E}}_k \subset \mathscr{E}_k + b, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

donc il existe $h_k \in \mathscr{E}_k$, tel que

$$f - \sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{i=1}^{k} f_i - h_k \in b, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{T}g_i - \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{T}f_i \to g$$

et

$$\mathrm{T}h_k, \mathrm{T}f_k \to 0$$

dans F si $k \to \infty$ puisque les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{T}h_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{T}f_k$$

convergent dans F. Donc, pour k assez grand,

$$g - \mathrm{T}\,(\sum_{i=1}^{k} g_i - \sum_{i=1}^{k} f_i + h_k) \in b'$$

et

$$[(f, g) + (b, b')] \cap \mathscr{G}(\mathrm{T}) \neq \varnothing.$$

Comme b et b' sont arbitraires, il en résulte que $(f, g) \in \overline{\mathscr{G}(\mathrm{T})}$, d'où la conclusion.

Remarque. — On pourrait formuler ici des corollaires analogues à ceux du théorème 1. Ils trouveront leur place dans les propositions qui suivent.

2. Relations linéaires et variantes des théorèmes du graphe fermé

Les théorèmes du paragraphe précédent généralisent le théorème du graphe fermé dans sa forme habituelle, c'est-à-dire en supposant l'opérateur à graphe fermé ou *sq*-fermé et en imposant aux espaces E et F des conditions convenables.

On a toutefois des résultats plus généraux comme celui-ci : *si* E *est de Fréchet,* T *linéaire de* E *dans* F *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *à réseau de type* $\mathscr{C}$, *alors* T *est borné de* E *dans* F.

Il n'y a plus d'hypothèses sur F mais seulement sur E et $\mathscr{G}(\mathrm{T})$. Ce théorème est plus général que le théorème 1, p. 28. En effet, E, de Fréchet, admet un réseau de type $\mathscr{C}$, donc aussi E $\times$ F et enfin $\mathscr{G}(\mathrm{T})$, s'il est *sq*-fermé dans E $\times$ F.

Toutefois, si on formule l'énoncé correspondant en supposant $\mathscr{D}(T)$ non maigre, on n'obtient pas une généralisation du théorème 2, p. 31, car on ne peut pas affirmer, sous ses hypothèses, que $E \times F$ admette un réseau de type $\mathscr{C}$.

L'introduction des relations linéaires va permettre de formuler un énoncé assez général pour contenir l'un et l'autre cas. On verra plus loin qu'il a un intérêt propre, en dehors de ces deux cas particuliers.

Définitions. — Soient E et F deux espaces linéaires à semi-normes. Une *relation linéaire de* E *dans* F est une relation R telle que

$$\{(f, g) \in E \times F : fRg\}$$

soit un sous-espace linéaire de $E \times F$. On note $\mathscr{G}(R)$ ce sous-espace et on l'appelle *graphe* de R.

On pose

$$R(f) = \{g : fRg\}, \quad R(e) = \bigcup_{f \in e} R(f), \quad R^{-1}(g) = \{f : fRg\}$$

et

$$R^{-1}(e') = \bigcup_{g \in e'} R^{-1}(g).$$

La relation R *est linéaire si et seulement si*

$$c_i \in \mathbb{C},\ f_i R g_i,\ i = 1, \dots, n \ \Rightarrow\ (\sum_{i=1}^{n} c_i f_i) R (\sum_{i=1}^{n} c_i g_i).$$

De fait, la condition se traduit par

$$c_i \in \mathbb{C},\ (f_i, g_i) \in \mathscr{G}(R),\ i = 1, \dots, n \ \Rightarrow\ (\sum_{i=1}^{n} c_i f_i, \sum_{i=1}^{n} c_i g_i) \in \mathscr{G}(R),$$

ce qui signifie que $\mathscr{G}(R)$ est linéaire.

La relation R est *continue* si, pour tout ouvert $\omega \subset F$, $R^{-1}(\omega)$ est un ouvert de E.

Elle est *sq-continue* si, pour toute suite $f_n \to f$ dans E, il existe $g_n, g \in F$ tels que $g_n \to g$ avec $f_n R g_n$ pour tout n et fRg.

On appelle *relation inverse* de R et on note R^{-1} la relation définie de F dans E par

$$g R^{-1} f \Leftrightarrow fRg.$$

Soient R une relation linéaire de E dans F, R' une relation linéaire de F dans G. On appelle *composée* $R' \circ R$ de R et R' la relation définie par

$$f R' \circ R h \Leftrightarrow fRg,\ gR'h \text{ pour au moins un } g \in F.$$

C'est visiblement une relation linéaire : si on a $f_i R' \circ R h_i$, il existe g_i tels qu'on ait $f_i R g_i$ et $g_i R' h_i$, d'où

$$(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i) R (\sum_{i=1}^{n} c_i g_i) \quad \text{et} \quad (\sum_{i=1}^{n} c_i g_i) R' (\sum_{i=1}^{n} c_i h_i),$$

soit

$$(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i) \mathrm{R}' \circ \mathrm{R} (\sum_{i=1}^{n} c_i h_i),$$

quels que soient $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.

Les opérateurs linéaires définis d'une partie de E dans F ou d'une partie de F dans E sont des relations linéaires particulières :

a) Si T est linéaire de E dans F, la relation R_T définie par

$$f \mathrm{R}_\mathrm{T} g \Leftrightarrow \mathrm{T}f = g$$

est linéaire ; son graphe est celui de T ; elle est continue de E dans F si et seulement si c'est le cas pour T.

b) Si T est linéaire de F dans E, la relation R_T définie par

$$f \mathrm{R}_\mathrm{T} g \Leftrightarrow \mathrm{T}g = f$$

est linéaire ; son graphe est celui de T, à l'ordre des facteurs près. Elle est continue de E dans F si et seulement si T est ouvert.

c) Si R est une relation linéaire de E dans F et T un opérateur linéaire de F dans G, T o R est un opérateur linéaire de E dans G si $\mathrm{R}(0) \subset \mathrm{T}_{-1}(0)$ et $\mathrm{R}_{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}$.

Puisque $\mathrm{R}_{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}$, à tout $f \in \mathrm{E}$ correspond au moins un élément h de G. Il reste à vérifier que

$$f \mathrm{T} \circ \mathrm{R} h \text{ et } f \mathrm{T} \circ \mathrm{R} h' \Rightarrow h = h'.$$

Or, on a $0\mathrm{T} \circ \mathrm{R}(h - h')$, d'où il existe g tel que $0\mathrm{R}g$ et $\mathrm{T}g = h - h'$, ce qui entraîne $g \in \mathrm{T}_{-1}(0)$, d'où $h - h' = \mathrm{T}g = 0$.

Proposition 1. — *Soient* E, F, G *trois espaces linéaires à semi-normes,* R *une relation linéaire de* G *dans* E, τ *un opérateur linéaire de* G *dans* F.

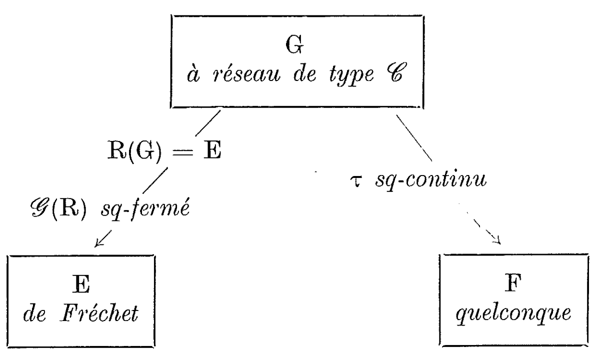
Supposons vérifiées les hypothèses suivantes, résumées dans le schéma ci-dessous :

— E *est de Fréchet,* G *à réseau de type* $\mathscr{C}$,

— R *est à graphe sq-fermé,* τ *sq-continu,*

— $\mathrm{R}(\mathrm{G}) = \mathrm{E}$.

Alors $\tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ *est continu de* E *dans* F.



Supposons que G soit muni du réseau

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k,\, n_1,\, \ldots,\, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Visiblement, comme $\mathrm{R(G)} = \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{R}e_{n_1}$$

et

$$\mathrm{R}(e_{n_1,\ldots,n_{k-1}}) = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} \mathrm{R}(e_{n_1,\ldots,n_k}),$$

pour tous $k > 1$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

On peut donc fixer une suite de n_k telle que $\mathrm{R}(e_{n_1,\ldots,n_k})$ ne soit maigre pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

Soit β une semi-boule fermée de centre 0 dans F. Comme $\tau_{-1}\mathrm{F} = \mathrm{G}$, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{R(G)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathrm{R}(\tau_{-1}\beta).$$

Il existe donc m_k tels que $\mathrm{R}(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m_k\tau_{-1}\beta)$ ne soit maigre pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On détermine $\nu_k > 0$ tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k m_k \leqslant \varepsilon$$

et que toute série de G de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k,\quad g_k \in e_{n_1,\ldots,n_k},\quad 0 \leqslant \mu_k \leqslant \nu_k,$$

converge dans G.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_k = \mathrm{R}\,[(\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k \beta]$$

n'étant pas maigres, leur adhérence contient une semi-boule $f_k + b_k$, où on peut supposer que $f_k \in \mathscr{E}_k$ et $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$, $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ désignant le système de semi-normes de E.

Démontrons que

$$\overline{\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)} \subset (1 + 2\varepsilon)\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta).$$

On en déduit immédiatement que $\tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ est continu.

Soit $f \in \overline{\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)}$. Il existe $f_1' \in \mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)$ tel que $f - f_1' \in b_1$, donc tel que $f - f_1' + f_1 \in \overline{\mathscr{E}}_1$. Il existe alors $f_2' \in \mathscr{E}_1$ tel que $f - f_1' + f_1 - f_2' \in b_2$. De proche en proche, on fixe ainsi une suite f_k' telle que

$$f_1' \in \mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)\ ;\ f_{k+1}' \in \mathscr{E}_k,\ \forall k > 1,$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} f_k' - \sum_{k=1}^{n-1} f_k \to f$$

dans E.

Soient g_k et $g'_k \in \mathrm{G}$ tels que $g_k \mathrm{R} f_k$ et $g'_k \mathrm{R} f'_k$ et que

$$g_k,\ g'_{k+1} \in (\nu_k e_{n_1,\dots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k \beta.$$

Vu le choix des ν_k, la suite

$$\sum_{k=1}^{n} g'_k - \sum_{k=1}^{n-1} g_k$$

converge dans G. Soit g sa limite.

Comme $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ est *sq*-fermé, on a $g\mathrm{R}f$. De plus, comme τ est *sq*-continu,

$$\sum_{k=1}^{n} \tau g'_k - \sum_{k=1}^{n-1} \tau g_k$$

converge dans F. On voit immédiatement que sa limite τg est dans $(1 + 2\varepsilon)\beta$, d'où $f \in (1 + 2\varepsilon)\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)$.

Voici quelques corollaires de la proposition 1.

Corollaire 1. — *Le théorème* 1, p. 28, *en est un cas particulier.*

De fait, soit T linéaire et à graphe *sq*-fermé de E de Fréchet dans F à réseau de type $\mathscr{C}$.

Posons G = F, désignons par τ l'opérateur identité de F dans lui-même et définissons R par

$$g\mathrm{R}f \Leftrightarrow g = \mathrm{T}f.$$

Visiblement, τ est *sq*-continu, $\mathscr{G}(\mathrm{R}) = \mathscr{G}(\mathrm{T})$ est *sq*-fermé et $\mathrm{R}(\mathrm{F}) = \mathrm{T}_{-1}\mathrm{F} = \mathrm{E}$. On se trouve donc dans les conditions de la proposition 1 et $\mathrm{T} = \tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ est continu.

Corollaire 2. — *Si* E *est de Fréchet et si* T *est un opérateur linéaire de* E *dans* F, *tel que* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *admette un réseau de type* $\mathscr{C}$, *alors* T *est continu.*

Posons ici $\mathrm{G} = \mathscr{G}(\mathrm{T})$. Soit τ la projection de $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ dans F :

$$\tau(f, \mathrm{T}f) = \mathrm{T}f,\ \forall f \in \mathrm{E}.$$

C'est visiblement un opérateur *sq*-continu. Définissons la relation R par

$$g\mathrm{R}f \Leftrightarrow g = (f, \mathrm{T}f).$$

La relation R (qui est en fait la projection de $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ sur E) est telle que $\mathrm{R}(\mathrm{G}) = \mathrm{E}$ et que $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ soit *sq*-fermé. Donc $\mathrm{T} = \tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ est continu.

Corollaire 3. — *Soient* E *de Fréchet et* F *muni d'un réseau de type* $\mathscr{C}$. *Si* T *est un opérateur linéaire défini d'une partie de* F *sur* E, *à graphe sq-fermé dans* $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$, T *est ouvert.*

Posons G = F ; définissons R de F dans E par

$$g\mathrm{R}f \Leftrightarrow \mathrm{T}g = f.$$

On a $\mathrm{R}(\mathrm{G}) = \mathrm{E}$ et $\mathscr{G}(\mathrm{R}) = \mathscr{G}(\mathrm{T})$ est *sq*-fermé dans $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$.

Enfin, soit τ l'opérateur identité de F dans lui-même. Vu la proposition 1, $\tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ est continu, donc T est ouvert.

COROLLAIRE 4. — *Soit* E *de Fréchet et soit* T *un opérateur linéaire défini d'une partie de* F *sur* E, *tel que* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *admette un réseau de type* $\mathscr{C}$. *L'opérateur* T *est ouvert.*

Posons $\mathrm{G} = \mathscr{G}(\mathrm{T})$ et définissons R de G dans E par

$$g\mathrm{R}f \Leftrightarrow g = (f, \mathrm{T}f).$$

Comme $\mathrm{TF} = \mathrm{E}$, on a $\mathrm{R(G)} = \mathrm{E}$. De plus, $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ est *sq*-fermé puisque la projection de $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ sur E est continue. Enfin, on désigne par τ la projection de $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ sur F, qui est un opérateur continu. Il résulte de la proposition 1 que $\tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ est continu, donc que T est ouvert.

Comme dans le théorème 2, on peut améliorer l'hypothèse que E soit de Fréchet. On obtient la

PROPOSITION 2. — *Soient* E, F, G *trois espaces linéaires à semi-normes,* R *une relation linéaire de* G *dans* E, τ *un opérateur linéaire de* G *dans* F.

Supposons vérifiées les conditions suivantes :

— G *est à réseau de type* $\mathscr{C}$,

— R *est à graphe fermé,* τ *sq-continu,*

— R(G) *n'est pas maigre dans* E.

Alors $\tau \circ \mathrm{R}^{-1}$ *est continu de* E *dans* F *et* $\mathrm{R(G)} = \mathrm{E}$.

Si E *est à semi-normes dénombrables, on peut supposer* $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ *sq-fermé au lieu de fermé.*

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{G}\\ \textit{à réseau de type } \mathscr{C}\end{array}} \arrow[dl, "\mathscr{G}(\mathrm{R})\ \textit{fermé}"'] \arrow[dr, "\tau\ \textit{sq-continu}"] & \\
\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{E}\ \textit{quelconque}\\ \mathrm{R(G)}\ \textit{non maigre}\end{array}} & & \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{F}\\ \textit{quelconque}\end{array}}
\end{tikzcd}$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition 1, dont nous conservons les notations.

Ici,

$$\mathrm{R(G)} = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{R}(e_{n_1}).$$

Comme R(G) n'est pas maigre, un des $\mathrm{R}(e_{n_1})$ n'est pas maigre et, de proche en proche, il existe une suite de n_k tels que $\mathrm{R}(e_{n_1,\ldots,n_k})$ ne soit maigre pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

On poursuit alors comme dans la démonstration de la proposition 1, à cette différence près que la condition $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$ disparaît si E n'est pas à semi-normes dénombrables.

A f fixé dans $\overline{\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)}$, on associe ainsi f_k, f'_k tels que

$$f'_1 \in \mathrm{R}(\tau_{-1}\beta) \ ; \ f'_{k+1}, f_k \in \mathrm{R}\,[(\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k \beta],\ \forall k \geqslant 1,$$

et

$$f - \sum_{i=1}^{k} f'_i + \sum_{i=1}^{k} f_i \in \overline{\mathrm{R}\,[(\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k \beta]}.$$

Si g_k, g'_k sont tels que l'on ait $g_k \mathrm{R} f_k$, $g'_k \mathrm{R} f'_k$ et

$$g'_{k+1},\ g_k \in (\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k \beta,$$

il existe g tel que

$$\sum_{i=1}^{k} g'_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i \rightarrow g$$

et on voit que $g \in (1 + 2\varepsilon)\tau_{-1}\beta$, vu la continuité de τ.

Soient alors b et b' des voisinages de 0 dans E et G respectivement. Quel que soit k, il existe $f''_k \in \mathrm{R}(\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k})$ tel que

$$f - \sum_{i=1}^{k} f'_i + \sum_{i=1}^{k} f_i - f''_k \in b,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Soit $g''_k \in \nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}$, tel que $g''_k \mathrm{R} f''_k$. Comme les séries $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} g'_k$ convergent, g_k et g''_k tendent vers 0 dans G, donc

$$g - \sum_{i=1}^{k} g'_i + \sum_{i=1}^{k} g_i - g''_k \in b'$$

dès que k est assez grand.

Donc, quels que soient b et b',

$$[(g, f) + (b', b)] \cap \mathscr{G}(\mathrm{R}) \neq \varnothing,$$

d'où, comme $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ est fermé, $(g, f) \in \mathscr{G}(\mathrm{R})$, soit $f \in \mathrm{R}(g) \subset (1 + 2\varepsilon)\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)$.

Énonçons encore les principaux corollaires de la proposition 2.

Corollaire 1. — *Si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$,

— *si* T *est linéaire de* $\mathscr{D}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{E}$ *dans* F *et si* $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ *est non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *fermé dans* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, *on a* $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$ *et* T *est continu.*

— *si* T *est linéaire d'une partie de* F *dans* E, *tel que* TF *soit non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *fermé dans* $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$, *on a* $\mathrm{TF} = \mathrm{E}$ *et* T *est ouvert.*

Si E *est à semi-normes dénombrables, dans les deux cas, on peut supposer* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *sq-fermé au lieu de le supposer fermé.*

Corollaire 2. — *Quels que soient* E *et* F,

— *si* T *est linéaire de* $\mathscr{D}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{E}$ *dans* F, $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ *non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *à réseau de type* $\mathscr{C}$, *on a* $\mathscr{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{E}$ *et* T *est continu.*

— *si* T *est linéaire d'une partie de* F *dans* E, TF *non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *à réseau de type* $\mathscr{C}$, *on a* $\mathrm{TF} = \mathrm{E}$ *et* T *est ouvert.*

Les démonstrations sont analogues à celles des corollaires de la proposition 1.

REMARQUES. — Dans le corollaire 2, il n'intervient plus d'hypothèse sur E et F. Cette généralité est un peu illusoire, au moins en ce qui concerne E, car si $\mathscr{D}(T)$ y est non maigre, E n'est pas maigre dans lui-même, donc il est de Baire.

On notera d'ailleurs qu'un espace peut être de Baire et à semi-normes dénombrables sans être de Fréchet.

(Z) Ainsi, soit E de Fréchet et soit f_α, $\alpha \in \mathscr{I}$, une base de Hamel dans E. Fixons une suite $\alpha_i \in \mathscr{I}$ et posons

$$E_i = \rangle f_\alpha : \alpha \neq \alpha_i \langle$$

(c'est-à-dire l'enveloppe linéaire des f_α autres que f_{α_i}).

On a évidemment

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

donc, comme E n'est pas maigre, un des E_i n'est pas maigre dans E.

Cet E_i est dense dans E.

En effet, son adhérence contient un point intérieur donc, comme c'est un espace linéaire, elle est identique à E.

Comme E_i diffère de E, il n'est donc pas fermé et par conséquent il n'est pas de Fréchet.

Enfin, il est de Baire.

De fait, soit

$$E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

où les F_n sont fermés dans E_i. On a alors, $\overline{F}_n^E$ désignant l'adhérence de F_n dans E,

$$E_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n^E,$$

donc un $\overline{F}_n^E$ est d'intérieur non vide. Supposons qu'il contienne b, semi-boule ouverte de E. On peut sans restriction supposer b centré dans E_i, puisque E_i est dense dans E. Il vient alors

$$F_n = \overline{F}_n^E \cap E_i \supset b \cap E_i$$

où $b \cap E_i$ est une semi-boule de E_i, d'où F_n est d'intérieur non vide dans E_i, ce qu'il fallait démontrer.

3. Nouveaux types de réseaux et applications à des théorèmes du graphe fermé

On peut améliorer les théorèmes précédents en affaiblissant les conditions imposées aux réseaux.

DÉFINITIONS. — Un ensemble $e \subset E$ est *extractable* si, de toute suite d'éléments de e, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de e. Il est *relativement extractable* si, de toute suite d'éléments de e, on peut extraire une sous-suite qui converge dans E, mais pas nécessairement vers un élément de e. Évidemment, tout ensemble sq-fermé et relativement extractable est extractable.

Un ensemble e est *compact* si chaque fois qu'il est contenu dans une union d'ouverts, il est contenu dans l'union d'un nombre fini de ces ouverts. Il est *relativement compact* si son adhérence est compacte ou, ce qui revient au même, s'il est contenu dans un compact.

Introduisons une première variante de la condition ($\mathscr{C}$) pour les réseaux.

Un réseau

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est *de type* $\mathscr{K}$ (resp. *de type* $\mathscr{E}$) dans E s'il vérifie la condition suivante.

Pour toute suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite de nombres $\lambda_k > 0$ tels que, si $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\{\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k : N \in \mathbb{N}\}$$

est relativement compact (resp. relativement extractable) dans E.

Il est immédiat que *tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *de* E *est de type* $\mathscr{K}$ *et* $\mathscr{E}$.

La proposition 1 se généralise comme suit.

Proposition 3. — *Soient* E, F, G *trois espaces linéaires à semi-normes,* R *une relation linéaire de* G *dans* E, τ *un opérateur linéaire de* G *dans* F.

Supposons vérifiées les conditions suivantes :

— E *est de Fréchet,* G *à réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$),

— R *est à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*), τ *est continu* (resp. *sq-continu*),

— R(G) = E.

Alors $\tau \circ R^{-1}$ *est continu de* E *dans* F.

C'est encore vrai si on remplace les hypothèses « E *de Fréchet et* R(G) = E » *par* « E *à semi-normes dénombrables et* R(G) *non maigre dans* E ». *On a alors en outre* R(G) = E.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boxed{\begin{array}{c} G \\ \textit{à réseau} \\ \textit{de type } \mathscr{K} \text{ (resp. } \mathscr{E}) \end{array}} \arrow[dl, "\begin{array}{c} \mathscr{G}(R) \\ \textit{fermé} \\ \text{(resp. } \textit{sq-fermé}) \end{array}"'] \arrow[dr, "\begin{array}{c} \tau \\ \textit{continu} \\ \text{(resp. } \textit{sq-continu}) \end{array}"] & \\
\boxed{\begin{array}{c} E \textit{ de Fréchet} \\ R(G) = E \end{array}} & & \boxed{\begin{array}{c} F \\ \textit{quelconque} \end{array}}
\end{tikzcd}$$

On reprend point par point la démonstration de la proposition 1 jusqu'à associer à $f \in \overline{R(\tau_{-1}\beta)}$,

$$f'_1 \in R(\tau_{-1}\beta),\ f_k,\ f'_{k+1} \in \mathscr{E}_k,$$

tels que

$$\sum_{i=1}^{k} f'_i - \sum_{i=1}^{k-1} f_i$$

tende vers f dans E.

On fixe alors $g_k, g'_k \in G$ vérifiant $g_k R f_k$, $g'_k R f'_k$ et

$$g_k, g'_{k+1} \in (\nu_k e_{n_1,\ldots,n_k}) \cap \tau_{-1}\nu_k m_k \beta.$$

Vu l'hypothèse sur le réseau de G, les ensembles $\{\sum_{i=1}^{k} g_i : k \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sum_{i=1}^{k} g'_i : k \in \mathbb{N}\}$ sont relativement compacts (resp. relativement extractables). Leur différence l'est aussi. Or elle contient la suite

$$\sum_{i=1}^{k} g'_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i,\ k \in \mathbb{N}.$$

Dans le cas de l'extractabilité, on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente : il vient, pour cette sous-suite,

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{k_n} f'_i - \sum_{i=1}^{k_n-1} f_i \to f \\ \sum_{i=1}^{k_n} g'_i - \sum_{i=1}^{k_n-1} g_i \to g \end{array}\right\} \Rightarrow gRf.$$

Or, comme τ est sq-continu,

$$\sum_{i=1}^{k_n} \tau g'_i - \sum_{i=1}^{k_n-1} \tau g_i \to \tau g,$$

d'où $\tau g \in (1 + 2\varepsilon)\beta$ et $f \in (1 + 2\varepsilon)R(\tau_{-1}\beta)$.

Dans le cas de la compacité, la suite

$$\sum_{i=1}^{k} g'_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i$$

admet un élément *adhérent* (c'est-à-dire un élément tel que toute semi-boule centrée sur lui contienne une infinité d'éléments de la suite). Soit g cet élément adhérent. On voit immédiatement que (f, g) est alors adhérent à la suite

$$\left(\sum_{i=1}^{k} f'_i - \sum_{i=1}^{k-1} f_i,\ \sum_{i=1}^{k} g'_i - \sum_{i=1}^{k-1} g_i\right)$$

donc il appartient à l'adhérence du graphe de R et, comme ce dernier est fermé, on a gRf.

De plus, comme τ est continu, τg est adhérent à la suite

$$\sum_{i=1}^{k} \tau g'_i - \sum_{i=1}^{k-1} \tau g_i,$$

d'où, comme β est fermé, $\tau g \in (1 + 2\varepsilon)\beta$ et $f \in (1 + 2\varepsilon)\mathrm{R}(\tau_{-1}\beta)$.

Signalons quelques corollaires de la proposition 3.

Corollaire 1. — *Si* E *est de Fréchet et* F *à réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$),

— *tout opérateur linéaire à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*) *de* E *dans* F *est continu.*

— *tout opérateur linéaire défini d'une partie de* F *sur* E, *à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*) *dans* $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ *est ouvert.*

Corollaire 2. — *Si* E *est de Fréchet,*

— *tout opérateur* T *linéaire de* E *dans* F *et tel que* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *admette un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{E}$ *est continu.*

— *tout opérateur* T *linéaire défini d'une partie de* F *sur* E *et tel que* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *admette un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{E}$ *est ouvert.*

On obtient des variantes de ces corollaires en supposant E à semi-normes dénombrables et $\mathscr{D}(\mathrm{T})$ ou TF non maigre dans E.

Les démonstrations de ces résultats sont analogues à celles des corollaires de la proposition 1.

Remarque. — On pourrait se proposer d'étendre encore la proposition 3 au cas où E n'est pas à semi-normes dénombrables, comme on l'a fait dans le cas des réseaux de type $\mathscr{C}$. Dans ce dernier cas, (cf. théorème 2, p. 31), l'extension repose sur le fait que, si $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$, pour un choix convenable des λ_k, $\lambda_k f_k$ tend vers 0 comme terme général d'une série convergente. Cette propriété se perd pour les réseaux de type $\mathscr{K}$ ou $\mathscr{E}$ et l'extension ne paraît pas possible.

On peut encore chercher à affaiblir la condition imposée aux réseaux de type $\mathscr{K}$ ou $\mathscr{E}$ en supposant, par exemple, que les suites de sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k$$

admettent un élément adhérent ou une sous-suite convergente.

On rencontre alors la difficulté que la différence de deux telles suites n'a pas nécessairement la propriété correspondante.

On obtient toutefois un résultat satisfaisant en adoptant la définition suivante.

Définition. — Un réseau

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est *de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. *de type* $\mathscr{S}\mathscr{E}$) dans E si, pour toute suite n_k fixée, il existe $\lambda_k > 0$ tels que, quels que soient f_k dans l'enveloppe absolument convexe $\langle e_{n_1,\dots,n_k} \rangle$ de $e_{n_1,\dots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k$$

admette un élément adhérent (resp. une sous-suite convergente) dans E.

Pour de tels espaces, le théorème du graphe fermé s'énonce de la manière suivante.

Proposition 4. — *Si* E *est de Fréchet et si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{S}\mathscr{E}$), *tout opérateur linéaire de* E *dans* F, *à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*) *est continu.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 1, p. 28, mais l'intervention des enveloppes absolument convexes des ensembles du réseau de F y apporte des simplifications importantes. C'est pour bien les mettre en évidence que nous donnons cette démonstration avant de passer à des cas plus généraux.

Soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

le réseau de F et soit T l'opérateur.

On détermine d'abord une suite de n_k telle que $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ ne soit maigre pour aucun $k \in \mathbb{N}$.

Si β est une semi-boule fermée de centre 0 dans F, on détermine ensuite m_k tels que les

$$\mathrm{T}_{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k} \cap m_k\beta)$$

ne soient pas maigres.

Enfin, on fixe $\nu_k > 0$ tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k m_k \leqslant \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est fixé arbitrairement, et que toute série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k,$$

où $g_k \in \langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, admette un élément adhérent (resp. une sous-suite convergente) dans F.

Posons

$$\mathscr{E}_k = \mathrm{T}_{-1}\,[(\nu_k\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle) \cap m_k\nu_k\beta].$$

Les $\mathscr{E}_k$ ne sont pas maigres, donc leur adhérence contient un point intérieur. De plus, ils sont absolument convexes, donc leur adhérence contient une semi-boule de centre 0. Soit b_k cette semi-boule. On peut sans restriction supposer que $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$, où p_k désignent les semi-normes dénombrables de F.

Soit alors $f \in \overline{\mathrm{T}_{-1}\beta}$. On lui associe successivement

— f_0 tel que

$$f_0 \in \mathrm{T}_{-1}\beta\ ;\ f - f_0 \in b_1 \subset \overline{\mathscr{E}}_1,$$

— f_1 tel que

$$f_1 \in \mathscr{E}_1\ ;\ f - f_0 - f_1 \in b_2 \subset \overline{\mathscr{E}}_2,$$

et ainsi de suite. La suite f_k ainsi déterminée est telle que

$$\sum_{k=0}^{N} f_k \to f$$

dans E.

De plus, si $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{S}\mathscr{K}$, comme $Tf_k \in \nu_k\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle$,

$$\sum_{k=0}^{N} Tf_k$$

admet un élément adhérent g. On voit immédiatement que $g \in (1 + 2\varepsilon)\beta$. Or (f, g) est adhérent à

$$\left(\sum_{k=0}^{N} f_k, \sum_{k=0}^{N} Tf_k\right),$$

donc il appartient à l'adhérence de $\mathscr{G}(T)$ et, si ce dernier est fermé, $Tf = g$, ce qui entraîne que $f \in (1 + \varepsilon)T_{-1}\beta$.

Si $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{S}\mathscr{E}$, la suite

$$\sum_{k=0}^{N} Tf_k$$

admet une sous-suite convergeant vers $g \in F$. Ce g appartient encore à $(1 + \varepsilon)\beta$ et, si $\mathscr{G}(T)$ est *sq*-fermé, $Tf = g$, d'où la conclusion.

On peut encore généraliser la proposition 4 comme suit.

Proposition 5. — *Soient* E, F, G *trois espaces linéaires à semi-normes,* R *une relation linéaire de* G *dans* E, τ *un opérateur linéaire de* G *dans* F.

Supposons vérifiées les conditions suivantes :

— E *est de Fréchet,* G *à réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{S}\mathscr{E}$),

— R *est à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*), τ *est continu* (resp. *sq-continu*),

— $R(G) = E$.

Alors $\tau \circ R^{-1}$ *est continu de* E *dans* F.

C'est encore vrai si on remplace les hypothèses « E *de Fréchet,* $R(G) = E$ » *par* « E *à semi-normes dénombrables et* R(G) *non maigre dans* E ». *On a alors en outre* $R(G) = E$.

La démonstration est analogue à la précédente.

Parmi les corollaires de la proposition 5, citons les suivants :

Corollaire 1. — *Si* E *est de Fréchet,* F *à réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{S}\mathscr{E}$), *tout opérateur* T *linéaire défini d'une partie de* F *sur* E, *à graphe fermé* (resp. *sq-fermé*) *dans* $F \times E$, *est ouvert.*

Corollaire 2. — *Si* E *est de Fréchet,*

— T *linéaire de* E *dans* F, *tel que* $\mathscr{G}(T)$ *admette un réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$ *est continu.*

— T *linéaire défini d'une partie de* F *sur* E *et tel que* $\mathscr{G}$(T) *admette un réseau de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$ *est ouvert.*

Remarque. — Notons enfin que la proposition 5 ne s'étend pas au cas où E n'est pas à semi-normes dénombrables, parce qu'on ne peut affirmer que, si une série admet un élément adhérent ou une sous-suite convergente, le terme général de la série tend vers 0.

4. Relations entre les différents types de réseaux

Pour être complet, examinons encore brièvement les relations entre les différents types de réseaux introduits et leurs propriétés de permanence.

Proposition 6. — a) *Tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *est de type* $\mathscr{K}$ *et* $\mathscr{E}$.

b) *Tout réseau absolument convexe de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$) *est de type* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{S}\mathscr{E}$).

c) *Si* E *est sq-complet, tout réseau de* E *de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{E}$ *est de type* $\mathscr{C}$.

Pour c), on applique la proposition 1, p. 15, en notant que tout ensemble relativement extractable ou relativement compact est borné.

Proposition 7. — a) *Si* E *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{S}\mathscr{E}$) *et si* T *est un opérateur linéaire continu* (resp. *sq-continu*) *de* E *dans* F, TE *admet un réseau de même type.*

De même, tout sous-espace linéaire fermé (resp. *sq-fermé*) *de* E *admet un réseau de même type.*

b) *Si* E *est union d'une suite d'espaces* E_n *admettant un réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$), *il admet un réseau de même type.*

c) *Soit* E_n *une suite d'espaces emboîtés en décroissant et tels que, pour tout* n, *l'opérateur identité de* E_{n+1} *dans* E_n *soit sq-continu et soit* E *leur limite projective.*
Si les E_n *admettent un réseau de type* $\mathscr{E}$, *il en est de même pour* E.

d) *Tout produit dénombrable d'espaces à réseau de type* $\mathscr{E}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{E}$.

Tout produit fini d'espaces à réseau de type $\mathscr{K}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$.

(Z) *Tout produit dénombrable d'espaces à réseau de type* $\mathscr{K}$ *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$.

Pour le dernier point de d), il faut savoir qu'un produit dénombrable de compacts est compact, ce qui, à notre connaissance, exige qu'on fasse usage de l'axiome de Zorn.

Corollaires. — a) *Tout quotient séparé d'un espace à réseau de type* $\mathscr{K}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$ *admet un réseau de même type.*

b) *Toute somme directe dénombrable d'espaces à réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$) *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{E}$).

Les démonstrations sont analogues à celles des propriétés correspondantes du chapitre I.

5. Extension à des limites inductives

A l'exception du théorème 1 et de ses corollaires dont on a donné d'emblée la meilleure forme utilisable, on s'est limité, dans ce chapitre, à supposer E de Fréchet ou de Baire.

On peut étendre les propositions 1 à 5 au cas où E est limite inductive de tels espaces, à partir des quelques remarques suivantes.

Supposons E limite inductive d'espaces E_α.

Soit T linéaire de E dans F et soit T_α sa restriction à E_α. Alors,

— T est continu de E dans F si et seulement si chaque T_α est continu de E_α dans F,

— si T est à graphe fermé (resp. *sq*-fermé) dans $E \times F$, chaque T_α est à graphe fermé (resp. *sq*-fermé) dans $E_\alpha \times F$.

Par contre, il ne suffit pas que $\mathscr{D}(T)$ ne soit pas maigre dans E pour que son intersection avec E_α ne soit pas maigre dans E_α.

De même, si T′ est linéaire de F sur E et si T'_α est la restriction de T′ à $T'_{-1}E_\alpha$,

— T′ est ouvert de F dans E si et seulement si chaque T'_α est ouvert de F dans E_α,

— si T′ est à graphe fermé (resp. *sq*-fermé) dans $F \times E$, chaque T'_α est à graphe fermé (resp. *sq*-fermé) dans $F \times E_\alpha$.

Ce qui précède est encore vrai quand on remplace T et T′ par des relations linéaires R et R′, si on dit que R′ est ouvert quand R'^{-1} est continu.

Formulons les résultats qu'on obtient dans le cas des opérateurs, pour E ultrabornologique.

