MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE

SEPTIÈME SÉRIE
TOME I
FASCICULE 1

LES NOMBRES

P. RENSON
Département d'Astrophysique, Géophysique et Océanographie,
Faculté des Sciences,
Université de Liège

2017

Préface

Ce livre est destiné à intéresser différentes catégories d'intellectuels. Beaucoup d'entre eux notamment ceux qui, à l'université, sont attachés à la faculté de philosophie et lettres s'attarderont volontiers à la première partie ; ils aimeront réfléchir à la manière dont l'humanité a pu, il y a de nombreux millénaires, imaginer ces êtres abstraits que sont les nombres, apprendre à les manier et à utiliser les opérations qui les concernent. D'autres, surtout ceux qui ont plus de connaissances scientifiques, iront plutôt voir plus loin des exemples de paires de nombres amiables, ils passeront sans doute en revue les propriétés des nombres de Fermat, entre autres, ils s'attarderont peut-être à la relation entre les coefficients binomiaux et les nombres de la suite de Fibonacci, ils se remémoreront, plus loin encore dans le livre, des séries ayant une somme liée à l'un ou l'autre des nombres transcendants π ou e. Les philosophes de l'antiquité consacraient bien plus de leur temps à admirer par exemple les propriétés du nombre d'or, que je rappelle à la fin du livre, que ne le font les savants de nos jours, qui ont tellement d'autres choses à faire.

Les nombres sont des êtres abstraits, qui sont remarquables par le caractère absolu et par conséquent universel de leurs propriétés. Par exemple, lorsque nous affirmons que sept est un nombre premier, tandis que six ou huit ne le sont pas, cela constitue une vérité non seulement pour nous, mais aussi pour tous les êtres pensants vivant sur d'autres planètes, voir dans d'éventuels autres univers. On peut établir leurs propriétés par raisonnement. C'est d'ailleurs plus d'une fois ce que j'ai fait pour des énoncés qui sont donnés dans ce livre ; cela me prenait souvent moins de temps que d'aller les chercher ailleurs, bien que je sois évidemment conscient que cela avait presque certainement déjà été fait avant moi dans chaque cas.

L'immense utilité pratique des nombres et de leurs propriétés est une évidence. C'est déjà le cas dans la vie courante ; ce l'est plus largement et de plus en plus dans la résolution des problèmes qui se présentent en sciences pures et en sciences appliquées. A cet intérêt pratique, s'ajoute celui que leur confère notre curiosité, remontant à l'antiquité comme je viens de le rappeler, d'investiguer leurs propriétés si remarquables et diverses. Je souhaite aux lecteurs d'éprouver beaucoup de satisfaction à découvrir ou revoir toutes celles que ma mentalité de collectionneur m'a conduit à répertorier pour finalement les rassembler dans cet ouvrage.

Pour rendre la lecture plus aisée pour tous, j'ai évité le formalisme et le langage de la théorie des ensembles. Je préfère ici utiliser le langage habituel, par exemple en parlant du nombre de choses dans un ensemble de ces choses plutôt que de dire que c'est le cardinal de cet ensemble.

Bonne lecture !

Pierre Renson

Chapitre 1

Les nombres naturels et les opérations fondamentales

1.1 Les nombres naturels

Les *nombres naturels*, c'est-à-dire les nombres entiers positifs, sont destinés à caractériser numériquement une collection de choses et plus exactement, ne pas se contenter de dire s'il y a peu de ces choses dans la collection ou s'il y en a beaucoup, mais être aussi précis que possible à ce point de vue : dire exactement combien il y en a.

Les premiers d'entre eux se sont certainement introduits dans le langage humain il y a très longtemps.

L'ensemble des nombres naturels est une suite ordonnée de noms, les noms de nombres à savoir un, deux, trois, quatre, cinq, etc., qu'on représente respectivement par 1, 2, 3, 4, 5, etc., grâce à laquelle nous pouvons compter les choses.

Si par exemple nous avons une corbeille de pommes et une corbeille de poires et que nous voulons savoir si nous avons plus des unes ou des autres et lesquelles, nous allons les compter les unes et les autres. Ceci consiste à associer à chaque pomme, durant ce comptage, un nom de la suite des nombres, jusqu'à ce que ce soit fait pour toutes les pommes de la corbeille. Nous ferons de même pour les poires. Etant donné que la suite des nombres naturels est ordonnée, nous constatons alors dans quel des deux cas nous avons été le plus loin dans cette suite, donc si nous avons plus de pommes ou plus de poires. Si par exemple en comptant les poires nous ne sommes arrivés qu'à un nombre qui précède celui auquel nous sommes arrivés en comptant les pommes, il y a moins de poires que de pommes. Nous pouvons même savoir combien il y a, dans ce cas, de pommes en plus : c'est la différence entre les deux nombres auxquels nous sommes arrivés ; il suffit de faire la soustraction entre les deux nombres. Nous pouvons aussi savoir combien nous avons de fruits en tout ; c'est la somme des deux nombres et il faut donc pour cela les additionner.

L'éventualité existe évidemment que le nombre auquel nous arrivons en comptant les pommes, appelons-le m, et que celui auquel nous arrivons en comptant les poires, appelons-le n, soient les mêmes, c'est-à-dire que nous ayons autant d'une sorte de fruits que de l'autre ; dans ce cas, on dit que ces deux nombres sont égaux ou qu'il y a *égalité* entre ces ceux nombres, ce qui s'écrit $m = n$ (ou $n = m$) et s'énonce m égale n (ou n égale m).

Si dans la suite des nombres naturels un certain nombre, que nous appellerons n, vient après un autre, que nous appellerons m, on dit que n est *plus grand* que m, ce qu'on écrit en signes mathématiques $n > m$. On peut aussi dire m est *plus petit* que n, ce qu'on écrit $m < n$. On dit alors que ces nombres sont différents ou inégaux ou encore qu'il y a *inégalité* entre ces nombres et on écrit $m \neq n$ (ou $n \neq m$). Cette dénomination de grandeur pour les nombres s'explique facilement par la comparaison de deux groupes de mêmes objets qui en contiendraient des nombres différents : le groupe qui en contient le plus est plus grand et celui qui en contient le moins est plus petit. Si un nombre n est plus grand ou égal à un nombre m, on écrit $n \geq m$; de même, si m est plus petit ou égal à n, on écrit $m \leq n$.

1.2 Les opérations fondamentales

1.2.1 L'addition

Nous avons évoqué ci-avant l'opération fondamentale sur les nombres que constitue l'*addition*, qu'on note par le signe + entre les deux nombres. Si à m objets, on en ajoute n, on obtient un ensemble dont le nombre d'objets est appelé la *somme* de m et n. Si nous désignons cette somme par s, on écrit $s = m + n$ (ou $m + n = s$, la relation d'égalité étant une relation symétrique : on peut toujours échanger ses deux membres). L'addition est une opération *commutative*, c'est-à-dire que $m + n = n + m$. Les nombres m et n sont appelés les *termes* de la somme.

Si à la corbeille de pommes et à celle de poires considérées plus haut, nous ajoutons une corbeille d'oranges, qui en contient ℓ, et que nous voulons savoir combien de fruits nous avons au total, nous ajouterons ℓ à $m + n$, ce qui donne $(m+n)+\ell$. L'addition est une opération *associative*, c'est-à-dire que $(m+n)+\ell = m+(n+\ell)$ (et aussi $= (m+\ell)+n = m+(\ell+n)$) : dans une somme de trois nombres, on peut commencer par additionner deux quelconques des trois et ensuite ajouter à la somme obtenue le nombre restant pour obtenir la somme totale. On écrit donc simplement $m+n+\ell$ sans parenthèses. Les mêmes considérations s'appliquent aux sommes de plus de trois termes, aux sommes d'un nombre quelconque de termes : on peut écrire une telle somme sous la forme $a + b + c + \cdots + k$ sans qu'il y ait lieu d'indiquer par des parenthèses dans quel ordre les opérations doivent être effectuées. Rappelons que si une ou des opération(s) doit(doivent) être faite(s) par rapport au reste, ce qui pourra arriver dans d'autres cas, cette partie est ou ces parties sont mise(s) entre parenthèses (); si une étape suivante doit encore être indiquée avant le reste, on utilise des crochets [], puis ensuite éventuellement des accolades {}.

D'autre part, si à une collection de m choses, nous ajoutons une collection vide, c'est-à-dire qui n'en contient aucune, nous ne changeons évidement pas le nombre de ces choses, qui reste donc m. Si en plus de l'ensemble des nombres naturels considérés plus haut, on introduit le nombre zéro, qu'on représente par 0, comme étant le nombre de choses dans une collection qui est vide, c'est-à-dire que n'en contient aucune, on peut écrire $m + 0 = m$ (et d'après la commutativité, $0+m = m$). On exprime ceci en disant que zéro est l'élément *neutre* pour l'addition.

1.2.2 La soustraction

L'opération inverse de l'addition est la *soustraction*, notée par le signe $-$. Si nous avons oublié combien il y a de pommes et combien de poires dans nos corbeilles, mais que nous savons encore combien de fruits cela faisait en tout quand nous avions fait la somme $m + n = s$, il suffit de recompter une sorte de fruits et faire la soustraction : son résultat, appelé la *différence* de ce nombre avec le total, nous rendra le nombre des autres fruits. On a en effet $(m + n) - n = m$ et $(m + n) - m = n$.

1.2.3 La multiplication

Dans un second stade, apparaît une autre opération : la *multiplication*. Celle-ci nous permet de dire que si nous avons n collections d'un même nombre m de choses, le nombre total de ces choses est le produit de m par n, qu'on note $m \times n$, c'est-à-dire m multiplié par n. Parfois, on appelle m le *multiplicande* et n le *multiplicateur*, mais la multiplication étant, comme l'addition, une opération *commutative*, c'est-à-dire que $m \times n = n \times m$, cette distinction importe peu. Les deux nombres sont appelés les *facteurs* du produit. La multiplication est notée par le signe $\times$ ou $\cdot$ entre les deux nombres ; le plus souvent même, on juxtapose les deux nombres sans aucun signe entre eux lorsqu'il s'agit de lettres représentant les nombres ou lorsque le multiplicateur est un petit nombre naturel et dans ce cas, on le place de préférence devant le multiplicande plutôt qu'après, par exemple $m + m = 2m$ et $m + m + m = 3m$.

Le produit $m \times n$ peut être multiplié par un troisième facteur ℓ et au-delà éventuellement : on peut considérer le produit d'un nombre quelconque (≥ 2) de facteurs. Comme l'addition, la multiplication est aussi une opération *associative* : on a $(\ell \times m) \times n = \ell \times (m \times n)$, ce qui permet d'écrire simplement $\ell \times m \times n$ ou $\ell \cdot m \cdot n$ ou ℓmn pour le produit de ces trois facteurs, sans parenthèses, et de faire de même pour un produit de plus de trois facteurs.