Proposition 8. — *Si* E *est ultrabornologique, chacune des conditions* α, β, γ *suivantes est suffisante pour que* T, *linéaire de* E *dans* F, *soit continu* :

α. $\mathscr{G}(T)$ *est sq-fermé,* F *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$,

β. $\mathscr{G}(T)$ *est fermé,* F *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{K}$,

γ. $\mathscr{G}(T)$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$.

Si T *est linéaire et défini d'une partie de* F *sur* E, *sous les mêmes hypothèses, il est ouvert.*

CHAPITRE III

THÉORÈMES DE LOCALISATION ET DE RELÈVEMENT

Dans les théorèmes du type du graphe fermé développés au chapitre II, les réseaux n'ont servi que d'auxiliaires dans les démonstrations. En leur faisant jouer un rôle plus explicite, on obtient ici des théorèmes de localisation pour lesquels l'introduction dun' nouveau type de réseaux, les réseaux stricts, s'avère très utile. On étudie ensuite les notions de suites très convergentes et d'ensembles très compacts et on démontre un théorème de relèvement pour ces ensembles.

1. Un théorème général

THÉORÈME 1. — *Soient* E *un espace de Fréchet,* F *un espace muni d'un réseau de type* $\mathscr{C}$

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

R *une relation linéaire de* E *dans* F, *à graphe sq-fermé et telle que* $\mathrm{R}^{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{E}$.

a) *Il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1})$ *ne soit pas maigre. Pour cet* n_1, *il existe une semi-boule* b_1 *de* E *telle que*

$$b_1 \subset \mathrm{R}^{-1}(\overline{\langle e_{n_1}\rangle}).$$

b) *Si* $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k})$ *n'est pas maigre, il existe* $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k+1}})$ *ne soit pas maigre. Pour cet* n_{k+1}, *il existe alors une semi-boule* b_{k+1} *de* E *telle que*

$$b_{k+1} \subset \mathrm{R}^{-1}(\overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}\rangle}).$$

Le fait que $\mathrm{R}^{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre pour au moins un n_1 résulte de la relation

$$\mathrm{E} = \mathrm{R}^{-1}(\mathrm{F}) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \mathrm{R}^{-1}(e_{n_1}).$$

De même, on a

$$\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k}) = \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} \mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k+1}})$$

où, si le premier membre n'est pas maigre, un des ensembles du second membre n'est pas maigre.

Il reste à établir que, si $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k_0}})$ n'est pas maigre, il existe une semi-boule b_{k_0} telle que

$$b_{k_0} \subset \mathrm{R}^{-1}(\overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}\rangle}).$$

On commence par déterminer n_k, $k > k_0$, tels que les ensembles $\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k})$ ne soient pas maigres.

Il existe alors $\lambda_k > 0$ tels que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \lambda_k \leqslant \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$ est fixé arbitrairement, et tels que toute série de la forme

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k g_k,$$

avec $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ et $g_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$, converge dans F.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_k = \lambda_k \overline{\mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\dots,n_k})}$$

sont d'intérieur non vide et contiennent une semi-boule $f_k + b_k$, où on peut supposer que $f_k \in \lambda_k \mathrm{R}^{-1}(e_{n_1,\dots,n_k})$ et que $b_k \subset b_{p_k}(1/k)$, si p_k, $k \in \mathbb{N}$, sont les semi-normes dénombrables de E.

Démontrons à présent que

$$\overline{\mathrm{R}^{-1}(\langle e_{n_1,\dots,n_{k_0}}\rangle)} \subset (1 + 2\varepsilon)\mathrm{R}^{-1}(\overline{\langle e_{n_1,\dots,n_{k_0}}\rangle}).$$

On conclura immédiatement en notant que le premier membre contient une semi-boule b_{k_0} de centre 0 dans E.

Si f appartient au premier membre, on lui associe une suite f'_k telle que

$$f'_{k_0} \in \mathrm{R}^{-1}(\langle e_{n_1,\dots,n_{k_0}}\rangle) \; ; \; f'_k \in \mathscr{E}_k, \; \forall k > k_0,$$

et

$$f - \sum_{i=k_0}^{k} f'_i + \sum_{i=k_0+1}^{k} f_i \in b_{k+1}, \; \forall k > k_0.$$

A f_k, f'_k correspondent respectivement g_k, g'_k tels que $f_k \mathrm{R} g_k$, $f'_k \mathrm{R} g'_k$,

$$g'_{k_0} \in \langle e_{n_1,\dots,n_{k_0}}\rangle \; ; \; g'_k, \, g_k \in \lambda_k e_{n_1,\dots,n_k}, \; \forall k > k_0.$$

La suite

$$\sum_{i=k_0}^{k} g'_i - \sum_{i=k_0+1}^{k} g_i$$

converge dans F et sa limite g appartient à $(1 + 2\varepsilon)\overline{\langle e_{n_1,\dots,n_{k_0}}\rangle}$ puisque c'est le cas pour

$$\sum_{i=k_0}^{k} g'_i - \sum_{i=k_0+1}^{k} g_i$$

quel que soit $k > k_0$.

Or, comme $\mathscr{G}(\mathrm{R})$ est fermé pour les suites, on a $f \mathrm{R} g$, d'où la conclusion.

VARIANTE. — *Le théorème* 1 *est encore vrai si on remplace les hypothèses sur* E, $\mathscr{R}$ *et* R *par l'une quelconque des conditions* a), b) c) *suivantes* :

a) E *est de Fréchet,* $\mathscr{R}$ *de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{K}$, R *à graphe fermé,* $E = R^{-1}(F)$,

b) E *est de Fréchet,* $\mathscr{R}$ *de type* $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$, R *à graphe sq-fermé,* $E = R^{-1}(F)$,

c) $\mathscr{R}$ *est de type* $\mathscr{C}$, R *à graphe sq-fermé,* $R^{-1}(F)$ *non maigre dans* E.

Les démonstrations sont analogues à celles des variantes correspondantes du théorème du graphe fermé.

2. Réseaux stricts

L'introduction d'un nouveau type de réseau plus particulier que le type $\mathscr{C}$ permet de donner une forme achevée au théorème 1.

A l'encontre des réseaux de type $\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$ ou $\mathscr{S}\mathscr{E}$, qui sont des généralisations de caractère théorique, ce nouveau type est très répandu et joue dans les applications un rôle important.

DÉFINITION. — Un réseau de E

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est *strict* si les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ sont absolument convexes et si, pour toute suite n_k fixée, il existe $\lambda_k > 0$ tels que toute série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

avec $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ et $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$, converge dans E et que la limite de la série vérifie la relation

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k \in e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}, \forall k_0 \in \mathbb{N}.$$

Pour des espaces à réseau strict, le théorème du paragraphe précédent se perfectionne comme suit.

THÉORÈME 2. — *Soient* E *de Fréchet,* F *muni d'un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

et R *une relation linéaire de* E *dans* F, *à graphe sq-fermé et telle que* $R^{-1}(F) = E$.

a) *Il existe* b_1 *et* n_1 *tels que*

$$b_1 \subset R^{-1}(e_{n_1}).$$

b) *Si* b_k *et* $n_1, \ldots, n_k$ *sont tels que*

$$b_k \subset R^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k}),$$

il existe b_{k+1} et n_{k+1} *tels que*

$$b_{k+1} \subset R^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}).$$

Même énoncé pour E *quelconque, si* R *est à graphe fermé et si* $R^{-1}(F)$ *n'est pas maigre dans* E.

On remarque que les inclusions impliquent que les seconds membres soient des ensembles non maigres.

La démonstration se déduit de celle du théorème 1 en y remplaçant $\overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle}$ et $\overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle}$ par $e_{n_1,\ldots,n_k}$ et les λ_k par ceux qui interviennent dans la définition des réseaux stricts. On obtient alors

$$\lambda_{k_0}\overline{R^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k_0}})} \subset R^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}).$$

Avant d'appliquer le théorème précédent, examinons rapidement les exemples et les propriétés de permancence des espaces à réseau strict.

Exemples. — *Tout réseau de type* $\mathscr{C}$ *formé d'ensembles absolument convexes et fermés est strict.*

En particulier, les espaces suivants admettent un réseau strict :

— E *s'il est de Fréchet,*

— $E^*_{\mathscr{F}}$ *si* E *est à semi-normes dénombrables ou limite inductive d'une suite de tels espaces,*

— $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$ *si* E *est à semi-normes dénombrables,* F *de Fréchet.*

Supposons que les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ qui constituent un réseau $\mathscr{R}$ de type $\mathscr{C}$ soient absolument convexes.

Pour un choix convenable des λ_k, toute série de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

avec $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$, converge dans E. Si on impose en outre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \leqslant 1,$$

on a

$$\sum_{k=k_0}^{N} \mu_k f_k \in e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}, \ \forall N \in \mathbb{N},$$

d'où, si les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ sont fermés,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k \in e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}, \ \forall k_0 \in \mathbb{N}.$$

Pour les cas particuliers, il suffit de noter que les réseaux décrits dans les exemples 1 à 3, chap. I, p. 19 et 20, sont formés d'ensembles absolument convexes et fermés.

Proposition 1. — *Si* E *admet un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

a) *si* L *est un sous-espace linéaire sq-fermé de* E,

$$\mathscr{R}_{\mathrm{L}} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} \cap \mathrm{L} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est strict dans L *muni du système de semi-normes induit par* E.

b) *si* T *est linéaire et sq-continu de* E *dans* F,

$$\mathrm{T}\mathscr{R} = \{\mathrm{T}e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est strict dans TE *muni du système de semi-normes induit par* F.

c) $\mathscr{R}$ *est strict dans* E_b^-.

d) *quels que soient* $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, *l'enveloppe linéaire de* $e_{n_1,\ldots,n_k}$ *est à réseau strict.*

Corollaires. — *Si* E *est à réseau strict, tout quotient séparé de* E *est à réseau strict.*

— *Si* E_a *est à réseau strict* [*et à semi-normes représentables*], E *est à réseau strict.*

— *Si* E *est tonnelé, quel que soit* $\mathscr{F}$, *tout réseau strict dans* E_s^* *est strict dans* $\mathrm{E}_{\mathscr{F}}^*$ *et tout réseau strict dans* $\mathscr{L}_s(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est strict dans* $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Il suffit d'appliquer le théorème 1, chap. I, p. 23 et de vérifier le caractère strict des réseaux obtenus. Pour c), on a vu que, si $\mathscr{R}$ est de type $\mathscr{C}$ dans E, il est de type $\mathscr{C}$ dans E_b^- et que, si les séries de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

avec $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, convergent dans E, les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

avec $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, 2^{-k}\lambda_k]$, convergent dans E_b^-.

Si, en outre,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k \in e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}, \ \forall k_0 \in \mathbb{N},$$

pour $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$, c'est vrai a fortiori si $\mu_k \in [0, 2^{-k}\lambda_k]$.

Le point d) est spécifique aux réseaux stricts.

Fixons $n_1, \ldots, n_{k_0}$. On a

$$\rangle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \langle = \bigcup_{m=1}^{\infty} m e_{n_1,\ldots,n_{k_0}},$$

puisque $e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ est absolument convexe.

Les ensembles

$$\mathscr{E}_{m_1,\ldots,m_k} = m_1 e_{n_1,\ldots,n_{k_0},m_2,\ldots,m_k}$$

constituent donc un réseau de $\rangle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \langle$.

C'est un réseau de type $\mathscr{C}$.

Soit m_k une suite fixée. On lui associe λ_{k+k_0-1}, où λ_k est la suite associée à $n_1, \ldots, n_{k_0}, m_2, m_3, \ldots$ dans $\mathscr{R}$. Les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k,$$

où $f_k \in m_1 e_{n_1,\ldots,n_{k_0},m_2,\ldots,m_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k]$ convergent alors dans E et, comme $\mathscr{R}$ est strict, leur limite appartient à $2m_1 e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \subset \rangle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \langle$, donc elles convergent dans $\rangle e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} \langle$.

Enfin, il est immédiat que c'est un réseau strict.

PROPOSITION 2. — a) *Si* E *est l'union d'une suite d'espaces images par des opérateurs sq-continus d'espaces à réseau strict, il est à réseau strict.*

b) *Soient* E_n *une suite d'espaces emboîtés en décroissant, tels que, pour tout* n, *l'opérateur identité de* E_{n+1} *dans* E_n *soit sq-continu. Si les* E_n *sont à réseau strict, leur limite projective est à réseau strict.*

c) *Tout produit dénombrable d'espaces à réseau strict est à réseau strict.*

COROLLAIRES. — a) *Toute limite inductive dénombrable d'espaces à réseau strict est à réseau strict.*

b) *Toute somme directe dénombrable d'espaces à réseau strict est à réseau strict.*

Les démonstrations sont analogues à celles des théorèmes 2, 3 et 4, chap. I, p. 24 à 26.

3. Théorèmes de localisation

Si R est la relation associée à un opérateur linéaire de E dans F, le théorème 2 fournit des propriétés de « localisation », qui situent l'image par T d'ensembles de E par rapport aux ensembles du réseau de F.

THÉORÈME 3. — *Soient* E *de Fréchet et* F *muni d'un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Si T *est un opérateur linéaire à graphe sq-fermé de* E *dans* F, *il existe une semi-boule* b_1 *de* E *et un indice* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$Tb_1 \subset e_{n_1}.$$

De plus, si, pour b_k *et* $n_1, \ldots, n_k$ *donnés, on a*

$$Tb_k \subset e_{n_1,\ldots,n_k},$$

il existe b_{k+1} *et* n_{k+1} *tels que*

$$Tb_{k+1} \subset e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

En particulier, il existe une suite d'indices n_k *et une suite de semi-boules* b_k *de* E *tels que*

$$Tb_k \subset e_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pour ces n_k,

$$TE \subset \rangle e_{n_1,\ldots,n_k} \langle,\ \forall k \in \mathbb{N},$$

et, pour tout borné B *de* E, *il existe* $C_k > 0$ *tels que*

$$TB \subset C_k e_{n_1, \ldots, n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Même énoncé pour E *quelconque, si* $\mathscr{D}(T)$ *est non maigre dans* E *et* $\mathscr{G}(T)$ *fermé.*

Il suffit d'appliquer le théorème 2 en prenant pour R la relation linéaire associée à T.

Corollaire 1. — *Si* E *est de Fréchet,* F *limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet* F_n *et* T *linéaire et à graphe sq-fermé de* E *dans* F,

— $TE \subset F_n$ *pour au moins un* n,

— T *est continu de* E *dans cet* F_n.

Il suffit, pour le voir, de munir F du réseau décrit dans le théorème 2, chap. I, p. 24, chaque F_n étant muni du réseau de l'exemple 1, chap. I, p. 19.

C'est le théorème du graphe fermé dans les espaces $\mathscr{LF}$ (cf. Grothendieck [19]), dû à J. Dieudonné et L. Schwartz dans le cas des limites inductives strictes, à G. Köthe dans le cas des $\mathscr{LF}$ quelconques.

Corollaire 2. — *Soient* E *quelconque,* F *muni d'un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1, \ldots, n_k} : k \in \mathbb{N}\}$$

et T *linéaire et à graphe sq-fermé de* E *dans* F. *Pour tout* B, *borné absolument convexe et sq-complet de* E,

— *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *et* $C_1 > 0$ *tels que*

$$TB \subset C_1 e_{n_1},$$

— *si*

$$TB \subset C_k e_{n_1, \ldots, n_k}, \quad (*)$$

il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ *et* $C_{k+1} > 0$ *tels que*

$$TB \subset C_{k+1} e_{n_1 \ldots, n_{k+1}}.$$

En particulier, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ *et* $C_k > 0$ *tels que* (*) *ait lieu pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Cela s'applique notamment aux bornés absolument convexes et *sq*-complets de F lui-même, en prenant $T = I$.

Pour établir le corollaire 2, on note que l'espace E_B, enveloppe linéaire de B muni de la norme associée à B, est de Banach et que la restriction de T à E_B est à graphe *sq*-fermé dans $E_B \times F$.

Il suffit alors d'appliquer le théorème 3 pour conclure.

Remarque. — *Si on modifie le réseau* $\mathscr{R}$ *comme il est indiqué dans la proposition* 3, chap. I, p. 16, *on peut supposer que les constantes* C_k *sont toutes égales à* 1.

Corollaire 3. — *Si* E *est de Baire et admet un réseau strict, il est de Fréchet.*

Cet énoncé généralise le fait classique que *la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet* E_n *ne peut être de Baire sans que les* E_n *soient identiques à partir d'un certain rang.*

Comme l'opérateur identité de E dans lui-même est continu, il existe une suite de semi-boules b_k de E et une suite d'indices $n_k \in \mathbb{N}$, tels que

$$b_k \subset e_{n_1, \ldots, n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or, quelle que soit la semi-boule b de centre 0 dans E, si λ_k est la suite associée aux n_k dans la définition du réseau strict, on a

$$\lambda_k e_{n_1,\ldots,n_k} \subset b$$

dès que k est assez grand. Cela résulte de la proposition 4, chap. I, p. 17.

Il en résulte que E est à semi-normes dénombrables.

Il est aussi sq-complet.

De fait, soit f_n une suite de Cauchy dans E. On peut en extraire une sous-suite f_{n_k} telle que

$$f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \in \lambda_k b_k \subset \lambda_k e_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$f_{n_N} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{N-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

converge dans E et la suite f_n converge vers la même limite.

Variante. — *Si* E *est de Baire et admet un réseau de type $\mathscr{C}$, il est à semi-normes dénombrables.*

La démonstration est analogue à celle du corollaire 3, en partant cette fois du théorème 1. On ne peut toutefois plus démontrer que E est sq-complet.

D'autres applications du théorème 3 fournissent encore des critères d'existence de réseaux et des propriétés des bornés dans les espaces d'opérateurs. Vu la longueur des développements qu'elles entraînent, elles sont reportées aux chapitres IV et V.

4. Suites très convergentes et ensembles très compacts

Avant de passer aux propriétés de relèvement, introduisons deux notions utiles.

Définitions. — Une suite f_n de E est *très convergente vers* 0 s'il existe un opérateur linéaire continu T d'un espace de Fréchet E_0 dans E et une suite $g_n \to 0$ dans E_0 tels que $Tg_n = f_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une suite f_n est très *convergente vers* f si la suite $f_n - f$ est très convergente vers 0.

Un ensemble K de E est *très compact* s'il existe un opérateur linéaire continu T d'un espace de Fréchet E_0 dans E et un compact K_0 de E_0 tels que $K = TK_0$.

Proposition 3. — *Toute suite très convergente est convergente.*

Tout ensemble très compact est compact et extractable.

C'est immédiat.

Proposition 4. — *Tout sous-ensemble sq-fermé d'un ensemble très compact est très compact.*

En effet, soient E_0 de Fréchet, T continu de E_0 dans E et K_0 compact dans E_0. Si F est sq-fermé et est contenu dans TK_0, $T_{-1}F$ est sq-fermé donc fermé dans E_0, donc $K_0 \cap T_{-1}F$ est compact dans E_0 et

$$F = T(K_0 \cap T_{-1}F)$$

est très compact.

PROPOSITION 5. — *Si la suite f_n est très convergente vers 0, il existe $\lambda_n \to \infty$ tels que la suite $\lambda_n f_n$ tende vers 0 et même soit très convergente vers 0 dans* E.

De fait, si g_n tend vers 0 dans l'espace de Fréchet E_0, on sait qu'il existe des λ_n tels que $\lambda_n \to \infty$ et $\lambda_n g_n \to 0$ dans E_0 : si p_i sont les semi-normes dénombrables de E_0 et si n_i sont tels que

$$p_i(g_n) \leqslant 2^{-2i}, \forall n \geqslant n_i,$$

on prend $\lambda_n = 2^i$ pour $n_i \leqslant n < n_{i+1}$.

Si la suite f_n, très convergente vers 0, s'écrit Tg_n, avec T continu de E_0 dans E, la suite $\lambda_n f_n$ est encore très convergente vers 0, d'où la conclusion.

PROPOSITION 6. — *Si la suite f_n est très convergente vers 0 dans* E, *on a*

$$\overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}.$$

De plus, cet ensemble est compact et même très compact dans E.

Supposons que $f_n = Tg_n$, où $g_n \to 0$ dans l'espace de Fréchet E_0 et où T est linéaire et continu de E_0 dans E.

On sait que

$$\mathscr{K} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}$$

est défini et compact dans E_0 (on se référera par exemple à [17], paragr. 21, p.101, ou au lemme préparatoire au théorème de relèvement, p. 60). Dès lors, les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T g_n$$

convergent dans E et

$$\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \} = T\mathscr{K}$$

est compact et même très compact dans E. Or il est trivial que

$$\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \rangle \subset T\mathscr{K} \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \rangle},$$

d'où $T\mathscr{K} = \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \rangle}$, ce qui établit la proposition.

PROPOSITION 7. — *Tout ensemble très compact de* E *est contenu dans l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite très convergente vers* 0 *dans* E.

En particulier, l'enveloppe absolument convexe fermée d'un ensemble très compact est aussi très compacte.

Soit $K = TK_0$, où K_0 est compact dans l'espace de Fréchet E_0 et T linéaire et continu de E_0 dans E.

Il existe une suite g_n tendant vers 0 dans E_0, telle que

$$K_0 \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}$$

(cf. [17], b), p. 82). Alors

$$K = TK_0 \subset \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n Tg_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \} = \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} Tg_n \rangle},$$

d'où la conclusion.

Pour le cas particulier, on note que l'enveloppe absolument convexe fermée de K est fermée dans

$$\overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} Tg_n \rangle},$$

qui est très compact, vu la proposition 6, et on conclut en appliquant la proposition 4.

On peut particulariser le choix de l'espace de Fréchet E_0 qui intervient dans la définition des suites très convergentes et des ensembles très compacts.

PROPOSITION 8. — *Pour qu'une suite f_n soit très convergente vers f* (resp. *pour que* K *soit très compact*), *il faut et il suffit qu'il existe un compact absolument convexe* K_0 *de* E, *contenant la suite f_n* (resp. *l'ensemble* K) *et tel que f_n converge vers f dans* E_{K_0} (resp. *que* K *soit compact dans* E_{K_0}).

La condition est évidemment suffisante, puisque l'opérateur identité de E_{K_0} dans E est continu et que E_{K_0} est de Banach.

Démontrons qu'elle est nécessaire.

Soient E_0 de Fréchet, T linéaire et continu de E_0 dans E et $f_n = Tg_n$, où g_n converge vers 0 dans E_0.

Il existe $\lambda_n \to \infty$ tels que $\lambda_n g_n$ tende encore vers 0 dans E_0. L'ensemble

$$\mathscr{K} = \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n \rangle}$$

est donc compact et absolument convexe dans E_0 et son image $T\mathscr{K}$ est compacte et absolument convexe dans E.

De plus, f_n tend vers 0 dans $E_{T\mathscr{K}}$, car

$$\lambda_n f_n \in T\mathscr{K} \Rightarrow \| f_n \|_{E_{T\mathscr{K}}} \leqslant 1/\lambda_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

De même, si $K = TK_0$, où K_0 est compact dans E_0, il existe g_n tendant vers 0 dans E_0, tels que

$$K_0 \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}.$$

Alors

$$K = TK_0 \subset \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n Tg_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}.$$

Ce dernier ensemble est compact dans $E_{T\mathscr{K}}$ puisque Tg_n tend vers 0 dans $E_{T\mathscr{K}}$. Or K, fermé dans E, est fermé dans $E_{T\mathscr{K}}$, donc il y est compact.

PROPOSITION 9. — *Si f_n est une suite très convergente* (resp. K *un ensemble très compact*) *de* E *et si* T *est un opérateur linéaire de* E *dans* F *tel que l'image par* T *de tout borné de* E *soit bornée dans* F, *alors la suite* Tf_n *est très convergente* (resp. TK *est très compact*) *dans* F.

COROLLAIRE. — [*Si* E *est à semi-normes représentables*], *toute suite très convergente dans* E_a *est très convergente dans* E *et tout ensemble très compact dans* E_a *est très compact dans* E.

En effet, soient E_0 de Fréchet, T_0 linéaire et continu de E_0 dans E, $g_n \to 0$ et K_0 compact dans E_0.

L'opérateur TT_0 est linéaire de E_0 dans F et transforme les bornés de E_0 en bornés de F. Donc il est continu de E_0 dans F et $T(T_0 g_n)$ et $T(T_0 K_0)$ sont respectivement une suite très convergente et un ensemble très compact de F.

Pour le corollaire, on note qu'en vertu du théorème de Mackey, tout borné de E_a est borné dans E.

Voici encore quelques exemples de suites très convergentes et d'ensembles très compacts.

EXEMPLE 1. — *Si* E *est sq-complet, si la suite f_n est bornée et si $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tend vers* 0, *la suite $\lambda_n f_n$ est très convergente vers* 0.

Appelons B l'enveloppe absolument convexe fermée de la suite f_n. C'est un borné absolument convexe et *sq*-complet, donc l'espace E_B associé est de Banach.

Or $\lambda_n f_n$ tend vers 0 dans E_B, puisque

$$\| f_n \|_{E_B} \leqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où la conclusion.

EXEMPLE 2. — *Si* E *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$,

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

pour toute suite n_k fixée, si f_k appartient à $e_{n_1,\ldots,n_k}$ et si les λ_k sont assez petits, la suite $\lambda_k f_k$ est très convergente vers 0 *dans* E.

Aux n_k, associons $\nu_k > 0$ tels que les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k,$$

où $g_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \nu_k]$, convergent dans E.

Pour $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ donnés, l'ensemble

$$\mathscr{K} = \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k : \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k/\nu_k \leqslant 1\}$$

est compact et absolument convexe, en vertu du lemme, p. 60. Donc $E_{\mathscr{K}}$ est de Banach. Dès lors, quelle que soit la suite ε_k tendant vers 0, la suite $\varepsilon_k \nu_k f_k$ est très convergente vers 0 dans E.

DÉFINITIONS. — On appelle espace *de Schwartz* un espace E où, pour tout $p \in \{p\}$, il existe $p' \in \{p\}$ tel que $b_{p'}(1)$ soit précompact pour la semi-norme p.

On appelle *co-Schwartz* un espace où, pour tout borné B, il existe un borné absolument convexe B′ tel que B soit précompact dans $E_{B'}$, enveloppe linéaire de B′ munie de la norme associée à B′.

L'espace E *est co-Schwartz si et seulement si* E_b^* *est de Schwartz.*

EXEMPLE 3. — *Si* E *est de Schwartz, tout ensemble équicontinu et fermé dans* E_b^* *y est très compact.*

Si, en outre, E *est évaluable, c'est le cas pour tout borné fermé de* E_b^*.

Il suffit de démontrer que, pour toute semi-boule b de E, le polaire b^Δ de b est très compact dans E_b^*.

En effet, tout ensemble équicontinu est contenu dans un tel b^Δ et, si E est évaluable, tout borné de E_b^* est équicontinu.

Comme E est de Schwartz, à b correspond $b' \subset b$ tel que b' soit précompact pour la semi-norme correspondant à b.

Par le théorème de précompacité réciproque (cf. [17], p. 200), b^Δ est contenu dans b'^Δ et est précompact pour la norme

$$\| \mathcal{T} \| = \sup_{f \in b'} | \mathcal{T}(f) |.$$

Or l'enveloppe linéaire de b'^Δ muni de cette norme est un espace de Banach. Comme b^Δ y est fermé, il y est donc compact, d'où la conclusion.

EXEMPLE 4. — *Si* E *est co-Schwartz et sq-complet, tout borné absolument convexe et fermé de* E *est très compact.*

Soit B un tel ensemble. Il lui correspond B′ borné et absolument convexe tel que B soit précompact dans l'espace normé $E_{B'}$. On peut évidemment supposer B′ fermé, quitte à lui substituer son adhérence. La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 de $E_{B'}$ est alors égale à B′, donc elle est fermée dans E. De là, E_B est de Banach. Comme B est fermé et précompact dans $E_{B'}$, il y est compact, d'où la conclusion.

Les notions d'ensemble très compact et de suite très convergente permettent de formuler des propriétés de localisation pour des opérateurs sans que ces opérateurs soient nécessairement continus.

PROPOSITION 10. — *Soient* E *quelconque et* F *muni d'un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Si T *est linéaire et à graphe sq-fermé de* E *dans* F,

— *l'image par* T *de tout borné absolument convexe et sq-complet de* E *est bornée dans* F,

— *l'image par* T *de toute suite très convergente de* E *est très convergente dans* F,

— *l'image par* T *de tout ensemble très compact de* E *est très compacte dans* F.

Si B est absolument convexe, borné et *sq*-complet, l'espace E_B est de Banach. La restriction de T à E_B est un opérateur à graphe *sq*-fermé de E_B dans F, donc elle est continue. De là, TB est borné.

Si f_n est une suite très convergente dans E, il existe un espace de Fréchet E_0, un opérateur linéaire continu T_0 de E_0 dans E et une suite convergente g_n de E_0 tels que $f_n = T_0 g_n$.

L'opérateur TT_0 est à graphe *sq*-fermé de E_0 dans F, donc il est continu. Dès lors $Tf_n = TT_0 g_n$ est une suite très convergente de F.

Raisonnement analogue pour les ensembles très compacts.

VARIANTES. — 1. *Même énoncé si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{E}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$.

2. *Même énoncé si* F *admet un réseau de type* $\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *et si* $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ *est fermé.*

5. Théorème de relèvement

Avant d'aborder le théorème de relèvement, démontrons un

LEMME. — *Soit* E *un espace linéaire à semi-normes. Si la suite* f_n *tend vers* 0 *dans* E *et si les séries considérées dans sa définition convergent,*

a) *l'ensemble*

$$\mathrm{K} = \{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k : \sum_{k=1}^{\infty} | c_k | \leqslant 1 \}$$

est compact et extractable dans E.

b) *toute partie fermée ou sq-fermée de* K *est encore compacte et extractable dans* E.

Considérons l'application τ définie par

$$\tau \vec{c} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$$

de

$$\mathrm{B} = \{\vec{c} : \sum_{k=1}^{\infty} | c_k | \leqslant 1\}$$

dans E.

L'application τ est continue si on munit B de la topologie induite par l_1^{loc}.

En effet, quels que soient $\vec{c} \in \mathrm{B}$, p et $\varepsilon > 0$ donnés,

$$\begin{aligned} p(\tau\vec{c} - \tau\vec{c}\,') &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} | c_k - c_k' | \, p(f_k) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} | c_k - c_k' | \sup_k p(f_k) + \sum_{k=\mathrm{N}+1}^{\infty} | c_k - c_k' | \sup_{k > \mathrm{N}} p(f_k). \end{aligned}$$

Or, si $\vec{c}\,' \in \mathrm{B}$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} | c_k - c_k' | \leqslant 2$$

et, si N est assez grand, comme $f_k \to 0$ dans E,

$$\sup_{k > \mathrm{N}} p(f_k) \leqslant \varepsilon/4.$$

Il vient donc, pour cet N fixé,

$$\vec{c}\,' \in \mathrm{B}, \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} | c_k - c_k' | \leqslant \varepsilon/[2 \sup_k p(f_k)] \Rightarrow p(\tau\vec{c}\,' - \tau\vec{c}) \leqslant \varepsilon.$$

De plus, B est compact et extractable dans l_1^{loc}.

Donc TB est compact et extractable dans E, ce qui démontre a).

Soit $F \subset K$ fermé ou *sq*-fermé dans E.

Son image inverse par τ, $\tau_{-1}F$, est aussi fermée ou *sq*-fermée dans B. Or, comme l_1^{loc} est un espace à semi-normes dénombrables, les deux notions y sont équivalentes. Donc $\tau_{-1}F$ est compact et extractable dans l_1^{loc} et, comme il appartient à B, son image par τ est compacte et extractable dans E, d'où b).

Théorème de relèvement. — *Soit* T *un opérateur linéaire défini d'une partie de* E *sur* F.

Si E *admet un réseau strict et si* T *est à graphe sq-fermé,*

a) *pour toute suite très convergente* g_n *de* F, *il existe une suite très convergente* f_n *de* E *telle que*

$$Tf_n = g_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) *pour tout ensemble* K *très compact dans* F, *il existe un ensemble* $\mathscr{K}$ *très compact dans* E *tel que*

$$T\mathscr{K} = K.$$

a) On peut sans restriction supposer que g_n soit très convergent vers 0.

En effet, si g_n est très convergent vers g, $g_n - g$ est très convergent vers 0. Alors, si f_n est très convergent vers 0 et tel que $Tf_n = g_n - g$ et si f est tel que $Tf = g$, $f_n + f$ est très convergent vers f et $T(f_n + f) = g_n$.

Soit donc g_n une suite très convergente vers 0 dans F.

Il existe F_0 de Fréchet, h_n tendant vers 0 dans F_0 et T_0 linéaire et continu de F_0 dans F tels que $T_0h_n = g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La relation définie de F_0 dans E par

$$hRf \Leftrightarrow T_0h = Tf$$

est linéaire et à graphe *sq*-fermé :

$$\left.\begin{array}{l} h_n \to h \\ f_n \to f \\ h_nRf_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} Tf_n = T_0h_n \to T_0h \\ f_n \to f \end{array}\right\} \Rightarrow T_0h = Tf \Rightarrow hRf.$$

De plus, $R^{-1}(E) = F_0$.

De là, si

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un réseau strict de E, vu le théorème 2, p. 50, il existe une suite de semi-boules b_k de F_0 et une suite d'indices $n_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$b_k \subset R^{-1}(e_{n_1,\ldots,n_k}), \ \forall k \in \mathbb{N},$$

soit

$$T_0b_k \subset Te_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On peut même, quitte à changer le rayon des semi-boules, supposer que

$$T_0b_k \subset \lambda_k Te_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

où λ_k est la suite de nombres associés aux n_k dans la définition du réseau strict.

Déterminons $\nu_k \in \mathbb{N}$ croissants avec k et tels que $h_n \in b_k$ si $\nu_k \leqslant n < \nu_{k+1}$. Pour tout n, choisissons alors f_n tel que $\mathrm{T}f_n = \mathrm{T}_0 h_n$ et que $f_n \in \lambda_k e_{n_1,\ldots,n_k}$ si $\nu_k \leqslant n < \nu_{k+1}$.

La suite f_n ainsi déterminée tend vers 0 dans E.

De fait, pour toute semi-boule b de centre 0 dans E,

$$\lambda_k e_{n_1,\ldots,n_k} \subset b$$

dès que k est assez grand (cf. prop. 4, chap. I, p. 17).

On montrera en c) ci-dessous qu'on peut même la supposer très convergente.

b) Soit à présent K très compact dans F.

Vu la proposition 7, p. 56, il existe une suite g_n très convergente vers 0 dans F, telle que

$$\mathrm{K} \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}.$$

Pour cette suite g_n, adoptons les notations de a).

Les f_n associés aux g_n sont tels que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

convergent dans E si

$$\sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1.$$

En effet, si $\nu_k \leqslant \mathrm{N} < \nu_{k+1}$, on a

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n f_n = (\sum_{n=1}^{\nu_1 - 1} + \sum_{n=\nu_1}^{\nu_2 - 1} + \ldots + \sum_{n=\nu_{k-1}}^{\nu_k - 1} + \sum_{n=\nu_k}^{\mathrm{N}}) \, c_n f_n.$$

Or, d'une part, la série de terme général

$$\sum_{n=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} c_n f_n$$

converge dans E, puisque

$$\sum_{n=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} c_n f_n \in (\sum_{n=1}^{\infty} | c_n |) \, \lambda_k e_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

et, d'autre part,

$$\sum_{n=\nu_k}^{\mathrm{N}} c_n f_n \in \lambda_k e_{n_1,\ldots,n_k}$$

où le second membre est contenu dans une semi-boule arbitraire de centre 0 dès que k est assez grand.

Cela étant, vu le lemme précédent, l'ensemble

$$K' = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}$$

est compact et extractable dans E.

On a

$$TK' \supset K. \ (*)$$

En effet, si $g \in K$, pour un choix convenable de c_n, comme $\mathscr{G}(T)$ est *sq*-fermé, on a

$$\left. \begin{array}{l} g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n g_n = \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} c_n T f_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n = \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} c_n f_n \end{array} \right\} \Rightarrow g = T (\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n) \in TK'.$$

De (*), on déduit que

$$K = T(K' \cap T_{-1}K).$$

L'ensemble $T_{-1}K$ est fermé pour les suites : si $f'_m \in T_{-1}K$ fend vers f, on peut extraire des Tf'_m une sous-suite qui converge vers $g \in K$. Alors

$$\left. \begin{array}{l} f'_{m_k} \to f \\ Tf'_{m_k} \to g \end{array} \right\} \Rightarrow Tf = g \in K.$$

De là, vu le lemme, $K' \cap T_{-1}K$ est compact dans E.

c) Montrons enfin qu'on peut supposer la suite f_n très convergente et le compact $\mathscr{K}$ très compact.