L'élément *neutre* pour la multiplication est évidemment le nombre 1 : $n \times 1 = 1 \times n = n$.

On sait que pour indiquer le produit d'un nombre quelconque par certains nombres particuliers, il existe des mots appropriés : le double, le triple, le quadruple, le quintuple, le sextuple, le septuple, l'octuple, le nonuple, le décuple et le centuple, pour indiquer respectivement les produits par deux, par trois, par quatre, par cinq, par six, par sept, par huit, par neuf, par dix et par cent. La richesse du vocabulaire relatif aux nombres prouve leur importance.

A partir de la manière dont elle est définie, on se rend compte de la relation de la multiplication avec l'addition : on a $(m + n) \times \ell = (m \times \ell) + (n \times \ell)$ et $\ell \times (m + n) = (\ell \times m) + (\ell \times n)$, ce qu'on exprime en disant que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition. Le passage d'une expression assez longue comme dans le second membre, à une expression plus condensée comme celle du premier membre, s'appelle *mise en évidence* du nombre qui apparaît en facteur dans les deux parenthèses, ici le nombre ℓ.

1.2.4 La division

L'opération inverse de la multiplication est la *division*, qu'on note par :. On a donc $(m \times n) : n = m$ (et $(m \times n) : m = n$ puisque $m \times n = n \times m$). Le résultat de l'opération de division s'appelle le *quotient*; le nombre que l'on divise est le *dividende* et celui par lequel on divise est le *diviseur*. Mais dans le cadre des nombres entiers et en particulier des nombres naturels, la division de m par n n'est possible sans qu'il y ait de *reste* qu'à condition que m soit un *multiple* de n, c'est-à-dire que m soit un certain nombre (entier) de fois n ; on dit alors que m est *divisible* par n ou que n est un *diviseur* de m. Dans ce cas où la division se fait exactement, le quotient est appelé le *rapport* des deux nombres. Par exemple, 6 étant multiple de 3 puisque $6 = 2 \times 3$, on a exactement $6 : 3 = 2$. Au contraire, si on veut diviser 7 par 3, on obtient le quotient 2, mais en laissant un reste $= 1$ puisque $7 = 6 + 1 = (2 \times 3) + 1$. Si un nombre naturel m est multiple d'un nombre naturel n, c'est qu'on peut écrire $m = n \cdot \ell$ où ℓ est aussi un nombre naturel. Nous désignerons un multiple de n par la notation $\mathfrak{M}n$; par exemple, $6 = \mathfrak{M}3$ et $7 = \mathfrak{M}3 + 1$. Il revient au même de dire que m est multiple de n, donc d'écrire $m = \mathfrak{M}n$, ou de dire que n est un diviseur de m ou plus simplement qu'il divise m.

Pour indiquer qu'un nombre n ne divise pas le nombre m, donc que celui-ci n'en est pas multiple, on peut simplement écrire $m \neq \mathfrak{M}n$. Si n est diviseur de m, il est évidemment aussi diviseur de tout produit de m par un autre nombre : autrement dit, $m = \mathfrak{M}n$ entraîne $m \cdot \ell = \mathfrak{M}n$ quel que soit le nombre ℓ (ceci ne sera plus nécessairement vrai quand nous ne serons plus limités aux nombres naturels).

Si nous appelons q le quotient de m par n, dans le cas où la division se fait exactement, c'est-à-dire lorsque $m = \mathfrak{M}n$, on a d'après la définition, $n \cdot q = m$. Dans le cas où la division ne se fait pas exactement, c'est-à-dire où $m \neq \mathfrak{M}n$, appelons q le quotient obtenu en laissant un reste r, qui doit être $< n$; on a alors $m = n \cdot q + r$. Ce quotient q appelé plus précisément *quotient par défaut*, est le plus grand nombre tel que $n \cdot q < m$; r (qui est $< n$ avons-nous précisé) est appelé *reste par défaut*. On considère parfois le *quotient par excès*, soit q', qui est tel que $n \cdot q'$ soit juste plus grand que m, donc le plus petit nombre tel que $n \cdot q' > m$; on a alors $m = n \cdot q' - r'$ où r' est ce qu'on appelle le *reste par excès*, qui est, comme r, $< n$. On a $q' = q + 1$ et $r + r' = n$. Quand on ne précise pas, c'est qu'on sous-entend “par défaut”.

Signalons dès maintenant que pour la division de nombres quelconques, on n'utilise généralement pas la notation : indiquée ci-dessus, mais qu'on se sert de la notation des fractions : on met les deux nombres l'un au-dessus de l'autre, séparés par une barre horizontale, avec le dividende au-dessus et le diviseur en-dessous.

1.3 Les nombres pairs ou impairs

Les nombres entiers multiples de 2 sont appelés *nombres pairs* et les autres sont appelés *nombres impairs* ; le fait qu'un nombre soit pair ou impair définit ce qu'on appelle sa *parité*. La forme générale des nombres pairs est $2n$ avec $n = 1, 2, 3, \ldots$; celle des nombres impairs est $2n - 1$ avec aussi $n = 1, 2, 3, \ldots$ (ou $2n + 1$ avec $n = 0, 1, 2, \ldots$; pour un même n, le nombre impair $2n + 1$ est celui qui suit immédiatement le nombre impair $2n - 1$). Dans la suite qu'ils constituent, les nombres naturels sont alternativement impairs et pairs.

1.4 L'élévation à une puissance

Au stade suivant, après l'addition et la multiplication, on a l'*élévation à une puissance* (qu'on appelle parfois exponentiation, mot que nous préférons éviter à cause du risque de confusion avec le mot exponentation, que nous allons voir ci-après). Cette opération est introduite à partir de la notation $n \times n = n^2$, $n \times n \times n = n^3$, etc., avec une *distributivité* par rapport à la multiplication donnée par $(m \times n)^\ell = m^\ell \times n^\ell$. Le nombre qu'on élève à une puissance s'appelle la *base* de cette puissance et le nombre qui indique l'ordre de la puissance, c'est-à-dire le nombre de facteurs égaux formant cette puissance, qu'on met en indice supérieur à droite, s'appelle l'*exposant*. On a évidemment aussi $n^1 = n$ et les règles $n^p \times n^q = n^{p+q}$ et (si $p > q$) $n^p : n^q = n^{p-q}$ (si $p = q$, il vient $n^0 = n^p : n^p = 1$) et aussi $(n^p)^q = n^{pq}$. Mais cette fois, l'opération n'est pas commutative, c'est-à-dire qu'en général $n^m \neq m^n$; par exemple, $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$. La conséquence en est qu'il y a deux opérations inverses distinctes. D'une part, il y a l'*extraction de racine* : $\sqrt[n]{m^n} = m$ (quand $n = 2$, on ne l'écrit pas, on le sous-entend : $\sqrt{m^2} = m$). D'autre part, il y a l'*exponentation* ou recherche de l'exposant : m^n exponenté par m donne n. Toutefois cette dernière opération, à laquelle un chapitre était encore consacré dans les précis d'arithmétique il y a un siècle, a cessé d'être considérée, pour être remplacée par l'usage des logarithmes, dont nous parlerons au chapitre 9 : la formule $\log(m^n) = n \log m$ montre que pour exponenter m^n par m et donc trouver n, il suffit de prendre le quotient de $\log(m^n)$ par $\log m$. Actuellement, on chercherait peut-être même en vain au dictionnaire les mots exponenter et exponentation.

1.5 Note

Toutes les opérations que nous avons considérées dans ce chapitre pour les nombres naturels peuvent être appliquées aussi bien aux autres catégories de nombres et les propriétés que nous en avons données restent toujours valables. Nous ne le répéterons pas chaque fois. Tous ces énoncés valent aussi bien pour les nombres fractionnaires, les nombres irrationnels, etc. C'est le cas notamment pour les formules exprimant la commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication, ainsi que celle relative à la distributivité.

La propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la commutativité de la multiplication permettent de démontrer une formule bien connue et très utile relative à la deuxième puissance d'une somme de deux nombres :

$$(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b,$$

d'où cette formule

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

1.6 Les adjectifs numéraux cardinaux et ordinaux

A propos des nombres naturels, observons qu'ils ont encore une autre utilité que de permettre d'indiquer combien de choses il y a dans une collection de ces choses, c'est-à-dire de connaître le nombre d'éléments dans un ensemble, soit le *cardinal* de cet ensemble, comme disent les mathématiciens depuis l'introduction de la théorie des ensembles. En effet, ils permettent aussi de numéroter des choses, qui peuvent alors être repérées par leur numéro. C'est ce qu'on fait pour les chapitres de certains ouvrages, pour les articles de textes de lois, pour les chambres dans les hôtels, et bien d'autres choses encore, ne serait-ce que les immeubles d'une même rue. Quand nous comptions les pommes, nous établissions une correspondance biunivoque entre ces pommes et les nombres naturels pour la durée du comptage, tandis qu'ici, ce que fait par exemple l'hôtelier en numérotant ses chambres, c'est établir une telle correspondance entre ces chambres et les nombres, mais qui est alors maintenue permanente.

En rapport avec ce double usage des nombres naturels, soit compter le nombre d'éléments dans un ensemble, soit indiquer la place d'un élément dans un ensemble ordonné, les grammairiens distinguent en linguistique les *adjectifs numéraux cardinaux*, destinés à indiquer la quantité, combien il y a d'objets (ils sont invariables, sauf un, qui devient “une” au féminin) et les *adjectifs numéraux ordinaux*, destinés à donner la place, le rang des choses qui ont un ordre, comme les pages ou les chapitres d'un livre, les places de sportifs ou sportives classé(e)s suivant leurs performances, etc. Ces derniers sont formés à partir des nombres cardinaux en leur ajoutant le suffixe “ième”, sauf pour un auquel correspond “premier” (qui, contrairement aux autres, s'accorde, en devenant première au féminin, de même d'ailleurs que “second”, seconde au féminin, qui peut remplacer deuxième, notamment dans un ensemble ordonné ne comportant que deux objets, qui sont alors le premier et le second). Il faut toutefois noter que les nombres cardinaux sont couramment utilisés à la place des adjectifs numéraux ordinaux. Par exemple, on dit qu'il est trois heures et pas qu'on est à la troisième heure ; il en est de même pour les dates, sauf pour le premier jour d'un mois. On fait de même pour les pages ou les divisions d'un livre : nous avons par exemple écrit plus haut que nous parlerons des logarithmes au chapitre 9, nous n'avons pas écrit au $9^{\text{ième}}$ chapitre. Il en va de même, entre autres, pour le rang d'un souverain dans une dynastie : on parle de Louis quatorze et pas de Louis quatorzième ; ce n'est que pour le premier qu'on dit Louis premier.