Si g_n est une suite très convergente vers 0 dans F, il existe $\lambda_n \to \infty$ tels que la suite $\lambda_n g_n$ soit encore très convergente vers 0.

Compte tenu de ce qu'on a démontré en a) et b), il existe $f_n \in E$ tels que $Tf_n = \lambda_n g_n$, que f_n tende vers 0 dans E et que

$$K' = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \}$$

soit compact dans E.

L'espace $E_{K'}$ est de Banach et $(1/\lambda_n)f_n$ tend vers 0 dans $E_{K'}$, puisque

$$|| f_n ||_{E_{K'}} \leqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc la suite $(1/\lambda_n)f_n$ est très convergente et telle que

$$T [(1/\lambda_n)f_n] = g_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si K est très compact dans F, il appartient à l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite g_n très convergente vers 0 dans F.

Avec les notations précédentes, K est l'image par T de

$$\mathscr{K} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \} \cap \mathrm{T}_{-1}\mathrm{K}.$$

Cet ensemble est *sq*-fermé dans E, donc dans $\mathrm{E}_{\mathrm{K}'}$. De plus, il est contenu dans

$$\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n} f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1 \},$$

compact de $\mathrm{E}_{\mathrm{K}'}$. Donc il est compact dans $\mathrm{E}_{\mathrm{K}'}$ et très compact dans E.

CHAPITRE IV

RÉSEAUX DANS LES ESPACES D'OPÉRATEURS

Les propriétés de localisation du chapitre précédent permettent d'apporter d'importants compléments aux propriétés de permanence des espaces à réseaux.

On démontre ici l'existence de réseaux dans divers espaces d'opérateurs et dans des produits tensoriels de type ε.

1. Espaces d'opérateurs

THÉORÈME 1. — *Si* E *est de Banach ou limite inductive d'une suite d'espaces de Banach et* F *à réseau strict,* $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *admet un réseau strict.*

a) Supposons d'abord E de Banach.

Soit B la boule unité de E et soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau strict dans F.

Si T est continu de E dans F, en vertu du théorème 3, chap. III, p. 53, il existe m_1 et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\mathrm{TB} \subset m_1 e_{n_1}.$$

De plus, si

$$\mathrm{TB} \subset m_k e_{n_1,\dots,n_k},$$

il existe m_{k+1} et $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tels que

$$\mathrm{TB} \subset m_{k+1} e_{n_1,\dots,n_{k+1}}.$$

En appliquant la proposition 3, chap. I, p. 16, on voit qu'on peut supposer que m_1, m_k, m_{k+1} sont égaux à 1, quitte à modifier le réseau.

Posons

$$\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k} = \{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) : \mathrm{TB} \subset e_{n_1,\dots,n_k}\},$$

quels que soient $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$.

Les $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ constituent un réseau $\mathscr{R}'$ de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, puisque tout $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ appartient à un $\mathscr{E}_{n_1}$ et que, s'il appartient à $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$, il appartient à un $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k+1}}$.

Le réseau $\mathscr{R}'$ est de type $\mathscr{C}$.

Soit n_k une suite fixée et soient λ_k les constantes associées aux n_k dans $\mathscr{R}$. Posons $\lambda'_k = 2^{-k}\lambda_k$.

Démontrons que, si

$$\mathrm{T}_k \in \mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda'_k,$$

la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \mathrm{T}_k \quad (*)$$

converge dans $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

La suite $\lambda_k \mathrm{T}_k$ est équicontinue. De fait, si $\{q\}$ désigne le système de semi-normes de F, pour tout $q \in \{q\}$,

$$\lambda_k \mathrm{T}_k \mathrm{B} \subset \lambda_k e_{n_1, \ldots, n_k} \subset b_q(1)$$

dès que k est assez grand, soit $k > k_0$. Cela résulte de la proposition 4, chap. I, p. 17. Or l'ensemble fini $\{\lambda_1 \mathrm{T}_1, \ldots, \lambda_{k_0} \mathrm{T}_{k_0}\}$ est équicontinu, donc il existe C tel que

$$q(\lambda_k \mathrm{T}_k f) \leqslant \mathrm{C} \, \| f \|, \ \forall f \in \mathrm{E}, \ \forall k \leqslant k_0,$$

et, au total,

$$q(\lambda_k \mathrm{T}_k f) \leqslant \sup(1, \mathrm{C}) \, \| f \|, \ \forall f \in \mathrm{E}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cela étant, la série (*) est de Cauchy dans $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et y est équicontinue, car elle s'écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu'_k \lambda_k \mathrm{T}_k,$$

où la suite $\lambda_k \mathrm{T}_k$ est équicontinue et où la série des μ'_k converge, puisque $0 \leqslant \mu'_k \leqslant 2^{-k}$.

La série (*) converge dans $\mathscr{L}_s(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On voit alors sans peine qu'elle converge dans $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ vers la même limite, ou bien on applique le corollaire 4, chap. I, p. 23, le réseau $\mathscr{R}'$ étant de type $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{L}_s(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Soit f fixé dans E, tel que $\| f \| \leqslant \mathrm{C}$.

La série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \mathrm{T}_k f$$

converge dans F, puisque $\mathrm{T}_k f \in \mathrm{C}\, e_{n_1, \ldots, n_k}$ et $0 \leqslant \mu_k \leqslant \lambda_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Appelons $\mathrm{T}f$ sa limite. On définit ainsi un opérateur de E dans F. Il est immédiat que T est linéaire et il est continu puisque la série (*) est équicontinue. D'où la conclusion.

Il reste enfin à vérifier que $\mathscr{R}'$ est strict.

Or, si $\| f \| \leqslant 1$, on a

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k \mathrm{T}_k f \in e_{n_1, \ldots, n_{k_0}},$$

d'où

$$\Big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k \mathrm{T}_k\Big) \mathrm{B} \subset e_{n_1, \ldots, n_{k_0}}$$

et

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k T_k \in \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0}},$$

quel que soit $k_0 \in \mathbb{N}$.

b) Soit à présent E limite inductive d'une suite d'espaces de Banach E_i. L'espace $\mathscr{L}_s(E, F)$ peut être assimilé au sous-espace de

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}_s(E_i, F),$$

formé des

$$(T_1, T_2, \ldots)$$

tels que

$$T_i f = T_{i+1} f, \ \forall f \in E_i, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

C'est visiblement un sous-espace fermé du produit et le système de semi-normes de $\mathscr{L}_s(E, F)$ est équivalent au système de semi-normes induit dans le sous-espace par le produit. En vertu de a) et des propriétés de permanence (prop. 1, a) et 2, c), chap. III, p. 51 et 53), $\mathscr{L}_s(E, F)$ admet un réseau strict. On passe alors à $\mathscr{L}_b(E, F)$ en appliquant le troisième corollaire de la proposition 1, chap. III, p. 52.

Variante de b). — Voici une autre démonstration, plus technique, qui consiste à exhiber directement le réseau de $\mathscr{L}_b(E, F)$.

Soit B_i la boule unité de chaque E_i et soit $\mathscr{R}$ le réseau strict de F considéré en a).

Posons

$$\mathscr{E}^{(i)}_{n_1,\ldots,n_k} = \{T \in \mathscr{L}(E, F) : TB_i \subset e_{n_1,\ldots,n_k}\}.$$

Les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = \mathscr{E}^{(1)}_{n_1},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1')} = \mathscr{E}^{(1)}_{n_1,n_2} \cap \mathscr{E}^{(2)}_{n_1'},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1'),(n_3,n_2',n_1'')} = \mathscr{E}^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \cap \mathscr{E}^{(2)}_{n_1',n_2'} \cap \mathscr{E}^{(3)}_{n_1''},$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

où les indices groupés entre parenthèses sont renumérotés par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$, constituent un réseau $\mathscr{R}'$ de E.

Fixons une suite $n_1, (n_2, n_1'), (n_3, n_2', n_1''), \ldots$. Soient $\lambda_k, \lambda_k', \lambda_k'', \ldots$ les suites associées respectivement aux $n_k, n_k', n_k'', \ldots$ dans la définition de $\mathscr{R}$.

Posons

$$\nu_1 = \lambda_1, \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda_1'), \nu_3 = \inf(\lambda_3, \lambda_2', \lambda_1''), \ldots .$$

Si

$$T_1 \in \mathscr{E}_{n_1}, \ T_2 \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1')}, \ T_3 \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1'),(n_3,n_2',n_1'')}, \ \ldots,$$

la suite $\nu_k T_k$ est équicontinue.

En effet, on a vu en a) qu'elle est équicontinue de chaque E_i dans F.

Alors, en procédant comme en a), on voit, si $0 \leqslant \mu_k \leqslant 2^{-k}\lambda_k$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k T_k$$

est de Cauchy dans $\mathscr{L}_b(E, F)$ et converge dans $\mathscr{L}_s(E, F)$, donc converge dans $\mathscr{L}_b(E,F)$, ce qui établit que $\mathscr{R}'$ est un réseau de type $\mathscr{C}$.

On prouve comme en a) qu'il est strict.

Théorème 2. — *Si les conditions suivantes sont vérifiées,* $\mathscr{L}_b(E, F)$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$:

(a) E *est de Fréchet ou limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet,*

(b) F *est sq-complet et à réseau de type* $\mathscr{C}$, *ou* F *est limite inductive d'une suite d'espaces* F_j *sq-complets et à réseau strict.*

En outre, *si le réseau de* F (resp. *des* F_j) *peut être supposé formé d'ensembles absolument convexes et sq-fermés,* $\mathscr{L}_b(E, F)$ *est à réseau strict.*

a) Supposons d'abord E de Fréchet et F *sq*-complet et à réseau de type $\mathscr{C}$.

Désignons par p_i, $i \in \mathbb{N}$, les semi-normes dénombrables de E et par b_i les semi-boules $b_{p_i}(1/i)$.

Soit d'autre part

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

le réseau de type $\mathscr{C}$ de F.

Si T est continu de E dans F, en vertu du théorème 1, chap. III, p. 48,

— il existe n_1 tel que $T_{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre et i_1 tel que

$$Tb_{i_1} \subset \overline{\langle e_{n_1} \rangle},$$

— si $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ n'est pas maigre, il existe n_{k+1} tel que $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ ne soit pas maigre et i_{k+1} tel que

$$Tb_{i_{k+1}} \subset \overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_{k+1}} \rangle}.$$

Appelons $\mathscr{E}_{(i_1,n_1),\ldots,(i_k,n_k)}$ l'ensemble des $T \in \mathscr{L}(E, F)$ tels que $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ ne soit pas maigre et que

$$Tb_{i_1} \subset \overline{\langle e_{n_1} \rangle}, \ldots, Tb_{i_k} \subset \overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k} \rangle}$$

et renumérotons les couples d'indices entre parenthèses par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$.

En vertu de la remarque précédente, ces ensembles forment un réseau $\mathscr{R}'$ de $\mathscr{L}_b(E, F)$.

Démontrons que $\mathscr{R}'$ est de type $\mathscr{C}$.

Fixons une suite (i_k, n_k), $k \in \mathbb{N}$. Associons aux n_k la suite λ_k qui leur correspond dans $\mathscr{R}$. On peut sans restriction supposer les λ_k décroissants.

Si

$$T_k \in \mathscr{E}_{(i_1,n_1),\ldots,(i_k,n_k)}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\lambda_k T_k$ est équicontinue. De fait, quel que soit q, vu la proposition 4, chap. I, p. 17, on a

$$\lambda_k e_{n_1, \ldots, n_k} \subset b_q(1)$$

dès que k est assez grand, soit $k \geqslant k_0$. Il vient alors

$$\lambda_k T_k b_{i_{k_0}} \subset \lambda_{k_0} \overline{\langle e_{n_1, \ldots, n_{k_0}} \rangle} \subset b_q(1), \forall k > k_0,$$

si on prend b_q fermé, soit

$$q(\lambda_k T_k f) \leqslant i_{k_0} p_{i_{k_0}}(f), \forall f \in E, \forall k > k_0.$$

D'autre part, $\lambda_1 T_1, \ldots, \lambda_{k_0} T_{k_0}$ sont équicontinus et il existe $i_0 \geqslant i_{k_0}$ tel que

$$q(\lambda_k T_k f) \leqslant i_0 p_{i_0}(f), \forall f \in E,$$

pour tout $k \leqslant k_0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Or, comme E est de Fréchet, si F est sq-complet, $\mathscr{L}_b(E, F)$ est sq-complet. Il résulte donc de la proposition 1, chap. 1, p. 15, que $\mathscr{R}'$ est de type $\mathscr{C}$.

Si les $e_{n_1, \ldots, n_k}$ sont absolument convexes et sq-fermés pour les suites, on peut remplacer $\overline{\langle e_{n_1, \ldots, n_k} \rangle}$ par $e_{n_1, \ldots, n_k}$ dans ce qui précède et on voit immédiatement que les ensembles

$$\mathscr{E}_{(i_1, n_1), \ldots, (i_k, n_k)}$$

sont absolument convexes et sq-fermés dans $\mathscr{L}_b(E, F)$, d'où $\mathscr{R}'$ est strict.

b) Soient E de Fréchet et F limite inductive d'une suite d'espaces F_j, à réseau strict et sq-complets.

On ne sait pas si F est sq-complet, donc ce n'est pas un cas particulier de a). Si

$$\{e^{(j)}_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un réseau strict dans chaque F_j, les ensembles

$$e_{n_1} = F_{n_1}, n_1 \in \mathbb{N},$$

$$e_{n_1, \ldots, n_k} = e^{(n_1)}_{n_2, \ldots, n_k}, k > 1, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N},$$

forment un réseau strict dans F.

On construit encore les ensembles

$$\mathscr{E}_{(i_1, n_1), \ldots, (i_k, n_k)}$$

considérés ci-dessus en substituant aux $\overline{\langle e_{n_1, \ldots, n_k} \rangle}$ les $e_{n_1, \ldots, n_k}$ eux-mêmes et on reproduit la démonstration de a).

Si T_k et λ_k sont déterminés comme ci-dessus, on voit que les $\lambda_k T_k$ sont des opérateurs linéaires de E dans F_{n_1} et que la suite $\lambda_k T_k$ est équicontinue de E dans cet F_{n_1}. Or $\mathscr{L}_b(E, F_{n_1})$ est sq-complet, donc les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \lambda_k T_k,$$

où $\mu_k \in [0, 2^{-k}]$, convergent dans $\mathscr{L}_b(E, F_{n_1})$ et a fortiori dans $\mathscr{L}_b(E, F)$.

c) Supposons enfin E limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet E_i, F vérifiant l'une ou l'autre forme de (b).

En vertu du corollaire 4 du théorème 1, chap. I, p. 23, il suffit de démontrer que $\mathscr{L}_s(E, F)$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$. Or $\mathscr{L}_s(E, F)$ peut être assimilé au sous-espace de

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}_s(E_i, F)$$

formé des éléments

$$(T_1, T_2, \ldots)$$

tels que

$$T_i f = T_{i+1} f, \ \forall f \in E_i, \ \forall i \in \mathbb{N},$$

et son système de semi-normes est celui que le produit y induit. Or il est visiblement fermé dans le produit, d'où la conclusion en appliquant a) ou b) et les théorèmes 1, a) et 4, chap. I, p. 23 et 26.

THÉORÈME 3. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables* [*et séparable*] *et si* F *admet un réseau strict* (resp. *si* F *est sq-complet et admet un réseau de type* $\mathscr{C}$), *l'espace* $\mathscr{L}_b(E_c^*, F)$ *admet un réseau strict* (resp. *un réseau de type* $\mathscr{C}$).

C'est encore vrai si E *est limite inductive stricte d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables* [*et séparables*], *si en outre* F *est muni d'un système de semi-normes* $\{q\}$ *tel qu'à toute suite* $q_n \in \{q\}$, *il corresponde* $q \in \{q\}$ *et* $C_n > 0$ *tels que*

$$q_n(g) \leqslant C_n \, q(g), \ \forall g \in F, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On discute dans la proposition 1, p. 74, l'hypothèse supplémentaire sur F.

a) Soit E muni d'un système dénombrable de semi-normes $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$. Posons $b_m = b_{p_m}(1/m)$. Soit d'autre part

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1, \ldots, n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de F.

Désignons par b_m^Δ le polaire de b_m et par $E_{p_m}^*$ l'enveloppe linéaire de b_m^Δ, munie de la norme

$$\| \mathcal{C} \|_{p_m} = \sup_{p_m(f) \leqslant 1} | \mathcal{C}(f) |.$$

C'est un espace de Banach. De là, si T est continu de E_c^* dans F, sa restriction à $E_{p_m}^*$ est à graphe fermé dans $E_{p_m}^* \times F$, donc continue de $E_{p_m}^*$ dans F, d'où

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de $T_{-1} e_{n_1}$ à $E_{p_m}^*$ ne soit pas maigre dans $E_{p_m}^*$ et $C_1 > 0$ tel que

$$T b_m^\Delta \subset C_1 \, \overline{\langle e_{n_1} \rangle},$$

— si $T_{-1} e_{n_1, \ldots, n_k}$, restreint à $E_{p_m}^*$, n'y est pas maigre, il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que ce soit encore vrai pour $T_{-1} e_{n_1, \ldots, n_{k+1}}$ et $C_{k+1} > 0$ tel que

$$T b_m^\Delta \subset C_{k+1} \, \overline{\langle e_{n_1, \ldots, n_{k+1}} \rangle}.$$

On peut même, quitte à changer $\mathscr{R}$ (cf. prop. 3, chap. I, p. 16), supposer que les constantes C_k sont toutes égales à 1.

Appelons $\mathscr{E}^{(m)}_{n_1,\ldots,n_k}$ l'ensemble des $T \in \mathscr{L}(E^*_c, F)$ tels que la restriction de $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ à $E^*_{p_m}$ ne soit pas maigre dans cet espace et que

$$Tb^\Delta_m \subset \overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle}.$$

Compte tenu de ce qui précède, les ensembles

$$\begin{gathered}
\mathscr{E}_{n_1} = \mathscr{E}^{(1)}_{n'_1},\\
\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1)} = \mathscr{E}^{(1)}_{n_1,n_2} \cap \mathscr{E}^{(2)}_{n'_1},\\
\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1),(n_3,n'_2,n''_1)} = \mathscr{E}^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \cap \mathscr{E}^{(2)}_{n'_1,n'_2} \cap \mathscr{E}^{(3)}_{n''_1},\\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{gathered}$$

constituent un réseau $\mathscr{R}'$ de $\mathscr{L}(E^*_c, F)$, si on y renumérote les indices (n_2, n'_1) (resp. $(n_3, n'_2, n'_1), \ldots$) par un seul indice parcourant $\mathbb{N}$.

Notons que si le réseau de F est strict, on peut remplacer les conditions « $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ non maigre dans $E^*_{p_m}$ et $Tb^\Delta_m \subset \overline{\langle e_{n_1,\ldots,n_k}\rangle}$ » par « $Tb^\Delta_m \subset e_{n_1,\ldots,n_k}$ ».

Démontrons que $\mathscr{R}'$ est de type $\mathscr{C}$.

Supposons d'abord $\mathscr{R}$ strict.

Soient $n_1, (n_2, n'_1), (n_3, n'_2, n''_1), \ldots$ fixés et soient $\lambda_k, \lambda'_k, \lambda''_k, \ldots$ les suites de nombres associés respectivement à $n_k, n'_k, n''_k, \ldots$ dans $\mathscr{R}$. Posons

$$\nu_1 = \lambda_1, \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda'_1), \nu_3 = \inf(\lambda_3, \lambda'_2, \lambda''_1), \ldots.$$

Pour tout $\mathcal{T} \in E^*$, il existe m tel que $\mathcal{T} \in b^\Delta_m$. Dès lors, si

$$T_1 \in \mathscr{E}_{n_1}, T_2 \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1)}, \ldots$$

et si $0 \leqslant \mu_k \leqslant 2^{-k}\nu_k$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k T_k \mathcal{T} \quad (*)$$

converge dans F. Appelons $T\mathcal{T}$ sa limite. On définit ainsi un opérateur T linéaire de E^*_c dans F.

Vérifions que T est continu. Soit q une semi-norme de F. Pour que $q(T\mathcal{T})$ soit majoré par une semi-norme de E^*_c, il suffit, en vertu du théorème de Banach-Dieudonné, (cf. [17], p. 234), que, pour toute suite équicontinue $\mathcal{T}_i \in E^*$, tendant vers 0 dans E^*_c, $q(T\mathcal{T}_i)$ tende vers 0. Or, si $\mathcal{T}_i \in b^\Delta_{m_0}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et si les T_k sont tels que

$$T_k b^\Delta_{m_0} \subset e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

il existe k_0 tel que

$$\nu_k e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \subset b_q(1)$$

pour tout $k \geqslant k_0$ et, quel que soit $\varepsilon > 0$ fixé,

$$q\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k T_k \mathcal{T}_i\right) \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} \leqslant \varepsilon/2$$

pour k_0 assez grand, quel que soit $\mathcal{T}_i$.

D'autre part, comme les T_k sont continus de E_c^* dans F,

$$q\left(\sum_{k=1}^{k_0-1} \mu_k T_k \mathcal{C}_i\right) \leqslant \varepsilon/2$$

et, de là, $q(T\mathcal{C}_i) \leqslant \varepsilon$, dès que i est assez grand.

Le réseau $\mathscr{R}'$ est donc de type $\mathscr{C}$ et il est immédiat qu'il est strict.

Supposons à présent $\mathscr{R}$ de type $\mathscr{C}$ et F sq-complet.

Adoptons les notations du cas précédent et montrons cette fois que la série (*) est de Cauchy dans F.

Si $\mathcal{C} \in b_m^\Delta$ et si

$$b_m^\Delta \subset \overline{\langle e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\rangle}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

on a

$$\nu_k e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \subset b_q(1)$$

pour k assez grand et, si on prend $b_q(1)$ fermé,

$$\nu_k T_k \mathcal{C} \in \nu_k \overline{\langle e_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\rangle} \subset b_q(1),$$

d'où

$$q\left(\sum_{k=r}^{s} \mu_k T_k \mathcal{C}\right) \leqslant \sum_{k=r}^{s} 2^{-k} \to 0$$

si inf $(r, s) \to \infty$.

Comme F est sq-complet, la série (*) converge donc dans F.

On poursuit alors la démonstration comme dans le cas précédent.

b) Soit à présent E limite inductive stricte des E_n.

On démontre que

$$\mathscr{L}(E_c^*, F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n \mathscr{L}\,[(E_n)_c^*, F],$$

où les τ_n sont des opérateurs linéaires continus de $\mathscr{L}_b\,[(E_n)_c^*, F]$ dans $\mathscr{L}_b(E_c^*, F)$, quel que soit n.

On conclut alors en appliquant a).

Définissons les τ_n.

Soit $T \in \mathscr{L}\,[(E_n)_c^*, F]$. On appelle $\tau_n T$ l'opérateur qui, à tout $\mathcal{C} \in E^*$, associe l'image par T de sa restriction à E_n, qui est une fonctionnelle linéaire continue dans E_n. L'opérateur $\tau_n T$ est visiblement linéaire et continu et il est immédiat que τ_n est un opérateur linéaire de $\mathscr{L}_b\,[(E_n)_c^*, F]$ dans $\mathscr{L}_b(E, F)$. Montrons qu'il est continu. Tout borné $\mathscr{B}$ de E_c^* est équicontinu, donc l'ensemble $\mathscr{B}_n$ des restrictions à E_n des $\mathcal{C} \in \mathscr{B}$ est équicontinu dans $(E_n)^*$ et a fortiori borné dans $(E_n)_c^*$. De là, pour toute semi-norme q de F,

$$\sup_{\mathcal{C} \in \mathscr{B}} q(\tau_n T \mathcal{C}) = \sup_{\mathcal{C} \in \mathscr{B}_n} q(T\mathcal{C})$$

où le second membre est une semi-norme de $\mathscr{L}_b\,[(E_n)_c^*, F]$.

Il reste à voir que

$$\mathscr{L}(E_c^*, F) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n \mathscr{L}\,[(E_n)_c^*, F].$$

Soit T continu de E_c^* dans F.

Il existe n_0 tel que T s'annule dans le polaire $E_{n_0}^{\Delta}$ de E_{n_0}.

En effet, si ce n'est pas le cas, il existe, pour tout n, $\mathcal{C}_n \in E_n$, tel que $T\mathcal{C}_n \neq 0$. Il existe alors une semi-norme q_n de F telle que $q_n(T\mathcal{C}_n) \neq 0$. Si q est une semi-norme qui majore la suite q_n ainsi déterminée, on a encore $q(T\mathcal{C}_n) \neq 0$ pour tout n et, quitte à multiplier les $\mathcal{C}_n$ par des constantes convenables, on peut supposer que $q(T\mathcal{C}_n) = 1$ pour tout n.

La suite $\mathcal{C}_n$ est équicontinue dans E. En effet, elle est équicontinue dans chaque E_n, puisque seuls $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{n-1}$ y diffèrent de 0. De plus, elle tend vers 0 dans E_s^* : pour tout f, $\mathcal{C}_n(f) = 0$ dès que E_n contient f. Donc elle tend vers 0 dans E_c^*, ce qui exige que $q(T\mathcal{C}_n)$ tende vers 0. (*)

Définissons alors T_{n_0} de la façon suivante. Soit $\mathcal{C} \in E_{n_0}^*$. Il existe une semi-norme p_{n_0} de E_{n_0} qui majore $\mathcal{C}$. Comme la limite inductive est stricte, il existe alors une semi-norme p de E qui majore $\mathcal{C}$ dans E_{n_0}. Donc, en vertu du théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger $\mathcal{C}$ par une fonctionnelle $\mathcal{C}' \in E^*$. On pose

$$T_{n_0}\mathcal{C} = T\mathcal{C}'.$$

La définition a un sens, car la valeur de $T\mathcal{C}'$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{C}'$: si $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ prolongent $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}' - \mathcal{C}'' \in E_{n_0}^{\Delta}$ et $T\mathcal{C}' = T\mathcal{C}''$.

L'opérateur T_{n_0} ainsi défini est visiblement linéaire. Il est continu de $(E_{n_0})_c^*$ dans F. En effet, soit q une semi-norme de F. En vertu du théorème de Banach-Dieudonné, pour que $q(T_{n_0}\mathcal{C})$ soit majoré par une semi-norme de E_c^*, il suffit que $q(T_{n_0}\mathcal{C}_i)$ tende vers 0 pour toute suite $\mathcal{C}_i$ équicontinue et convergeant vers 0 dans $(E_{n_0})_s^*$.

Prolongeons les $\mathcal{C}_i$ par $\mathcal{C}_i'$, équicontinus dans E^*. Si

$$q(T_{n_0}\mathcal{C}_i) = q(T\mathcal{C}_i') \nrightarrow 0$$

quand $i \to \infty$, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $\mathcal{C}_{i_k}'$ tels que

$$q(T\mathcal{C}_{i_k}') \geqslant \varepsilon, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme les $\mathcal{C}_{i_k}'$ sont équicontinus, on peut en extraire une sous-suite $\mathcal{C}_{i_{k'}}'$ convergente dans E_c^*. Soit $\mathcal{C}'$ sa limite. On a $\mathcal{C}' \in E_{n_0}^{\Delta}$, car

$$\mathcal{C}'(f) = \lim \mathcal{C}_{i_{k'}}'(f) = \lim \mathcal{C}_{i_{k'}}(f) = 0, \forall f \in E_{n_0}.$$

Or $T \in \mathscr{L}(E_c^*, F)$, d'où

$$q(T\mathcal{C}_{i_{k'}}') \to q(T\mathcal{C}') = 0,$$

ce qui est absurde.

On a donc bien $T = \tau_{n_0}T_{n_0}$, avec $T_{n_0} \in \mathscr{L}\,[(E_{n_0})_c^*, F]$, d'où la conclusion.

Commentons brièvement l'hypothèse sur F : *à toute suite $q_n \in \{q\}$, il correspond $q \in \{q\}$ et $C_n > 0$ tels que*

$$q_n(g) \leqslant C_n\, q(g), \forall g \in F, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(*) Cette partie de la démonstration s'inspire d'un lemme de Grothendieck ([18], lemme 5, p. 85).

PROPOSITION 1. — *Elle est vérifiée*

a) *si* F *est normé,*

b) *si* F *est de type* ($\mathcal{DF}$) *et, en particulier, si* $F = E_b^*$, *où* E *est à semi-normes dénombrables,*

c) *si* $F = E_c^*$, *où* E *est à semi-normes dénombrables ou si* $F = E_\tau^*$, *où* E *est de Fréchet,*

d) *si* F *est limite inductive d'une suite d'espaces qui la vérifient.*

a) C'est trivial.

b) C'est le lemme 2, p. 64, [18], de Grothendieck.

c) Si les K_i sont compacts dans E et si p_i, $i \in \mathbb{N}$, sont les semi-normes dénombrables de E, fixons $\lambda_i > 0$ tels que

$$\lambda_i K_i \subset b_{p_i}(1/i), \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

On voit facilement que

$$K = 0 \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i)$$

est compact dans E.

On a alors

$$\sup_{f \in K_i} | \mathcal{T}(f) | \leqslant \frac{1}{\lambda_i} \sup_{f \in K} | \mathcal{T}(f) |, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Si les K_i sont faiblement compacts, K est faiblement compact. Si, en outre, E est de Fréchet, $\overline{\langle K \rangle}$ est faiblement compact avec K, ce qui règle le deuxième cas.

d) Soit E limite inductive des E_n et soit β_i une suite de semi-boules ouvertes de centre 0 dans E :

$$\beta_i = \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_i^{(n)} \rangle,$$

où les $b_i^{(n)}$ sont des semi-boules ouvertes de centre 0 dans E_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une semi-boule $b^{(n)}$ et des $\lambda_i^{(n)} > 0$ tels que

$$b_i^{(n)} \supset \lambda_i^{(n)} b^{(n)}, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Posons

$$\nu_n = \inf_{i \leqslant n} \lambda_i^{(n)}$$

et soit

$$\beta = \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \nu_n b^{(n)} \rangle.$$

Quel que soit i, β_i absorbe β. De fait, d'une part,

$$b_i^{(n)} \supset \lambda_i^{(n)} b^{(n)} \supset \nu_n b^{(n)}, \ \forall n \geqslant i.$$

D'autre part, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$b_i^{(n)} \supset \lambda \nu_n b^{(n)},$$

pour $n = 1, \ldots, i - 1$. Donc

$$\beta_i = \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_i^{(n)} \rangle \supset \inf(1, \lambda) \langle \bigcup_{n=1}^{\infty} \nu_n b^{(n)} \rangle = \inf(1, \lambda)\beta,$$

ce qui démontre la proposition.

Voici encore quelques remarques simples sur les espaces d'opérateurs qui permettent de compléter les résultats précédents.

Définition. — Désignons par F_β l'espace F muni des semi-normes

$$\sup_{\mathscr{Q} \in \mathscr{B}} | \mathscr{Q}(g) |, \quad (*)$$

où $\mathscr{B}$ parcourt l'ensemble des bornés de F_b^*.

On voit facilement que, [si F est séparable par semi-norme], c'est l'espace F_b^- introduit p. 22. De fait, si Θ est absolument convexe, fermé et bornivore, son polaire Θ^Δ est borné dans E_b^* et la semi-norme associée à Θ est l'expression

$$\sup_{\mathcal{T} \in \Theta^\Delta} | \mathcal{T}(f) |.$$

Inversement, (*) est visiblement une semi-norme de E_b^-.

Lemme 1. — *L'opérateur* J, *défini par*

$$JT = T^*,$$

est linéaire et continu

— *de* $\mathscr{L}_s(E, F)$ *dans* $\mathscr{L}_s(F_s^*, E_s^*)$,

— *de* $\mathscr{L}_b(E, F_\beta)$ *dans* $\mathscr{L}_b(F_b^*, E_b^*)$,

— *de* $\mathscr{L}_\tau(E, F)$ *dans* $\mathscr{L}_\Gamma(F_\tau^*, E_\tau^*)$, *si* Γ *est l'ensemble des parties équicontinues de* F^*.

On note d'abord que, si $T \in \mathscr{L}(E, F)$, T^* est continu

— de F_s^* dans E_s^*,

— de F_b^* dans E_b^*,

— de F_τ^* dans E_τ^*.

De plus, $\mathscr{L}(E, F_\beta) \subset \mathscr{L}(E, F)$.

De là, il est immédiat que J est un opérateur linéaire entre les espaces indiqués.

Il reste à s'assurer qu'il est continu.

Soient $\mathscr{Q}_1, \ldots, \mathscr{Q}_m \in F^*$. Il existe une semi-norme q de F et $C > 0$ tels que

$$| \mathscr{Q}_i(g) | \leqslant C\, q(g), \forall g \in F, \forall i \leqslant m.$$

De là, quels que soient $f_1, \ldots, f_n \in E$,

$$\sup_{j=1,\ldots,n} \sup_{i=1,\ldots,m} | (T^*\mathscr{Q}_i)(f_j) | = \sup_{j=1,\ldots,n} \sup_{i=1,\ldots,m} | \mathscr{Q}_i(Tf_j) |$$
$$\leqslant C \sup_{j=1,\ldots,n} q(Tf_j),$$

ce qui règle le premier cas.

Soient $\mathscr{B}$ un borné de F_b^* et B un borné de E. On a

$$\sup_{\mathscr{Q}\in\mathscr{B}} \sup_{f\in B} |(T^*\mathscr{Q})(f)| = \sup_{f\in B} \sup_{\mathscr{Q}\in\mathscr{B}} |\mathscr{Q}(Tf)|,$$

où le second membre est une semi-norme de $\mathscr{L}_b(E, F_\beta)$, d'où le second cas.

Le dernier cas est immédiat.

Lemme 2. — *Si* F *est sq-complet ou s'il est tonnelé, l'opérateur* J *est continu*

— *de* $\mathscr{L}_s(E, F_\beta)$ *dans* $\mathscr{L}_b(F_s^*, E_s^*)$

— *de* $\mathscr{L}_\tau(E, F_\beta)$ *dans* $\mathscr{L}_b(F_\tau^*, E_\tau^*)$.

Il suffit de noter que tout borné $\mathscr{B}$ de F_s^* ou de F_τ^* est alors borné dans F_b^*. Si F est tonnelé, c'est immédiat puisque $\mathscr{B}$ est équicontinu.

Si F est *sq*-complet, on note que

$$\{g \in F : \sup_{\mathscr{Q}\in\mathscr{B}} |\mathscr{Q}(g)| \leqslant 1\}$$

est un tonneau de F. Il absorbe donc les bornés de F et, de là, $\mathscr{B}$ est borné dans F_b^*.

Lemme 3. — *Si* E *est évaluable* [*et* F *à semi-normes représentables*], *on a*

$$\mathscr{L}(F_s^*, E_s^*) = \mathscr{L}(F_\tau^*, E_\tau^*) \quad \textit{et} \quad \mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}(E, F_\beta)$$

et J *est défini de* $\mathscr{L}(E, F)$ *sur* $\mathscr{L}(F_s^*, E_s^*)$.

Si, en outre, $(F_b^*)^* = F$, *on a aussi*

$$\mathscr{L}(F_s^*, E_s^*) = \mathscr{L}(F_b^*, E_b^*)$$

et J *est défini de* $\mathscr{L}(E, F)$ *sur* $\mathscr{L}(F_b^*, E_b^*)$.

Démontrons d'abord que J est défini de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{L}(F_s^*, E_s^*)$. Si $T' \in \mathscr{L}(F_s^*, E_s^*)$, pour tout $f \in E$, la loi qui, à $\mathscr{Q} \in F^*$, associe $(T'\mathscr{Q})(f)$ est une fonctionnelle linéaire continue dans F_s^*, donc elle a la forme $\mathscr{Q}(g_f)$ où g_f est déterminé univoquement dans F. Posons $Tf = g_f$. L'opérateur T est linéaire de E dans F et a pour adjoint $T^* = T'$. Comme E est évaluable et que $T' \in \mathscr{L}(F_s^*, E_s^*)$, T est continu de E dans F. Donc $T' = JT$, avec $T \in \mathscr{L}(E, F)$.

C'est un fait général que $\mathscr{L}(F_s^*, E_s^*) = \mathscr{L}(F_\tau^*, E_\tau^*)$: on a $\mathscr{L}(F_\tau^*, E_\tau^*) \supset \mathscr{L}[(F_\tau^*)_a, (E_\tau^*)_a] = \mathscr{L}(F_s^*, E_s^*)$. Réciproquement, si $T' \in \mathscr{L}(F_s^*, E_s^*)$, il s'écrit $T' = T^*$, avec $T \in \mathscr{L}(E_a, F_a)$. Comme l'image par T de tout compact absolument convexe de E_a est un compact absolument convexe de F_a, on a alors $T' \in \mathscr{L}(F_\tau^*, E_\tau^*)$.

Enfin, on a $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}(E, F_\beta)$. De fait, si $T \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\mathscr{B}$ est borné dans F_b^*, l'ensemble

$$\{f : \sup_{\mathscr{Q}\in\mathscr{B}} |\mathscr{Q}(Tf)| \leqslant 1\}$$

est absolument convexe, bornivore et fermé dans E, donc il est d'intérieur non vide et T est continu de E dans F_β.

Supposons à présent que $(F_b^*)^* = F$. Démontrons que J est défini de $\mathscr{L}(E, F_\beta)$ sur $\mathscr{L}(F_b^*, E_b^*)$. Soit $T' \in \mathscr{L}(F_b^*, E_b^*)$. La loi qui, à $\mathscr{Q} \in F$, associe $(T'\mathscr{Q})(f)$ est une fonctionnelle linéaire continue dans F_b^*, donc elle s'écrit $(T'\mathscr{Q})(f) = \mathscr{Q}(g_f)$, où g_f est univoquement déterminé. Posons $Tf = g_f$. Comme E est évaluable, T appartient à $\mathscr{L}(E, F) = \mathscr{L}(E, F_\beta)$, d'où la conclusion.

Ces lemmes permettent de déduire des théorèmes qu'on vient de voir les énoncés suivants.

Proposition 2. — *Soit* E *de Banach ou limite inductive d'une suite de tels espaces* [*et soit* F *à semi-normes représentables*].

a) *Si* F *est à réseau strict,* $\mathscr{L}_s(F_s^*, E_s^*)$ *et* $\mathscr{L}_\Gamma(F_\tau^*, E_\tau^*)$ *sont à réseau strict.*

b) *Si* F *est sq-complet et à réseau strict,* $\mathscr{L}_b(F_s^*, E_s^*)$ *et* $\mathscr{L}_b(F_\tau^*, E_\tau^*)$ *sont à réseau strict.*

c) *Si* F *est à réseau strict et si* $(F_b^*)^* = F$, $\mathscr{L}_b(F_b^*, E_b^*)$ *est à réseau strict.*

En appliquant les lemmes, comme E est évaluable, on voit que chacun des espaces considérés est image par l'opérateur continu J de $\mathscr{L}_b(E, F)$, qui est à réseau strict en vertu du théorème 1, p. 65.

Proposition 3. — *Supposons*

— E *de Fréchet ou limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet,*

— F *sq-complet et à réseau de type* $\mathscr{C}$ *ou tonnelé et limite inductive d'une suite d'espaces sq-complets et à réseau strict* [*et soit, en outre,* F *à semi-normes représentables*].

Alors $\mathscr{L}_b(F_s^*, E_s^*)$ *et* $\mathscr{L}_b(F_\tau^*, E_\tau^*)$ *admettent un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Si, en outre, $(F_b^*)^* = F$, $\mathscr{L}_b(F_b^*, E_b^*)$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Enfin, si F *admet un réseau constitué d'ensembles absolument convexes et sq-fermés, les espaces d'opérateurs considérés sont à réseau strict.*

On part ici du théorème 2 et des lemmes précédents.

2. Produits tensoriels

Les produits tensoriels s'interprètent comme des espaces d'opérateurs linéaires. Ceci fournit une voie d'approche pour y déterminer l'existence des réseaux.

Rappelons d'abord comment $E \otimes_\varepsilon F$ peut être assimilé à un espace d'opérateurs.

Nous ne mentionnons que les résultats essentiels. On se référera par exemple à L. Schwartz [46], exposé n° 8, pour une étude détaillée de la question.

Proposition 4. — *Le produit tensoriel* $E \otimes_\varepsilon F$ *peut être interprété comme un sous-espace de* $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$, *muni du système de semi-normes induit par cet espace,* Γ *désignant l'ensemble des parties équicontinues de* E*.

Proposition 5. — *L'espace* $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$ *est complet* (resp. *sq-complet*) *si* E *et* F *sont complets* (resp. *sq-complets*) [*et séparables par semi-norme*].

Supposons E et F *sq*-complets et soit T_m une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$.

Pour tout $\mathcal{T} \in E^*$, la suite $T_m\mathcal{T}$ est de Cauchy dans F. Appelons $T\mathcal{T}$ sa limite.

L'opérateur T est visiblement linéaire de E_τ^* dans F.

Pour qu'il soit continu, il suffit qu'il soit continu de E_s^* dans F_a. En effet, son adjoint T* est alors défini et continu de F_s^* dans E_a, donc il transforme les polaires des semi-boules de F, compacts absolument convexes de F_s^*, en compacts absolument convexes de E_a. Il suffit donc d'établir que la fonctionnelle linéaire dans E*,

$$\mathbb{T}(\mathcal{T}) = \mathscr{Q}(T\mathcal{T}),\ \mathscr{Q} \in F^*,$$

est du type $\mathcal{T}(f)$, avec $f \in E$.

Pour tout m, $f_m = T_m^* \mathcal{Q}$ est tel que

$$\mathcal{Q}(T_m \mathcal{C}) = \mathcal{C}(f_m),\ \forall \mathcal{C} \in E^*.$$

La suite f_m est de Cauchy dans E, car, si $\mathcal{Q} \in C\, b_p^\Delta(1)$,

$$p(f_r - f_s) = \sup_{\mathcal{C} \in b_p^\Delta} |\, \mathcal{Q}\, [(T_r - T_s)(\mathcal{C})]\, | \leqslant C \sup_{\mathcal{C} \in b_p^\Delta} q\, [(T_r - T_s)(\mathcal{C})].$$

Soit f sa limite. On a

$$\mathcal{Q}(T\mathcal{C}) = \lim \mathcal{Q}(T_m \mathcal{C}) = \lim \mathcal{C}(f_m) = \mathcal{C}(f),\ \forall \mathcal{C} \in E^*.$$

d'où la conclusion.

Si E et F sont complets, on procède de façon analogue (cf. [46]).

Proposition 6. — [*Soient* E *et* F *séparables par semi-norme*].

L'espace $\mathscr{L}(E_{ca}^*, F)$ *est fermé dans* $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$.

De là, il est complet (resp. *sq-complet*) *si* E *et* F *sont complets* (resp. *sq-complets*).

Soit T appartenant à l'adhérence dans $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$ de $\mathscr{L}(E_{ca}^*, F)$.

Pour qu'il soit dans $\mathscr{L}(E_{ca}^*, F)$, il suffit que T^*, défini de F^* dans E, transforme les polaires des semi-boules de F en compacts de E.

Soient q une semi-norme donnée dans F et b_q^Δ le polaire de $b_q(1)$. Pour p et $\varepsilon > 0$ fixés, il existe $T_{\varepsilon,p} \in \mathscr{L}(E_{ca}^*, F)$ tel que

$$\sup_{\mathcal{C} \in b_p^\Delta} \sup_{\mathcal{Q} \in b_q^\Delta} |\, \mathcal{Q}\, [(T - T_{\varepsilon,p})\mathcal{C}]\, | = \sup_{\mathcal{C} \in b_p^\Delta} q\, [(T - T_{\varepsilon,p})(\mathcal{C})] \leqslant \varepsilon/2. \quad (*)$$

Pour ce $T_{\varepsilon,p}$, $T_{\varepsilon,p}^*$ est continu de F_{ca}^* dans E. En effet, $T_{\varepsilon,p}$ transforme tout b_p^Δ, compact absolument convexe de E_{ca}^*, en compact absolument convexe de F.

Soit

$$p(T_{\varepsilon,p}^* \mathcal{Q}) \leqslant C\, \pi(\mathcal{Q}),\ \forall \mathcal{Q} \in F^*,$$

où π est une semi-norme de F_{ca}^*. Il vient alors

$$\begin{aligned} p(T^* \mathcal{Q}) &\leqslant p\, [(T^* - T_{\varepsilon,p}^*)(\mathcal{Q})] + p(T_{\varepsilon,p}^* \mathcal{Q}) \\ &\leqslant \varepsilon/2 + C\, \pi(\mathcal{Q}) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

si $\mathcal{Q} \in b_q^\Delta$ et $\pi(\mathcal{Q}) \leqslant \varepsilon/(2C)$.

De là, T^* est continu de b_q^Δ muni de la topologie induite par F_{ca}^* dans E et, comme b_q^Δ est compact dans F_{ca}^*, $T^* b_q^\Delta$ est compact dans E.

Proposition 7. — *Si* E *et* F *sont complets* [*et séparables par semi-norme*], *le produit tensoriel complété* $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ *peut être assimilé à un sous-espace linéaire fermé de* $\mathscr{L}_\Gamma(E_{ca}^*, F)$ *et de* $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$.

C'est immédiat puisque ces espaces sont complets.

Remarque. — Si on suppose seulement E et F *sq*-complets, on ne peut plus affirmer que $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ est contenu dans $\mathscr{L}_\Gamma(E_c^*, F)$ ou $\mathscr{L}_\Gamma(E_\tau^*, F)$.

Toutefois, les exemples usuels d'espaces qui admettent un sous-espace dense de type $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ vérifient cette propriété.

Ainsi, si E est *sq*-complet [et séparable par semi-norme], $C_k(\Omega\,; E)$, espace des fonctions k fois continûment dérivables de l'ouvert Ω dans E, est un sous-espace fermé pour les suites de $\mathscr{L}\,[E^*_{ca}, C_k(\Omega)]$.

La propriété analogue pour $D_k(K\,;\,E)$ et $S_k(E_n\,;\,E)$ est également vraie (cf. [12], p. 167 et 168).

A partir des propositions précédentes, on obtient facilement des exemples de produits tensoriels munis de réseaux de type $\mathscr{C}$ ou de réseaux stricts.

Théorème 4. — [*Soient* E *et* F *séparables par semi-norme*].

a) *Si* E *est de Fréchet et si* F *est complet et admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*), *le produit tensoriel* $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*).

b) *C'est encore vrai si* E *est limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet et si* F *est complet, admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*) *et est muni d'un système de semi-normes* $\{q\}$ *tel qu'à toute suite* $q_n \in \{q\}$ *correspondent* $q \in \{q\}$ *et* $C_n > 0$ *tels que*

$$q_n(g) \leqslant C_n\, q(g),\ \forall g \in F,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si E est de Fréchet ou limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet, l'enveloppe absolument convexe fermée d'un compact de E est compacte, donc $E^*_c \equiv E^*_{ca}$.

Or, vu le théorème 3, p. 70, $\mathscr{L}_b(E^*_c, F)$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$ (resp. strict), donc c'est vrai aussi pour $\mathscr{L}_\Gamma(E^*_{ca}, F)$.

En outre, E et F sont complets, donc $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}(E^*_{ca}, F)$ et il admet par conséquent un réseau de type $\mathscr{C}$ (resp. strict).

Théorème 5. — *Si* E *est de Fréchet* [*et séparable*] *ou limite inductive d'une suite de tels espaces et si* F *est complet et à réseau de type* $\mathscr{C}$, *les produits tensoriels* $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *et* $E^*_b\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *admettent un réseau de type* $\mathscr{C}$.

Pour qu'ils admettent un réseau strict, il suffit

— *si* E *est de Banach ou limite inductive d'une suite d'espaces de Banach, que* F *admette un réseau strict.*

— *dans le cas général, que* F *admette un réseau formé d'ensembles absolument convexes et sq-fermés.*

Comme E est bornologique, E^*_{ca} est complet et, de plus, $(E^*_{ca})^*_{ca} \equiv E$. Puisque F est aussi complet, c'est encore le cas pour $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$ et $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$.

Or, par le théorème 2, p. 68, $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$ admet un réseau du type indiqué dans l'énoncé, donc aussi $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$.

D'autre part, comme F est complet et E bornologique, l'espace $\mathscr{L}_b(E, F)$ est complet. De là, $E^*_b\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace linéaire fermé de $\mathscr{L}_b(E, F)$, d'où la conclusion, en procédant comme pour $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$.

Remarque. — Compte tenu de la remarque p. 78, on peut améliorer les résultats précédents en supposant seulement les espaces sq-complets plutôt que complets.

Nous ne connaissons pas d'énoncé général qui rende compte de ce fait. Toutefois, l'examen des cas particuliers conduit sans difficulté au résultat souhaité. Il est même souvent plus facile de déterminer d'emblée un réseau dans le produit tensoriel étudié que d'exploiter les mécanismes développés ci-dessus.

Traitons un exemple concret.

PROPOSITION 10. — *Si* E *est sq-complet et admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*), *l'espace* $C_p(\Omega\,;\,E)$ *admet un réseau de type* $\mathscr{C}$ (resp. *strict*).

Soit

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau de E. Supposons-le strict et soit, par exemple, p infini.

Désignons par K_n une suite de compacts d'intérieur non vide croissants vers Ω. Les semi-normes de $C_p(\Omega\,;\,E)$ sont alors les expressions

$$\sup_{x\in K_n} \sup_{|\alpha|\leqslant n} p\,[D^\alpha f(x)],\ n \in \mathbb{N},\ p \in \{p\},$$

où $\{p\}$ désigne l'ensemble des semi-normes de E et $|\alpha|$ l'ordre de la dérivée D^α.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f(x) \in C_k(\Omega\,;\,E)$, l'enveloppe absolument convexe fermée $B_n(f)$ de

$$\{D_x^\alpha f(x) : x \in K_n, |\alpha| \leqslant n\}$$

est *sq*-complète dans E. Dès lors, par le corollaire 2, chap. III, p. 54,

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $C_1 > 0$ tels que

$$B_n(f) \subset C_1\, e_{n_1},$$

— si $B_n(f) \subset C_k\, e_{n_1,\ldots,n_k}$, il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $C_{k+1} > 0$ tels que

$$B_n(f) \subset C_{k+1}\, e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

On peut même supposer que les C_k sont tous égaux à 1, quitte à modifier $\mathscr{R}$ (cf. proposition 3, chap. 1, p. 16).

Il est alors immédiat que les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = \{f(x) \in C_p(\Omega\,;\,E) : B_1(f) \subset e_{n_1}\},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1')} = \{f(x) \in C_p(\Omega\,;\,E) : B_1(f) \subset e_{n_1,n_2}\,;\ B_2(f) \subset e_{n_1'}\},$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

avec la renumérotation habituelle des indices, constituent un réseau $\mathscr{R}'$ de $C_p(\Omega\,;\,E)$.

Ce réseau est de type $\mathscr{C}$.

De fait, soient

$$f_1(x) \in \mathscr{E}_{n_1},\ f_2(x) \in \mathscr{E}_{n_1,(n_2,n_1')},\ \ldots$$

et soient

$$\nu_1 = \lambda_1,\ \nu_2 = \inf(\lambda_2, \lambda_1'),\ \ldots,$$

où $\lambda_k, \lambda_k', \ldots$ sont les suites associées respectivement à $n_k, n_k', \ldots$ dans $\mathscr{R}$.

Comme $C_p(\Omega\,;\,E)$ est *sq*-complet, il suffit de prouver que la suite $\nu_k f_k(x)$ est bornée dans $C_p(\Omega\,;\,E)$.

Or, quel que soit n, vu le choix des f_k, il existe une suite $m_k \in \mathbb{N}$ telle que

$$B_n(f_k) \subset \nu_k e_{m_1,\ldots,m_k}$$

dès que k est assez grand. Quitte à augmenter encore k, on a aussi, pour p donné,

$$\nu_k e_{m_1,\dots,m_k} \subset b_p(1).$$

Donc, au total,

$$\sup_{x \in K_n} \sup_{|\alpha| \leqslant n} p\,[D_x^\alpha \nu_k f_k(x)] \leqslant 1$$

pour $k \geqslant k(p, n)$ et, comme l'ensemble $\{\nu_k f_k(x) : k < k(p, n)\}$ est fini, donc borné,

$$\sup_{x \in K_n} \sup_{|\alpha| \leqslant n} p\,[D_x^\alpha \nu_k f_k(x)] \leqslant C, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On vérifie sans difficulté que $\mathscr{R}'$ est un réseau strict.

Si le réseau $\mathscr{R}$ est seulement de type $\mathscr{C}$, il faut remplacer les conditions « $B_n(f) \subset e_{n_1,\dots,n_k}$ » par « la restriction de $e_{n_1,\dots,n_k}$ à l'enveloppe linéaire de $B_n(f)$ munie de la norme associée à $B_n(f)$ n'est pas maigre dans cet espace et

$$B_n(f) \subset \overline{\langle e_{n_1,\dots,n_k} \rangle} \text{ »},$$

en utilisant le théorème 1, chap. III, p. 48.

CHAPITRE V

QUELQUES APPLICATIONS

On donne ici quelques applications des résultats obtenus dans les chapitres précédents.
Les théorèmes de localisation sont étendus à des ensembles d'opérateurs.
Le théorème de relèvement fournit quelques théorèmes d'homomorphismes.
On étend le théorème du graphe fermé, dans un cas assez particulier, à des espaces (de départ) non bornologiques. D'autre part on l'utilise pour généraliser le théorème de Bessaga-Pelczynski sur les bases de Schauder.

1. Localisation d'ensembles d'opérateurs

Si E est de Fréchet et si F est à réseau strict, le théorème de localisation affirme qu'il existe une suite de semi-boules b_k de E et une suite $e_{n_1,\dots,n_k}$ d'ensembles du réseau de F tels que

$$\mathrm{T}b_k \subset e_{n_1,\dots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

ce qui fournit des renseignements plus précis que la continuité de T. Par exemple, dans le cas particulier où F est limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet F_k, on en déduit que TE appartient à un F_k et que T est continu de E dans cet F_k (cf. corollaire 1, chap. III, p. 54).

On peut se demander dans quelle mesure cette propriété s'étend à des ensembles d'opérateurs. La question a été formulée dans le cas particulier des limites inductives de suites d'espaces de Fréchet par R. Hirschfeld et résolue par G. Köthe dans [25]. Elle trouve ici un cadre général naturel et se ramène simplement aux théorèmes de localisation du chapitre III.

THÉORÈME 1. — *Soient* E *de Banach et* F *à réseau strict. Notons* B *la boule unité de* E *et*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un réseau strict de F. *Pour tout ensemble* $\mathscr{B}$, *absolument convexe, borné et sq-complet dans* $\mathscr{L}_b(\mathrm{E}, \mathrm{F})$,

— *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{C}_1 > 0$ *tels que*

$$\mathscr{B}\mathrm{B} \subset \mathrm{C}_1\, e_{n_1} \ ; \ (*)$$

— *si*

$$\mathscr{B}\mathrm{B} \subset \mathrm{C}_k\, e_{n_1,\dots,n_k},$$

il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ *et* $\mathrm{C}_{k+1} > 0$ *tels que*

$$\mathscr{B}\mathrm{B} \subset \mathrm{C}_{k+1}\, e_{n_1,\dots,n_{k+1}}.$$

(*) On note

$$\mathscr{B}\mathrm{B} = \{\mathrm{T}f : \mathrm{T} \in \mathscr{B},\ f \in \mathrm{B}\}.$$

Corollaire. — *Avec les notations du théorème, si* F *est limite inductive d'une suite d'espaces* F_k *à réseau strict,*

— *il existe un* k *tel que* $\mathscr{B}E \subset F_k$,

— *si* $\mathscr{B}E \subset F_k$, $\mathscr{B}$ *est équicontinu de* E *dans* F_k.

Remarque. — On peut prendre au lieu de $\mathscr{L}_b(E, F)$, $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$ pour un $\mathscr{F}$ quelconque. En fait, on a choisi l'hypothèse la plus faible : comme E est de Fréchet, tout s-borné donc tout $\mathscr{F}$-borné est équicontinu et, d'autre part, tout ensemble sq-complet dans $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$ est sq-complet dans $\mathscr{L}_b(E, F)$.

On peut aussi, en restreignant un peu la généralité, supposer F sq-complet. Il suffit alors que $\mathscr{B}$ soit b-borné (ou équicontinu, c'est équivalent), car $\mathscr{L}_b(E, F)$ est sq-complet, donc l'enveloppe absolument convexe fermée de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{L}_b(E, F)$ y est sq-complète.

Démonstration. — Dans les conditions de l'énoncé, on a vu au théorème 1, chap. IV, p. 65, que l'espace $\mathscr{L}_b(E, F)$ admet un réseau strict, formé des ensembles

$$\{T : TB \subset e_{n_1,\ldots,n_k}\}.$$

Le corollaire 2 du théorème de localisation (chap. III, p. 54), appliqué aux bornés de cet espace, conduit aux conclusions de l'énoncé.

Pour le corollaire, on note qu'un réseau strict de F est formé des ensembles $e_{n_1} = F_{n_1}$ et

$$e_{n_1,\ldots,n_k} = e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k}, \forall k > 1, n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N},$$

où les $e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k}$ constituent un réseau strict de chaque F_{n_1}. Il existe donc une suite de b_k, de C_k et de n_k tels que $\mathscr{B}E \subset F_{n_1}$ et

$$\mathscr{B}b_k \subset C_k\, e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k}, \forall k < 1. \ (*)$$

Les relations (*) entraînent l'équicontinuité de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{L}(E, F_{n_1})$, puisque, pour toute semi-norme q de F_{n_1} et pour un choix convenable des λ_k,

$$\lambda_k e^{(n_1)}_{n_2,\ldots,n_k} \subset b_q\ (1)$$

dès que k est assez grand.

Théorème 2. — *Si* E *est de Fréchet ou de Baire et si* F *est sq-complet et admet un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

pour tout ensemble $\mathscr{B}$ *équicontinu dans* $\mathscr{L}(E, F)$,

— *il existe une semi-boule* b_1 *de* E, $n_1 \in \mathbb{N}$ *et* $C_1 > 0$ *tels que*

$$\mathscr{B}b_1 \subset C_1\, e_1,$$

— *si on a*

$$\mathscr{B}b_k \subset C_k\, e_{n_1,\ldots,n_k},$$

il existe b_{k+1}, n_{k+1}, C_{k+1} *tels que*

$$\mathscr{B}b_{k+1} \subset C_{k+1}\, e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

Corollaire. — *Avec les notations du théorème, si* F *est sq-complet et s'il est limite inductive d'une suite d'espaces* F_k *à réseau strict,*

— *il existe un* k *tel que* $\mathscr{B}E \subset F_k$,

— *si* $\mathscr{B}E \subset F_k$, $\mathscr{B}$ *est équicontinu de* E *dans* F_k.

Si E est de Fréchet et si le réseau $\mathscr{R}$ de F est constitué d'ensembles absolument convexes et *sq*-fermés, vu le théorème 2, chap. IV, p. 68, l'espace $\mathscr{L}_b(E, F)$ admet un réseau strict. En outre, comme F est *sq*-complet, $\mathscr{L}_b(E, F)$ est *sq*-complet.

On conclut comme dans le théorème 1.

Le cas général est plus compliqué.

La démonstration est entièrement différente de celle du théorème 1, car on ne peut plus affirmer que $\mathscr{L}_b(E, F)$ admet un réseau strict.

Soit f fixé dans E.

Comme F est *sq*-complet,

$$\mathscr{B}f = \{Tf : T \in \mathscr{B}\}$$

est contenu dans un borné absolument convexe et *sq*-complet de F, d'où

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $C_1 > 0$ tels que

$$\mathscr{B}f \subset C_1\, e_{n_1},$$

— si

$$\mathscr{B}f \subset C_k\, e_{n_1,\dots,n_k},$$

il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $C_{k+1} > 0$ tels que

$$\mathscr{B}f \subset C_{k+1}\, e_{n_1,\dots,n_{k+1}}.$$

On peut même, quitte à modifier $\mathscr{R}$, supposer que les C_k sont tous égaux à 1.

De là, si

$$\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k} = \{f : \mathscr{B}f \subset e_{n_1,\dots,n_k}\},$$

les $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ forment un réseau de E, et, comme E est de Baire,

— il existe n_1 tel que $\mathscr{E}_{n_1}$ ne soit pas maigre,

— si $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ n'est pas maigre, il existe n_{k+1} tel que $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k+1}}$ ne soit pas maigre.

Démontrons à présent que, si $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}$ n'est pas maigre, il contient une semi-boule de centre 0. La proposition sera ainsi établie.

On fixe d'abord une suite n_k, $k > k_0$, telle que $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ ne soit maigre pour aucun $k > k_0$. Comme les $e_{n_1,\dots,n_k}$ sont absolument convexes, les $\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ le sont aussi, donc leur adhérence contient une semi-boule de centre 0 :

$$\overline{\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}} \supset b_k,\ \forall k > k_0,$$

Si λ_k est la suite de nombres associée aux n_k dans $\mathscr{R}$, on a alors

$$\lambda_{k_0}\overline{\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}} \subset \mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}.$$

De fait, soit $f \in \lambda_{k_0}\overline{\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}}$. Il existe successivement

— $f_{k_0} \in \lambda_{k_0}\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0}}$, tel que

$$f - f_{k_0} \in \lambda_{k_0+1} b_{k_0+1} \subset \lambda_{k_0+1}\overline{\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k_0+1}}}\ ;$$

— $f_{k_0+1} \in \lambda_{k_0+1} \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0+1}}$, tel que

$$f - f_{k_0} - f_{k_0+1} \in \lambda_{k_0+2} b_{k_0+2} \subset \lambda_{k_0+2} \overline{\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0+2}}}\,;$$

et ainsi de suite. On peut sans restriction supposer que les $\lambda_k b_k$ sont emboîtés en décroissant.

Fixons T dans $\mathscr{B}$. Comme $Tf_k \in \lambda_k e_{n_1,\ldots,n_k}$ pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\sum_{k=k_0}^{N} Tf_k$$

converge dans F et sa limite g appartient à $e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$.

Démontrons que $g = Tf$.

On a

$$\begin{aligned} b_k &\subset \overline{\{f : \mathscr{B}f \subset e_{n_1,\ldots,n_k}\}} \\ &\subset \overline{\{f : Tf \in e_{n_1,\ldots,n_k}\}} \\ &\subset T_{-1}\overline{(e_{n_1,\ldots,n_k})}, \end{aligned}$$

la dernière appartenance découlant de la continuité de T. De là, quel que soit $b_q(\varepsilon)$,

$$\lambda_k T b_k \subset b_q(\varepsilon)$$

pour k assez grand, d'où

$$Tf - g = \lim\,(Tf - \sum_{k=k_0}^{N} Tf_k) \in b_q(\varepsilon).$$

Dès lors,

$$Tf \in e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$$

quel que soit $T \in \mathscr{B}$, ce qui entraîne

$$\mathscr{B}f \subset e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$$

et

$$f \in \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0}}.$$

Variantes. — Dans le théorème 2, on peut faire les variantes suivantes.

a) *Si* E *est de Fréchet, on peut supposer* F *limite inductive d'une suite d'espaces sq-complets et munis de réseaux de type* $\mathscr{C}$ *formés d'ensembles fermés et absolument convexes et* $\mathscr{B}$ *équicontinu, absolument convexe et sq-complet dans* $\mathscr{L}_b(E, F)$.

b) *Sans restriction sur* E, *au lieu de supposer* F *sq-complet, on suppose* $\mathscr{B}$ *absolument convexe et compact dans* $\mathscr{L}_s(E, F)$.

L'intérêt de ces variantes tient dans le fait que les conditions pour qu'une limite inductive, même d'espaces de Fréchet, soit *sq*-complète sont assez restrictives.

Pour a), on note que, vu le théorème 2, chap. IV, p. 68, $\mathscr{L}_b(E, F)$ est à réseau strict et on applique à $\mathscr{B}$ le corollaire 2 du théorème de localisation, chap. III, p. 54.

Pour b), on procède comme dans le cas général de la démonstration ci-dessus, en notant que $\mathscr{B}f$ est borné, absolument convexe et compact donc *sq*-complet dans F.

Voici encore une propriété moins précise mais un peu plus générale que le théorème 2.

THÉORÈME 3. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables, si* F *est sq-complet et admet un réseau strict*

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

et si $\mathscr{B} \subset \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est équicontinu,*

— *il existe* n_1 *tel que*

$$\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \rangle e_{n_1}\langle,$$

— *si*

$$\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \rangle e_{n_1,\ldots,n_k}\langle$$

il existe n_{k+1} *tel que*

$$\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \rangle e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}\langle.$$

COROLLAIRE. — *Aves les notations du théorème, si* F *est sq-complet et limite inductive d'une suite d'espaces* F_k *à réseau strict, il existe un* k *tel que* $\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \mathrm{F}_k$.

Ce corollaire, de même que ceux des théorèmes 1 et 2, étend partiellement les résultats obtenus par G. Köthe dans [25], qui sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathscr{B}\mathrm{E}$ appartienne à un F_k et (ou) y soit équicontinu, quand les F_k sont de Fréchet.

Passons à la démonstration du théorème.

Il suffit de prouver qu'il existe n_1 tel que

$$\mathscr{B}\mathrm{E} \subset \rangle e_{n_1}\langle.$$

En effet, on a vu (proposition 1, d), chap. III, p. 52), que $\rangle e_{n_1,\ldots,n_k}\langle$ admet le réseau strict formé des ensembles

$$e'_{m_1} = m_1 e_{n_1,\ldots,n_k},\ m_1 \in \mathbb{N},$$

$$e'_{m_1,\ldots,m_i} = m_1 e_{n_1,\ldots,n_k,m_2,\ldots,m_i},\ i > 1,\ m_1, \ldots, m_i \in \mathbb{N}.$$

Supposons que $\mathscr{B}\mathrm{E}$ n'appartienne à $\rangle e_{n_1}\langle$ pour aucun n_1.

Il existe alors une suite $f_k \in \mathrm{E}$ et une suite $\mathrm{T}_k \in \mathscr{B}$ telles que $\mathrm{T}_k f_k \notin \rangle e_k\langle$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Posons

$$1/c_k = 2^k\,[1 + p_k(f_k)],$$

où $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ est le système de semi-normes de E. La suite $c_k f_k$ tend vers 0 dans E, puisque, pour tout i,

$$p_i(c_k f_k) \leqslant p_k(c_k f_k) \leqslant 2^{-k},$$

dès que k dépasse i.

Comme la suite T_k est équicontinue, la suite $c_k \mathrm{T}_k f_k$ tend vers 0 dans F, donc y est bornée. Comme F est *sq*-complet, il existe alors $\mathrm{C} > 0$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que

$$c_k \mathrm{T}_k f_k \subset \mathrm{C}\, e_{n_1},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

(Corollaire 2, chap. III, p. 54). C'est absurde, puisque $\mathrm{T}_{n_1} f_{n_1} \notin \rangle e_{n_1}\langle$.

2. Théorèmes d'homomorphisme

Le théorème de relèvement (chap. III, p. 61) a des applications intéressantes à des théorèmes d'homomorphisme.

THÉORÈME 4. — *Soient* E *un espace de Schwartz,* F *la limite inductive d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables* [*et séparables*], T *un opérateur linéaire continu de* E *dans* F.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

α. T^*F^* *est fermé dans* E_s^*,

β. T *est un homomorphisme de* E_a *dans* F_a,

γ. T *est un homomorphisme de* E *dans* F.

Les implications $\gamma \Rightarrow \alpha$, $\beta \Rightarrow \alpha$ et $\alpha \Rightarrow \beta$ sont classiques et n'exigent pas d'hypothèse sur E et F.

Rappelons brièvement leur démonstration.

$\gamma \Rightarrow \alpha$.

Soient T un homomorphisme de E dans F et $\widetilde{T}$ l'opérateur qu'il induit de $E/N(T)$ dans F ($N(T)$ désigne le noyau de T, $\{f : Tf = 0\}$). L'inverse $\widetilde{T}^{-1}$ de $\widetilde{T}$ est défini et continu de F dans $E/N(T)$. Donc son adjoint applique $[E/N(T)]^*$ dans F^*. Or $[E/N(T)]^*$ peut être assimilé au polaire $[N(T)]^\Delta$ de $N(T)$, donc on obtient $T^*F^* \supset [N(T)]^\Delta$. L'inclusion inverse est triviale, d'où $T^*F^* = [N(T)]^\Delta$ est fermé dans E_s^*.

$\beta \Rightarrow \alpha$.

La démonstration est entièrement analogue à la précédente.

$\alpha \Rightarrow \beta$.

Il est immédiat que T^*F^* est s-dense dans $[N(T)]^\Delta$: si $\mathcal{T}(f) = 0$ pour tout $\mathcal{T} \in T^*F^*$, on a $\mathcal{Q}(Tf) = (T^*\mathcal{Q})(f) = 0$ pour tout $\mathcal{Q} \in F^*$, donc $Tf = 0$ et $f \in N(T)$.

S'il est en outre fermé dans E_s^*, on a $T^*F^* = [N(T)]^\Delta$, ce qui prouve que l'image par $(\widetilde{T}^{-1})^*$ de $[E/N(T)]^*$ appartient à F^*, donc que $\widetilde{T}^{-1}$ est continu de F_a dans $[E/N(T)]_a = E_a/N(T)$.

Passons à présent à la partie essentielle de l'énoncé :

$\alpha \Rightarrow \gamma$.

Comme E est de Schwartz, à toute semi-boule b de E, il correspond une semi-norme p telle que b^Δ soit précompact dans E_p^*.

Si T^*F^* est s-fermé, l'ensemble $(T^*F^*) \cap b^\Delta$ est fermé et précompact dans E'_p, intersection de E_p^* avec T^*F^*. Comme E'_p est de Banach, $(T^*F^*) \cap b^\Delta$ y est aussi compact et, par conséquent, il est très compact dans T^*F^*, muni du système de semi-normes induit par E_b^*.

Or l'espace F_b^* admet un réseau strict (cf. exemple 2, chap. III, p. 51). Donc, comme T^* est continu de F_b^* sur T^*F^*, en appliquant le théorème de relèvement, on voit qu'il existe un compact $\mathcal{K}$ de F_b^*, tel que

$$b^\Delta \cap T^*F^* = T^*\mathcal{K}.$$

Puisque F est évaluable, $\mathcal{K}$ est équicontinu : il existe une semi-boule β de F telle que $\beta^\Delta \supset \mathcal{K}$.

Comme $T^*F^* = [N(T)]^\Delta$, il vient

$$b^\Delta \cap [N(T)]^\Delta \subset T^*\beta^\Delta$$

ce qui entraîne

$$T_{-1}\beta \subset \{[N(T)]^\Delta \cap b^\Delta\}^\nabla \subset \overline{N(T) + b} \subset N(T) + 2b,$$

ce qui démontre que T est ouvert.

REMARQUE. — La démonstration fournit un peu plus que l'énoncé ne contient.

— *On peut supposer que* F *soit évaluable et que* F^*_b *admette un réseau strict.*

— On démontre que, *si* T^*F^* *est s-fermé,* T *est ouvert de* E *dans* F *muni des semi-normes*

$$\sup_n |\lambda_n \mathcal{Q}_n(g)|,$$

associées aux suites $\lambda_n \to 0$ *et aux suites équicontinues* $\mathcal{Q}_n$ *de* F^*.

En effet, on peut supposer $\mathcal{K}$ très compact dans F^*_b. Il est alors dans l'enveloppe absolument convexe fermée d'une suite très convergente vers 0 dans F^*_b. Celle-ci s'écrit sous la forme $\lambda_n\mathcal{Q}_n$, où $\lambda_n \to 0$ et où la suite $\mathcal{Q}_n$ est b-bornée, donc équicontinue. Donc on a

$$\sup_{\mathcal{Q}\in\mathcal{K}} |\mathcal{Q}(g)| \leqslant \sup_n |\lambda_n\mathcal{Q}_n(g)|, \ \forall g \in F.$$

Or, si on poursuit la démonstration sans substituer à $\mathcal{K}$ un β^Δ qui le contient, il vient

$$T_{-1}\mathcal{K}^\nabla \subset N(T) + 2b,$$

d'où la conclusion.

— *Au lieu que* E *soit de Schwartz, il suffit de supposer que tout ensemble absolument convexe, fermé et équicontinu soit très compact dans* E^*_b *et même dans* E^*_s.