1.7 Les propriétés des égalités et des inégalités

1.7.1 La relation d'égalité

Pour terminer ce premier chapitre, où nous avons introduit la notion de nombre et les opérations qu'on peut effectuer avec eux, il me paraît opportun d'exposer quelles sont les propriétés qui caractérisent la relation d'égalité. Ces propriétés, valables pour les égalités entre nombres naturels, le restent bien entendu pour les égalités entres toutes les catégories de nombres ; elles peuvent même être étendues aux égalités entre n'importe quelles grandeurs. D'abord, c'est une relation *symétrique*, comme nous l'avons déjà écrit plus haut, c'est-à-dire qu'il est parfaitement équivalent d'écrire $a = b$ ou $b = a$; autrement dit, les deux membres de l'égalité jouent le même rôle, peu importe donc l'ordre dans lequel on les met. Cette relation jouit de plus de la propriété de *transitivité*, ce qui signifie que les égalités $a = b$ et $b = c$ entraînent l'égalité $a = c$. Elle a aussi la propriété de *réflexivité*, c'est-à-dire que quel que soit a, on a toujours $a = a$: tout nombre est égal à lui-même. Enfin, l'égalité subsiste lorsqu'on effectue une même opération sur chacun de ses deux membres ; en particulier, on peut toujours ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres, multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre ($\neq 0$), ce qu'on appelle *multiplier ou diviser membre à membre par ce nombre*, ou encore *élever les deux membres à une même puissance*. On peut aussi additionner ou soustraire membre à membre des égalités ou les multiplier ou diviser membre à membre, c'est-à-dire que les deux égalités $a = b$ et $c = d$ entraînent $a + c = b + d$ et $a - c = b - d$, ainsi que $a \cdot c = b \cdot d$ et $a : c = b : d$; on peut de même additionner ou multiplier plus de deux égalités membre à membre.

1.7.2 La relation d'inégalité

La relation d'inégalité, que ce soit dans le sens plus grand que, c'est-à-dire $>$, ou plus petit que, c'est-à-dire $<$, n'est évidemment ni symétrique (en fait $a > b$ entraîne $b < a$ et réciproquement), ni réflexive, mais elle est *transitive* : les inégalités $a > b$ et $b > c$ entraînent l'inégalité $a > c$ et les inégalités $a < b$ et $b < c$ entraînent l'inégalité $a < c$. Il en est évidemment de même avec la relation $\geq$, c'est-à-dire plus grand ou égal, ainsi qu'avec la relation $\leq$, c'est-à-dire plus petit ou égal, tandis que $a > b$ et $b \geq c$ ou $a \geq b$ et $b > c$ entraînent $a > c$ et que $a < b$ et $b \leq c$ ou $a \leq b$ et $b < c$ entraînent $a < c$.

Chapitre 2

Considérations anciennes

2.1 Significations symboliques

Dans l'Antiquité, certains des premiers nombres naturels avaient parfois une signification symbolique. D'abord, des philosophes grecs anciens ont pu avoir une sorte de vénération pour l'unité, la *monade* au sens ancien du terme (non au sens plus récent utilisé notamment par Leibniz) ; c'est en l'ajoutant assez de fois à elle-même qu'on peut obtenir tout le reste, elle est en quelque sorte le fondement de tout ce qui suit. Le nombre *deux* et le nombre *trois* étaient respectivement les symboles du sexe féminin et du sexe masculin, peut-être en rapport avec des constats anatomiques.

Tout à fait indépendamment de cela, le nombre *trois* a été mis en exergue dans certaines religions par la présence d'une *triade divine*. Les plus connues sont dans le christianisme, la Sainte Trinité, avec trois personnes en un Dieu unique, et dans le brahmanisme, les trois dieux de la trimurti : Brahma, Vishnu, Çiva. Il y en a eu plusieurs autres, parmi lesquelles, dans l'Antiquité égyptienne, la triade osirienne : Osiris, Isis et Horus, puis à Rome la triade capitoline : Jupiter, Junon et Minerve.

Revenons à l'Antiquité grecque. Le nombre *cinq*, somme de deux et de trois, était symbole de l'union fécondatrice, de l'amour générateur ; c'était le nombre d'Aphrodite, déesse de l'amour. Il symbolisait de plus l'harmonie dans la santé, ce qui le rapprochait d'une autre déesse : Hygie. Il était associé à la beauté, non seulement incarnée dans le corps humain, mais aussi en général, comme le montre le pentagramme, c'est-à-dire le pentagone régulier étoilé, dessin d'une étoile à cinq branches.

Le nombre *cinq* était attaché à la matière vivante et le nombre *six* à la matière inerte. Pour cinq et la matière vivante, cela s'explique, probablement, en plus de ce que $5 = 2 + 3$ comme nous venons de l'évoquer, par le fait que les Grecs, peuple maritime, avaient remarqué la symétrie pentagonale d'animaux marins comme les étoiles de mer, les oursins et autres échinodermes ; c'est le cas aussi pour beaucoup de fleurs. Par contre, le cristal de roche, entre autres, présente une symétrie hexagonale, d'où probablement l'attribution du nombre six à la matière inerte. Dès les temps anciens, on a remarqué que six est le premier nombre parfait (voir chapitre 5), c'est-à-dire qu'on a $1 + 2 + 3 = 6$ et $1 \times 2 \times 3 = 6$.

Avec le nombre *sept*, on passe au domaine spirituel et cela pour divers peuples anciens, notamment avec la création du monde en sept jours, qui justifierait les sept jours de la semaine. Chez les Juifs, il y avait le chandelier à sept branches et des épisodes bibliques tels que les sept vaches grasses et les sept vaches maigres du songe du Pharaon. Le nombre sept intervient aussi dans le christianisme, tant en bien avec les sept sacrements notamment, qu'en mal avec les sept péchés capitaux. Sept a de plus été l'emblème de la virginité. Notons que sept a parfois été qualifié d'*archipremier*, car non seulement c'est un nombre premier (voir les nombres premiers un peu plus loin dans ce chapitre), mais en plus il est impossible, avec la règle et le compas, de diviser le cercle en sept parties égales, alors que c'est possible pour trois et cinq.

Quant au nombre *neuf*, il était volontiers associé à une assemblée, soit constituée de neuf personnes comme les neuf muses (Calliope, Clio, Euterpe, Terpsichore, Erato, Melpomène, Thalie, Polymnie, Uranie), soit comportant neuf groupes comme les neuf degrés des milices célestes (anges, archanges, principautés, puissances, vertus, dominations, trônes, chérubins, séraphins), éventuellement sous forme de trois triades, comme dans ce dernier cas (trois hiérarchies de trois choeurs, selon la classification remontant aux pseudo-aéropagistes).

Nous avons passé le nombre *quatre*, attaché à la surface, au plan, avec le carré et ses quatre sommets, ainsi que le nombre *huit*, attaché au volume, à l'espace, avec le cube et ses huit sommets. Le nombre quatre, la tétrade, a été qualifié d'*ultra-pair*, c'est-à-dire ultra multiple de deux (voir chapitre 1) ; quand on le représente par quatre jetons formant un carré, on peut le diviser en deux parties égales par une ligne horizontale ou par une ligne verticale.

Jusqu'une époque relativement récente, quelques hommes ont voué une grande vénération avec une sorte de culte ésotérique au nombre *dix*, à la décade. Non seulement ce nombre a généralement été utilisé comme base des différents systèmes de numération, sans doute parce qu'on apprend à compter sur ses doigts, qui sont dix, mais aussi on peut le mettre sous forme d'un nombre triangulaire (voir chapitre 5) de base quatre ; c'est la “sainte tétraktys” : figure 1. C'est le premier nombre triangulaire pour lequel l'unité apparaît au centre du triangle, d'où sa relation privilégiée avec un. Ce jeton central est entouré de six autres, l'hexagone qui apparaît quand on ôte les trois sommets, d'où la relation avec six. La forme triangulaire et les trois sommets impliquent la relation avec trois, tandis que celle avec quatre vient de la base et des côtés du triangle. Les relations avec deux et cinq résultent de ce que dix est égal à deux fois cinq. Il y a donc des relations particulières avec les six premiers nombres naturels.

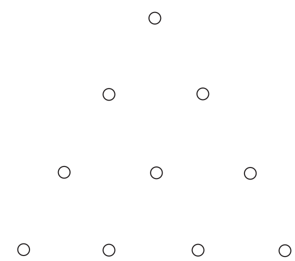


Figure 1 : Dix en triangle de base quatre

On trouve le nombre *douze* comme nombre de personnes ou d'objets dans plusieurs groupes remarquables de personnes ou de choses. Depuis les temps anciens et jusqu'à nos jours, il y a douze constellations zodiacales, comme il y a douze mois dans l'année et aussi douze heures durant le jour et douze heures durant la nuit. Dans la mythologie grecque, il y a les douze grandes divinités olympiennes et les douze travaux d'Hercule. Dans le christianisme, il y a les douze apôtres.

Quant au nombre *treize*, on lui attribue d'habitude, selon les cas, une influence maléfique ou une influence bénéfique. On le considère souvent comme un porte-malheur, particulièrement quand c'est le nombre de convives à table, en souvenir de la dernière cène, mais on le considère souvent au contraire comme un porte-bonheur, notamment pour la date d'achat d'un billet de loterie.

Mais ne nous attardons pas davantage sur les significations symboliques, voire parfois mystiques, qui ont jadis été attribuées à des nombres. Voyons plutôt des aspects scientifiques déjà étudiés dès l'Antiquité grecque au moins.

2.2 Considérations scientifiques

2.2.1 Les nombres rectangulaires

Dans les temps anciens, on avait remarqué que quand on représente les nombres à l'aide de jetons, dont le rôle pouvait être joué par des cailloux par exemple, comme on le faisait volontiers dans l'Antiquité, certains d'entre eux peuvent prendre exactement la forme d'un rectangle. C'est par exemple le cas du nombre six, qui, comme le montre la figure 2, se présente sous la forme de deux lignes de trois jetons (c'est-à-dire aussi trois colonnes de deux ; on pourrait d'ailleurs aussi bien faire trois lignes de deux, c'est-à-dire deux colonnes de trois, ce qui correspond à la commutativité de la multiplication, qui donne effectivement $3 \times 2 = 2 \times 3$). Cela exprime le fait que six est multiple de deux et multiple de trois. On a alors appelé ces nombres des *nombres rectangulaires*.

$$\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \\ \circ & \circ & \circ \end{array}$$

Figure 2 : Un nombre rectangulaire : $6 = 3 \times 2$

Il faut noter que le plus souvent les nombres rectangulaires peuvent l'être de plusieurs manières. Par exemple, douze peut être représenté par un rectangle formé de trois lignes de quatre jetons, mais il peut aussi l'être par un rectangle plus allongé, de deux lignes de six jetons. Douze est effectivement multiple à la fois de deux, de trois, de quatre et de six.