Notons que, si E est évaluable, ce raffinement n'est qu'apparent. De fait, si b^Δ_p est très compact dans E^*_s, il existe un s-compact absolument convexe $\mathcal{K}$ tel qu'il soit compact dans l'enveloppe linéaire de $\mathcal{K}$, munie de la norme associée à $\mathcal{K}$ (cf. proposition 8, chap. III, p. 57). Or $\mathcal{K}$ est b-borné. Si E est évaluable, il est donc équicontinu : soit $\mathcal{K} \subset C\, b^\Delta_{p'}(1)$. Il s'ensuit que b^Δ_p est précompact pour la norme associée à $b^\Delta_{p'}$ et, par précompacité réciproque, que $b_{p'}$ est précompact pour p et que E est de Schwartz.

Du théorème 4 découle le théorème de relèvement suivant, conjecturé par L. Schwartz.

THÉORÈME 5. — *Soit* E *limite inductive d'une suite d'espaces de Schwartz à semi-normes dénombrables* E_i. *Si* L, *sous-espace linéaire de* E, *a le même dual quand on le munit du système de semi-normes induit par* E *ou du système de semi-normes de la limite inductive des* $L \cap E_i$, *ces deux systèmes de semi-normes sont équivalents dans* L.

Si, en outre, la limite inductive est stricte,

— *les systèmes de semi-normes de* E^*_b/L^Δ *et de* L^*_b *sont équivalents,*

— *tout borné de* E^*_b/L^Δ *est relevable par un borné de* E^*_b.

Le système de semi-normes induit par E est plus faible, dans chaque $L \cap E_i$, que celui de $L \cap E_i$. Donc il est plus faible dans L que celui de la limite inductive des $L \cap E_i$.

Inversement, soit J l'opérateur identité de L, limite inductive des $L \cap E_i$, dans E. L'espace L est de Schwartz puisque les $L \cap E_i$ le sont. L'espace E est limite inductive d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables. L'opérateur J est continu d'après ce qu'on vient de voir.

En outre, J^*E^* est l'ensemble des restrictions à L des fonctionnelles linéaires continues dans E, c'est-à-dire L^*, par hypothèse. On se trouve donc dans les conditions du théorème 4 et J est un homomorphisme, ce qui établit l'équivalence des deux systèmes de semi-normes considérés.

Passons à la deuxième assertion de l'énoncé.

Avec les notations précédentes, $J^*\mathcal{C}$, où $\mathcal{C} \in E^*$, est la restriction de $\mathcal{C}$ à L. L'opérateur J^* est visiblement continu de E_b^* dans L_b^*.

L'espace L est limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Schwartz à semi-normes dénombrables, donc L_b^* est bornologique et *sq*-complet (cf. Appendice, proposition 11, p. 140).

D'autre part, E_b^* admet un réseau strict.

Dès lors, vu le corollaire 2, chap. I, p. 29, J^* est un homomorphisme, ce qu'il fallait démontrer.

Cela étant, tout borné $\mathscr{B}$ de E_b^*/L^Δ est borné dans L_b^*, donc vu l'exemple 3, chap. III, p. 59, il est contenu dans un ensemble très compact de L_b^*. Celui-ci peut être relevé par un ensemble très compact dans E_b^*, donc par un ensemble équicontinu : soit b une semi-boule de E, telle que $J^*b^\Delta \supset \mathscr{B}$. On a alors

$$J^*(b^\Delta \cap J_{-1}^*\mathscr{B}) = \mathscr{B},$$

d'où la conclusion.

Voici encore un théorème d'homomorphisme du même genre que le théorème 4.

THÉORÈME 6. — *Soit* T *continu de* E *à réseau strict dans* F, *limite inductive stricte d'une suite* F_n *d'espaces de Fréchet [séparables].*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

α. TE *est fermé dans* F,

β. T^* *est un homomorphisme de* F_c^* *dans* E_{ca}^*.

$\alpha \Rightarrow \beta$.

Soit K un compact de F. Etant contenu dans un des F_n, il est très compact. On peut le supposer absolument convexe, quitte à lui substituer son enveloppe absolument convexe fermée.

Si TE est fermé, $(TE) \cap K$ est aussi très compact dans TE, donc il existe un ensemble très compact K_0 de E tel que

$$K \cap TE = TK_0.$$

Vu la proposition 7, chap. III, p. 56, on peut même supposer K_0 absolument convexe.

Passons aux polaires dans F^* : il vient

$$T_{-1}^*K_0^\Delta = (K \cap TE)^\Delta \subset \overline{K^\Delta + (TE)^\Delta}^s.$$

Or on a $(\mathrm{TE})^{\Delta} = \mathrm{N}(\mathrm{T}^*)$. De plus, comme $\mathrm{K}^{\Delta} + (\mathrm{TE})^{\Delta}$ est absolument convexe, son adhérence simple est aussi son adhérence dans E^*_{τ}. Enfin, K est absolument convexe et compact dans F, donc K^{Δ} est une semi-boule de E^*_{τ}.

Il vient alors

$$\mathrm{T}^*_{-1}\mathrm{K}^{\Delta}_0 \subset \overline{(\mathrm{TE})^{\Delta} + \mathrm{K}^{\Delta}}^{\tau} \subset (\mathrm{TE})^{\Delta} + 2\mathrm{K}^{\Delta} = \mathrm{N}(\mathrm{T}^*) + 2\mathrm{K}^{\Delta}$$

et

$$2\mathrm{T}^*\mathrm{K}^{\Delta} \supset \mathrm{K}^{\Delta}_0 \cap \mathrm{T}^*\mathrm{F}^*,$$

ce qui prouve que T^* est ouvert de F^*_c dans E^*_{ca}.

$\beta \Rightarrow \alpha$.

Quel que soit $g \in \mathrm{F}$,

$$\pi(\mathcal{Q}) = |\ \mathcal{Q}(g)\ |$$

est une semi-norme de F^*_c.

Si $g \in \overline{\mathrm{TE}}$, on a aussi $\mathcal{U}(g) = 0$ pour tout $\mathcal{U} \in (\mathrm{TE})^{\Delta} = \mathrm{N}(\mathrm{T}^*)$. Or, si T^* est ouvert de F^*_c dans E^*_{ca}, il existe un compact absolument convexe K_0 de E tel que

$$\inf_{\mathcal{U} \in \mathrm{N}(\mathrm{T}^*)} \pi(\mathcal{Q} + \mathcal{U}) \leqslant \sup_{f \in \mathrm{K}_0} |\ \mathrm{T}^*\mathcal{Q}(f)\ |.$$

Donc

$$|\ \mathcal{Q}(g)\ | \leqslant \sup_{h \in \mathrm{TK}_0} |\ \mathcal{Q}(h)\ |,\ \forall \mathcal{Q} \in \mathrm{F}^*,$$

ce qui entraîne $g \in \mathrm{TK}_0 \subset \mathrm{TE}$ et $\overline{\mathrm{TE}} = \mathrm{TE}$.

3. Un théorème sur les bases de Schauder

Définitions. — Une suite $f_k \in \mathrm{E}$ est une *base* dans E si tout $f \in \mathrm{E}$ se développe de façon unique en série

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) f_k.$$

C'est une *base faible* si la série converge dans E_a.

Une *base de Schauder* est une base où les $c_k(f)$ sont des fonctionnalles linéaires continues dans E.

Le problème de savoir si une base faible de E est une base de Schauder a été résolu affirmativement par Banach dans le cas des espaces de Banach.

En 1959, Bessaga et Pelczynski, dans [7], ont étendu la propriété aux espaces de Fréchet. Arsove et Edwards ont considéré diverses généralisations du problème pour certaines limites inductives d'espaces de Fréchet (cf. [2] et [3]).

Une application des théorèmes du graphe fermé qui précèdent permet d'atteindre le cas des espaces bornologiques, *sq*-complets et à réseau de type $\mathscr{C}$.

Théorème 7. — *Si* E *est bornologique, sq-complet, à réseau de type* $\mathscr{C}$ [*et séparable par semi-norme*], *toute base faible de* E *est une base de Schauder.*

De plus, le développement en série des éléments de E *par rapport aux éléments de la base converge uniformément sur les précompacts de* E.

Soit e_m, $m \in \mathbb{N}$, une base faible de E et soient $c_m(f)$ les coefficients des développements :

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(f) e_m, \ \forall f \in \mathrm{E},$$

la série convergeant dans E_a.

a) Les $c_m(f)$ sont des fonctionnelles linéaires dans E.

De fait, si

$$f = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i f_i, \ \alpha_i \in \mathbb{C},$$

on a

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} [\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i c_m(f_i)] \, e_m,$$

d'où, vu l'unicité du développement,

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i c_m(f_i) = c_m \, (\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i f_i), \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

b) Posons

$$\mathrm{T}_{\mathrm{M}} = \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} c_m(.) e_m.$$

Si $\{p\}$ est le système de semi-normes de E, les expressions

$$p'(f) = \sup_m p(\mathrm{T}_m f), \ p \in \{p\},$$

constituent un système de semi-normes de E, plus fort que $\{p\}$.

En effet,

— les $p'(f)$ sont définis.

Comme $\mathrm{T}_m f$ converge faiblement vers f, la suite $\mathrm{T}_m f$ est faiblement bornée, donc bornée en vertu du théorème de Mackey, ce qui entraîne l'existence de p' pour tout $p \in \{p\}$.

— il est alors immédiat que ce sont des semi-normes.

— ces semi-normes sont filtrantes.

Si, à $p_1, \ldots, p_{\mathrm{N}}$, il correspond p et $\mathrm{C} > 0$ tels que

$$p_i(f) \leqslant \mathrm{C} \, p(f), \ \forall i \leqslant \mathrm{N}, \ \forall f \in \mathrm{E},$$

il est trivial qu'on a aussi

$$p_i'(f) \leqslant \mathrm{C} \, p'(f), \ \forall i \leqslant \mathrm{N}, \ \forall f \in \mathrm{E}.$$

— pour tout p,

$$p(f) \leqslant p'(f).$$

Si la semi-boule $b_p(1)$ est fermée, elle est faiblement fermée. Donc, si $p'(f) \leqslant 1$, on a

$$p(\mathrm{T}_m f) \leqslant 1, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

et, en passant à la limite,

$$p(f) \leqslant 1.$$

Il en résulte que $\{p' : p \in \{p\}\}$ sépare E et que c'est bien un système de semi-normes, plus fort que $\{p\}$.

c) L'espace $\mathrm{E}_{\{p'\}}$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$.

Si E admet un réseau strict, la démonstration est assez facile. Soit

$$\mathscr{R} = \{\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un tel réseau.

On a démontré en b) que, pour tout f, l'enveloppe absolument convexe fermée B_f de

$$\{f, \mathrm{T}_1 f, \mathrm{T}_2 f, \ldots\}$$

est bornée dans E. Comme E est sq-complet, B_f est aussi sq-complet.

Dès lors, par le corollaire 2, chap. III, p. 54,

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{C}_1 > 0$ tels que

$$\mathrm{B}_f \subset \mathrm{C}_1 \mathscr{E}_{n_1},$$

— si

$$\mathrm{B}_f \subset \mathrm{C}_k \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k},$$

il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{C}_{k+1} > 0$ tels que

$$\mathrm{B}_f \subset \mathrm{C}_{k+1} \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

Quitte à changer $\mathscr{R}$, on peut supposer que les constantes introduites sont toutes égales à 1 (cf. proposition 3, chap. I, p. 16).

Appelons $\mathscr{E}'_{n_1,\ldots,n_k}$ l'ensemble des f tels que

$$\mathrm{B}_f \subset \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}.$$

Les ensembles $\mathscr{E}'_{n_1,\ldots,n_k}$, $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, constituent alors visiblement un nouveau réseau de E.

Ce réseau est de type $\mathscr{C}$ dans $\mathrm{E}_{\{p'\}}$.

Soit n_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soit λ_k, $k \in \mathbb{N}$, la suite de nombres correspondante dans $\mathscr{R}$. On peut supposer que ces λ_k sont décroissants et plus petits que 1.

Démontrons que, quels que soient $f_k \in \mathscr{E}'_{n_1,\ldots,n_k}$ et $\mu_k \in [0, \lambda_k^2]$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k$$

converge dans $\mathrm{E}_{\{p'\}}$.

Comme

$$f_k,\ T_m f_k \in \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k,\ m \in \mathbb{N},$$

les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k T_m f_k$$

convergent dans E. En outre, vu le choix des μ_k,

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k T_m f_k \in \lambda_{k_0} \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k_0}},\ \forall k_0,\ m \in \mathbb{N},\ (*)$$

car, par exemple, $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k f_k$ s'écrit sous la forme

$$\lambda_{k_0} \Big(\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu'_k f_k \Big),\ \mu'_k \in [0, \lambda_k].$$

Appelons h (resp. h_m) la limite de

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k \quad (\text{resp. } \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_m f_k).$$

Du fait que

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k c_1(f_k) e_1 = \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_1 f_k \to h_1,$$

on déduit que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k c_1(f_k)$$

converge dans $\mathbb{C}$ et, si α_1 est sa limite, que

$$h_1 = \alpha_1 e_1.$$

De même, pour tout $m > 1$, du fait que

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k c_m(f_k) e_m = \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_m f_k - \sum_{k=1}^{N} \mu_k T_{m-1} f_k \to h_m - h_{m-1},$$

on déduit que

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k c_m(f_k) \to \alpha_m \in \mathbb{C}$$

et que

$$h_m - h_{m-1} = \alpha_m e_m.$$

De là,

$$h_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, \ \forall m \in \mathbb{N},$$

Montrons que

$$\alpha_i = c_i(h), \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Vu l'unicité du développement de h, il suffit pour cela que la série

$$h_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$$

converge faiblement vers h. Or, pour tout $\mathcal{T} \in \mathrm{E}^*$,

$$| \mathcal{T}(h - h_m) |$$

$$\leqslant \underbrace{| \mathcal{T} (h - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k) |}_{\mathrm{A}} + \underbrace{| \mathcal{T} (\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k \mathrm{T}_m f_k) |}_{\mathrm{B}} + \sup_m \underbrace{| \mathcal{T} (\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k \mathrm{T}_m f_k - h_m) |}_{\mathrm{C}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour N assez grand, A et C sont majorés par $\varepsilon/3$.

De fait, il existe $p \in \{p\}$ et $r > 0$ tels que

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant r\, p(f), \ \forall f \in \mathrm{E},$$

et, vu (*),

$$h - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k \ \text{ et } \ h_m - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k \mathrm{T}_m f_k \in \lambda_{\mathrm{N}+1} \mathscr{E}_{n_1, \ldots, n_{\mathrm{N}+1}} \subset b_p(\varepsilon/r)$$

dès que N est assez grand. Pour cet N fixé, B est majoré par $\varepsilon/3$ dès que m est assez grand, puisque, par hypothèse,

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k \mathrm{T}_m f_k = \mathrm{T}_m (\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k)$$

converge faiblement vers

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k.$$

Prouvons enfin que

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k$$

converge vers h dans $\mathrm{E}_{\{p'\}}$.

D'après ce qu'on vient d'établir, $h_m = \mathrm{T}_m h$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Dès lors, vu (*), on a

$$h - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k, \ \mathrm{T}_m h - \mathrm{T}_m (\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mu_k f_k) \in \lambda_{\mathrm{N}+1} \mathscr{E}_{n_1, \ldots, n_{\mathrm{N}+1}} \subset b_p(\varepsilon),$$

d'où

$$p'(h - \sum_{k=1}^{N} \mu_k f_k) \leqslant \varepsilon$$

pour p et ε arbitraires, dès que N est assez grand.

c') Supposons à présent que le réseau

$$\mathscr{R} = \{\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

soit seulement de type $\mathscr{C}$. Vu la proposition 2, chap. I, p. 16, on peut supposer que les $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}$ sont radiaux.

En vertu du théorème 1, chap. III, p. 48, où on prend pour espace de départ l'enveloppe linéaire de B_f muni de la norme associée à B_f, qui est un espace de Banach, pour espace d'arrivée l'espace E et pour R l'opérateur identité de E_{B_f} dans E,

— il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $C_1 > 0$ tels que la restriction de $\mathscr{E}_{n_1}$ à E_{B_f} n'y soit pas maigre et que

$$B_f \subset C_1 \overline{\langle \mathscr{E}_{n_1} \rangle},$$

— si $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}$ restreint à E_{B_f} n'y est pas maigre, il existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ et $C_{k+1} > 0$ tels que $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ restreint à E_{B_f} n'y soit pas maigre et que

$$B_f \subset C_{k+1} \overline{\langle \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}} \rangle}.$$

Comme les $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k}$ sont radiaux, on peut supposer que les C_k sont des nombres entiers.

On définit alors les ensembles $\mathscr{E}'_{n_1,\ldots,n_k}$ de la manière suivante.

L'ensemble $\mathscr{E}'_{(m_1,n_1)}$ est l'ensemble des f tels que $\mathscr{E}_{n_1}$ restreint à E_{B_f}, n'y soit pas maigre et que

$$B_f \subset m_1 \overline{\langle \mathscr{E}_{n_1} \rangle}.$$

On renumérote (m_1, n_1) par un seul indice n'_1.

Si $\mathscr{E}'_{(m_1,n_1),\ldots,(m_k,n_k)}$ est fixé, on appelle

$$\mathscr{E}'_{(m_1,n_1),\ldots,(m_{k+1},n_{k+1})}$$

l'ensemble des f contenus dans $\mathscr{E}'_{(m_1,n_1),\ldots,(m_k,n_k)}$ tels que $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ restreint à E_{B_f} n'y soit pas maigre et que

$$B_f \subset m_{k+1} \overline{\langle \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k+1}} \rangle}.$$

On renumérote (m_{k+1}, n_{k+1}) par n'_{k+1} parcourant $\mathbb{N}$.

Ces ensembles constituent encore visiblement un réseau de E.

Soit n'_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soient (m_k, n_k) les couples d'indices associés aux n'_k. Aux n_k correspondent $\lambda_k > 0$ dans $\mathscr{R}$. On peut les supposer tels que

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \lambda_k \leqslant \lambda_{k_0}/m_{k_0}, \forall k_0 \in \mathbb{N},$$

quitte à leur substituer

$$\lambda'_k = \inf\left(\frac{\lambda_1}{2^{k-1}m_1}, \frac{\lambda_2}{2^{k-2}m_2}, \dots, \frac{\lambda_{k-1}}{2m_{k-1}}, \lambda_k\right).$$

La démonstration se poursuit alors comme dans le cas où $\mathscr{R}$ est strict, en substituant $\lambda_{k-1}\,\overline{\langle \mathscr{E}_{n_1,\dots,n_{k-1}} \rangle}$ à $\lambda_k \mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k}$ dans la relation (*) et celles qui s'en déduisent.

d) L'opérateur identité de $E_{\{p\}}$ dans $E_{\{p'\}}$ est à graphe fermé, puisqu'il est continu de $E_{\{p'\}}$ dans $E_{\{p\}}$. Or $E_{\{p\}}$ est bornologique et *sq*-complet et $E_{\{p'\}}$ admet un réseau de type $\mathscr{C}$. Donc, par le théorème du graphe fermé (corollaire 1, chap. II, p. 28), il est continu.

Dès lors, à toute semi-norme $p' \in \{p'\}$, il correspond $C > 0$ et $q \in \{p\}$ tels que

$$\sup_m p(T_m f) = p'(f) \leqslant C\, q(f),\ \forall f \in E, \quad (^{**})$$

ce qui prouve que les T_m forment un ensemble équicontinu dans $\mathscr{L}(E, E)$.

e) Les $c_m(f)$ sont des fonctionnelles linéaires continues dans E.

De fait, pour tout m, $p(e_m)$ diffère de 0 au moins un m, sinon e_m serait égal à 0 et le développement

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f) e_i$$

ne serait pas unique, car on pourrait y remplacer $c_m(f)$ par un nombre arbitraire $c_m \in \mathbb{C}$.

Il vient alors, en appliquant l'inégalité (**),

$$|\, c_m(f)\,| = \frac{p(T_m f - T_{m-1} f)}{p(e_m)} \leqslant C'\, q(f),\ \forall f \in E,$$

ce qui prouve que $c_m(.)$ est continu.

f) La suite $T_m f$ converge vers f dans E et même uniformément sur les précompacts de E.

Comme la suite T_m forme un ensemble équicontinu, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, il suffit de démontrer qu'elle converge aux points d'un ensemble total dans E pour assurer qu'elle converge uniformément sur les précompacts de E.

Or elle converge pour $f = e_i$, $i \in \mathbb{N}$, puisque $T_m e_i = e_i$ dès que $m \geqslant i$. De plus, les e_i forment un ensemble total dans E : leur enveloppe linéaire y est faiblement dense par hypothèse, donc elle y est dense.

D'où la conclusion.

4. Théorèmes du graphe fermé pour des espaces non bornologiques

Dans un travail récent sur les théorèmes du graphe fermé du type de Ptak et de Schwartz ([29]), A. Mac Intosh démontre qu'on peut éviter l'hypothèse de bornologie sur E quand F est semi-réflexif, c'est-à-dire quand tout borné de F est contenu dans un compact faible. L'hypothèse qui la remplace, sans être particulièrement facile à vérifier, est néanmoinss atisfaitedans que lques cas intéressants.

Nous examinons ici ce que donne l'adaptation de ces résultats aux espaces à réseau.

Définition. — Appelons *réseau réflexif* de F un réseau strict

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

tel que, pour toute suite d'indices n_k et toute suite de $\lambda_k > 0$,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_{n_1,\dots,n_k} \quad (*)$$

soit contenu dans un compact faible de F.

On notera que *les ensembles* (*) *sont bornés.*

Ainsi, *si* E *est semi-réflexif, tout réseau strict de* E *est réflexif.*

Pour prouver que (*) est borné, il suffit d'établir que, pour une suite c_m tendant vers 0 fixée, la suite $c_m f_m$ tend vers 0 quels que soient les $f_m \in (*)$ (cf. [17], p. 71).

Soit ν_k la suite de nombres positifs associée aux n_k dans $\mathscr{R}$. Posons

$$c_k = \inf(2^{-k}, \nu_k/\lambda_k).$$

Quels que soient $f_k \in (*)$, on a

$$c_k f_k = \mu_k g_k,$$

où $\mu_k \in [0, \nu_k]$ et $g_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$, d'où $c_k f_k$ tend vers 0 dans F.

Si E *est sq-complet et admet un réseau réflexif, il est semi-réflexif.*

En effet, on sait alors que tout borné de E est contenu dans une intersection du type (*), donc dans un compact faible de E.

Toutefois, il existe des exemples de tels réseaux dans des espaces qui ne sont pas nécessairement semi-réflexifs. Ainsi,

— *la limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet semi-réflexifs admet* visiblement *un réseau réflexif*, même si la limite inductive n'est pas stricte.

— *si* E *est à semi-normes dénombrables* [*et séparable*] *ou limite inductive d'une suite de tels espaces*, E^*_τ *admet un réseau réflexif.*

C'est en fait le réseau de type $\mathscr{C}$ qu'on y a construit dans les exemples 2 et 3, chap. I, p. 19-20, puisque les ensembles (*) associés à ce réseau sont équicontinus dans E^*, donc contenus dans un compact de $E^*_s = (E^*_\tau)_a$.

Rappelons d'abord un

Lemme. — *Si* T *est à graphe fermé,*

$$\mathscr{D}(T^*) = \{\mathscr{Q} \in F^* : T^*\mathscr{Q} \in E^*\}$$

est s-dense dans F^*.

De fait, si b parcourt l'ensemble des semi-boules de centre 0 dans E, on a

$$\mathscr{D}(T^*) = \bigcup_b \{\mathscr{Q} : |\mathscr{Q}(Tf)| \leqslant 1, \forall f \in b\} = \bigcup_b (Tb)^\Delta.$$

A $b_1, \dots, b_n$ quelconques, il correspond b tel que $b \subset b_i$ donc tel que $b_i^\Delta \subset b^\Delta$ pour tout i. Il en résulte que

$$\bigcup_b (Tb)^\Delta$$

est absolument convexe. Il vient alors

$$\overline{\bigcup_b (\mathrm{T}b)^{\Delta}}^{s} = \overline{\langle \bigcup_b (\mathrm{T}b)^{\Delta} \rangle}^{s} = (\bigcup_b (\mathrm{T}b)^{\Delta})^{\nabla\Delta}.$$

Or

$$(\bigcup_b (\mathrm{T}b)^{\Delta})^{\nabla} = \bigcap_b (\mathrm{T}b)^{\Delta\nabla} = \bigcap_b \overline{\mathrm{T}b}$$

et, comme $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ est fermé, le dernier ensemble se réduit à 0. Donc son polaire est F*, ce qui établit le lemme.

Théorème 8. — *Soit* E *sq-complet, tel que* E_b^* *soit complet et que* $\mathrm{E} \equiv (\mathrm{E}_\tau^*)_\tau^*$.

Supposons que F [*séparable par semi-norme*], *admette un réseau réflexif ou qu'il soit semi-réflexif et admette un réseau de type* $\mathscr{C}$ ($\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}\mathscr{K}$ *ou* $\mathscr{S}\mathscr{E}$),

Tout opérateur linéaire et à graphe fermé de E *dans* F *est continu.*

Supposons d'abord F semi-réflexif.

Soit E_0 l'espace E muni des semi-normes associées aux ensembles absolument convexes et bornivores de E. C'est la limite inductive des espaces de Banach associés aux bornés absolument convexes et fermés de E, donc il est ultrabornologique.

Dès lors, vu le corollaire 1, chap. II, p. 28, T est continu de E_0 dans F.

Son adjoint T* est défini et continu de F_b^* dans $(\mathrm{E}_0)_b^*$. Comme il est complet, E_b^* est un sous-espace fermé de $(\mathrm{E}_0)_b^*$, donc $\mathscr{D}(\mathrm{T}^*) = \mathrm{T}_{-1}^*\mathrm{E}^*$ est fermé dans F_b^*.

Or F est semi-réflexif, donc F_b^* est en fait F_τ^*. Comme il découle du lemme que $\mathscr{D}(\mathrm{T}^*)$ est τ-dense dans F*, on obtient qu'il lui est identique, donc que T* est défini de F* dans E*.

L'opérateur T* est aussi continu de F_s^* dans $(\mathrm{E}_0)_s^*$, donc de F_s^* dans E_s^*. De là, pour toute semi-boule β de F, $\mathrm{T}^*\beta^\Delta$, image d'un s-compact absolument convexe de F*, est compact dans E_s^*, donc équicontinu dans E* :

$$\mathrm{T}^*\beta^\Delta \subset b^\Delta,$$

où b est une semi-boule de E. Si β est fermé, il en découle que $\mathrm{T}b \subset \beta$ et, par conséquent, T est continu de E dans F.

Supposons à présent F muni d'un réseau réflexif

$$\mathscr{R} = \{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}.$$

Comme dans la démonstration précédente, on voit que T est continu de E_0 dans F.

De plus, pour tout borné B de E, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{C}_k > 0$ tels que

$$\mathrm{TB} \subset \mathrm{C}_k\, e_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc TB est contenu dans un compact faible absolument convexe de F et il en découle que T* est continu de F_τ^* dans $(\mathrm{E}_0)_b^*$.

On a supposé E_b^* complet, donc il est fermé dans $(\mathrm{E}_0)_b^*$ et $\mathscr{D}(\mathrm{T}^*) = \mathrm{T}_{-1}^*\mathrm{E}^*$ est fermé dans F_τ^*. Comme on sait qu'il y est dense, on a donc

$$\mathscr{D}(\mathrm{T}^*) = \mathrm{F}^*$$

et T* est défini de F* dans E*.

On conclut comme dans la démonstration précédente.

Voici un exemple qui illustre l'intérêt du théorème précédent.

Corollaire. — *Soit* E *de Fréchet [et séparable] ou limite inductive stricte d'une suite de tels espaces et soit* F *à semi-normes dénombrables [et séparable] ou limite inductive d'une suite de tels espaces.*

Si T′ *est linéaire et à graphe fermé de* E^*_s *dans* F^*_s, *il est l'adjoint d'un opérateur linéaire continu de* F *dans* E. *Il est donc continu de* E^*_s *dans* F^*_s, *de* E^*_b *dans* F^*_b, ...

Si E *et* F *sont de Fréchet, il suffit même que* $\mathscr{G}(T')$ *soit sq-fermé au lieu de fermé dans* $E^*_s \times F^*_s$.

L'espace E^*_τ est *sq*-complet et son dual fort, qu'on peut assimiler à E muni de ses semi-normes naturelles, est complet. Il satisfait donc aux conditions du théorème 8.

L'espace F^*_τ admet un réseau réflexif [et il est séparable].

Enfin $\mathscr{G}(T')$, fermé dans $E^*_s \times F^*_s$, est a fortiori fermé dans $E^*_\tau \times F^*_\tau$.

Il découle alors du théorème 8 que T′ est continu de E^*_τ dans F^*_τ. C'est donc l'adjoint d'un opérateur T, linéaire de F dans E.

Il reste à voir que T est continu, ce qui résulte du fait que F est évaluable.

Si E et F sont de Fréchet, comme $E^*_s \times F^*_s = (E \times F)^*_s$ est le dual d'un espace de Fréchet [séparable], il résulte du théorème de Krein-Smulian que $\mathscr{G}(T')$ y est s-fermé si et seulement si il y est s-fermé pour les suites.

CHAPITRE VI

ENSEMBLES SOUSLINIENS ET THÉORÈME DU GRAPHE BORÉLIEN

Ce chapitre est consacré au théorème du graphe borélien de L. Schwartz et à l'examen de ses relations avec nos résultats et des améliorations qu'on peut y apporter à la lumière des techniques développées dans les chapitres précédents.

On définit les ensembles sousliniens soit comme image continue d'espaces métriques, séparables et complets, soit comme ensembles munis d'un crible, qui est une sorte de réseau particulier.

Nous adoptons le deuxième point de vue. Par la considération explicite des cribles, il permet d'obtenir, outre des théorèmes du graphe fermé dans leur forme classique, c'est-à-dire des critères de continuité d'opérateur, des propriétés de localisation analogues à celles du chapitre III. Moins générales que dans les espaces à réseau strict, ces propriétés débouchent néanmoins sur des théorèmes de permanence des espaces sousliniens, analogues à ceux du chapitre IV.

1. Ensembles sousliniens

Comme dans le reste du travail, nous supposons que les espaces E et F considérés dans ce chapitre sont des espaces linéaires à semi-normes.

Bien entendu, on peut définir les ensembles sousliniens dans un contexte plus général, mais nous ne les utiliserons que dans le cadre des espaces linéaires à semi-normes auquel il faut nécessairement se restreindre pour les propriétés que nous nous proposons d'établir plus loin.

Définition. — Un ensemble $e \subset \mathrm{E}$ est *souslinien* s'il existe des sous-ensembles de e,

$$e_{n_1,\ldots,n_k},\ k,\ n_1,\ \ldots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

tels que

(a) $$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1},$$

$$e_{n_1,\ldots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e_{n_1,\ldots,n_k},\ \forall k > 1,\ \forall n_1,\ \ldots,\ n_{k-1} \in \mathbb{N},$$

(b) pour toute suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, fixée,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} e_{n_1,\ldots,n_k}$$

se réduit à un seul élément f de e et, quels que soient $f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k}$, la suite f_k tend vers f dans E.

L'ensemble des $e_{n_1,\ldots,n_k}$ est appelé un *crible* de e.

Proposition 1. — *Pour que e soit souslinien, il faut et il suffit qu'il existe des sous-ensembles de e*

$$e_{n_1,\dots,n_k},\ k,\ n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

tels que

(a′)
$$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1},$$

$$e_{n_1,\dots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e_{n_1,\dots,n_k},\ \forall k > 1,\ \forall n_1,\ \dots,\ n_{k-1} \in \mathbb{N},$$

(b′) *pour toute suite n_k fixée, il existe $f \in e$ tel que*

$$f = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{e_{n_1,\dots,n_k}}$$

et, pour toute semi-boule $b_p(\varepsilon)$ de centre 0 dans E,

$$e_{n_1,\dots,n_k} \subset f + b_p(\varepsilon)$$

dès que k est assez grand.

Pour établir la condition nécessaire, montrons que, si

$$\{e_{n_1,\dots,n_k} : k,\ n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un crible de E, il satisfait aux conditions de l'énoncé. Il suffit de vérifier (b′). Prenons pour f l'intersection des $e_{n_1,\dots,n_k}$. Si $e_{n_1,\dots,n_k} \not\subset f + b_p(\varepsilon)$ pour k assez grand, il existe une suite $f_k \in e_{n_1,\dots,n_k}$ telle que $p(f - f_k) \geqslant \varepsilon$ pour une infinité de valeurs de k, ce qui est absurde car $f_k \to f$, par définition du crible.

Passons à la condition suffisante. Supposons que

$$e_{n_1,\dots,n_k},\ k,\ n_1,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N},$$

vérifient les conditions (a′) et (b′) de la proposition.

Pour tous $n_1, \dots, n_{k_0} \in \mathbb{N}$, désignons par $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites

$$\vec{m} = (m_k : k \in \mathbb{N}),$$

telles que

$$m_i = n_i,\ \forall i \leqslant k_0,$$

et posons

$$\widetilde{e_{n_1,\dots,n_{k_0}}} = \bigcup_{\vec{m} \in \mathscr{S}} \ \bigcap_{k=k_0+1}^{\infty} \overline{e_{m_1,\dots,m_k}}.$$

Il est immédiat que

$$e_{n_1,\dots,n_{k_0}} \subset \widetilde{e_{n_1,\dots,n_{k_0}}} \subset \overline{e_{n_1,\dots,n_{k_0}}}. \quad (*)$$

La première inclusion tient au fait que si $f_k \in e_{n_1,\dots,n_{k_0}}$, il existe une suite n_k, $k > k_0$, telle qu'il appartienne aussi à $e_{n_1,\dots,n_k}$ pour tout k, donc, pour cette suite,

$$f \in \bigcap_{k=k_0+1}^{\infty} e_{n_1,\dots,n_k}.$$

La seconde est triviale.

Les $\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}$ constituent un crible de e.

Quel que soit $n_1 \in \mathbb{N}$, on a

$$\widetilde{e_{n_1}} \subset e.$$

En effet, si $f \in \widetilde{e_{n_1}}$, il existe une suite n_k, $k > 1$, telle que

$$f \in \overline{e_{n_1,\dots,n_k}},\ \forall k > 1,$$

ce qui entraîne que f appartient à e, par la condition (b′) ci-dessus.

On a donc

$$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1} \subset \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \widetilde{e_{n_1}} \subset e$$

et

$$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} \widetilde{e_{n_1}}.$$

De même, on voit sans peine que, pour tous $k > 1$ et $n_1, \dots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{e_{n_1,\dots,n_{k-1}}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} \widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}.$$

Donc la condition (a) est satisfaite.

Vu (*), on a

$$\overline{e_{n_1,\dots,n_k}} = \overline{\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}}$$

quels que soient $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, d'où, pour toute suite n_k fixée,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}}$$

se réduit à un élément $f \in e$. Il est immédiat, d'après leur définition, que les $\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}$ contiennent f, donc

$$f = \bigcap_{k=1}^{\infty} \widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}.$$

Soient enfin $f_k \in \widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Quel que soit $b_p(\varepsilon)$ fermé, pour k assez grand,

$$\widetilde{e_{n_1,\dots,n_k}} \subset \overline{e_{n_1,\dots,n_k}} \subset f + b_p(\varepsilon),$$

donc $f_k \to f$ dans E.

2. Propriétés de permanence

Examinons les propriétés de permanence des ensembles sousliniens. Ces propriétés sont pour la plupart celles de Bourbaki ([8]). Dans [8], les espaces sousliniens sont supposés métrisables, restriction inutile dont on se débarasse sans difficulté (cf. Schwartz, [45]). Les démonstrations données ici sont évidemment différentes puisqu'elles reposent sur la définition par les cribles que nous avons adoptée (Pour l'équivalence des deux définitions, on se référera par exemple à [8], ex. 6, p. 143).

PROPOSITION 2. — *Si e est souslinien et si $e' \subset e$ est sq-fermé dans e, alors e' et $\complement_e e'$ sont sousliniens.*

Soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de e.

Si e' est sq-fermé, les ensembles

$$e'_{n_1,\ldots,n_k} = e_{n_1,\ldots,n_k} \cap e'$$

constituent un crible de e', si on élimine ceux d'entre eux qui sont vides. Après cette élimination, les n_k ne parcourent plus $\mathbb{N}$ mais une partie de $\mathbb{N}$. Pour rester en accord avec la définition adoptée, il suffit de les renuméroter par un indice parcourant $\mathbb{N}$, quitte, si les n_k sont en nombre fini, à associer le même n_k à une suite de $\mathbb{N}$.

On a visiblement

$$e' = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e' \cap e_{n_1}$$

et

$$e' \cap e_{n_1,\ldots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e' \cap e_{n_1,\ldots,n_k}, \forall k > 1, n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N}.$$

De plus, soit n_k une suite fixée, telle que

$$e' \cap e_{n_1,\ldots,n_k} \neq \varnothing, \forall k \in \mathbb{N},$$

et soit f l'intersection des $e_{n_1,\ldots,n_k}$.

Si $f_k \in e' \cap e_{n_1,\ldots,n_k}$, la suite f_k converge vers f. Comme e' est sq-fermé et contient les f_k, il contient aussi f, d'où la conclusion.

Démontrons à présent que, si e' est sq-fermé,

$$e'' = \complement_e e'$$

est souslinien.

On a

$$e'' = \bigcup_{e_{n_1,\ldots,n_k} \subset e''} e_{n_1,\ldots,n_k}.$$

L'inclusion $\supset$ est triviale. D'autre part, si $f \in e''$, il existe une suite n_k telle que

$$f \in e_{n_1,\ldots,n_k}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pour k assez grand,

$$e_{n_1,\ldots,n_k} \subset e''.$$

En effet, si ce n'est pas le cas, il existe une suite

$$f_k \in e_{n_1,\ldots,n_k} \cap e', \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cette suite converge vers f, d'où, comme e' est sq-fermé, f appartient à e', ce qui est absurde.

On vérifie immédiatement que les ensembles

$$e''_{m_1,\dots,m_k}$$

définis ci-dessous forment un crible de e''.

Les ensembles e''_{m_1} sont les $e_{n_1,\dots,n_k}$ contenus dans e'', renumérotés avec un seul indice. Si $e''_{m_1} = e_{n_1,\dots,n_k}$, on pose

$$e''_{m_1,m_2,\dots,m_i} = e_{n_1,\dots,n_k,m_2,\dots,m_i}, \ \forall i > 1, m_2, \dots, m_i \in \mathbb{N}.$$

Proposition 3. — *Toute union et toute intersection dénombrables d'ensembles sousliniens contenus dans* E *sont sousliniennes.*

Si e_n sont les ensembles sousliniens considérés et

$$\{e^{(n)}_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

leurs cribles respectifs, les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = e_{n_1}, \ n_1 \in \mathbb{N},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,\dots,n_k} = e^{(n_1)}_{n_2,\dots,n_k}, \ k > 1, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N},$$

constituent visiblement un crible de $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$.

Passons au cas de l'intersection et posons

$$e = \bigcap_{n=1}^{\infty} e_n.$$

Considérons les $e^{(1)}_{n_1} \cap e$ non vides et désignons par $\mathscr{E}_{m_1}$ les ensembles ainsi déterminés, renumérotés par un indice parcourant $\mathbb{N}$.

Si

$$\mathscr{E}_{m_1} = e^{(1)}_{n_1} \cap e,$$

les $\mathscr{E}_{m_1,m_2}$ sont les ensembles

$$e^{(1)}_{n_1,n_2} \cap e^{(2)}_{n'_1} \cap e$$

non vides, renumérotés par un indice m_2 parcourant $\mathbb{N}$. On définit de proche en proche les $\mathscr{E}_{m_1,\dots,m_k}$ de façon analogue.

Les $\mathscr{E}_{m_1,\dots,m_k}$ constituent un crible de e.

D'une part, il est immédiat que

$$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e^{(1)}_{n_1} \cap e,$$

$$e^{(1)}_{n_1} \cap e = \Big(\bigcup_{n_2=1}^{\infty} e^{(1)}_{n_1,n_2}\Big) \cap \Big(\bigcup_{n'_1=1}^{\infty} e^{(2)}_{n'_1}\Big) \cap e = \bigcup_{n_2,n'_1=1}^{\infty} (e^{(1)}_{n_1,n_2} \cap e^{(2)}_{n'_1} \cap e)$$

et ainsi de suite.

D'autre part, soit m_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soient $n_k, n'_k, n''_k, \dots, k \in \mathbb{N}$, les suites d'indices correspondantes dans les cribles de $e_1, e_2, \dots$. Il existe des éléments $f, f', \dots$ de E tels que

$$f = \bigcap_{n_k=1}^{\infty} e^{(1)}_{n_1,\dots,n_k}, \ f' = \bigcap_{n'_k=1}^{\infty} e^{(2)}_{n'_1,\dots,n'_k}, \ \dots .$$

Si

$$f_k \in \mathscr{E}_{m_1,\ldots,m_k}, \forall k \in \mathbb{N},$$

la suite f_k, répartie dans les $e^{(1)}_{n_1,\ldots,n_k}$ successifs, converge vers f dans E. Comme, à partir de f_2, elle se répartit aussi dans les $e^{(2)}_{n'_1,\ldots,n'_k}$, elle converge vers f' et ainsi de suite.

De là, on a

$$f \in e_1, f' \in e_2, \ldots$$

et, comme la limite de la suite f_k est unique,

$$f = f' = \ldots .$$

Donc f appartient à e, ce qui établit la proposition.

On sait que les ensembles boréliens de E constituent le plus petit ensemble de parties de E (relativement à $\subset$) qui contient les complémentaires, les unions et intersections dénombrables de ses éléments et les ensembles fermés de E.

On peut introduire une notion analogue relative aux ensembles sq-fermés.

Définition. — On appelle *sq-boréliens* de E le plus petit ensemble de parties de E qui contient les complémentaires, les unions et intersections dénombrables de ses éléments et les ensembles sq-fermés de E.

Visiblement, *tout borélien de* E *est sq-borélien.*

La propriété suivante résume et complète la proposition 2 ci-dessus.

Proposition 4. — *Si* $e \subset$ E *est souslinien et* e' *sq-borélien dans* E, *alors* $e \cap e'$ *est souslinien.*

Considérons l'ensemble $\mathscr{F}$ des parties de E tels que $e \cap e'$ et $e \cap \complement e'$ soient sousliniens.

En vertu de la proposition 2, $\mathscr{F}$ contient les ensembles sq-fermés de E. De plus, par la proposition 3, $\mathscr{F}$ contient les unions et intersections dénombrables de ses éléments. Enfin, $\mathscr{F}$ contient visiblement les complémentaires de ses éléments.

Dès lors, $\mathscr{F}$ contient les ensembles sq-boréliens de E, ce qui établit la proposition.

Proposition 5. — *Si* φ *est une application sq-continue de* e *dans* F, *c'est-à-dire telle que*

$$f_m \to f \text{ dans } e \Rightarrow \varphi f_m \to \varphi f \text{ dans } \mathrm{F},$$

et si e *est souslinien,* $\varphi(e)$ *est souslinien.*

Il est immédiat que si les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ forment un crible de e, les $\varphi(e_{n_1,\ldots,n_k})$ forment un crible de $\varphi(e)$.

Combiné avec la proposition 3, cet énoncé donne le

Corollaire 1. — *Si* e *est union dénombrable d'images par des applications sq-continues d'ensembles sousliniens, il est souslinien.*

En particulier, *si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces sousliniens, il est souslinien.*

Voici un autre corollaire utile.

Corollaire 2. — *Si* L *est un sous-espace linéaire fermé de* E *et si* e *est souslinien dans* E, *son image dans* E/L *est souslinienne.*

Proposition 6. — *Tout produit dénombrable d'ensembles sousliniens est souslinien.*

Soient $e^{(i)}$ sousliniens et soit

$$\{e^{(i)}_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\},$$

un crible de $e^{(i)}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Les ensembles

$$e^{(1)}_{n_1} \times e^{(2)} \times e^{(3)} \times \ldots, n_1 \in \mathbb{N},$$
$$e^{(1)}_{n_1,n_2} \times e^{(2)}_{n'_1} \times e^{(3)} \times \ldots, n_1, n_2, n'_1 \in \mathbb{N},$$
$$e^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \times e^{(2)}_{n'_1,n'_2} \times e^{(3)}_{n''_1} \times \ldots, n_1, n_2, n_3, n'_1, n'_2, n''_1 \in \mathbb{N}, \ldots$$

forment un crible de

$$\prod_{i=1}^{\infty} e^{(i)},$$

si on renumérote (n_2, n'_1) (resp. (n_3, n'_2, n''_1), ...) avec un seul indice, parcourant $\mathbb{N}$.

Proposition 7. — *Soient* E_n, $n \in \mathbb{N}$, *une suite d'espaces emboîtés en décroissant et tels que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *l'identité de* E_{n+1} *dans* E_n *soit sq-continue. Appelons* E *la limite projective des* E_n.

Si $e_n \subset \mathrm{E}_n$ *est souslinien dans* E_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$e = \bigcap_{n=1}^{\infty} e_n$$

est souslinien dans E.

Avec les notations de la démonstration précédente, un crible de e est défini par les ensembles

$$\mathscr{E}_{n_1} = e^{(1)}_{n_1} \cap e, n_1 \in \mathbb{N},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1)} = e^{(1)}_{n_1,n_2} \cap e^{(2)}_{n'_1} \cap e, n_1, n_2, n'_1 \in \mathbb{N},$$
$$\mathscr{E}_{n_1,(n_2,n'_1),(n_3,n'_2,n''_1)} = e^{(1)}_{n_1,n_2,n_3} \cap e^{(2)}_{n'_1,n'_2} \cap e^{(3)}_{n''_1}, n_1, n_2, n_3, n'_1, n'_2, n''_1 \in \mathbb{N},$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots .$$

Ces ensembles satisfont visiblement à la condition (a) de la définition du crible, si on les renumérote comme ci-dessus.

Fixons une suite n_1, (n_2, n'_1), (n_3, n'_2, n''_1), ... Si les f_m appartiennent aux ensembles correspondants, la suite f_m converge dans chaque E_i vers un élément $f^{(i)}$ de e_i. Le fait que la convergence dans E_{i+1} entraîne la convergence dans E_i montre que les $f^{(i)}$ sont tous égaux entre eux, d'où, si f est leur valeur commune,

$$f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = e.$$

Il est alors immédiat que f est dans l'intersection des ensembles du crible correspondants à la suite d'indices fixée.

PROPOSITION 8. — *Si e est souslinien et si*

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un crible de e, les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ *sont sousliniens.*

C'est immédiat, chaque $e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ admettant

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k > k_0, n_{k_0+1}, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

pour crible.

3. Exemples

Voici un exemple très important d'ensemble souslinien.

De cet exemple et des propriétés de permanence, on déduit aisément que de nombreux espaces usuels de l'analyse fonctionnelle sont sousliniens.

EXEMPLE 1. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et si* $e \subset$ E *est sq-complet et séparable, e est souslinien.*

Soient p_i, $i \in \mathbb{N}$, les semi-normes dénombrables de E et soit

$$\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$$

un ensemble dénombrable dense dans e.

Les ensembles

$$e_{n_1} = [f_{n_1} + b_{p_1}(1)] \cap e,$$

où n_1 parcourt $\mathbb{N}$,

$$e_{n_1,n_2} = [f_{n_2} + b_{p_2}(1/2)] \cap e_{n_1} \cap e,$$

où n_2 prend les valeurs pour lesquelles e_{n_1,n_2} n'est pas vide, et ainsi de suite, constituent un crible de e, après renumérotation convenable des indices, à condition de prendre les semi-boules considérées fermées.

La condition (a) de la définition est trivialement satisfaite.

De plus, si on fixe une suite n_k, $k \in \mathbb{N}$, et si on prend un élément g_k dans chaque $e_{n_1,\ldots,n_k}$, la suite g_k est de Cauchy, car, si $k \leqslant i \leqslant r, s$,

$$p_k(g_r - g_s) \leqslant p_i(g_r - g_s) \leqslant 2^{-i+1} \to 0$$

si $\inf(r, s) \to \infty$, pour tout k fixé.

Comme e est sq-complet, la suite g_k converge donc dans e. Comme les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ sont fermés, sa limite g leur appartient, d'où la conclusion.

COROLLAIRE. — *Si* E *est un espace de Fréchet séparable ou la limite inductive d'une suite de tels espaces, il est souslinien.*

Le premier cas découle immédiatement de l'exemple 1.

Pour le second, on applique le corollaire 1 de la proposition 5, p. 105.

Avant de passer aux exemples suivants, rappelons le théorème de Banach-Steinhaus : *toute suite* $\mathrm{T}_m \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, *équicontinue et telle que* $\mathrm{T}_m f$ *converge dans* F *pour tout* $f \in$ E *(ou même pour tout* f *appartenant à un ensemble dense dans* E *si* F *est sq-complet) converge dans* $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

EXEMPLE 2. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et séparable,* E^*_{pc} *est souslinien.*

En particulier, E* *est souslinien pour tout système de semi-normes plus faible que celui de* E^*_{pc}.

Si p_i, $i \in \mathbb{N}$, désignent les semi-normes de E, b_i les semi-boules $b_{p_i}(1/i)$ et b_i^Δ leur polaire, on a

$$E^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i^\Delta.$$

Or chaque b_i^Δ est *sq*-complet et séparable dans E* muni des semi-normes dénombrables

$$\sup_{j \leq N} |\, \mathcal{C}(f_j) \,|,$$

où $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E. Il est donc souslinien dans cet espace, et, vu le théorème de Banach-Steinhaus, il est souslinien dans E^*_{pc}.

L'union des b_i^Δ est donc aussi souslinienne, d'où la conclusion.

EXEMPLE 3. — *Si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces à semi-normes dénombrables et séparables,* E^*_{pc} *est souslinien.*

Appelons E^*_χ l'espace E* muni des semi-normes

$$\sup_{f \in K} |\, \mathcal{C}(f) \,|,$$

où K parcourt l'ensemble des précompacts des différents E_i.

Comme on ne suppose pas la limite inductive stricte, on ne peut pas affirmer que tout précompact de E est contenu dans un E_i et y est précompact. Donc le système de semi-normes de E^*_χ est plus faible que celui de E^*_{pc}.

Toutefois, l'opérateur identité de E^*_χ dans E^*_{pc} est *sq*-continu.

De fait, soit $\mathcal{C}_m$ tendant vers 0 dans E^*_χ.

Les restrictions des $\mathcal{C}_m$ à E_i convergent vers 0 dans $(E_i)^*_{pc}$. Donc elles sont équicontinues dans E_i. Comme c'est vrai pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $\mathcal{C}_m$ est équicontinue dans E. Donc la suite $\mathcal{C}_m$ tend vers 0 dans E^*_{pc}.

Pour prouver que E^*_{pc} est souslinien, il suffit donc, en vertu de la proposition 5, p. 105, de démontrer que E^*_χ est souslinien.

L'espace E* s'identifie au sous-espace $\mathscr{L}$ de

$$\prod_{i=1}^{\infty} E_i^*$$

formé des éléments

$$(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \ldots)$$

tels que

$$\mathcal{C}_i(f) = \mathcal{C}_{i+1}(f), \forall f \in E_i, \forall i \in \mathbb{N}.$$

En outre, le système de semi-normes de E^*_χ est celui qu'induit dans $\mathscr{L}$ le produit

$$\prod_{i=1}^{\infty} (E_i)^*_{pc}.$$

Le produit en question est souslinien, vu la proposition 6, p. 106 et l'exemple 2 ci-dessus. Or $\mathscr{L}$ est visiblement un sous-espace fermé de ce produit, d'où la conclusion.

Exemple 4. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et séparable et si* F *est un espace de Fréchet séparable, l'espace* $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est souslinien.*

On sait que F est souslinien. Soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de F. Soient d'autre part p_i, $i \in \mathbb{N}$, les semi-normes dénombrables de E, q_j, $j \in \mathbb{N}$, celles de F et soit

$$\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$$

un ensemble dénombrable dense dans E.

On forme les ensembles

$$\{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) : \mathrm{T}f_1 \in e_{n_1} \; ; \; q_1(\mathrm{T}f) \leqslant m_1 p_{i_1}(f), \forall f \in \mathrm{E}\}, i_1, m_1, n_1 \in \mathbb{N},$$

et on les baptise $\mathscr{E}_{\nu_1}$, après numérotation des (i_1, m_1, n_1) par $\nu_1 \in \mathbb{N}$. On forme ensuite

$$\mathscr{E}_{\nu_1} \cap \{\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) : \mathrm{T}f_1 \in e_{n_1,n_2} \; ; \; \mathrm{T}f_2 \in e_{n'_1} \; ; \; q_2(\mathrm{T}f) \leqslant m_2 p_{i_2}(f), \forall f \in \mathrm{E}\},$$
$$i_2, m_2, n_2, n'_1 \in \mathbb{N},$$

qu'on baptise $\mathscr{E}_{\nu_1,\nu_2}$ après numérotation des (i_2, m_2, n_2, n'_1) par $\nu_2 \in \mathbb{N}$.

Et ainsi de suite.

Il est facile de voir que les $\mathscr{E}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$ forment un réseau de E donc satisfont à la condition (a) de la définition des cribles (cf. p. 100).

Pour toute suite ν_k fixée, choisissons T_k dans les $\mathscr{E}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$ successifs.

La suite T_k est équicontinue. De fait, pour tout j, il existe i_j et m_j tels que, si $k > j$,

$$q_j(\mathrm{T}_k f) \leqslant m_j p_{i_j}(f), \forall f \in \mathrm{E}.$$

Comme l'ensemble fini $\{\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_j\}$ est équicontinu, il existe m'_j et i'_j tels que

$$q_j(\mathrm{T}_k f) \leqslant m'_j p_{i'_j}(f), \forall f \in \mathrm{E}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Vu le mode de construction des $\mathscr{E}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$, la suite $\mathrm{T}_k f_i$ converge pour tout f_i. Dès lors, par le théorème de Banach-Steinhaus, elle converge dans $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Enfin, il est trivial que sa limite T est l'intersection des $\mathscr{E}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$, d'où la conclusion.

Exemple 5. — *Si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces* E_i *à semi-normes dénombrables et séparables et si* F *est un espace de Fréchet séparable, l'espace* $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est souslinien.*

On trouve dans Schwartz ([45]), un théorème analogue, où E est supposé limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet séparables et où F est réunion d'une suite d'images continues d'espaces de Fréchet séparables.

On se débarrasse ici de l'hypothèse que la limite inductive soit stricte en restreignant le choix sur F. En gardant l'hypothèse de Schwartz sur E, on verra (cf. théorème 3, p. 123), qu'on peut améliorer l'hypothèse sur F.

Démontrons que $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est souslinien.

Désignons par $\mathscr{L}_{\chi}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'espace $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ muni des semi-normes

$$\sup_{f \in \mathrm{K}} q(\mathrm{T}f)$$

où q parcourt l'ensemble des semi-normes de F et K l'ensemble des précompacts des différents E_i.

En procédant comme dans la démonstration de l'exemple 3, p. 108, on voit que l'opérateur identité de $\mathscr{L}_{\chi}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est sq-continu, donc il suffit de démontrer que le premier espace est souslinien.

Or, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on peut assimiler $\mathscr{L}(\mathrm{E}_{i+1}, \mathrm{F})$ à un sous-espace de $\mathscr{L}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$ et le plongement de $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}_{i+1}, \mathrm{F})$ dans $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$ est continu. On a alors

$$\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$$

et les semi-normes de $\mathscr{L}_{\chi}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ sont celles induites dans $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ par les différents $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F})$.

De là, par la proposition 7, p. 106, $\mathscr{L}_{\chi}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est souslinien.

4. Quelques théorèmes de catégorie

Le théorème du graphe borélien de Schwartz, qu'il a démontré à partir de sa théorie de la mesure, a été établi par Martineau ([31]) à partir de propriétés des ensembles maigres beaucoup plus fines que celles utilisées jusqu'ici, que l'on trouve, pour la plupart, dans l'ouvrage de Banach [4].

Si on se réfère aux sources citées par Martineau ([4] et [8]), il semble que sa démonstration, qui repose essentiellement sur la proposition 10, p. 111, soit inféodée à l'axiome de Zorn. Une discussion précise du théorème en question montre qu'il n'en est rien, pour l'essentiel des résultats.

Les théorèmes qui suivent se trouvent pour la plupart dans [4], [8] ou [33], où on ne discute toutefois pas leur dépendance vis-à-vis de l'axiome de Zorn.

Définitions. — Soit $e \subset \mathrm{E}$. On note $\mathrm{D}(e)$ l'ensemble des $f \in \mathrm{E}$ tels que, pour toute semi-boule b de centre 0 dans E,

$$(f + b) \cap e$$

ne soit pas maigre. On note $0(e)$ l'intérieur de e.

Voici d'abord quelques propriétés élémentaires de $\mathrm{D}(e)$ et $0(e)$.

Proposition 9. — a) *$\mathrm{D}(e)$ est fermé et contenu dans $\bar{e}$.*

b) *Si $e_1 \subset e_2$, on a $\mathrm{D}(e_1) \subset \mathrm{D}(e_2)$.*

c) *On a $f \in 0(e)$ si et seulement si il existe une semi-boule b de centre 0 telle que, pour toute semi-boule b' contenue dans $f + b$, $b' \cap e$ ne soit pas maigre.*

d) *Si e est absolument convexe, $\mathrm{D}(e)$ et $0(e)$ sont absolument convexes.*

a) On note que, si $f_0 \in \overline{\mathrm{D}(e)}$, $f_0 + \frac{1}{2} b$ contient $f \in \mathrm{D}(e)$. Alors $\left(f + \frac{1}{2} b\right) \cap e$ et a fortiori $(f_0 + b) \cap e$ ne sont pas maigres, donc $f_0 \in \mathrm{D}(e)$.

c) La condition est nécessaire.

Si $f_0 \in 0(e)$, il existe b tel que $f_0 + b \subset D(e)$. Dès lors, quelle que soit la semi-boule ouverte $b' \subset f_0 + b$, si $f \in b'$, il existe b'' tel que $(f + b'') \cap e$ ne soit pas maigre et que $f + b'' \subset b'$, ce qui prouve que $b' \cap e$ n'est pas maigre.

La condition est suffisante.

Si toute semi-boule contenue dans $f_0 + b$ rencontre e suivant un ensemble non maigre, tout f appartenant à $f_0 + \frac{1}{2} b$ est dans $D(e)$, donc f_0 appartient à l'intérieur $0(e)$ de $D(e)$.

d) Démontrons que $D(e)$ est absolument convexe. Il est alors immédiat que $0(e)$ l'est aussi.

Soient $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} | c_i | \leqslant 1$ et soient $f_1, \ldots, f_n \in D(e)$. Supposons que $c_{i_0} \neq 0$. Soit b une semi-boule donnée de centre 0 dans E. Il existe, pour tout $i \neq i_0$, $g_i \in (f_i + b) \cap e$ puisque ces ensembles sont non maigres, donc non vides. On a alors

$$(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i) + b \supset \sum_{i \neq i_0} c_i g_i + c_{i_0} f_{i_0} + c_{i_0} b.$$

L'intersection du second membre avec e contient $c_{i_0} [(f_{i_0} + b) \cap e]$, qui est non maigre. Donc $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i \in D(e)$, ce qu'il fallait démontrer.

Les ensembles $0(e)$ possèdent quelques propriétés remarquables. Nous n'exposons ici que celles qui seront nécessaires plus loin.

Proposition 10. — *Si* E *est à semi-normes dénombrables et séparable,* $e \setminus 0(e)$ *est maigre, quel que soit* $e \subset E$.

De là, e *est maigre si et seulement si* $0(e)$ *est vide.*

(Z) *Le même théorème est valable sans hypothèse sur* E, *moyennant recours à l'axiome de Zorn.*

a) Supposons d'abord E à semi-normes dénombrables et séparable.

Désignons par p_i, $i \in \mathbb{N}$, les semi-normes de E, par

$$\{f_k : k \in \mathbb{N}\},$$

un ensemble dénombrable dense dans E et par β_l, $l \in \mathbb{N}$, les semi-boules ouvertes

$$f_k + b_{p_i}(1/i)$$

dont l'intersection avec e est maigre, renumérotées avec un seul indice.

On a

$$e \setminus 0(e) \subset \overline{\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l}. \quad (*)$$

De fait, si $f \notin 0(e)$, pour toute semi-boule b de centre 0, il existe une semi-boule $\beta \subset f + b$ telle que $\beta \cap e$ soit maigre. Or β contient au moins une semi-boule

$f_k + b_{p_i}(1/i)$. Cette dernière semi-boule fait partie des β_l et, par conséquent, $f + b$ rencontre l'union des β_l quel que soit b, ce qui entraîne

$$e \diagdown 0(e) \subset \overline{\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l}.$$

De (*), on tire

$$e \diagdown 0(e) \subset (\overline{\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l}) \cap e \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} (\beta_l \cap e) \cup \overset{\cdot}{\widehat{(\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l)}}.$$

L'ensemble

$$\overset{\cdot}{\widehat{\bigcup_{l=1}^{\infty} \beta_l}}$$

est la frontière d'un ouvert, donc c'est un fermé d'intérieur vide et il est maigre. Les $\beta_l \cap e$ sont également maigres. Comme ils sont dénombrables, leur union est maigre et on obtient que $e \diagdown 0(e)$ est maigre.

Pour le cas particulier, on note, en se reportant à sa définition, que $0(e)$ est vide si e est maigre.

Inversement, si $0(e)$ est vide, $e \subset e \diagdown 0(e)$ est maigre.

b) La généralisation du théorème au cas d'un espace E quelconque est due à Banach ([5]). En fait, il a traité le cas d'un espace métrique non séparable, mais il suffit de substituer des ouverts aux sphères qu'il considère pour obtenir le cas général.

Avant de traiter le cas général, voici d'abord un lemme utile.

Lemme. — *Soit*

$$\mathcal{O} = \{\omega_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$$

un ensemble d'ouverts deux à deux disjoints de E.

Si

$$e \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \omega_\alpha$$

et si, pour tout $\alpha \in \mathcal{I}$, $\overline{e \cap \omega_\alpha}$ *est d'intérieur vide, alors* $\bar{e}$ *est d'intérieur vide.*

Si

$$e \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \omega_\alpha$$

et si, pour tout $\alpha \in \mathcal{I}$, $e \cap \omega_\alpha$ *est maigre, alors* e *est maigre.*

Traitons le premier cas. Supposons que $\omega = \mathring{\bar{e}}$ ne soit pas vide.

Comme la frontière de l'ouvert

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \omega_\alpha$$

est d'intérieur vide, l'ouvert ω rencontre nécessairement l'union des ω_α, donc rencontre un ω_{α_0}. Il existe alors un ouvert non vide ω' contenu dans $\bar{e}$ et ω_{α_0}. Or il est trivial que

$$\bar{e} \cap \omega_{\alpha_0} \subset \overline{e \cap \omega_{\alpha_0}},$$

d'où ω' est contenu dans un fermé d'intérieur vide, ce qui est absurde.

Pour le second cas, on note que, si chaque $e \cap \omega_\alpha$ est maigre, il est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide :

$$e \cap \omega_\alpha \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,\alpha}.$$

Posons

$$e_n = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} (F_{n,\alpha} \cap \omega_\alpha).$$

On a encore

$$e \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{e_n}.$$

Or les $\overline{e_n}$ sont d'intérieur vide, puisque

$$\overline{e_n \cap \omega_\alpha} = \overline{F_{n,\alpha} \cap \omega_\alpha} \subset F_{n,\alpha}$$

est d'intérieur vide quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathscr{I}$. D'où la conclusion.

Cela étant, si E est quelconque, la proposition 10 se démontre comme suit.

Désignons par $\mathscr{O}$ les ensembles

$$\{\omega_\alpha : \alpha \in \mathscr{I}\}$$

d'ouverts deux à deux disjoints de E, tels que $\omega_\alpha \cap e$ soit maigre pour tout $\alpha \in \mathscr{I}$.

L'inclusion est un ordre partiel dans l'ensemble des $\mathscr{O}$.

Si Ω est un ensemble totalement ordonné d'ensembles $\mathscr{O}$, l'ensemble des ouverts qui appartiennent aux différents $\mathscr{O}$ est un ensemble de type $\mathscr{O}$, qui contient tous les $\mathscr{O} \in \Omega$, donc c'est une borne supérieure de Ω.

Dès lors, il découle de l'axiome de Zorn qu'il existe un $\mathscr{O}$ maximal, c'est-à-dire tel que tout $\mathscr{O}'$ qui contient $\mathscr{O}$ lui soit nécessairement égal.

Soit

$$\mathscr{O} = \{\omega_\alpha : \alpha \in \mathscr{I}\}$$

un tel ensemble maximal.

On a

$$\complement 0(e) \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha}. \quad (*)$$

De fait, si $f \notin 0(e)$, tout ouvert ω contenant f contient un ouvert ω' dont l'intersection avec e est maigre.

Si ω' ne rencontre pas les ω_α, en l'adjoignant à $\mathscr{O}$, on obtient un ensemble $\mathscr{O}'$ qui contient strictement $\mathscr{O}$, ce qui est impossible.

Donc ω' et a fortiori ω rencontrent

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha,$$

ce qui établit la relation (*).

De (*) découle alors que

$$e \setminus 0(e) \subset \dot{\overbrace{\left(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha\right)}} \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha \cap e\right).$$

L'ensemble

$$\overbrace{\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha}^{\bullet},$$

frontière d'un ouvert, est maigre. De même, comme $\omega_\alpha \cap e$ est maigre pour tout $\alpha \in \mathscr{I}$, en vertu du lemme ci-dessus,

$$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{I}} \omega_\alpha \cap e$$

est maigre, d'où $e \setminus 0(e)$ est maigre, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 11. — *Soient e_n, $n \in \mathbb{N}$, des ensembles contenus dans* E. [*Si* E *est à semi-normes dénombrables et séparable,*]

$$0\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n) \setminus [\bigcup_{n=1}^{\infty} 0(e_n)]$$

est maigre.

Il suffit d'établir que

$$0\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} 0(e_n)},$$

puisque le second membre diffère de

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} 0(e_n)$$

par la frontière d'un ouvert, qui est maigre.

Or, si

$$f \in 0\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n),$$

pour toute semi-boule b de centre 0,

$$(f + b) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} e_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f + b) \cap e_n$$

n'est pas maigre. Pour au moins un $n \in \mathbb{N}$,

$$(f + b) \cap e_n$$

n'est donc pas maigre.

Or, vu la proposition 10,

$$(f + b) \cap e_n \subset [(f + b) \cap 0(e_n)] \cup [e_n \setminus 0(e_n)],$$

où $e_n \setminus 0(e_n)$ est maigre. Donc

$$(f + b) \cap 0(e_n)$$

n'est pas vide et $f + b$ rencontre

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} 0(e_n)$$

quel que soit b, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 12. — *Soit* E *un espace de Baire.*

Si $0(e)$ *n'est pas vide et si* $0(e) \setminus e$ *est maigre, on a*

$$0(e) - 0(e) \subset e - e.$$

Soit $f \in 0(e) - 0(e)$. L'ensemble

$$0(e) \cap [0(e) - f] \quad (*)$$

est un ouvert non vide de E. Il n'est donc pas maigre.

Par hypothèse,

$$0(e) \subset e \cup \mathscr{E},$$

où $\mathscr{E}$ est maigre. De là,

$$\begin{aligned} 0(e) \cap [0(e) - f] &\subset (e \cup \mathscr{E}) \cap [(e \cup \mathscr{E}) - f] \\ &\subset [e \cap (e - f)] \cup \mathscr{E}', \end{aligned}$$

où

$$\mathscr{E}' \subset \mathscr{E} \cup (\mathscr{E} - f)$$

est maigre, ce qui exige que

$$e \cap (e - f) \neq \varnothing.$$

Il en résulte que f appartient à $e - e$, d'où la thèse.

Proposotion 13. — [*Soit* E *à semi-normes dénombrables et séparable.*]

Si $e \subset$ E *est absolument convexe, non maigre et tel que* $0(e) \setminus e$ *soit maigre, e est d'intérieur non vide.*

Comme e n'est pas maigre, vu la proposition 10, p. 111, $0(e)$ n'est pas vide. En outre, comme $e \setminus 0(e)$ est maigre, $0(e)$ n'est pas maigre.

Pour démontrer le théorème, il suffit d'établir que

$$0(e) \subset e - e.$$

En effet, $e - e$ est contenu dans $2e$, donc on aura ainsi que $2\mathring{e}$ n'est pas vide, de même que $\mathring{e}$.

Si $f \in 0(e)$, l'ensemble

$$0(e) \cap [0(e) - f]$$

n'est pas maigre. En effet, si $f \in 0(e)$, comme $0(e)$ est ouvert et absolument convexe, (cf. proposition 9, d), p. 110), il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que

$$f \in \lambda 0(e).$$

De là,

$$(1 - \lambda)0(e) - f \subset 0(e) \cap [0(e) - f]$$

et, par conséquent, le second membre n'est pas maigre.

Or, comme $0(e) \setminus e$ est maigre, en procédant comme dans la démonstration précédente, on voit que

$$0(e) \cap [0(e) - f] \subset [e \cap (e - f)] \cup \mathscr{E}',$$

où $\mathscr{E}'$ est maigre, ce qui exige que $e \cap (e - f)$ soit non maigre, donc non vide, et que f appartienne à $e - e$.

Les propositions 12 et 13 ci-dessus sont inspirées du théorème 3 de Martineau [31].

Voici enfin un théorème dû à O. Nikodym (cf. [35]).

PROPOSITION 14. — [*Soit* E *à semi-normes dénombrables et séparable.*]

Si e *est souslinien,* $0(e) \setminus e$ *est maigre.*

Si, en outre, e *est absolument convexe et non maigre, il est d'intérieur non vide.*

Soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de e.

Comme

$$e = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e_{n_1},$$

en vertu de la proposition 11, p. 114, on a

$$0(e) \subset \bigcup_{n_1=1}^{\infty} 0(e_{n_1}) \cup \mathscr{E}_0,$$

où $\mathscr{E}_0$ est maigre.

De même, quels que soient $k > 1$ et $n_1, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$,

$$e_{n_1,\ldots,n_{k-1}} = \bigcup_{n_k=1}^{\infty} e_{n_1,\ldots,n_k},$$

d'où

$$0(e_{n_1,\ldots,n_{k-1}}) \subset \bigcup_{n_k=1}^{\infty} 0(e_{n_1,\ldots,n_k}) \cup \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k-1}},$$

où $\mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ est maigre.

Posons

$$\mathscr{E} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_k=1}^{\infty} \mathscr{E}_{n_1,\ldots,n_k} \cup \mathscr{E}_0.$$

C'est un ensemble maigre. De plus, on a

$$0(e) \subset e \cup \mathscr{E}.$$

En effet, si $f \in 0(e) \setminus \mathscr{E}$,

$$f \in \bigcup_{n_1=1}^{\infty} 0(e_{n_1}),$$

d'où $f \in 0(e_{n_1})$ pour au moins un $n_1 \in \mathbb{N}$. Pour cet n_1 fixé, on a aussi

$$f \in \bigcup_{n_2=1}^{\infty} 0(e_{n_1,n_1}),$$

d'où $f \in 0(e_{n_1,n_2})$ pour au moins un $n_2 \in \mathbb{N}$. De proche en proche, on détermine ainsi une suite n_k telle que

$$f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} 0(e_{n_1,\ldots,n_k}).$$

Or

$$0(e_{n_1,\ldots,n_k}) \subset \overline{e_{n_1,\ldots,n_k}}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où

$$f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{e_{n_1,\ldots,n_k}},$$

où le second membre se réduit à un élément de e, ce qui entraîne que f appartient à e.

Si en outre e est absolument convexe et non maigre, les hypothèses de la proposition 13 sont satisfaites, donc l'intérieur de e n'est pas vide.

5. Théorème du graphe borélien

Le théorème du graphe borélien de L. Schwartz ([45]) s'énonce comme suit.

Théorème 1. — *Soient* E *ultrabornologique et* F *souslinien.*

Si T *est un opérateur linéaire de* E *dans* F, *à graphe sq-borélien dans* E $\times$ F, T *est continu de* E *dans* F.

Même énoncé si, au lieu d'être ultrabornologique, E *est limite inductive* (quelconque) *d'espaces de Baire sousliniens* [*à semi-normes dénombrables*].

En fait, Schwartz suppose T à graphe borélien. Il paraissait surprenant que, dans les cas usuels où son théorème s'applique, on puisse aussi supposer le graphe de T *sq*-fermé, en appliquant le théorème 1, chap. II, p. 28. L'hypothèse que le graphe de T soit *sq*-borélien contient à la fois le cas où il est borélien et celui où il est *sq*-fermé, ce qui règle la question. La possibilité d'améliorer l'hypothèse tient au fait que toute partie *sq*-borélienne d'un souslinien est souslinienne (cf. proposition 4, p. 105). C'est la propriété formulée dans Bourbaki ([8]) pour les ensembles boréliens et qu'il y a intérêt à formuler pour les *sq*-boréliens quand on lève l'hypothèse de métrisabilité qu'il impose aux ensembles sousliniens.