2.2.2 Les nombres carrés

D'autres nombres, ainsi représentés par des jetons, prennent la forme d'un carré. C'est le cas de quatre, de neuf, etc. L'exemple de neuf qui, étant le produit de trois par lui-même, n'est multiple que de trois, est montré à la figure 3. De tels nombres ont alors été appelés *nombres carrés*. Ce sont les nombres qui sont le produit d'un nombre par lui-même (par soucis de généralité, on y comprend un puisque $1 = 1 \times 1$). C'est la raison pour laquelle la puissance 2 d'un nombre est appelée le *carré* de ce nombre et par suite la racine d'indice 2 est appelée *racine carrée*. De manière analogue, la puissance 3 d'un nombre est appelée le *cube* de ce nombre et la racine d'indice 3 est appelée *racine cubique*. Evidemment, s'il est facile de représenter le carré d'un nombre naturel par un ensemble de jetons étalés en un carré, il est beaucoup plus difficile de représenter un nombre cube : il faut imaginer un cube formé avec des boules ; pour le réaliser effectivement, on peut utiliser des dés à jouer en nombre suffisant.

$$\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \\ \circ & \circ & \circ \\ \\ \circ & \circ & \circ \end{array}$$

Figure 3 : Un nombre carré : $9 = 3 \times 3$

Nous avons vu ci-dessus que des nombres peuvent être rectangulaires de plusieurs manières. Mais la situation est encore plus compliquée, car la plupart des nombres carrés peuvent être représentés aussi sous forme rectangulaire. On peut par exemple mettre seize sous forme d'un carré de quatre lignes de quatre jetons ou sous forme d'un rectangle de deux lignes de huit jetons. Seize est multiple de deux, de quatre et de huit.

2.2.3 Les nombres premiers et les nombres composés

D'autres nombres, tels que deux, trois, cinq, sept, ..., ne peuvent se mettre ni sous forme d'un carré, ni sous forme d'un rectangle. Pour les représenter à l'aide de jetons, on ne peut qu'étaler ceux-ci sur une seule ligne si on veut éviter les formes plus compliquées telles que la représentation qu'on utilise pour le nombre cinq sur une des faces d'un dé à jouer. Ce sont les nombres qu'on appelle les *nombres premiers*, par opposition aux autres, qui sont les *nombres composés*, en ce sens qu'ils peuvent être obtenus en faisant, éventuellement de plusieurs manières possibles, le produit de deux autres nombres l'un par l'autre (nombres rectangulaires) ou d'un nombre par lui-même (nombres carrés). On utilise parfois aussi l'adjectif “composite” pour qualifier un nombre lorsque c'est un nombre composé. On peut dire qu'*un nombre premier est un nombre qui n'est divisible que par un et par lui-même* : si le nombre p est premier, le seul produit de nombres naturels qui peut donner p est $p \times 1 = 1 \times p$. Notons que le nombre un, qui répond en somme à cette définition, n'est pourtant assez souvent pas considéré dans les listes de nombres premiers ; comme noté plus haut, c'est aussi un carré puisque $1 \times 1 = 1$. Un nombre premier qui divise un produit de nombres naturels divise au moins un des facteurs. Tout nombre composé N est égal à $2^\ell \times 3^m \times 5^n \times \cdots$, avec des exposants $\ell, m, n, \ldots$ bien déterminés pour les nombres premiers 2, 3, 5, $\ldots$, mais dont certains peuvent être nuls, ce qui rend le facteur correspondant égal à 1, puisque $n^0 = 1$ quel que soit n, comme on a vu au chapitre 1 à propos des puissances. L'opération consistant à remplacer N par un produit de la forme $2^\ell \times 3^m \times 5^n \times \cdots$ s'appelle *décomposition de N en facteurs premiers.* Les nombres 2, 3, 5, $\ldots$ qui apparaissent dans le produit avec des exposants > 0 sont dits être les facteurs premiers contenus dans N.

On peut énoncer des théorèmes assez évidents concernant la décomposition des nombres composés en facteurs premiers, par exemple : un nombre composé N est divisible par un autre M si N contient tous les facteurs premiers contenus dans M avec des exposants respectivement au moins égaux. Tous les diviseurs possibles d'un nombre N, c'est-à-dire tous les nombres par lesquels il est divisible, sont obtenus en faisant tous les produits possibles des facteurs premiers qu'il contient en leur attribuant chaque fois des exposants inférieurs ou égaux à ceux qu'ils ont dans la décomposition de N en facteurs premiers. Le nombre de tous ces diviseurs, y compris 1 et N, est donné par le produit de ces exposants augmentés de 1 chacun.

On peut facilement démontrer que la suite des nombres premiers est illimitée ; il y en a une infinité, comme il y a une infinité de nombres naturels. Toutefois le nombre relatif de nombres premiers par intervalle de nombres naturels diminue au fur et à mesure qu'on avance vers les plus grands nombres. Nous préciserons quelque peu ce point plus loin.

2.2.4 Diviseurs communs et multiples communs

Des nombres sont dits *premiers entre eux* s'ils n'ont aucun diviseur commun, si ce n'est 1. Dans le cas contraire où ils ont un ou plusieurs diviseurs communs, on désigne en général le plus grand d'entre eux par l'abréviation "*p.g.c.d.*" (*plus grand commun diviseur*). Dire que des nombres sont premiers entre eux revient à dire que leur p.g.c.d. est 1. Chaque commun diviseur de deux ou plusieurs nombres divise leur p.g.c.d.. Si on multiplie deux nombres par un autre ou qu'on les divise par un autre qui en est un commun diviseur, le p.g.c.d. de ces deux nombres est respectivement multiplié ou divisé par cet autre nombre. Si un nombre est divisible par deux nombres qui sont premiers entre eux, il est divisible par leur produit. Un nombre premier est premier avec tout autre nombre qui n'en est pas multiple. Si deux nombres sont tels que l'un divise l'autre, il est leur p.g.c.d. Sinon, ils ont un p.g.c.d. qui est le même que celui du plus petit des deux nombres et du reste de la division du plus grand par le plus petit. Ceci conduit à la méthode, appelée *algorithme d'Euclide*, permettant de trouver le p.g.c.d. de deux nombres quand ils ne sont pas multiples l'un de l'autre : on divise le plus petit par le reste de la division du plus grand par le plus petit, puis ce reste par le nouveau reste et ainsi de suite jusqu'à obtenir un reste nul et alors le dernier diviseur est le p.g.c.d. cherché. Pour trouver le p.g.c.d. de plus de deux nombres, on cherche celui de deux des nombres, puis le p.g.c.d. du résultat et d'un troisième nombre et ainsi de suite jusqu'au p.g.c.d. du dernier nombre et du résultat précédent.

Un nombre est commun multiple de deux ou plusieurs autres s'il est divisible par chacun d'eux ; le *plus petit commun multiple* est habituellement désigné par l'abréviation "*p.p.c.m.*". Le p.p.c.m. de deux nombres est égal à leur produit divisé par leur p.g.c.d.. Si en particulier deux nombres sont premiers entre eux, leur p.p.c.m. est égal à leur produit. Les communs multiples de deux ou plusieurs nombres sont les multiples de leur p.p.c.m.

2.3 Représentations des nombres

Quant à la représentation, évoquée un peu plus haut et dans un chapitre ultérieur, des nombres à l'aide de ce qui pouvait jouer le rôle de jetons comme des cailloux ou des signes dessinés, elle a jadis joué un rôle important pour trouver des propriétés arithmétiques et pour des usages pratiques, notamment avec des dés à jouer ou des cartes à jouer. On l'utilisait encore au Moyen-Age, conjointement aux chiffres romains, jusqu'à l'introduction de la numération décimale, dont nous allons parler au chapitre suivant. C'est pourquoi Rabelais écrit (ici, je m'adresse surtout aux personnes âgées, car les jeunes ne lisent plus la littérature classique, surtout si ancienne) dans le passage consacré à l'éducation de Gargantua :

> *"On apportait des cartes, non pour jouer, mais pour y apprendre mille petites gentillesses et inventions nouvelles, lesquelles toutes étaient d'arithmétique... et non seulement de celle-ci, mais des autres sciences mathématiques, comme géométrie, astronomie et musique."*

L'usage des chiffres romains était en effet compliqué, peu pratique. Même la numération grecque, utilisant les lettres de l'alphabet plus trois lettres archaïques (le stigma, dérivé du digamma, le koppa et le sampi), était plus proche de notre système décimal. Enfin, les contacts avec les Arabes ont permis d'introduire dans nos pays occidentaux, vers les XII$^{\text{e}}$ et XIII$^{\text{e}}$ siècles, le système décimal, originaire de l'Inde. Son usage a été amené en Europe en particulier par L. Fibonacci, dit Léonard de Pise, à la suite de ses voyages dans les pays arabes ; il a exposé ce système de numération, avec les chiffres arabes, dès le premier de ses ouvrages, "Liber abbaci", tout au début du XIII$^{\text{e}}$ siècle.

Bien sûr, c'est depuis des temps immémoriaux que l'homme a appris à dire combien de choses se trouvent dans un groupe de ces choses, d'abord pour des objets ou des êtres, puis aussi pour des choses moins concrètes , comme les jours et les années notamment, et enfin même pour des notions abstraites. Des mots ont donc dû être introduits dans le langage pour exprimer les nombres naturels, les plus petits d'abord, puis ultérieurement pour de plus grands nombres. Dans l'Antiquité que nous connaissons, moins ancienne, on allait facilement jusqu'à la myriade, c'est-à-dire dix mille, qui a fini par exprimer "un grand nombre" sans plus de précision, usage que nous connaissons encore pour ce mot, utilisé alors de préférence au pluriel : "des myriades". Plus récemment, la myriade a toutefois été un peu supplantée par le million, soit mille milliers, pour exprimer cette idée de très grand nombre, et même maintenant par le milliard, soit mille fois plus encore. Quand l'écriture est apparue, des signes ont été inventés pour désigner les premiers nombres naturels. Des systèmes de plus en plus perfectionnés ont été utilisés pour s'adapter à la représentation de grands nombres, jusqu'à l'usage du système décimal tel que nous l'employons et que nous considérerons au chapitre suivant.

Mais les nombres, après avoir servi initialement pour dénombrer les choses, ont aussi été utilisés pour quantifier des données mesurables relatives à des objets particuliers, telles que les poids de denrées ou de matériaux, les distances, les longueurs de segments de droites ou d'arcs de courbes, les aires de surfaces, etc. Le nombre donnant la mesure d'une grandeur est le rapport de celle-ci à une unité choisie. Ce choix se fait arbitrairement, conventionnellement ; le rapport entre deux grandeurs reste en effet le même quelle que soit l'unité choisie pour les mesurer. Mais le rapport obtenu lors de la comparaison des grandeurs analogues entre elles, en particulier le rapport à l'unité choisie, n'est pas nécessairement un des nombres naturels. Ainsi a dû être introduite la notion de nombres fractionnaires, que nous examinerons un peu plus loin (on n'imaginait pas au départ qu'on devrait même dépasser la notion de nombres fractionnaires au sens strict). Par exemple, on a constaté que le nombre égal au rapport de la circonférence d'un cercle à la longueur de son diamètre, qu'on a représenté par la lettre grecque π, comme nous le faisons toujours, est un peu supérieur à 3, mais inférieur à 4. Tenter de préciser le mieux possible la valeur de ce nombre a été un des principaux travaux auxquels s'est consacré Archimède, le célèbre mathématicien de Syracuse, qui a vécu de 287 à 212 avant Jésus-Christ. Les premiers éléments de géométrie métrique avaient déjà été établis bien des siècles avant cela, comme on le voit sur des tablettes cunéiformes de Mésopotamie et sur des papyrus égyptiens. Le but pratique a notamment été la mesure des terrains, en particulier chez les Egyptiens, qui devaient rétablir les limites après les crues annuelles du Nil. La preuve que la géométrie servait surtout à des mesures terrestres se trouve dans l'étymologie même du mot géométrie. Les Grecs ont beaucoup appris au contact des Egyptiens. Notamment Thalès de Milet, qui a vécu d'environ 639 à 548 avant Jésus-Christ, a ramené beaucoup de connaissances en géométrie, que lui ont enseignées les prêtres égyptiens. Il les a approfondies d'un point de vue plus spéculatif, avec des démonstrations théoriques dans toute la mesure du possible. Pour les besoins pratiques, on savait de toute façon très bien notamment que l'aire d'un rectangle est donnée par le produit de sa longueur et de sa largeur ; en particulier, celle d'un carré est obtenue en multipliant par elle-même la mesure de son côté, c'est-à-dire en en prenant le carré. Un peu après Thalès, Pythagore a encore développé les connaissances théoriques et on lui attribue notamment le théorème du carré de l'hypoténuse, suivant lequel dans un triangle rectangle, le carré du côté opposé à l'angle droit, qu'on appelle l'hypoténuse, est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Ce mathématicien et philosophe était originaire de Samos et est allé développer une sorte de secte dans les colonies grecques du Sud de l'Italie et de Sicile, où il enseignait la philosophie et la mathématique aux alentours de 530 avant Jésus-Christ ; il est décédé vers 485. Les idées de base de cette école se ramenaient à une sorte de mystique des nombres, la notion de nombre étant essentiellement limitée à ce que nous appelons les nombres naturels, avec tout au plus la considération des nombres fractionnaires, dont chacun est le rapport de deux nombres naturels. Les connaissances concernant les nombres étaient appliquées notamment à la géométrie et à la musique. Mais si on applique le théorème de l'hypoténuse à chacun des deux triangles obtenus en divisant un carré en deux par une de ses diagonales, on en déduit que la longueur de la diagonale vaut $\sqrt{2}$ fois la longueur du côté ; or $\sqrt{2}$ non seulement n'est pas un nombre naturel, mais n'est même égal à aucun nombre fractionnaire, comme nous verrons au chapitre 6 : le rapport des longueurs de la diagonale et du côté d'un carré est ce que nous appelons aujourd'hui un nombre irrationnel. Ces longueurs sont incommensurables, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune longueur si petite soit-elle qui entrerait un nombre entier de fois dans la diagonale et un nombre entier de fois dans le côté du carré, si grands que soient ces deux nombres. Cette découverte a été une véritable catastrophe aux yeux de l'école pythagoricienne, au point qu'elle a longtemps été tenue secrète, paraît-il !

Pour terminer l'évocation de ces temps anciens, exposons la manière dont on a, dans l'Antiquité, avec Pythagore et son école, démontré que la somme des n premiers nombres impairs est égale au carré de n. Cette relation

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2,$$

nous la démontrerions aujourd'hui par récurrence en remarquant qu'elle est vraie pour $n = 1$, puisqu'elle se réduit alors à $1 = 1$, et en prouvant que si elle est vraie pour une valeur de n, elle l'est aussi pour la valeur suivante $n + 1$, ce qui entraîne qu'elle le soit pour tous les nombres naturels n. Pour prouver ce qui vient d'être dit, il suffit d'ajouter $2n + 1$ (= nombre impair qui suit $2n - 1$, comme il a été vu au chapitre 1) aux deux membres de l'égalité écrite pour n ; le premier membre devient bien $1+3+5+\cdots+(2n+1)$, tandis que le second devient n^2+2n+1, ce qui est bien $= (n+1)^2$ d'après la relation $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ vue au chapitre 1, dans laquelle il suffit de prendre $a = n$ et $b = 1$. La relation ci-dessus peut même plus simplement être considérée comme résultant de la formule donnant la somme des termes d'une progression arithmétique (voir chapitre 9, suite dont chaque terme = le précédent + un nombre constant, la raison, ici = 2), à savoir que cette somme = la demi-somme du premier et du dernier termes multipliée par le nombre de termes, soit ici

$$\frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = \frac{2n}{2} \cdot n = n^2.$$

Mais dans l'Antiquité, cette relation est apparue par la considération des carrés de plus en plus grands formés avec des jetons, comme à la figure 4, à partir du coin supérieur gauche par exemple, en ajoutant $n-1$ jetons le long de chacun des deux bords du carré de côté $n - 1$ ($= 1, 2, \ldots$, on s'est arrêté à $n - 1 = 3$ sur la figure), plus 1 jeton en bas à droite, ce qui en fait

$$2(n - 1) + 1 = 2n - 1,$$

pour compléter le nouveau carré, de côté n.

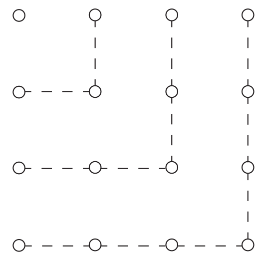


Figure 4 : Démonstration avec des jetons

Notons que si nous ajoutons une unité à chacun des termes du premier membre de la relation considérée, soit n unités en tout, nous obtenons la somme des n premiers nombres pairs $2+4+6+\cdots+2n$. Le second membre de l'égalité devient alors n^2+n, c'est-à-dire $n(n+1)$ si on met n en évidence (voir la mise en évidence d'un nombre au chapitre 1 à propos de la distributivité par rapport à l'addition). On a donc

$$2+4+6+\cdots+2n = n(n+1).$$

Par exemple pour $n=4$, on a $2+4+6+8 = 4 \times 5 = 20$.

Chapitre 3

La numération décimale

3.1 La présentation orale

Nous avons vu que la suite des nombres naturels se ramène à une suite de noms qui permettent de compter les choses. Mais cette suite étant illimitée, il est évident qu'il n'est pas possible de donner pour tous les nombres susceptibles d'être utilisés, un nom particulier, original, comme on l'a fait pour les premiers d'entre eux avec un, deux, trois, ... Il en va de même pour les signes graphiques tels que 1, 2, 3, ... Il faut bien, pour les nombres plus grands, donner plutôt des règles générales pour leurs noms. En français, un nom particulier existe jusque seize. Pour les trois nombres suivants, le nom indique le nombre à ajouter à une dizaine pour les obtenir : dix-sept, dix-huit, dix-neuf. Au-delà, on énonce successivement le nombre de dizaines par les termes vingt, trente, ..., nonante, et le nombre à y ajouter, en introduisant toutefois "et" lorsque ce dernier est seulement un (nous passons sous silence la fantaisie propre aux Français, qui disent par exemple quatre-vingt-onze là où les Belges et les Suisses disent nonante et un, etc.). Au-delà encore, on énonce d'abord le nombre de centaines, en sous-entendant toutefois "un" quand il n'y en a qu'une : cent, deux cents, trois cents, ... avant d'énoncer le reste du nombre. Pour les nombres suivants, à partir de mille, soit dix fois cent, on fait de même avec les milliers, c'est-à-dire les dizaines de centaines, dont on énonce le nombre comme ci-dessus : mille, deux mille, et ainsi de suite jusqu'au million, égal à mille milliers, puis jusqu'au milliard, égal à mille millions.

3.2 La présentation graphique

Tout ceci est évidemment lié à la manière graphique de représenter les nombres. Jusque neuf, on a un caractère particulier : 1, 2, 3, ..., 9. Ce sont les *chiffres*. Plus explicitement, il s'agit des *chiffres arabes*, pour rappeler où nous les avons appris.

Pour les nombres plus grands, on procède comme suit. On voit quelle est la plus grande puissance de dix à laquelle le nombre est supérieur ou à laquelle il est au moins égal et on écrit le chiffre correspondant au nombre de fois qu'elle y est incluse. Puis cette partie étant soustraite, on fait de même avec le reste, pour la puissance de dix immédiatement inférieure, et ainsi de suite jusqu'aux simples unités, c'est-à-dire la partie inférieure à dix, dont on écrit enfin le chiffre correspondant à ce nombre à l'extrême droite. On obtient ainsi une succession de chiffres donnant les nombres des différents *ordres*, c'est-à-dire des différentes puissances de dix contenues dans le nombre. Par exemple, le nombre qui s'écrit 478 est celui qui a pour valeur $4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8$. Mais comme ces puissances de 10 ne sont indiquées que par le rang du chiffre correspondant, à partir de la droite, il faut un moyen pour indiquer que l'une ou l'autre manquerait, le rang correspondant devant rester vide, d'où l'introduction du *zéro* (originaire de l'Inde) en plus des autres chiffres. Par exemple, 4078 est le nombre qui a pour valeur $4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10 + 8$ et 4780 est celui qui a pour valeur $4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 0 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10$.

En résumé, on décompose le nombre en unités des différents ordres, les unités simples, les dizaines, les centaines, etc., et on écrit de droite à gauche, avec les chiffres significatifs $1, 2, \ldots, 9$ et éventuellement le 0, les nombres d'unités des différents ordres : premier ordre (unités simples), deuxième ordre (dizaines), etc. Un nombre N de n chiffres est alors tel que

$$10^{n-1} \leq N < 10^n.$$

Pour faciliter la lecture des grands nombres, de plusieurs millions au moins, on laisse en général un petit espace entre les différents groupes de trois chiffres successifs à partir de la droite, ce qui sépare les différents ordres en classes successives de trois ordres chacune. Au lieu d'un simple espace, on met même parfois un point, mais cette habitude tend à disparaître ; elle peut en effet prêter à confusion, surtout quand il y a un seul point, du fait que les Américains, et par suite les calculatrices électroniques, utilisent le point au lieu de la virgule pour séparer la partie décimale dans le cas des nombres fractionnaires.

Le procédé permettant d'écrire les nombres comme il est expliqué ci-dessus constitue la *numération décimale*. On dit qu'elle a pour *base dix*, ce qui signifie que le rapport entre les unités des ordres successifs de gauche à droite est égal à dix.