Pour démontrer le théorème, procédons d'abord à deux réductions de l'énoncé.

a) *On peut supposer* E *de Banach.*

Si E est ultrabornologique, il est limite inductive d'espaces de Banach E_α. Pour que T soit continu de E dans F, il suffit que sa restriction T_α à E_α soit continue de E_α dans F quel que soit α.

Or le graphe de T_α est encore *sq*-borélien dans $E_\alpha \times$ F.

De fait, si $\mathscr{E}$ est l'ensemble des ensembles de E $\times$ F dont la restriction à $E_\alpha \times$ F est *sq*-borélienne dans $E_\alpha \times$ F, il est trivial que $\mathscr{E}$ contient les ensembles *sq*-fermés dans E $\times$ F, les complémentaires et les unions et intersections dénombrables de ses éléments. Dès lors, $\mathscr{E}$ contient les *sq*-boréliens de E $\times$ F, ce qui entraîne que tout *sq*-borélien dans E $\times$ F est tel que sa restriction à $E_\alpha \times$ F soit *sq*-borélienne dans $E_\alpha \times$ F.

Donc, si le théorème est vrai pour E de Banach, il est vrai pour E ultrabornologique.

b) *On peut en outre supposer* E *séparable.*

Pour que T soit continu de l'espace de Banach E dans F, il suffit que l'image par T de toute suite convergente dans E soit convergente dans F. Il suffit donc que T soit continu dans l'enveloppe linéaire fermée de la suite, qui est un espace de Banach séparable.

Or, si L est un sous-espace de E et si $\mathscr{G}(T)$ est sq-borélien dans $E \times F$, le graphe de la restriction de T à L est sq-borélien dans $L \times F$. La démonstration est analogue à celle de la réduction précédente.

c) Supposons donc que E soit un espace de Banach séparable.

L'espace $E \times F$ est souslinien puisque E et F le sont. De même, $\mathscr{G}(T)$, partie sq-borélienne de $E \times F$, est souslinien.

Soit β une semi-boule fermée de centre 0 dans F. En notant pr_E la projection de $E \times F$ sur E, il vient

$$T_{-1}\beta = pr_E\,(\{(f, Tf) : Tf \in \beta\}).$$

L'ensemble

$$\{(f, Tf) : Tf \in \beta\}$$

est fermé dans $\mathscr{G}(T)$, donc il est souslinien. Dès lors, sa projection sur E, $T_{-1}\beta$, est aussi souslinienne.

L'ensemble $T_{-1}\beta$ est en outre absolument convexe et absorbant. Il en résulte qu'il n'est pas maigre, car

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} mT_{-1}\beta,$$

où E n'est pas maigre.

Dès lors, vu la proposition 14, p. 116, $T_{-1}\beta$ est d'intérieur non vide et contient une semi-boule de centre 0, ce qui prouve que T est continu.

Si E est limite inductive d'espaces de Baire sousliniens, on procède de façon analogue.

On se ramène d'abord à supposer E de Baire et souslinien.

On poursuit alors la démonstration comme ci-dessus.

Comme E est souslinien, il est séparable : on obtient un ensemble dénombrable dense dans E en fixant un élément dans chaque $e_{n_1,\ldots,n_k}$. S'il est en outre à semi-normes dénombrables, la proposition 14, p. 116, s'y applique sans recours à l'axiome de Zorn.

Théorème 2. — *Soient* E *ultrabornologique et* F *souslinien. Si* T *est un opérateur linéaire défini d'une partie de* F *sur* E *à graphe sq-borélien dans* $E \times F$, T *est ouvert.*

Même énoncé si, au lieu d'être ultrabornologique, E *est limite inductive* (quelconque) *d'espaces de Baire sousliniens* [*à semi-normes dénombrables*].

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

Soit β une semi-boule de F. On doit démontrer qu'il existe une semi-boule b de E contenue dans $T\beta$.

Si E est limite inductive des E_α, il suffit qu'il existe une semi-boule b_α de chaque E_α contenue dans $T\beta$.

On peut donc se borner à démontrer que T est ouvert de F dans chaque E_α. Pour cela, il suffit encore que, pour toute semi-boule β de F et toute suite f_m tendant vers 0 dans E_α, f_m appartienne à $T\beta$ pour m assez grand.

En effet, si B est la boule unité de E_α et si, pour aucun $\varepsilon > 0$, on n'a $\varepsilon B \subset T\beta$, il existe f_m appartenant à $\frac{1}{m}B$ et n'appartenant pas à $T\beta$, quel que soit $m \in \mathbb{N}$.

On se ramène au cas où E est un espace de Banach séparable en substituant à E_α l'enveloppe linéaire fermée de la suite f_m.

En procédant comme dans la démonstration précédente, on voit que T est encore à graphe *sq*-borélien dans F × E′, où E′ désigne l'espace de Banach séparable auquel on s'est ramené. Comme F × E′ est souslinien, $\mathscr{G}(T)$ est donc aussi souslinien.

Si β est fermé, de

$$T\beta = pr_E\,[\mathscr{G}(T) \cap pr_{F,-1}\beta],$$

on déduit alors que Tβ est également souslinien.

Il est aussi absolument convexe et absorbant dans E′, de Banach, donc il n'est pas maigre. De là, vu la proposition 14, p. 116, Tβ contient une boule de E′, d'où la conclusion.

Raisonnement analogue si E est limite inductive d'espaces de Baire sousliniens. S'ils ne sont pas à semi-normes dénombrables, il faut recourir à l'axiome de Zorn pour pouvoir appliquer la proposition 14.

Remarques. — a) Dans les énoncés précédents, on peut encore supposer que E est limite inductive d'espaces E_α sousliniens et que $\mathscr{D}(T)$ (resp. TF) rencontre chaque E_α suivant une partie non maigre de E_α. Cela implique que chaque E_α soit de Baire, donc l'amélioration ne porte que sur T. On trouve alors que $\mathscr{D}(T)$ (resp. TF) est égal à E.

b) La considération de relations linéaires permet, comme au chapitre II, de formuler quelques variantes des théorèmes 1 et 2. Leur formulation ne présente aucune difficulté ; nous ne les développerons pas ici.

c) Dans le théorème 2, si T est continu, on revient au théorème 1 en considérant $\widetilde{T}^{-1}$ défini de E dans F/N(T), le quotient étant séparé car N(T) est fermé.

6. Théorèmes de localisation et de relèvement

On peut préciser le théorème du graphe borélien en faisant jouer au crible de l'espace souslinien qui y intervient un rôle explicite.

Au théorème 1, p. 117, correspond le théorème suivant.

Théorème de localisation. — *Soient* E *un espace de Fréchet,* F *un espace souslinien,* T *un opérateur linéaire de* E *dans* F, *à graphe sq-borélien.*

Si

$$\{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

est un crible de F,

— *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que* $T_{-1}e_{n_1}$ *ne soit pas maigre dans* E. *Pour cet* n_1, *il existe une semi-boule* b_1 *de* E *telle que*

$$Tb_1 \subset e_{n_1} - e_{n_1}.$$

— *si* $T_{-1}e_{n_1,\dots,n_k}$ *n'est pas maigre dans* E, *il existe* $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ *tel que* $T_{-1}e_{n_1,\dots,n_{k+1}}$ *ne soit pas maigre dans* E. *Pour cet* n_{k+1}, *il existe une semi-boule* b_{k+1} *de* E *telle que*

$$Tb_{k+1} \subset e_{n_1,\dots,n_{k+1}} - e_{n_1,\dots,n_{k+1}}.$$

En particulier, il existe une suite $n_k \in \mathbb{N}$ *telle que* $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ *ne soit maigre pour aucun* $k \in \mathbb{N}$ *et une suite de semi-boules* b_k *de* E *telles que*

$$Tb_k \subset e_{n_1,\ldots,n_k} - e_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Même énoncé si E *est de Baire, souslinien [et à semi-normes dénombrables].*

On a

$$E = T_{-1}F = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} T_{-1}e_{n_1}.$$

Comme E est de Baire, un des $T_{-1}e_{n_1}$ n'est donc pas maigre.

De même, quels que soient $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, on a

$$T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k} = \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k+1}},$$

d'où, si $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ n'est pas maigre, un des $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ n'est pas maigre.

Supposons $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ non maigre.

Vu la proposition 8, p. 107, $e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ est souslinien. Donc $E \times e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ est souslinien, son intersection avec $\mathcal{G}(T)$ aussi et enfin

$$T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} = pr_E\, [(E \times e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) \cap \mathcal{G}(T)]$$

est souslinien.

Vu la proposition 14, p. 116, l'ensemble

$$0(T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) \setminus T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$$

est donc maigre dans E. En outre, comme $T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}$ n'est pas maigre, $0(T_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k_0}})$ n'est pas vide (cf. proposition 10, p. 110). Donc en appliquant la proposition 12, p. 115, on obtient

$$0(e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) - 0(e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}) \subset e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} - e_{n_1,\ldots,n_{k_0}}.$$

Le premier membre est un ouvert contenant 0, donc il contient une semi-boule b_{k_0} de centre 0 et il vient

$$b_{k_0} \subset e_{n_1,\ldots,n_{k_0}} - e_{n_1,\ldots,n_{k_0}},$$

d'où la thèse.

Voici un corollaire curieux du théorème de localisation.

(Z) Corollaire. — *Tout espace de Baire souslinien est un espace à semi-normes dénombrables.*

En effet, soit E l'espace et soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de E.

Prenons pour T l'opérateur identité de E dans lui-même.

Les conditions du théorème de localisation sont satisfaites et, dès lors, il existe une suite d'indices n_k et une suite de semi-boules b_k tels que

$$b_k \subset e_{n_1,\ldots,n_k} - e_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Or, pour toute semi-boule b de centre 0 dans E, on a

$$e_{n_1,\dots,n_k} - e_{n_1,\dots,n_k} \subset b$$

dès que k est assez grand, car il existe f tel que

$$e_{n_1,\dots,n_k} \subset f + \frac{1}{2}\, b$$

dès que k est assez grand.

Donc les semi-normes de E sont équivalentes aux semi-normes associées aux b_k.

On ne voit pas, comme c'était le cas pour les espaces à réseau strict (cf. corollaire 3, chap. III, p. 54) la possibilité d'établir que E est sq-complet.

Remarque. — Ce corollaire prouve que le gain de généralité qu'on obtient en utilisant l'axiome de Zorn dans le théorème du graphe borélien est illusoire.

En effet, tout espace de Baire souslinien étant à semi-normes dénombrables, il fait partie des espaces qu'on atteint sans recourir à l'axiome de Zorn.

Théorème de relèvement. — *Soit* E *souslinien et soit* T *un opérateur linéaire défini d'une partie de* E *sur* F, *à graphe sq-borélien.*

Pour toute suite $g_n \in \mathrm{F}$, *très convergente vers* 0, *il existe une suite* $f_n \in \mathrm{E}$, *convergente vers* 0, *telle que*

$$\mathrm{T}f_n = g_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si, en outre, E *est sq-complet et si* T *est à graphe sq-fermé, pour tout ensemble très compact* K *de* F, *il existe un compact* K′ *de* E, *tel que*

$$\mathrm{TK}' = \mathrm{K}.$$

Si la suite g_n est très convergente vers 0 dans F, il existe un espace de Fréchet F_0, un opérateur linéaire continu T′ de F_0 dans F et une suite h_n tendant vers 0 dans F_0, tels que

$$g_n = \mathrm{T}'h_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On peut même supposer F_0 séparable, quitte à lui substituer l'enveloppe linéaire fermée de la suite h_n.

Soit

$$\{e_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de E.

Considérons les ensembles

$$e'_{n_1,\dots,n_k} = \mathrm{T}'_{-1}\,(\mathrm{T}e_{n_1,\dots,n_k}).$$

On a

$$\mathrm{F}_0 = \mathrm{T}'_{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{T}'_{-1}(\mathrm{TE}) = \bigcup_{n_1=1}^{\infty} e'_{n_1}$$

et

$$e'_{n_1,\dots,n_k} = \bigcup_{n_{k+1}=1}^{\infty} e'_{n_1,\dots,n_{k+1}}, \ \forall k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Vu la proposition 8, p. 107, les $e_{n_1,\ldots,n_k}$ sont sousliniens.

Les $e'_{n_1,\ldots,n_k}$ le sont aussi. En effet, on note d'abord que

$$\{(f, g) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}_0 : \mathrm{T}f = \mathrm{T}'g\}$$

est sq-borélien dans $\mathrm{E} \times \mathrm{F}_0$, comme image inverse par l'opérateur continu $(1, \mathrm{T}')$ de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}_0$ dans $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ du graphe de T. De là,

$$\{(f, g) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}_0 : \mathrm{T}'g \in \mathrm{T}e_{n_1,\ldots,n_k}\} = \{(f, g) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}_0 : \mathrm{T}f = \mathrm{T}'g\} \cap (e_{n_1,\ldots,n_k} \times \mathrm{F}_0)$$

est souslinien, puisque $e_{n_1,\ldots,n_k} \times \mathrm{F}_0$ est souslinien. Sa projection sur F_0 est aussi souslinienne et c'est l'ensemble $\mathrm{T}'_{-1}(\mathrm{T}e_{n_1,\ldots,n_k})$.

De plus, comme F_0 est de Baire, on voit qu'il existe une suite d'indices n_k tels que les $e'_{n_1,\ldots,n_k}$ ne soient pas maigres. Pour ces n_k, par les propositions 10, 12 et 14, les ensembles $0(e'_{n_1,\ldots,n_k})$ ne sont pas vides et on a

$$0(e'_{n_1,\ldots,n_k}) - 0(e'_{n_1,\ldots,n_k}) \subset e'_{n_1,\ldots,n_k} - e'_{n_1,\ldots,n_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \ (*)$$

Dans (*), les premiers membres sont des ouverts non vides contenant 0. Donc ils contiennent h_n dès que n est assez grand.

Il existe alors une suite d'indices ν_k, croissants avec k, tels que

$$h_n \in 0(e'_{n_1,\ldots,n_k}) - 0(e'_{n_1,\ldots,n_k}) \subset e'_{n_1,\ldots,n_k} - e'_{n_1,\ldots,n_k}$$

pour tout n compris entre ν_k et ν_{k+1} et tout $k \in \mathbb{N}$.

A chaque h_n tel que $\nu_k \leqslant n < \nu_{k+1}$, on peut donc associer f_n, $f'_n \in e_{n_1,\ldots,n_k}$ tels que

$$\mathrm{T}f_n - \mathrm{T}f'_n = \mathrm{T}'h_n = g_n.$$

La suite $f_n - f'_n$ tend vers 0 dans E, par définition du crible de E, puisque f_n et f'_n tendent vers l'élément

$$f_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} e_{n_1,\ldots,n_k}.$$

Donc elle satisfait aux conditions de l'énoncé. Il reste à relever les éléments $g_1, \ldots, g_{\nu_1 - 1}$, qu'on relève par n'importe quoi vu qu'ils sont en nombre fini.

Supposons à présent E sq-complet et soit K un ensemble très compact dans F.

Il existe une suite g_n, très convergente vers 0 dans F, telle que

$$\mathrm{K} \subset \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle} = \{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1\}.$$

Si la suite g_n est relevée par la suite f_n tendant vers 0 dans E, comme E est sq-complet, l'ensemble

$$\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1\}$$

est compact dans E.

Démontrons que

$$\mathrm{T}(\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1\}) = \overline{\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n \rangle}.$$

De fait, comme $\mathscr{G}(\mathrm{T})$ est *sq*-fermé, si g appartient au second membre, pour un choix convenable de la suite c_n, il vient

$$\left.\begin{array}{l} g = \lim \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n g_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n = \lim \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n f_n \end{array}\right\} \Rightarrow g = \mathrm{T}\,(\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n).$$

Enfin, K est relevé par

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n : \sum_{n=1}^{\infty} | c_n | \leqslant 1\} \cap \mathrm{T}_{-1}\mathrm{K},$$

où le premier membre est *sq*-fermé, donc compact, vu le lemme du chap. III, p. 60.

Remarque. — Ce théorème et le théorème de relèvement du chap. III, p. 61, sont assez voisins mais ne se recouvrent pas. Ainsi, si E admet un réseau strict, il n'est pas nécessairement souslinien : il suffit pour cela qu'il ne soit pas séparable. Inversement, soit E souslinien. S'il est *sq*-complet, on sait qu'il admet un réseau de type $\mathscr{C}$, mais on ignore si ce réseau est strict. Ainsi la seule considération des réseaux ne permet pas d'atteindre le théorème de relèvement établi ici.

7. Nouvelles propriétés de permanence

Comme c'était le cas pour les espaces à réseau strict ou de type $\mathscr{C}$, le théorème de localisation permet d'enrichir les propriétés de permanence des espaces sousliniens et conduit aux résultats suivants.

Théorème 3. — *Soit* E *un espace de Fréchet séparable ou la limite inductive d'une suite de tels espaces et soit* F *un espace souslinien sq-complet ou la limite inductive d'une suite de tels espaces.*

L'espace $\mathscr{L}_{pc}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est souslinien.*

a) Supposons d'abord E de Fréchet et séparable et F souslinien et *sq*-complet. Soit

$$\{e_{n_1,\ldots,n_k} : k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de F.

Pour tout opérateur T linéaire et continu de E dans F, en vertu du théorème de localisation p. 119,

— il existe un indice $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre dans E et une semi-boule b_1 de E telle que

$$\mathrm{T}b_1 \subset e_{n_1} - e_{n_1},$$

— si $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_k}$ n'est pas maigre dans E, il existe un indice $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{T}_{-1}e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}$ ne soit pas maigre dans E et une semi-boule b_{k+1} de E telle que

$$\mathrm{T}b_{k+1} \subset e_{n_1,\ldots,n_{k+1}} - e_{n_1,\ldots,n_{k+1}}.$$

Soient $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ le système de semi-normes de E et b_i les semi-boules $b_{p_i}(1/i)$. Soit en outre

$$\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$$

un ensemble dénombrable dense dans E.

Considérons les ensembles $\mathscr{E}_{(n_1, i_1, \nu_1)}$, $n_1, i_1, \nu_1 \in \mathbb{N}$, formés des $T \in \mathscr{L}(E, F)$ tels que

— $T_{-1}e_{n_1}$ ne soit pas maigre,

— $Tb_{i_1} \subset e_{n_1} - e_{n_1}$,

— $Tf_1 \in e_{\nu_1}$.

Leur union est visiblement $\mathscr{L}(E, F)$. Renumérotons-les par un seul indice $m_1 \in \mathbb{N}$.

Formons ensuite les ensembles $\mathscr{E}_{(n_1, i_1, \nu_1), (n_2, i_2, \nu_2, \nu'_1)}$, $n_2, i_2, \nu_2, \nu'_1 \in \mathbb{N}$, formés des $T \in \mathscr{L}(E, F)$ tels que

— $T \in \mathscr{E}_{(n_1, i_1, \nu_1)}$,

— $T_{-1}e_{n_1, n_2}$ ne soit pas maigre,

— $Tb_{i_2} \subset e_{n_1, n_2} - e_{n_1, n_2}$,

— $Tf_1 \in e_{\nu_1, \nu_2}$; $Tf_2 \in e_{\nu'_1}$.

On renumérote encore $(n_2, i_2, \nu_2, \nu'_1)$ avec un seul indice parcourant $\mathbb{N}$ et on poursuit la construction, de proche en proche.

Les ensembles ainsi formés constituent un crible de $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

Ils vérifient visiblement la condition (a) de la définition du crible (p. 100).

De plus, soit m_k, $k \in \mathbb{N}$, une suite fixée et soient $n_k, i_k, \nu_k, \nu'_k, \ldots$ les suites correspondantes.

Si la suite T_m est telle que

$$T_1 \in \mathscr{E}_{m_1} = \mathscr{E}_{(n_1, i_1, \nu_1)}, \; T_2 \in \mathscr{E}_{m_1, m_2} = \mathscr{E}_{(n_1, i_1, \nu_1), (n_2, i_2, \nu_2, \nu'_1)}, \; \ldots,$$

elle est équicontinue.

En effet, soit q une semi-norme de F. On a

$$e_{n_1, \ldots, n_k} - e_{n_1, \ldots, n_k} \subset b_q(1) \quad (*)$$

dès que k est assez grand, puisque, si g est l'intersection des $e_{n_1, \ldots, n_k}$,

$$e_{n_1, \ldots, n_k} \subset g + b_q(1/2)$$

pour k assez grand (cf. (b'), p. 101). Supposons que (*) est vérifié pour $k = k_0$. Il vient, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$T_k b_{i_{k_0}} \subset e_{n_1, \ldots, n_{k_0}} - e_{n_1, \ldots, n_{k_0}} \subset b_q(1),$$

d'où

$$q(T_k f) \leqslant \frac{1}{i_{k_0}} p_{i_{k_0}}(f), \; \forall k \geqslant k_0, \; \forall f \in E.$$

Comme $T_1, \ldots, T_{k_0 - 1}$ sont en nombre fini, ils sont équicontinus, donc il existe $i \geqslant i_{k_0}$ tel que

$$q(T_k f) \leqslant \frac{1}{i} p_i(f), \; \forall f \in E,$$

pour tout $k < k_0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, et la suite T_m est bien équicontinue.

La suite $T_m f_j$ converge dans F pour tout j fixé.

Cela résulte de la définition du crible de F, puisque les $T_m f_j$ se répartissent dans une suite $e_{n_1,\dots,n_k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Si F est sq-complet, il résulte alors du théorème de Banach-Steinhaus que la suite T_m converge dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

La limite T des T_m ne dépend que de la suite des m_k fixée. De fait, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$Tf_j = \lim_m T_m f_j = \bigcap_{m=1}^{\infty} e_{\mu_1,\dots,\mu_m}$$

ne dépend que des m_k. Or, comme les f_j sont denses dans E, T est complètement déterminé par les valeurs qu'il leur associe.

Enfin, T est visiblement l'intersection de la suite d'ensembles du crible qui lui correspond, d'où la conclusion.

b) Supposons à présent que E soit un espace de Fréchet séparable et que F soit limite inductive d'une suite d'espaces sousliniens sq-complets F_j.

On ne sait pas si F est sq-complet, donc on ne peut pas appliquer a).

Soit

$$\{e^{(j)}_{n_1,\dots,n_k} : k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

un crible de chaque F_j. Les ensembles

$$e_{n_1} = F_{n_1},\ n_1 \in \mathbb{N},$$
$$e_{n_1,\dots,n_k} = e^{(n_1)}_{n_2,\dots,n_k},\ k > 1,\ n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N},$$

constituent alors visiblement un crible de F.

Construisons encore les ensembles

$$\mathscr{E}_{m_1,\dots,m_k},\ k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N},$$

déterminés en a) relatifs à ce crible.

On obtient un crible de $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

Il vérifie, pour les mêmes raisons qu'en a), la condition (a) de la définition des cribles.

De plus, pour toute suite m_k fixée, si

$$T_k \in \mathscr{E}_{m_1,\dots,m_k},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

la suite T_k appartient à $\mathscr{L}(E, F_{m_1})$, par définition de $\mathscr{E}_{m_1}$. De plus, en procédant comme en a), on voit qu'elle converge dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F_{m_1})$. Or les semi-normes de F_{m_1} sont plus fortes que celles induites par F dans F_{m_1}, donc la suite T_m converge alors dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$, ce qui permet de conclure comme en a).

c) Soit enfin E limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet séparables E_i, F satisfaisant à l'une ou l'autre des conditions de l'énoncé.

La démonstration comporte deux étapes.

Désignons par $\mathscr{L}_{\chi}(E, F)$ l'espace $\mathscr{L}(E, F)$ muni des semi-normes

$$\sup_{f \in K} q(Tf),$$

où q parcourt l'ensemble des semi-normes de F et K l'ensemble des précompacts des différents E_i.

L'espace $\mathscr{L}_\chi(E, F)$ est souslinien.

En effet, il s'identifie au sous-espace $\mathscr{L}$ de

$$\prod_{i=1}^{\infty} \mathscr{L}_{pc}(E_i, F), \quad (*)$$

formé des

$$(T_1, T_2, \ldots)$$

tels que

$$T_i f = T_{i+1} f, \ \forall f \in E_i, \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Or (*) est souslinien comme produit dénombrable d'espaces sousliniens et $\mathscr{L}$ est visiblement un sous-espace fermé de (*), donc il est aussi souslinien.

Si la limite inductive E est stricte, tout précompact de E est précompact dans un des E_i, donc $\mathscr{L}_\chi(E, F)$ est en fait $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

Ce n'est pas le cas en général, mais on va démontrer que l'opérateur identité de $\mathscr{L}(E, F)$ dans lui-même est *sq*-continu de $\mathscr{L}_\chi(E, F)$ dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$. On en déduit alors immédiatement que $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$ est souslinien.

Soit T_m une suite convergeant vers 0 dans $\mathscr{L}_\chi(E, F)$. Les restrictions des T_m à E_i forment une suite bornée dans $\mathscr{L}_{pc}(E_i, F)$, donc équicontinue puisque les E_i sont de Fréchet. Dès lors les T_m sont équicontinus et, en vertu du théorème de Banach-Steinhaus, ils convergent dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

Remarque. — Ce théorème est énoncé par Schwartz dans [45], dans le cas particulier où E est limite inductive stricte des E_i et où les F_j sont des espaces de Fréchet séparables.

Théorème 4. — *Si* E *est un espace de Schwartz à semi-normes dénombrables et* F *un espace souslinien sq-complet ou la limite inductive d'une suite de tels espaces,* $\mathscr{L}_b(E_b^*, F)$ *est souslinien.*

Comme E est de Schwartz et à semi-normes dénombrables,

$$\mathscr{L}_b(E_b^*, F) \equiv \mathscr{L}_{pc}(E_b^*, F).$$

Il suffit donc de démontrer que E_b^* est limite inductive d'une suite d'espaces de Banach séparables.

Soient p_i les semi-normes de E, b_i les semi-boules $b_{p_i}(1/i)$, b_i^Δ leur polaire. Appelons E_i^* l'enveloppe linéaire de b_i^Δ munie de la norme associée à b_i^Δ. C'est un espace de Banach.

Dans le choix des semi-normes de E, on peut supposer que, pour tout i, b_{i+1} est précompact pour p_i. Alors b_i^Δ est précompact dans E_{i+1}^*. Notons E_i' l'enveloppe linéaire fermée de b_i^Δ dans $E_{p_{i+1}}^*$, munie de la norme de E_{i+1}^*. C'est un espace de Banach, séparable puisque b_i^Δ est séparable dans E_{i+1}^*.

Comme E est de Schwartz, E_b^* est bornologique et, dès lors, c'est la limite inductive des E_i^* (cf. [17], p. 257 et p. 262). C'est aussi la limite inductive des E_i', puisque

$$E_i^* \subset E_i' \subset E_{i+1}^*, \ \forall i,$$

l'opérateur identité de chaque espace dans le suivant étant continu. D'où la conclusion.

THÉORÈME 5. — *Soit* E *limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Schwartz à semi-normes dénombrables.*

Soit F *un espace souslinien sq-complet, muni d'un système de semi-normes* $\{q\}$ *tel qu'à toute suite* $q_n \in \{q\}$, *il corresponde* $q \in \{q\}$ *et* $C_n > 0$ *tels que*

$$q_n(g) \leqslant C_n\, q(g),\ \forall g \in F,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

ou la limite inductive d'une suite de tels espaces.

L'espace $\mathscr{L}_b(E_b^*, F)$ *est souslinien.*

REMARQUE. — On se référera à la proposition 1, chap. IV, p. 74, pour des exemples de tels espaces F.

Soit E limite inductive stricte des E_i.

Comme les E_i sont de Schwartz,

$$E_b^* \equiv E_{pc}^* \text{ et } (E_i)_b^* \equiv (E_i)_{pc}^*,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Or, on a démontré en b), chap. IV, p. 72, que

$$\mathscr{L}(E_{pc}^*, F) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_i\, \mathscr{L}\,[(E_i)_{pc}^*, F],$$

où τ_i est un opérateur linéaire continu de $\mathscr{L}_b\,[(E_i)_{pc}^*, F]$ dans $\mathscr{L}_b(E_{pc}^*, F)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

De plus, vu le théorème 4, chaque $\mathscr{L}_b\,[(E_i)_{pc}^*, F]$ est souslinien, d'où la conclusion, par les propriétés de permanence des ensembles sousliniens.

Passons à présent au cas des produits tensoriels. Leur interprétation comme espaces d'opérateurs, pour laquelle nous renvoyons au paragraphe 2, chap. IV, p. 77, fournit quelques exemples de produits tensoriels sousliniens.

THÉORÈME 6. — *Si* E *est un espace de Fréchet et de Schwartz et* F *un espace complet et souslinien, le produit tensoriel* $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *est souslinien.*

De fait, le produit tensoriel $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ s'assimile à un sous-espace fermé de $\mathscr{L}_\Gamma(E_{ca}^*, F)$.

Or, comme E est de Fréchet et de Schwartz, $E_{ca}^* \equiv E_b^*$ et, comme tout ensemble équicontinu dans E^* est précompact dans E_b^* et inversement,

$$\mathscr{L}_\Gamma(E_{ca}^*, F) \equiv \mathscr{L}_b(E_b^*, F).$$

Vu le théorème 4, p. 126, $\mathscr{L}_b(E_b^*, F)$ est souslinien, d'où la conclusion.

THÉORÈME 7. — *Soit* E *limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet et de Schwartz. Soit* F *un espace souslinien, complet et tel qu'à toute suite de semi-normes* $q_n \in \{q\}$, *il corresponde* $q \in \{q\}$ *et* $C_n > 0$ *tels que*

$$q_n(g) \leqslant C_n\, q(g),\ \forall g \in F,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'espace $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *est souslinien.*

Ici encore, $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}_\Gamma(E^*_{ca}, F)$ et on a

$$\mathscr{L}_\Gamma(E^*_{ca}, F) \equiv \mathscr{L}_b(E^*_b, F),$$

où le second membre est souslinien, vu le théorème 5, p. 127.

Théorème 8. — *Si* E *est un espace de Fréchet séparable ou la limite inductive d'une suite de tels espaces et si* F *est souslinien et complet, le produit tensoriel* $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$ *est souslinien.*

Comme E est bornologique, E^*_{ca} est complet. De plus, $(E^*_{ca})^*_{ca}$ s'assimile à E muni de ses semi-normes naturelles.

Enfin, comme F est complet, c'est aussi le cas pour $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$ et $E^*_{ca}\hat{\otimes}_\varepsilon F$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}_{ca}(E, F)$. Or ce dernier espace est souslinien, vu le théorème 3, p. 123. D'où la conclusion.

Remarque. — Comme au paragraphe 2, chap. IV, p. 79, on peut se débarrasser de l'hypothèse de complétion pour les filtres au profit de la complétion pour les suites dans la plupart des cas usuels.

Le plus simple est de traiter directement les cas particuliers qu'on rencontre. En voici un exemple typique.

Si E *est sq-complet et souslinien, l'espace* $C_\infty(\Omega\,; E)$ *est souslinien.*

Soit $f(x) \in C_\infty(\Omega\,; E)$. Associons-lui l'opérateur T_f défini de $[C_\infty(\Omega)]^*$ dans E de la manière suivante.

A tout $\mathcal{T} \in [C_\infty(\Omega)]^*$, de la forme

$$\mathcal{T}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \int D^\alpha \varphi \, d\mu_\alpha, \ \forall \varphi \in C_\infty(\Omega),$$

où $[\mu_\alpha] \subset K_n$ pour tout α, on fait correspondre

$$T_f\mathcal{T} = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \int D^\alpha f(x) d\mu_\alpha.$$

Les intégrales (à valeurs dans E) ont un sens, puisque E est *sq*-complet et $D^\alpha f(x)$ continu dans Ω pour tout α.

L'opérateur T_f est visiblement linéaire.

Il est continu de $[C_\infty(\Omega)]^*_b$ dans E. De fait,

$$\begin{aligned} p(T_f\mathcal{T}) &= \sup_{\mathscr{Q}\in b_p^\Delta} \Big| \sum_{|\alpha| \leqslant n} \int D^\alpha \mathscr{Q}\,[f(x)] d\mu_\alpha \Big| \\ &= \sup_{\mathscr{Q}\in b_p^\Delta} | \mathcal{T}\{\mathscr{Q}\,[f(x)]\} |, \end{aligned}$$

où l'ensemble

$$\{\mathscr{Q}\,[f(x)] : \mathscr{Q} \in b_p^\Delta\}$$

est visiblement borné dans $C_\infty(\Omega)$.

On peut donc assimiler $C_\infty(\Omega\,;\,E)$ à un sous-espace linéaire de $\mathscr{L}_b([C_\infty(\Omega)]^*_b, E)$, muni des semi-normes induites par cet espace, puisque

$$\sup_{x\in K_n} \sup_{|\alpha|\leqslant n} p\,[D^\alpha_x f(x)] = \sup_{\mathscr{Q}\in b^\Delta_p} \sup_{x\in K_n} \sup_{|\alpha|\leqslant n} |\,D^\alpha\,\mathscr{Q}\,[f(x)]\,|$$

$$= \sup_{\mathscr{Q}\in b^\Delta_p} \sup_{\mathcal{C}\in\mathscr{B}} |\,\mathcal{C}\{\mathscr{Q}\,[f(x)]\}\,| = \sup_{\mathcal{C}\in\mathscr{B}} p(T_f\mathcal{C}),$$

où $\mathscr{B}$ est un borné de $[C_\infty(\Omega)]^*_b$.

Comme $C_\infty(\Omega\,;\,E)$ est *sq*-complet, il est fermé pour les suites dans $\mathscr{L}_b([C_\infty(\Omega)]^*_b, E)$. Or, vu le théorème 4, p. 126, ce dernier espace est souslinien, d'où la conclusion.

APPENDICE

LIMITES INDUCTIVES D'ESPACES LINÉAIRES A SEMI-NORMES

On développe ici une théorie des limites inductives dénombrables assez générale pour unifier les limites inductives strictes de J. Dieudonné et L. Schwartz ([15]), les limites inductives de J. S. E. Silva ([48]) et les généralisations de celles-ci ([4], [22], [30], [40]). On démontre quelques propriétés des bornés qui échappent à ces différents cas et qui unifient et précisent certains résultats obtenus dans les chapitres précédents.

1. — Soient E_n une suite d'espaces linéaires à semi-normes [séparables par semi-norme] et tels que, pour tout n,

— E_n soit un sous-espace linéaire de E_{n+1},

— l'opérateur identité de E_n dans E_{n+1} soit continu.

Appelons E l'union des E_n. C'est visiblement un espace linéaire.

Soit π une suite formée en choisissant une semi-norme dans chaque E_n,

$$\pi = (p_1, p_2, \ldots),$$

et γ une suite de constantes positices c_n.

Proposition 1. — a) *L'expression*

$$p_{\pi,\gamma}(f) = \inf_{\substack{f=\sum\limits_{(n)} f_n \\ f_n \in E_n}} \sum_{(n)} c_n p_n(f_n)$$

est une semi-norme de E, *si la borne inférieure porte sur toutes les décompositions finies de* f *en éléments appartenant aux différents* E_n. (*)

b) *Les semi-normes $p_{\pi,\gamma}$ associées à toutes les suites π et γ forment un ensemble filtrant de semi-normes.*

c) *La semi-boule ouverte de centre* 0, *de semi-norme $p_{\pi,\gamma}$ et de rayon* 1 *est l'ensemble*

$$\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_{p_n}(1/c_n) \rangle,$$

où les semi-boules $b_{p_n}(1/c_n)$ sont prises ouvertes.

d) *Soient $\mathcal{T}$ une fonctionnelle linéaire dans* E, *$\mathcal{T}^{(n)}$ sa restriction à chaque* E_n.

(*) Nous indiquons que les sommes considérées sont finies en plaçant l'indice sous Σ entre parenthèses.

On a

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant p_{\pi,\gamma}(f), \ \forall f \in \mathrm{E},$$

si et seulement si

$$| \mathcal{T}^{(n)}(f) | \leqslant c_n p_n(f), \ \forall f \in \mathrm{E}_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus,

$$|| \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}} = \sup_n \frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n}.$$

La démonstration des points a), b) et c) est facile et ne sera pas reprise ici (cf. par exemple [17], chap. VIII).