3.2.1 Numérations avec d'autres bases

On peut utiliser un système analogue avec une autre *base*, n'importe quel nombre naturel > 1. Le nombre de caractères différents dont on doit disposer pour représenter les chiffres, y compris le 0, est égal à la base. La *numération binaire*, qui ne nécessite que le 0 et le 1, est utilisée dans les machines électroniques. On a proposé, entre autres, l'usage de la *numération duodécimale*, de base 12, qui a notamment des avantages pour les nombres fractionnaires parce que 12 est divisible par 2, 3, 4 et 6, alors que 10 ne l'est que par 2 et 5 ; mais elle exige d'ajouter deux caractères nouveaux et d'allonger quelque peu la table de multiplication à connaître par coeur pour calculer les produits mentalement ou par écrit. A l'époque de la révolution française, à l'Assemblée constituante, certains ont proposé le changement, ne serait-ce que parce qu'il était de bon ton d'abandonner absolument tout ce qui pouvait rappeler l'ancien régime ; mais un membre a fait remarquer que nous apprenons à compter sur nos doigts et grâce à cela, on a gardé la numération décimale !

3.2.2 Son origine - les chiffres romains

Elle serait originaire de l'Inde et nous l'avons apprise des Arabes vers le XII$^{\text{e}}$ ou XIII$^{\text{e}}$ siècle, comme nous avons dit au chapitre précédent. Jusqu'alors, à part des représentations telles que celle figurant sur les cartes à jouer, nous ne disposions que des *chiffres romains*, qui ne sont plus utilisés que très exceptionnellement (je viens néanmoins de le faire, comme on fait souvent, pour indiquer les siècles, il est vrai... !). Ce système, d'ailleurs lié aussi au nombre dix, comme presque tous, consistait à utiliser quelques lettres majuscules ayant les significations

$$I = 1, \quad V = 5, \quad X = 10, \quad L = 50, \quad C = 100, \quad D = 500, \quad M = 1\,000,$$

(D était parfois remplacé par $I\text{Ɔ}$ et M par $CI\text{Ɔ}$) en les juxtaposant, en commençant par les valeurs les plus élevées, pour obtenir le total voulu, avec la convention qu'une lettre placée à gauche d'une de plus grande valeur représente la différence entre les deux dans les cas de $IV = 5 - 1 = 4$, $IX = 10 - 1 = 9$, $XL = 50 - 10 = 40$, $XC = 100 - 10 = 90$, $CD = 500 - 100 = 400$, $CM = 1\,000 - 100 = 900$. Pour les nombres plus grands, on a utilisé les mêmes lettres surlignées pour représenter les milliers, par exemple $\overline{X} = 10\,000$ et $\overline{C} = 100\,000$, et pour des nombres plus grands encore, les mêmes lettres surlignées et entre barres verticales pour des centaines de mille, par exemple $\left|\overline{X}\right| = 1\,000\,000$. Finalement, la numération romaine n'a guère été conservée qu'à titre exceptionnel dans les siècles suivants, en particulier sur les cadrans d'horloges, parfois jusqu'à notre époque, à titre plus ou moins décoratif. On en a conservé l'habitude pour la numérotation des siècles (comme nous avons vu ci-dessus), quoique ceci tende à disparaître depuis les dernières décennies, même pour les siècles les plus récents. On continue néanmoins à utiliser définitivement les chiffres romains dans la numérotation des souverains, Louis XIV et les autres.

3.2.3 Remarque

Lors de l'utilisation du système décimal, on trouve quelques résultats amusants, comme on en trouverait avec un système d'une autre base. Par exemple, l'aspect des nombres donnant les carrés de nombres contenant uniquement le chiffre 1, tels que $11^2 = 121$, $111^2 = 12\,321$, …, $111\,111^2 = 12\,345\,654\,321$, … ; ils présentent une remarquable symétrie. On a d'autre part $12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111$ (notez l'absence de 8 entre 7 et 9).

3.3 Les caractères de divisibilité

3.3.1 Les restes nuls

Pour les nombres écrits dans un système de numération donné, en particulier le système décimal, il existe des critères permettant de voir s'ils sont divisibles par certains petits nombres sans devoir effectuer la division et cela de manière facile. Ces critères s'appellent les *caractères de divisibilité*.

Dans le système décimal, pour qu'un nombre soit divisible par

- 2, c'est-à-dire soit pair, il faut et il suffit que son dernier chiffre le soit, donc qu'il soit 0, 2, 4, 6 ou 8.
- 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit divisible par 3.

  Pour faciliter le calcul, quand on fait l'addition des chiffres, on passe ceux qui sont divisibles par 3, c'est-à-dire tous ceux qui sont 0, 3, 6 ou 9. On peut de même passer toute somme partielle qui serait évidemment multiple de 3, telle que 2 et 1 ou 5 et 1 ou trois chiffres 1 par exemple.
- 4, il faut et il suffit que le nombre formé par les deux derniers chiffres de droite du nombre proposé soit divisible par 4 (en particulier, si celui de gauche de ces deux chiffres, soit l'avant-dernier chiffre du nombre proposé, est 0, celui de droite doit être 0 aussi, ou 4, ou 8).

  On peut aussi dire que la condition nécessaire et suffisante est que la somme du chiffre des unités et du double de celui des dizaines soit divisible par 4 ; par exemple, 536 est divisible par 4 puisque $3 \times 2 + 6 = 6 + 6 = 12$ est divisible par 4.
- 5, il faut et il suffit que son dernier chiffre le soit, donc qu'il soit 0 ou 5.

- 6, il faut et il suffit qu'il le soit par 2 et par 3, puisque $6 = 2 \times 3$ avec 2 et 3 premiers entre eux ; on doit donc appliquer à la fois le caractère de divisibilité par 2 et celui par 3, donnés ci-dessus.
- 7, il faut diviser le nombre proposé en tranches de trois chiffres par la droite et multiplier les 1^{er}, $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ chiffres par la droite de nouveau dans chaque tranche respectivement par 1, 3 et 2, puis faire la somme des produits obtenus avec les tranches de rangs impairs et la somme des produits obtenus avec les tranches de rangs pairs ; pour que le nombre proposé soit divisible par 7, il faut et il suffit que la différence entre ces deux sommes soit divisible par 7.

  Le caractère de divisibilité par 7 est compliqué au point qu'il ne peut être utile que pour de très grands nombres.
- 8, il faut et il suffit que le nombre formé par ses trois chiffres de droite soit divisible par 8.

  On peut aussi dire que la condition nécessaire et suffisante est que la somme du chiffre des unités, du double de celui des dizaines et du quadruple de celui des centaines soit divisible par 8.
- 9, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit divisible par 9.

  On peut simplifier le calcul, comme pour 3, en passant les 0 et les 9, ainsi que les sommes partielles donnant 9, telles que 5 et 4 ou 7 et 2 ou 3, 3 et 3 par exemple.
- 10, il faut et il suffit que son dernier chiffre à droite soit 0.

  Semblablement, pour qu'un nombre soit divisible par 100, par 1 000, il faut et il suffit que les chiffres de sa droite soient respectivement 00, 000, ...
- 11, il faut et il suffit que la différence entre la somme des chiffres de rangs impairs et celle des chiffres de rangs pairs soit divisible par 11 (en particulier, elle peut être nulle).
- 12, il faut et il suffit qu'il soit divisible par 3 et par 4, puisque $12 = 3 \times 4$ avec 3 et 4 premiers entre eux ; on doit donc appliquer le caractère de divisibilité par 3 et le caractère de divisibilité par 4, donnés plus haut.

En plus du théorème utilisé ci-dessus pour la divisibilité par 6 ou par 12, à savoir qu' un nombre divisible par deux nombres premiers entre eux est divisible par leur produit, il y a éventuellement lieu d'utiliser des théorèmes généraux comme celui que nous avons énoncé au chapitre 1 où nous avons introduit les mots multiple et divisible : $m = \mathfrak{M}n$ entraîne $m\ell = \mathfrak{M}n$ où ℓ est un nombre naturel quelconque, c'est-à-dire que si un nombre n est diviseur d'un nombre m, il est aussi diviseur de ses multiples $m\ell$. Par exemple, 210 est divisible par 7, car $210 = 21 \times 10$ et 21 est divisible par 7 puisque $21 = 7 \times 3$. Un autre énoncé dit que si deux nombres m et n sont multiples d'un autre, soit ℓ, c'est-à-dire si $m = \mathfrak{M}\ell$ et $n = \mathfrak{M}\ell$, leur somme et leur différence le sont aussi : $m + n = \mathfrak{M}\ell$ et $m - n = \mathfrak{M}\ell$ (où on suppose $m > n$). Par exemple, 224 est divisible par 7, car 210 l'est comme on le voit facilement, ainsi que nous venons de le montrer, et 14 l'est aussi puisque $14 = 7 \times 2$, c'est donc vrai pour leur somme $224 = 210 + 14$. Il en sera de même pour leur différence $196 = 210 - 14$, qui est donc aussi divisible par 7.

Notons de plus que lorsqu'un nombre est diviseur d'un autre, il est aussi diviseur des puissances de cet autre, c'est-à-dire que si $m = \mathfrak{M}n$, on a $m^p = \mathfrak{M}n$ quel que soit le nombre naturel p. Par exemple, le fait que 2 et 3 divisent 6 entraîne que 2 et 3 divisent $6^2 = 36$, $6^3 = 216$, etc.

Profitons de ce que nous venons d'évoquer des théorèmes relatifs à la divisibilité, ou inversement, ce qui revient au même, à la multiplicité, pour en énoncer quelques autres :

- Si $m = \mathfrak{M}n + 1$, on a
$$m^p = \mathfrak{M}n + 1$$
quel que soit le nombre naturel p pris pour exposant.
- Si $m = \mathfrak{M}n - 1$, on a
$$m^p = \mathfrak{M}n + 1 \quad \text{si } p \text{ est pair}$$
ou
$$m^p = \mathfrak{M}n - 1 \quad \text{si } p \text{ est impair.}$$
- La différence $m^p - n^p$ est divisible par $m - n$:
$$m^p - n^p = \mathfrak{M}(m - n);$$
en fait, on a
$$\begin{aligned} m^p - n^p \quad = \quad & \big(m^{p-1} + m^{p-2} \cdot n + m^{p-3} \cdot n^2 + \cdots + m \cdot n^{p-2} \\ & + n^{p-1}\big) \cdot (m - n). \end{aligned}$$
- Si l'exposant est pair, une telle différence est aussi divisible par $m + n$:
$$m^{2p} - n^{2p} = \mathfrak{M}(m + n);$$
mais si l'exposant est impair, c'est la somme qui est divisible par $m + n$:
$$m^{2p+1} + n^{2p+1} = \mathfrak{M}(m + n).$$

3.3.2 Les restes non nuls

A ces théorèmes relatifs à la divisibilité, c'est-à-dire aux divisions pour lesquelles le reste = 0, se rattachent les problèmes concernant les divisions avec restes non nuls. On a notamment le théorème suivant : si on divise les puissances successives n, n^2, n^3, …, n^p, …, d'un nombre n par un nombre p premier avec n (comme vu au chapitre 2, des nombres sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun autre diviseur commun que 1), la division d'au moins une puissance avant n^p donne pour reste 1 ; si n^k est la plus petite, les k premiers restes sont tous différents ; ensuite, ceux-ci se reproduisent périodiquement, indéfiniment dans le même ordre. Si en particulier p est un nombre premier, la plus petite puissance de n dont la division par p donne 1 pour reste est celle qui a pour exposant $p-1$ ou un diviseur de $p-1$.

3.4 Les nombres premiers

Profitons de ce que nous avons, dans ce chapitre, exposé un système pratique de numération, le système décimal, pour donner la liste des nombres premiers inférieurs à 300 : ce sont les nombres à côté desquels il y a un trait dans la table ci-dessous. Pour les autres, les nombres composés, la décomposition en facteurs premiers est donnée, jusque pour 300 inclus. Si vous voulez jouer avec des nombres, cela peut vous être utile. A la suite, nous donnons la liste des nombres premiers au-delà de 300, jusque 4 999.

1		61		121	$= 11^2$	181		241	
2		62	$= 2 \times 31$	122	$= 2 \times 61$	182	$= 2 \times 7 \times 13$	242	$= 2 \times 11^2$
3		63	$= 3^2 \times 7$	123	$= 3 \times 41$	183	$= 3 \times 61$	243	$= 3^5$
4	$= 2^2$	64	$= 2^6$	124	$= 2^4 \times 31$	184	$= 2^3 \times 23$	244	$= 2^2 \times 61$
5		65	$= 5 \times 13$	125	$= 5^3$	185	$= 5 \times 37$	245	$= 5 \times 7^2$
6	$= 2 \times 3$	66	$= 2 \times 3 \times 11$	126	$= 2 \times 3^2 \times 7$	186	$= 2 \times 3 \times 31$	246	$= 2 \times 3 \times 41$
7		67		127		187	$= 11 \times 17$	247	$= 13 \times 19$
8	$= 2^3$	68	$= 2^2 \times 17$	128	$= 2^7$	188	$= 2^2 \times 47$	248	$= 2^3 \times 31$
9	$= 3^2$	69	$= 3 \times 23$	129	$= 3 \times 43$	189	$= 3^3 \times 7$	249	$= 3 \times 83$
10	$= 2 \times 5$	70	$= 2 \times 5 \times 7$	130	$= 2 \times 5 \times 13$	190	$= 2 \times 5 \times 19$	250	$= 2 \times 5^3$
11		71		131		191		251	
12	$= 2^2 \times 3$	72	$= 2^3 \times 3^2$	132	$= 2^2 \times 3 \times 11$	192	$= 2^6 \times 3$	252	$= 2^2 \times 3^2 \times 7$
13		73		133	$= 7 \times 19$	193		253	$= 11 \times 23$
14	$= 2 \times 7$	74	$= 2 \times 37$	134	$= 2 \times 67$	194	$= 2 \times 97$	254	$= 2 \times 127$
15	$= 3 \times 5$	75	$= 3 \times 5^2$	135	$= 3^3 \times 5$	195	$= 3 \times 5 \times 13$	255	$= 3 \times 5 \times 17$
16	$= 2^4$	76	$= 2^2 \times 19$	136	$= 2^3 \times 17$	196	$= 2^2 \times 7^2$	256	$= 2^8$
17		77	$= 7 \times 11$	137		197		257	
18	$= 2 \times 3^2$	78	$= 2 \times 3 \times 13$	138	$= 2 \times 3 \times 23$	198	$= 2 \times 3^2 \times 11$	258	$= 2 \times 3 \times 43$
19		79		139		199		259	$= 7 \times 37$
20	$= 2^2 \times 5$	80	$= 2^4 \times 5$	140	$= 2^2 \times 5 \times 7$	200	$= 2^3 \times 5^2$	260	$= 2^2 \times 5 \times 13$
21	$= 3 \times 7$	81	$= 3^4$	141	$= 3 \times 47$	201	$= 3 \times 67$	261	$= 3^2 \times 29$
22	$= 2 \times 11$	82	$= 2 \times 41$	142	$= 2 \times 71$	202	$= 2 \times 101$	262	$= 2 \times 131$
23		83		143	$= 11 \times 13$	203	$= 7 \times 29$	263	
24	$= 2^3 \times 3$	84	$= 2^2 \times 3 \times 7$	144	$= 2^4 \times 3^2$	204	$= 2^2 \times 3 \times 17$	264	$= 2^3 \times 3 \times 11$
25	$= 5^2$	85	$= 5 \times 17$	145	$= 5 \times 29$	205	$= 5 \times 41$	265	$= 5 \times 53$
26	$= 2 \times 13$	86	$= 2 \times 43$	146	$= 2 \times 73$	206	$= 2 \times 103$	266	$= 2 \times 7 \times 19$
27	$= 3^3$	87	$= 3 \times 29$	147	$= 3 \times 7^2$	207	$= 3^2 \times 23$	267	$= 3 \times 89$
28	$= 2^2 \times 7$	88	$= 2^3 \times 11$	148	$= 2^2 \times 37$	208	$= 2^4 \times 13$	268	$= 2^2 \times 67$
29		89		149		209	$= 11 \times 19$	269	
30	$= 2 \times 3 \times 5$	90	$= 2 \times 3^2 \times 5$	150	$= 2 \times 3 \times 5^2$	210	$= 2 \times 3 \times 5 \times 7$	270	$= 2 \times 3^3 \times 5$
31		91	$= 7 \times 13$	151		211		271	
32	$= 2^5$	92	$= 2^2 \times 23$	152	$= 2^3 \times 19$	212	$= 2^2 \times 53$	272	$= 2^4 \times 17$
33	$= 3 \times 11$	93	$= 3 \times 31$	153	$= 3^2 \times 17$	213	$= 3 \times 71$	273	$= 3 \times 7 \times 13$
34	$= 2 \times 17$	94	$= 2 \times 47$	154	$= 2 \times 7 \times 11$	214	$= 2 \times 107$	274	$= 2 \times 137$
35	$= 5 \times 7$	95	$= 5 \times 19$	155	$= 5 \times 31$	215	$= 5 \times 43$	275	$= 5^2 \times 11$
36	$= 2^2 \times 3^2$	96	$= 2^5 \times 3$	156	$= 2^2 \times 3 \times 13$	216	$= 2^3 \times 3^3$	276	$= 2^2 \times 3 \times 23$
37		97		157		217	$= 7 \times 31$	277	
38	$= 2 \times 19$	98	$= 2 \times 7^2$	158	$= 2 \times 79$	218	$= 2 \times 109$	278	$= 2 \times 139$
39	$= 3 \times 13$	99	$= 3^2 \times 11$	159	$= 3 \times 53$	219	$= 3 \times 73$	279	$= 3^2 \times 31$
40	$= 2^3 \times 5$	100	$= 2^2 \times 5^2$	160	$= 2^5 \times 5$	220	$= 2^2 \times 5 \times 11$	280	$= 2^3 \times 5 \times 7$
41		101		161	$= 7 \times 23$	221	$= 13 \times 17$	281	
42	$= 2 \times 3 \times 7$	102	$= 2 \times 3 \times 17$	162	$= 2 \times 3^4$	222	$= 2 \times 3 \times 37$	282	$= 2 \times 3 \times 47$
43		103		163		223		283	
44	$= 2^2 \times 11$	104	$= 2^3 \times 13$	164	$= 2^2 \times 41$	224	$= 2^5 \times 7$	284	$= 2^2 \times 71$
45	$= 3^2 \times 5$	105	$= 3 \times 5 \times 7$	165	$= 3 \times 5 \times 11$	225	$= 3^2 \times 5^2$	285	$= 3 \times 5 \times 19$
46	$= 2 \times 23$	106	$= 2 \times 53$	166	$= 2 \times 83$	226	$= 2 \times 113$	286	$= 2 \times 11 \times 13$
47		107		167		227		287	$= 7 \times 41$
48	$= 2^4 \times 3$	108	$= 2^2 \times 3^3$	168	$= 2^3 \times 3 \times 7$	228	$= 2^2 \times 3 \times 19$	288	$= 2^5 \times 3^2$
49	$= 7^2$	109		169	$= 13^2$	229		289	$= 17^2$
50	$= 2 \times 5^2$	110	$= 2 \times 5 \times 11$	170	$= 2 \times 5 \times 17$	230	$= 2 \times 5 \times 23$	290	$= 2 \times 5 \times 29$
51	$= 3 \times 17$	111	$= 3 \times 37$	171	$= 3^2 \times 19$	231	$= 3 \times 7 \times 11$	291	$= 3 \times 97$
52	$= 2^2 \times 13$	112	$= 2^4 \times 7$	172	$= 2^2 \times 43$	232	$= 2^3 \times 29$	292	$= 2^2 \times 73$
53		113		173		233		293	
54	$= 2 \times 3^3$	114	$= 2 \times 3 \times 19$	174	$= 2 \times 3 \times 29$	234	$= 2 \times 3^2 \times 13$	294	$= 2 \times 3 \times 49$
55	$= 5 \times 11$	115	$= 5 \times 23$	175	$= 5^2 \times 7$	235	$= 5 \times 47$	295	$= 5 \times 59$
56	$= 2^3 \times 7$	116	$= 2^2 \times 29$	176	$= 2^4 \times 11$	236	$= 2^2 \times 59$	296	$= 2^3 \times 37$
57	$= 3 \times 19$	117	$= 3^2 \times 13$	177	$= 3 \times 59$	237	$= 3 \times 79$	297	$= 3^3 \times 11$
58	$= 2 \times 29$	118	$= 2 \times 59$	178	$= 2 \times 89$	238	$= 2 \times 7 \times 17$	298	$= 2 \times 149$
59		119	$= 7 \times 17$	179		239		299	$= 13 \times 23$
60	$= 2^2 \times 3 \times 5$	120	$= 2^3 \times 3 \times 5$	180	$= 2^2 \times 3^2 \times 5$	240	$= 2^4 \times 3 \times 5$	300	$= 2^2 \times 3 \times 5^2$

Nombres premiers entre 300 et 5 000 :