Démontrons d). La condition est évidemment nécessaire :

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant p_{\pi,\gamma}(f) \leqslant c_n p_n(f), \ \forall f \in \mathrm{E}_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Elle est suffisante. De fait, quelle que soit la décomposition $f = \sum_{(n)} f_n$, de

$$| \mathcal{T}^{(n)}(f_n) | \leqslant c_n p_n(f_n), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

on déduit

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant \sum_{(n)} c_n p_n(f_n)$$

et, comme la décomposition choisie de f est arbitraire,

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant p_{\pi,\gamma}(f).$$

Enfin, pour établir l'égalité proposée, on note que

$$\begin{aligned} | \mathcal{T}(f) | &\leqslant \sum_{(n)} | \mathcal{T}^{(n)}(f_n) | \leqslant \sum_{(n)} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n} p_n(f_n) \\ &\leqslant (\sup_n \frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n}) \sum_{(n)} c_n p_n(f_n) \end{aligned}$$

quel que soit $f = \sum_{(n)} f_n$, d'où

$$| \mathcal{T}(f) | \leqslant (\sup_n \frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n}) \, p_{\pi,\gamma}(f), \ \forall f \in \mathrm{E},$$

et

$$|| \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}} \leqslant \sup_n \frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n}.$$

Inversement,

$$| \mathcal{T}^{(n)}(f) | \leqslant || \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}} p_{\pi,\gamma}(f) \leqslant || \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}} c_n p_n(f), \ \forall f \in \mathrm{E}_n.$$

d'où

$$\frac{1}{c_n} || \mathcal{T}^{(n)} ||_{p_n} \leqslant || \mathcal{T} ||_{p_{\pi,\gamma}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. — Définition. On appelle *limite inductive des* E_n, l'espace E muni des semi-normes $p_{\pi,\gamma}$, pour autant que celles-ci constituent un système de semi-normes de E.

Pour cela, il faut que ces semi-normes séparent E.

Voici une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi.

C'est une amélioration des lemmes 3, p. 450 et 4, p. 453 de [1].

Proposition 2. — *S'il existe une suite d'ensembles absolument convexes* $\beta_n \subset E_{n+1}$, *croissants avec* n, *tels que*

— β_n *contienne une semi-boule de* E_n,

— β_n *soit fermé dans* E_{n+2},

— *dans* β_n, *l'opérateur identité de* E_{n+2} *dans* $(E_{n+1})_a$ *soit continu*,

alors la limite inductive des E_n *est séparée.*

Établissons d'abord un

Lemme. — *L'intersection avec* β_n *d'un fermé absolument convexe de* E_{n+1} *est fermée dans* E_i *quel que soit* $i > n + 1$.

Soit $F = F' \cap \beta_n$, où F' est fermé dans E_{n+1}.

Comme F' est absolument convexe, il est faiblement fermé dans E_{n+1}.

Vu l'hypothèse, F est alors fermé dans β_n pour les semi-normes induites par E_{n+2}.

Comme β_n est fermé dans E_{n+2}, F est fermé dans E_{n+2}.

On passe de proche en proche au cas général : F est maintenant fermé dans E_{n+2} et contenu dans β_{n+1}, car $\beta_n \subset \beta_{n+1}$. Il est donc fermé dans E_{n+3}, et ainsi de suite.

Passons à la démonstration de la proposition 2.

Soit $g \neq 0$ dans E. Il existe une suite d'ensembles F_n, $n > 1$, absolument convexes et fermés dans E_{n+1}, emboîtés en croissant et tels que

— $g \notin F_n$,

— $F_n \subset \beta_n$,

— $F_n \supset b_{n-1}$, semi-boule de E_{n-1}.

On les construit de proche en proche.

Déterminons F_2. Il existe une semi-boule b_2 de E_2 telle que $g \notin b_2$. On peut la supposer fermée dans E_2. Alors

$$F_2 = b_2 \cap \beta_1$$

est fermé dans E_3, vu le lemme. Il contient une semi-boule de E_1. De fait, la restriction de b_2 à E_1 contient une semi-boule β_1' de E_1. Il existe alors b_1 contenu dans $\beta_1 \cap \beta_1'$ donc tel que $b_1 \subset F_2$.

Supposons F_n déterminé. Comme il est fermé dans E_{n+1} et ne contient pas g, il existe une semi-boule b_{n+1} de E_{n+1} telle que

$$g \notin F_n + 2b_{n+1}$$

d'où

$$g \notin \overline{F_n + b_{n+1}}^{E_{n+1}}.$$

A fortiori

$$g \notin \overline{(\mathrm{F}_n + b_{n+1})}^{\mathrm{E}_{n+1}} \cap \beta_n.$$

Appelons F_{n+1} l'ensemble du second membre. Il est fermé dans E_{n+2}, vu le lemme. Il est absolument convexe et contient F_n, car $\mathrm{F}_n \subset \beta_n$. Il contient une semi-boule b_n de E_n : il suffit de choisir $b_n \subset b_{n+1} \cap \beta_n$.

Comme les F_n sont emboîtés, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}_n$ est absolument convexe. Or il contient b_n pour tout n, donc il contient

$$\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_n \rangle,$$

semi-boule de E si on prend les semi-boules b_n ouvertes (cf. c), p. 130).

Cette semi-boule ne contient pas g, donc il existe une semi-norme $p_{\pi,\gamma}$ telle que $p_{\pi,\gamma}(g) \neq 0$ et les $p_{\pi,\gamma}$ séparent E.

Proposition 3. — *Sous les hypothèses de la proposition* 2, *pour tout borné* B *de* E, *il existe* $\lambda > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $\mathrm{B} \subset \lambda\beta_n$.

Si ce n'est pas le cas, quel que soit n, il existe $g_n \in \mathrm{B}$ tel que $g_n \notin n\beta_n$. Comme B est borné, la suite g_n/n tend vers 0 dans E.

On va montrer qu'il existe une semi-boule β de E, de centre 0 et ne contenant aucun g_n/n. C'est absurde, donc il faudra que $\mathrm{B} \subset n\beta_n$ pour au moins un n.

Posons $f_n = g_n/n$.

On détermine de proche en proche une suite d'ensembles F_n, $n > 1$, absolument convexes et fermés dans E_{n+1}, emboîtés en croissant et tels que

— $f_i \notin \mathrm{F}_n$, $\forall i < n$,

— $\mathrm{F}_n \subset \beta_n$,

— $\mathrm{F}_n \supset b_{n-1}$, semi-boule de E_{n-1}.

On pose $\mathrm{F}_2 = \beta_1$.

Soit F_n déterminé. Il est fermé dans E_{n+1} et ne contient pas $f_1, \ldots, f_{n-1}$. Comme il est contenu dans β_n, il ne contient pas f_n. Il existe donc une semi-boule b_{n+1} de E_{n+1} telle que

$$f_1, \ldots, f_n \notin \mathrm{F}_n + 2b_{n+1}$$

et

$$f_1, \ldots, f_n \notin \overline{\mathrm{F}_n + b_{n+1}}^{\mathrm{E}_{n+1}}.$$

Pour les $f_i \in \mathrm{E}_{n+1}$, cela résulte de la fermeture de F_n, pour les autres, du fait que

$$\overline{\mathrm{F}_n + b_{n+1}}^{\mathrm{E}_{n+1}} \subset \mathrm{E}_{n+1}.$$

On a encore

$$f_1, \ldots, f_n \notin \overline{(\mathrm{F}_n + b_{n+1})}^{\mathrm{E}_{n+1}} \cap \beta_n.$$

Appelons F_{n+1} l'ensemble du second membre.

Il contient F_n puisque $F_n \subset \beta_n$.

Il est fermé dans E_{n+2} vu le lemme.

Il est absolument convexe ; il est contenu dans β_{n+1} et enfin, il contient une semi-boule b_n de E_n. Il suffit de prendre $b'_n \subset b_{n+1} \cap \beta_n$.

Les F_n étant déterminés, posons

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

L'ensemble F ne contient aucun f_n. Or il contient une semi-boule b_n de chaque E_n et, comme il est absolument convexe, il contient

$$\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} b_n \rangle,$$

semi-boule de E si on prend les b_n ouverts.

Remarque. — *Les hypothèses de la proposition 2 sont satisfaites s'il existe une suite d'ensembles absolument convexes $\beta_n \subset E_{n+1}$, croissants avec n, tels que*

— *β_n contienne une semi-boule de E_n,*

— *β_n soit fermé dans E_{n+1},*

— *dans β_n, l'opérateur identité est continu de E_{n+1} dans $(E_n)_a$.*

D'une part, comme $\beta_n \subset \beta_{n+1}$, l'opérateur identité y est continu de E_{n+2} dans $(E_{n+1})_a$.

D'autre part, β_n est fermé donc faiblement fermé dans E_{n+1}. Or il est contenu dans β_{n+1}, où l'identité est continue de E_{n+2} dans $(E_{n+1})_a$, donc il est fermé dans E_{n+2}.

3. — La proposition 3 précédente n'apporte que peu de renseignements sur les bornés de E. Pour obtenir une caractérisation plus précise, il faut introduire une hypothèse supplémentaire.

Proposition 4. — *S'il existe une suite d'ensembles absolument convexes $\beta_n \subset E_{n+1}$, croissants avec n, tels que, pour tout n,*

— *β_n contienne une semi-boule de E_n,*

— *β_n soit fermé dans E_{n+2},*

— *dans β_n, l'opérateur identité soit continu de E dans $(E_{n+1})_a$,*

alors E possède les propriétés suivantes :

a) *un ensemble $B \subset E$ est borné dans E si et seulement si il est contenu dans un E_n et y est borné.*

b) *toute suite convergente dans E est contenue dans un E_n et y converge faiblement.*

c) *toute suite de Cauchy dans E est contenue dans un E_n et y est faiblement de Cauchy.*

d) *tout ensemble compact, précompact ou extractable dans E est contenu dans un E_n et y est faiblement compact, précompact ou extractable.*

e) *toute suite très convergente dans* E *est contenu dans un* E_n *et y est très convergente.*

f) *tout ensemble très compact dans* E *est contenu dans un* E_n *et y est très compact.*

Démontrons a).

Comme l'opérateur identité de E_n dans E est visiblement continu quel que soit n, les hypothèses de la proposition 3 sont vérifiées, donc B est contenu dans un $n\beta_n$.

Dans $n\beta_n$, l'opérateur identité est continu de E dans $(E_{n+1})_a$. Alors B est borné dans $(E_{n+1})_a$.

De fait, pour toute semi-norme p de $(E_{n+1})_a$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une semi-norme π de E et $\eta > 0$ tels que

$$\pi(f) \leqslant \eta, f \in n\beta_n \Rightarrow p(f) \leqslant \varepsilon.$$

Soit

$$\sup_{f \in B} \pi(f) \leqslant C.$$

Si $C \leqslant \eta$,

$$\sup_{f \in B} p(f) \leqslant \varepsilon.$$

Si $C > \eta$,

$$f \in \frac{\eta}{C} B \Rightarrow \pi(f) \leqslant \eta, f \in n\beta_n \Rightarrow p(f) \leqslant \varepsilon,$$

d'où

$$\sup_{f \in B} p(f) \leqslant \frac{C}{\eta} \varepsilon.$$

Par le théorème de Mackey, B est alors borné dans E_{n+1}, d'où la conclusion.

Démontrons à présent b), c) et d).

Toute suite convergente et sa limite, toute suite de Cauchy, tout compact, extractable ou précompact de E sont bornés dans E.

Dès lors, ils sont contenus dans un E_n et y sont bornés. Ils sont donc contenus dans un $n\beta_n$. Dans celui-ci, l'identité de E dans $(E_{n+1})_a$ est continue et même uniformément continue.

De là, la propriété de la suite et de l'ensemble vis-à-vis des semi-normes de E est encore vraie vis-à-vis des semi-normes de $(E_{n+1})_a$.

Démontrons enfin e) et f).

Si la suite f_m est très convergente ou si K est très compact dans E, il existe un compact absolument convexe K_0 de E tel que f_m (resp. K) converge (resp. soit compact) dans E_{K_0}.

Or K_0, compact de E, est contenu dans un E_n et y est faiblement compact, donc borné. Dès lors, l'opérateur identité de E_{K_0} dans E_n est continu et, comme E_{K_0} est de Banach, la suite f_m (resp. l'ensemble K) est très convergente (resp. très compact) dans cet E_n.

4. — On peut encore renforcer l'hypothèse sur les E_n.

Voici d'abord une remarque utile.

LEMME. — *L'opérateur identité de* $(E_n)_a$ *dans* E_a *est continu quel que soit* n.

En effet, il résulte de la proposition 1, d), p. 130, que la restriction à E_n d'une fonctionnelle linéaire continue dans E est une fonctionnelle linéaire continue dans cet E_n.

PROPOSITION 5. — *S'il existe une suite d'ensembles absolument convexes* $\beta_n \subset E_{n+1}$, *croissants avec* n, *tels que, pour tout* n,

— β_n *contienne une semi-boule de* E_n,

— β_n *soit fermé dans* E_{n+2},

— *dans chaque* β_n, *l'opérateur identité de* E *dans* E_{n+1} (resp. *de* E_a *dans* $(E_{n+1})_a$) *soit continu*,

l'espace E *possède les propriétés suivantes :*

a) *une suite converge dans* E (resp. *dans* E_a) *si et seulement si elle est contenue dans un* E_n *et y converge* (resp. *y converge faiblement*).

b) *une suite est de Cauchy dans* E (resp. *dans* E_a) *si et seulement si elle est contenue dans un* E_n *et y est de Cauchy* (resp. *faiblement de Cauchy*).

c) *un ensemble est compact, extractable ou précompact dans* E (resp. *dans* E_a) *si et seulement si il est contenu dans un* E_n *et est compact, extractable ou précompact dans* E_n (resp. *dans* $(E_n)_a$).

Les conditions nécessaires se démontrent comme dans la proposition 4.

Pour les conditions suffisantes, il suffit d'appliquer le lemme ci-dessus.

5. — Examinons quelques exemples de limites inductives et d'abord, traitons le cas des limites inductives hyperstrictes.

DÉFINITION. — On dit qu'une limite inductive est *stricte* si, pour tout n, le système de semi-normes induit par E_{n+1} dans E_n est équivalent à celui de E_n.

Elle est *hyperstricte* si elle est stricte et si chaque E_n est fermé dans E_{n+1}.

PROPOSITION 6. — *Si la limite inductive est stricte, quel que soit* n, *le système de semi-normes induit par* E *dans* E_n *est équivalent à celui de* E_n.

Soit b_n une semi-boule arbitraire de E_n.

On détermine de proche en proche une suite de semi-boules b_i de E_i, $i > n$, telles que $b_n \supset b_{n+1} \cap E_n$ et $b_i \supset b_{i+1} \cap E_i$, pour tout $i > n$.

D'autre part, pour tout $i < n$, il existe une semi-boule b_i de E_i telle que $b_i \subset b_n$.

On a alors

$$\langle \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i \rangle \cap E_n = b_n.$$

De fait,

$$\langle \bigcup_{i=1}^{\infty} b_i \rangle = \langle \bigcup_{i=n}^{\infty} b_i \rangle$$

$$= \{ \sum_{i=n}^{p} \theta_i f_i : f_i \in b_i, \theta_i \geqslant 0, \sum_{i=n}^{p} \theta_i = 1, p \geqslant n \}.$$

Soit $\sum_{i=n}^{p} \theta_i f_i$ un élément de cet ensemble et supposons qu'il appartienne à E_n. Alors

$$\theta_p f_p = \sum_{i=n}^{p} \theta_i f_i - \sum_{i=n}^{p-1} \theta_i f_i \in E_{p-1}$$

et

$$f_p \in b_p \cap E_{p-1} \subset b_{p-1}.$$

De même,

$$\theta_p f_p + \theta_{p-1} f_{p-1} \subset (\theta_{p-1} + \theta_p) b_{p-1} \cap E_{p-2} \subset (\theta_{p-1} + \theta_p) b_{p-2}.$$

En poursuivant le même raisonnement, de proche en proche, on arrive à

$$\sum_{i=n}^{p} \theta_i f_i \in (\sum_{i=n}^{p} \theta_i) b_n = b_n.$$

COROLLAIRE. — *Les limites inductives hyperstrictes satisfont aux hypothèses de la proposition* 5. *D'où leurs propriétés.*

6. — Soit E la limite inductive d'une suite d'espaces de Banach E_n tels que, pour tout n, la boule unité b_n de E_n soit contenue dans un compact de E_{n+1}.

DÉFINITION. — Une telle limite inductive est appelée *limite inductive de Silva.*

PROPOSITION 7. — *Une limite inductive de Silva vérifie les hypothèses de la proposition* 5. *D'où ses propriétés.*

De fait, soit β_n l'adhérence de b_n dans E_{n+1}.

C'est un compact absolument convexe de E_{n+1}. Il est encore compact dans E_{n+2}, donc il y est fermé. Comme il est compact dans E_{n+1}, l'identité de E_{n+2} dans E_{n+1} y est continue. De là, vu la proposition 2, p. 132, E est séparé et les $p_{\pi,\gamma}$ y forment un système de semi-normes. Dès lors, dans β_n, l'identité est aussi continue de E dans E_{n+1}.

Les β_n répondent donc aux conditions de la proposition 5.

La limite inductive de Silva possède des propriétés supplémentaires, liées à sa nature très spéciale. Pour celles-ci, nous renvoyons à [48], [34] ou [17].

PROPOSITION 8. — *Soit* E *la limite inductive d'une suite d'espaces* E_n, *tels que, pour tout* n, *l'opérateur identité de* E_n *dans* E_{n+1} *soit faiblement compact.*

Cette limite inductive vérifie les hypothèses de la proposition 5. *D'où ses propriétés.*

Pour tout n, il existe une semi-boule b_n de E_n et un compact faible absolument convexe K_n de E_{n+1} tels que $b_n \subset K_n$.

Les ensembles $\beta_n = K_n$ vérifient les conditions de la proposition 2, p. 132, si on les emboîte en croissant.

De fait, β_n est faiblement compact donc fermé dans E_{n+2}.

L'identité est continue de $(E_{n+1})_a$ dans $(E_{n+2})_a$ puisqu'elle est continue de E_{n+1}

dans E_{n+2}. De là, comme K_n est compact dans $(E_{n+1})_a$, dans K_n, elle est aussi continue de $(E_{n+2})_a$ dans $(E_{n+1})_a$ et a fortiori de E_{n+2} dans $(E_{n+1})_a$.

Donc la limite inductive de E est séparée.

On note alors que, dans K, l'identité est continue de E_a dans $(E_{n+1})_a$, d'où la conclusion.

7. — Si on suppose a priori que la limite inductive des E_n est séparée, voici une autre voie d'approche de l'étude de ses bornés, qui fournit des résultats plus généraux.

Proposition 9. — *Soit* E *la limite inductive des* E_n *et supposons-la séparée.*

Soit β_n *une suite croissante de semi-boules des* E_n *successifs. Quel que soit le borné* B *de* E, *il existe* $C > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$B \subset C\, \overline{\beta_n}^{E}.$$

Si ce n'est pas le cas, il existe, pour tout n, f_n appartenant à B et n'appartenant pas à $\overline{n\beta_n}^{E}$. Posons $g_n = \frac{1}{n} f_n$. La suite g_n tend vers 0 dans E, puisque la suite f_n est bornée.

Pour tout n, il existe $\mathcal{T}_n \in E^*$, tel que

$$\mathcal{T}_n(g_n) > 1 \text{ et } \sup_{f \in \beta_n} |\, \mathcal{T}_n(f) \,| \leqslant 1.$$

La suite $\mathcal{T}_n$ est équicontinue dans E. Il suffit pour cela qu'elle le soit dans chaque E_i, vu la proposition 1, d), p. 130. Or

$$\sup_{n \geqslant i} \sup_{f \in \beta_i} |\, \mathcal{T}_n(f) \,| \leqslant \sup_{n \geqslant i} \sup_{f \in \beta_n} |\, \mathcal{T}_n(f) \,| \leqslant 1,$$

d'où, comme $\{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_{i1}\}$ est équicontinu, il existe $b_i \subset \beta_i$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in b_i} |\, \mathcal{T}_n(f) \,| \leqslant \sup_{n < i} \sup_{f \in b_i} |\, \mathcal{T}_n(f) \,| + 1 < \infty.$$

Il existe donc une semi-norme π de E telle que

$$|\, \mathcal{T}_n(f) \,| \leqslant \pi(f),\ \forall f \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$1 \leqslant |\, \mathcal{T}_n(g_n) \,| \leqslant \pi(g_n),$$

ce qui est absurde puisque $g_n \to 0$ dans E.

Signalons un corollaire utile. C'est un cas particulier d'un théorème de Köthe ([26], p. 405).

Corollaire. — *Si* E *est limite inductive d'une suite d'espaces normés* E_n *et est séparé, tout borné de* E *est dans l'adhérence dans* E *de la boule unité* B_n *d'un* E_n.

De là, le système de semi-normes de E_b^* *est équivalent au système de semi-normes dénombrables*

$$\sup_{f \in B_n} |\, \mathcal{T}(f) \,|,\ n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, E_b^* *est limite projective des* $(E_n)_b^*$ *et il est de Fréchet.*

Si, dans la proposition 9, on prend pour β_n les B_n, qu'on peut évidemment supposer emboîtés en croissant, il vient, pour tout borné B de E,

$$B \subset C \overline{B_n}^E$$

pour au moins un $C > 0$ et un $n \in \mathbb{N}$. De là,

$$\sup_{f \in B} | \mathcal{C}(f) | \leqslant C \sup_{f \in B_n} | \mathcal{C}(f) |.$$

Comme les B_n sont eux-mêmes bornés dans E, l'équivalence annoncée est démontrée.

Ainsi, E_b^* est à semi-normes dénombrables et, comme E est bornologique, il est complet, donc il est de Fréchet.

On peut étendre le corollaire à des espaces à semi-normes dénombrables mais sous des conditions assez restrictives.

Démontrons d'abord une version un peu généralisée d'un théorème de Grothendieck ([11], théorème 10, p. 85).

Proposition 10. — *Soit* E *la limite inductive stricte d'une suite d'espaces évaluables* E_n.

Si $(E_n)_b^*$ *est bornologique pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il en est de même pour* E^*, *muni du système de semi-normes*

$$\sup_{f \in B} | \mathcal{C}(f) |,$$

où B *parcourt l'ensemble des bornés des différents* E_n.

Soit E_β^* l'espace E^* muni de ce système de semi-normes et soit Θ un ensemble absolument convexe qui absorbe les bornés de E_β^*.

Il existe n_0 tel que $E_{n_0}^\Delta \subset \Theta$.

De fait, sinon, pour tout n, on peut trouver $\mathcal{C}_n \notin \Theta$ tel que $\mathcal{C}_n(E_n) = 0$. La suite $n\mathcal{C}_n$ tend vers 0 dans E_β^*. En effet, pour tout borné $B \subset E_i$, $n\mathcal{C}_n(B) = 0$ dès que $n > i$. C'est absurde, car Θ absorbe les bornés, donc notamment la suite $n\mathcal{C}_n$, et

$$\{n\mathcal{C}_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C\,\Theta \Rightarrow \mathcal{C}_n \in \frac{C}{n}\Theta \subset \Theta$$

dès que n dépasse C.

Soit alors Θ_{n_0} l'ensemble des $\mathcal{C}_{n_0} \in E_{n_0}^*$ qui ont un prolongement $\mathcal{C} \in \Theta$.

C'est évidemment un ensemble absolument convexe. Il absorbe les bornés B de $(E_{n_0})_b^*$. En effet, un tel borné est équicontinu puisque E_{n_0} est évaluable. Soit $B \subset C\, b_{p_{n_0}}^\Delta$. Comme la limite inductive est stricte, il existe une semi-norme π de E telle que

$$p_{n_0}(f) \leqslant \pi(f), \forall f \in E_{n_0}.$$

Alors, par le théorème de Hahn-Banach, tout $\mathcal{C}_{n_0} \in C\, b_{p_{n_0}}^\Delta$ se prolonge par $\mathcal{C} \in C\, b_\pi^\Delta$. Or, pour λ bien choisi, λb_π^Δ est contenu dans Θ, d'où

$$\frac{\lambda}{C} B \subset \lambda b_{p_{n_0}}^\Delta \subset \Theta_{n_0}.$$

Comme les $(E_n)_b^*$ sont bornologiques, Θ_{n_0} contient une semi-boule de $(E_{n_0})_b^*$: il existe un borné de E_{n_0} tel que

$$\{\mathcal{C}_{n_0} \in E_{n_0}^* : \sup_{f \in B} |\mathcal{C}_{n_0}(f)| \leqslant \varepsilon\} \subset \Theta_{n_0}. \quad (*)$$

On a alors

$$\{\mathcal{C} \in E^* : \sup_{f \in B} |\mathcal{C}(f)| \leqslant \varepsilon\} \subset 2\Theta,$$

ce qui établit la proposition. En effet, si $\mathcal{C}$ appartient au premier membre, sa restriction $\mathcal{C}_{n_0}$ à E_{n_0} appartient au premier membre de (*), donc à Θ_{n_0}.

Il existe alors $\mathcal{C}' \in \Theta$, tel que $\mathcal{C}'_{n_0} = \mathcal{C}_{n_0}$. Cela signifie que $\mathcal{C}' - \mathcal{C}$ est nul dans E_{n_0}, ce qui entraîne

$$\mathcal{C} - \mathcal{C}' \in \Theta \text{ et } \mathcal{C} = \mathcal{C}' + (\mathcal{C} - \mathcal{C}') \in 2\Theta.$$

Proposition 11. — *Soit* E *la limite inductive stricte d'espaces* E_n *évaluables et à dual* $(E_n)_b^*$ *bornologique. Tout borné* B *de* E *est dans l'adhérence dans* E *d'un borné d'un* E_n.

De là, E_b^* *est limite projective des* $(E_n)_b^*$ *et il est bornologique.*

Notons E_β^* l'espace E^* muni des semi-normes associées aux bornés des différents E_n.

Pour établir la proposition, il suffit de prouver que l'identité de E_β^* dans E_b^* est un opérateur continu. En effet, pour tout borné B de E, il existera alors B_0, borné dans un certain E_n, tel que

$$\sup_{f \in B} |\mathcal{C}(f)| \leqslant \sup_{f \in B_0} |\mathcal{C}(f)|, \forall \mathcal{C} \in E^*,$$

soit $B_0^\Delta \subset B^\Delta$, ce qui entraîne

$$B \subset B_0^{\Delta\nabla} = \overline{B_0}^E,$$

si on prend B_0 absolument convexe.

Or, par la proposition précédente, on sait que E_β^* est bornologique. Il suffit donc que tout borné de E_β^* soit borné dans E_b^*. Si $\mathscr{B}$ est borné dans E_β^*, l'ensemble des restrictions à E_n des fonctionnelles $\mathcal{C} \in \mathscr{B}$ est borné dans $(E_n)_b^*$, donc équicontinu dans E_n^*. Par conséquent, $\mathscr{B}$ est équicontinu dans E^* et a fortiori borné dans E_b^*.

8. — Signalons enfin que les théorèmes de localisation du chapitre III fournissent d'autres critères de bornation dans le cas où on sait que E est séparé :

— si E est *sq*-complet et si les E_n sont à réseau strict, tout borné de E est contenu dans un E_n et y est borné.

— si les E_n sont à réseau strict, tout borné absolument convexe et *sq*-complet de E est contenu dans un E_n et y est borné, tout ensemble très compact dans E est contenu dans un E_n et y est très compact, toute suite très convergente de E est contenue dans un E_n et y est très convergente.

BIBLIOGRAPHIE

G. P. Akilov, L. V. Kantorovitch

[1] Functional analysis in normed spaces. *International series of Monographs in Pure and Applied Math.*, **46**, Pergamon Press, Oxford, 1964.

M. G. Arsove

[2] Similar bases and isomorphisms in Fréchet spaces. *Math. Annalen*, **135**, 1958, pp. 365-379.

M. G. Arsove, R. E. Edwards

[3] Generalized bases in topological linear spaces. *Studia Math.*, **19**, 1960, pp. 95-113.

S. Banach

[4] Théorie des opérations linéaires. *Monografie Matematyczne*, **1**, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa, 1932.

[5] Théorème sur les ensembles de première catégorie. *Fund. Math.*, **16**, 1930, pp. 395-398.

[6] Œuvres, I : Travaux sur les fonctions réelles et les séries orthogonales. *Inst. Math. de l'Ac. Pol. des Sc.*, Ed. Scient. de Pologne, Warszawa, 1967.

C. Bessaga, A. Pelczynski

[7] Wlasnosci baz w przestrzeniach typu B_0. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria I, Prace matematyczne*, **3**, Warszawa, 1959, pp. 123-142.

N. Bourbaki

[8] Topologie générale. Chap. 9 : Utilisation des nombres réels en topologie générale. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, **1045**, Hermann, Paris, 1958.

M. De Wilde

[9] Sur le théorème du graphe fermé. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **265**, série A, 1967, pp. 376-379.

[10] Une propriété de relèvement des espaces à réseaux absorbants. *Ibid.*, **266**, série A, 1968, pp. 457-459.

[11] Théorème du graphe fermé et espaces à réseaux absorbants. *Bull. Math. de la Soc. des Sc. Math. de Roumanie*, **11** (59), 2, 1967, pp. 224-238.

[12] Espaces de fonctions à valeurs dans un espace linéaire à semi-normes. *Mémoires Soc. Royale des Sc. Liège*, 5e série, **13**, 2, 1966.

[13] Limites inductives d'espaces linéaires semi-normés. *Bull. Soc. Royale Sc. Liège*, 32e année, **7-8**, 1963, pp. 476-484.

[14] Sur un type particulier de limite inductive. *Ibid.*, 35e année, **9-10**, 1966, pp. 552-557.

Voir H. G. Garnir.

J. Dieudonné, L. Schwartz

[15] La dualité dans les espaces ($\mathscr{F}$) et ($\mathscr{L}\mathscr{F}$). *Annales Inst. Fourier*, **1**, Grenoble, 1949, pp. 61-101.

R. E. Edwards

[16] Functional analysis : theory and applications. *Holt, Rinehart and Winston*, New-York, 1965.

Voir Arsove.

H. G. Garnir, M. De Wilde, J. Schmets.

[17] Analyse fonctionnelle (Théorie constructive des espaces linéaires à semi-normes), I. *Mathematische Reihe*, **36**, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1968.

A. Grothendieck

[18] Sur les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{DF})$. *Summa Brasiliensis Mathematicae*, **3**, 6, Rio de Janeiro, 1954, pp. 57-122.

[19] Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Memoirs of the American Math. Soc.*, **16**, Providence, 1955.

[20] Espaces vectoriels topologiques. *Publ. de l'Inst. de Math. de l'Université de Sao Paulo*, 1954.

T. Husain

[21] The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces. *Oxford Mathematical Monographs*, Oxford, Clarendon Press, 1965.

L. V. Kantorovitch

Voir Akilov.

H. Komatsu

[22] Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces. *J. of the Math. Soc. of Japan*, Tokyo, **19**, 3, 1967, pp. 366-383.

G. Köthe

[23] Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer volkommener Räume. *Math. Zeitschrift*, **51**, 1947, pp. 317-345.

[24] Über zwei Sätze von Banach. *Math. Zeitschrift*, **53**, 1950, pp. 203-209.

[25] Abbildungen von $(\mathscr{F})$-Räume in $(\mathscr{LF})$-Räume. *Math. Annalen*, **178**, 1968, pp. 1-3.

[26] Topologische lineare Räume, I. 2e éd., *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **107**, Springer, Berlin, 1966.

C. Kuratowski

[27] Topologie, Vol. I. 3e éd., *Monografie Matematyczne*, **20**, Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa, 1932.

N. Lusin

[28] Leçons sur les ensembles analytiques. *Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.

A. Mac Intosh

[29] On the closed graph theorem. *Proc. of the Am. Math. Soc.*, **20**, 2, 1969, pp. 397-404.

B. M. Makarov

[30] On the inductive limit of a sequence of normed spaces. *Dokl. Akad. Nauk*, **119**, 6, 1958, pp. 1092-1094.

A. Martineau

[31] Sur le théorème du graphe fermé. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **263**, série A, 1966, pp. 870-871.

[32] Sur le théorème du graphe fermé. *Séminaire Lelong*, 7e année, no 6, Faculté des Sciences de Paris, 1966-1967.

[33] Sur des théorèmes de S. Banach et L. Schwartz concernant le graphe fermé. *Studia Mathematica*, **30**, 1, 1968, pp. 43-51.

R. Matagne

[34] Les espaces de Silva. *Bull. Soc. Royale Sc. Liège*, **12**, 1964, pp. 754-768.

O. Nikodym

[35] Sur une propriété de l'opération A. *Fund. Math.*, **7**, 1925, pp. 149-154.

A. Pelczynski

Voir C. Bessaga.

A. Persson

[36] A remark on the closed graph theorem in locally convex vector spaces. *Math. Scand.*, **19**, 1966, pp. 54-58.

V. Ptak

[37] On complete topological linear spaces. *Cehoslovach Mat. Ž.*, **78**, 3, 1953, pp. 301-364.

[38] Completeness and the open mapping theorem. *Bull. Soc. Math. de France*, **86**, 1958, pp. 41-74.

[39] Some open mapping theorems in $\mathcal{LF}$-spaces and their application to existence theorems for convolution equations. *Math. Scand.*, **16**, 1965, pp. 75-93.

D. A. Raikov

[40] Inductive and projective limits with completely continuous mappings. *Dokl. Akad. Nauk*, SSSR, **113**, 6, 1957, pp. 984-986.

[41] Double closed-graph theorem for topological linear spaces. *Siberian Math. Journal* (translated from Russian), **7**, 2, 1966, pp. 287-300.

A. P. Robertson, W. Robertson

[42] On the closed graph theorem. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **3**, 1956, pp. 9-12.

[43] Topological vector spaces. *Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics*, **53**, Cambridge Univ. Press, 1964.

W. Robertson

[44] Completions of topological vector spaces. *Proc. London Math. Soc.*, **30**, 8, 1958, pp. 242-257.

Voir A. P. Robertson.

J. Schmets

Voir H. G. Garnir.

L. Schwartz

[45] Sur le théorème du graphe fermé. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **263**, série A, 1966, pp. 602-605.

[46] Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications. *Séminaire Schwartz*, Faculté des Sciences de Paris, 1953-1954.

[47] Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles. *J. d'An. Math.*, **4**, 1955, pp. 88-148.

Voir J. Dieudonné.

J. S. E. Silva

[48] Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. *Rend. Mat. e Appl.*, **14**, 1955, pp. 388-410.

W. Slowikowski

[49] On continuity of inverse operators. *Bull. Am. Math. Soc.*, **67**, 5, 1961, pp. 467-470.

[50] Quotient spaces and the open map theorem. *Ibid.*, **67**, 5, 1961, pp. 498-500.

F. Treves

[51] Topological vector spaces, Distributions and Kernels. *Pure and Applied Mathematics*, **25**, Academic Press, New-York and London, 1967.

INDEX TERMINOLOGIQUE

Adhérent
élément — 42

Baire
espace de — 28
base 90
— faible 90
— de Schauder 90
borélien
sq- — 105
bornologique 28

Compact 41
relativement — 41
très — 55
complet
sq- — 14
continu 18, 19, 34
sq- — 18, 19, 34
convergente
suite très — 55
co-Schwartz 59
crible 100

Dual 18
E_s^*, E_c^*, E_{ca}^*, E_{pc}^*, E_τ^*, E_b^* . . 19

Equicontinu 18, 19
équivalent 13
espace
— linéaire à semi-normes . 13
— à semi-normes dénombrables 18
— de Fréchet 18
— E_a 22
— E_b^- 22
— E_β 75
— d'opérateurs : $\mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{L}_{\mathscr{F}}(E, F)$, ... 19
évaluable 22
extractable 40
relativement — 40

Faible 13
fermé
sq- — 14
Fréchet
voir espace
fort 13

Graphe 34

Homomorphisme 28

Maigre 28

Relation
— composée 34
— inverse 34
— linéaire 34
représentable
semi-norme — 22
réseau 14
— de type $\mathscr{C}$ 14
— de type $\mathscr{E}$ ou $\mathscr{K}$ . . 41
— de type $\mathscr{SE}$ ou $\mathscr{SK}$. 43
— réflexif 97
— strict 50

Schauder
voir base
Schwartz
espace de — 59
semi-boule 13
séparable
— par semi-norme . . . 22
souslinien 100
strict
voir réseau
système
— de semi-normes . . . 13
— de semi-normes affaiblies . 22

Ultrabornologique 28

D / 1969 / 0589 / 3.

IMPRIMERIE GEORGE MICHIELS, S. A., 6, RUE DE LA PAIX, LIÈGE

PRINTED IN BELGIUM