307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997,

1 009, 1 013, 1 019, 1 021, 1 031, 1 033, 1 039, 1 049, 1 051, 1 061, 1 063, 1 069, 1 087, 1 091, 1 093, 1 097, 1 103, 1 109, 1 117, 1 123, 1 129, 1 151, 1 153, 1 163, 1 171, 1 181, 1 187, 1 193, 1 201, 1 213, 1 217, 1 223, 1 229, 1 231, 1 237, 1 249, 1 259, 1 277, 1 279, 1 283, 1 289, 1 291, 1 297, 1 301, 1 303, 1 307, 1 319, 1 321, 1 327, 1 361, 1 367, 1 373, 1 381, 1 399, 1 409, 1 423, 1 427, 1 429, 1 433, 1 439, 1 447, 1 451, 1 453, 1 459, 1 471, 1 481, 1 483, 1 487, 1 489, 1 493, 1 499, 1 511, 1 523, 1 531, 1 543, 1 549, 1 553, 1 559, 1 567, 1 571, 1 579, 1 583, 1 597, 1 601, 1 607, 1 609, 1 613, 1 619, 1 621, 1 627, 1 637, 1 657, 1 663, 1 667, 1 669, 1 693, 1 697, 1 699, 1 709, 1 721, 1 723, 1 733, 1 741, 1 747, 1 753, 1 759, 1 777, 1 783, 1 787, 1 789, 1 801, 1 811, 1 823, 1 831, 1 847, 1 861, 1 867, 1 871, 1 873, 1 877, 1 879, 1 889, 1 901, 1 907, 1 913, 1 931, 1 933, 1 949, 1 951, 1 973, 1 979, 1 987, 1 993, 1 997, 1 999,

2 003, 2 011, 2 017, 2 027, 2 029, 2 039, 2 053, 2 063, 2 069, 2 081, 2 083, 2 087, 2 089, 2 099, 2 111, 2 113, 2 129, 2 131, 2 137, 2 141, 2 143, 2 153, 2 161, 2 179, 2 203, 2 207, 2 213, 2 221, 2 237, 2 239, 2 243, 2 251, 2 267, 2 269, 2 273, 2 281, 2 287, 2 293, 2 297, 2 309, 2 311, 2 333, 2 339, 2 341, 2 347, 2 351, 2 357, 2 371, 2 377, 2 381, 2 383, 2 389, 2 393, 2 399, 2 411, 2 417, 2 423, 2 437, 2 441, 2 447, 2 459, 2 467, 2 473, 2 477, 2 503, 2 521, 2 531, 2 539, 2 543, 2 549, 2 551, 2 557, 2 579, 2 591, 2 593, 2 609, 2 617, 2 621, 2 633, 2 647, 2 657, 2 659, 2 663, 2 671, 2 677, 2 683, 2 687, 2 689, 2 693, 2 699, 2 707, 2 711, 2 713, 2 719, 2 729, 2 731, 2 741, 2 749, 2 753, 2 767, 2 777, 2 789, 2 791, 2 797, 2 801, 2 803, 2 819, 2 833, 2 837, 2 843, 2 851, 2 857, 2 861, 2 879, 2 887, 2 897, 2 903, 2 909, 2 917, 2 927, 2 939, 2 953, 2 957, 2 963, 2 969, 2 971, 2 999,

3 001, 3 011, 3 019, 3 023, 3 037, 3 041, 3 049, 3 061, 3 067, 3 079, 3 083, 3 089, 3 109, 3 119, 3 121, 3 137, 3 163, 3 167, 3 169, 3 181, 3 187, 3 191, 3 203, 3 209, 3 217, 3 221, 3 229, 3 251, 3 253, 3 257, 3 259, 3 271, 3 299, 3 301, 3 307, 3 313, 3 319, 3 323, 3 329, 3 331, 3 343, 3 347, 3 359, 3 361, 3 371, 3 373, 3 389, 3 391, 3 407, 3 413, 3 433, 3 449, 3 457, 3 461, 3 463, 3 467, 3 469, 3 491, 3 499, 3 511, 3 517, 3 527, 3 529, 3 533, 3 539, 3 541, 3 547, 3 557, 3 559, 3 571, 3 581, 3 583, 3 593, 3 607, 3 613, 3 617, 3 623, 3 631, 3 637, 3 643, 3 659, 3 671, 3 673, 3 677, 3 691, 3 697, 3 701, 3 709, 3 719, 3 727, 3 733, 3 739, 3 761, 3 767, 3 769, 3 779, 3 793, 3 797, 3 803, 3 821, 3 823, 3 833, 3 847, 3 851, 3 853, 3 863, 3 877, 3 881, 3 889, 3 907, 3 911, 3 917, 3 919, 3 923, 3 929, 3 931, 3 943, 3 947, 3 967, 3 989,

4 001, 4 003, 4 007, 4 013, 4 019, 4 021, 4 027, 4 049, 4 051, 4 057, 4 073, 4 079, 4 091, 4 093, 4 099, 4 111, 4 127, 4 129, 4 133, 4 139, 4 153, 4 157, 4 159, 4 177, 4 201, 4 211, 4 217, 4 219, 4 229, 4 231, 4 241, 4 243, 4 253, 4 259, 4 261, 4 271, 4 273, 4 283, 4 289, 4 297, 4 327, 4 337, 4 339, 4 349, 4 357, 4 363, 4 373, 4 391, 4 397, 4 409, 4 421, 4 423, 4 441, 4 447, 4 451, 4 457, 4 463, 4 481, 4 483, 4 493, 4 507, 4 513, 4 517, 4 519, 4 523, 4 547, 4 549, 4 561, 4 567, 4 583, 4 591, 4 597, 4 603, 4 621, 4 637, 4 639, 4 643, 4 649, 4 651, 4 657, 4 663, 4 673, 4 679, 4 691, 4 703, 4 721, 4 723, 4 729, 4 733, 4 751, 4 759, 4 783, 4 787, 4 789, 4 793, 4 799, 4 801, 4 813, 4 817, 4 831, 4 861, 4 871, 4 877, 4 889, 4 903, 4 909, 4 919, 4 931, 4 933, 4 937, 4 943, 4 951, 4 957, 4 967, 4 969, 4 973, 4 987, 4 993, 4 999.

On ne connaît pas de formule générale donnant tous les nombres premiers. On a seulement trouvé des formules empiriques donnant quelques-uns d'entre eux. Par exemple, quand on fait $n = 1, 2, 3, \ldots, 39, 40$ dans l'expression $n^2 - n + 41$, on n'obtient que des nombres premiers ; le premier, pour $n = 1$, est 41, et le quarantième, pour $n = 40$, est 1 601, mais on en passe beaucoup puisque 1601 est le 253ème nombre premier. Avec l'expression $n^2 - n + 17$ où on fait $n = 1, 2, \ldots, 16$, on ne trouve aussi que des nombres premiers, de 17 à 257, presque tous différents des précédents, mais moins nombreux, 16 au lieu de 40.

En regard, il y a de nombreuses formules qui donnent une infinité de nombres composés. C'est par exemple le cas des expressions suivantes : n^k où n et k sont des nombres naturels > 1, $n^4 + 4$ pour $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$; $n^6 + n^4 + n^2 + 1$ pour $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$; $n^2 - 1$ pour $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$; plus généralement, $n^2 - m^2$ où m est un nombre naturel quelconque, pour $n = m + 2, m + 3, m + 4, \ldots$; plus généralement encore, $n^k - m^k$ où n et m sont des nombres naturels quelconques avec $n > m + 1$ et k un nombre naturel > 1 ; par exemple, avec $n = 3$ et $m = 1$, $3^k - 1$ pour $k = 2, 3, 4, 5, \ldots$; $2^{2n+1} + 1$ pour $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$; $3^{2n+1} + 2^{2n+1}$ pour $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Au fur et à mesure qu'on avance dans la suite des nombres naturels, la proportion de ceux qui sont premiers diminue. Cette décroissance de la proportion de nombres premiers est bien naturelle : parmi les plus petits nombres, on a d'abord des nombres premiers, puis au fur et à mesure qu'on avance, on rencontre tous leurs multiples, c'est-à-dire des nombres composés, qui deviennent donc proportionnellement de plus en plus nombreux. Jusque 10, il y a cinq nombres premiers, si on compte 1 parmi ceux-ci, ce qui en fait un sur deux. Comme on peut le voir dans le tableau ci-avant, jusque 100, il y en a 26, soit environ un sur quatre, puis 21 entre 100 et 200, soit environ un sur cinq, et seulement 16 entre 200 et 300. Sur l'ensemble des deux centaines suivantes, de 300 jusque 500, il n'y en a que 33. Cela fait un total de 96 jusque 500. Entre 500 et 1 000, il y en a seulement 73. Ceci donne un total de 169 jusque 1 000, soit 16, 9 %, alors que nous avions 26 % et 21 % pour chacune des deux premières centaines. Le nombre $P(n)$ de nombres premiers $\leq n$ est donné dans la table suivante pour différentes valeurs de n :

n	10	50	100	200	300	400	500	600	800	1 000	2 000
$P(n)$	5	16	26	47	63	79	96	110	140	169	304

n	3 000	5 000	7 500	10 000	13000	100 000	1 000 000	10 000 000	1 000 000 000
$P(n)$	431	670	951	1 230	1 548	9 593	78 499	664 580	50 847 479

On voit que parmi tous les nombres naturels jusqu'au million, il n'y a que 7,85 % de nombres premiers et que jusqu'au milliard leur proportion moyenne est inférieure à 5,1 %. Nous reviendrons au chapitre 9 sur cette diminution de la proportion de nombres premiers quand on avance vers les grands nombres.

A propos des nombres premiers, on peut citer le *théorème de Fermat* (Pierre de Fermat, mathématicien français, 1601-1665) :

> *Si un nombre n n'est pas multiple d'un nombre premier p, celui-ci divise $n^{p-1} - 1$; en d'autres termes, si p est premier et que $n \neq \mathfrak{M}p$, on a*
>
> $$n^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}p$$
>
> *ou encore*
>
> $$n^{p-1} = \mathfrak{M}p + 1.$$

Par exemple, si nous prenons $n = 3$ et $p = 7$, on a $3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$, qui est bien $= \mathfrak{M}7$ puisque $700 = 100 \times 7$ et $28 = 4 \times 7$ le sont. Autre exemple : avec $n = 8$ et $p = 3$ qui est premier et tel que $n \neq \mathfrak{M}p$, on a $8^2 - 1 = 64 - 1 = 63$, qui est bien $= \mathfrak{M}3$ puisque 60 et 3 le sont. Ce théorème a pour conséquence que quel que soit le nombre premier p, il divise $n^p - n$; en effet, on a $n^p - n = n\left(n^{p-1} - 1\right)$ et p divise un des deux facteurs de cette expression, car soit c'est un diviseur de n ou sinon, d'après le théorème de Fermat, il divise $n^{p-1} - 1$. Ce résultat est d'ailleurs évident pour $p = 2$, car alors cette expression devient $n(n-1)$; si n est pair, c'est n qui est $\mathfrak{M}2$, tandis que si n est impair, c'est $n - 1$ qui est $\mathfrak{M}2$. Nous verrons au chapitre 5, après avoir introduit les factorielles, d'autres énoncés où il est question d'un nombre premier, notamment le théorème de Wilson. Concernant le théorème de Fermat donné ci-avant, signalons la généralisation suivante : dans les mêmes conditions, à savoir que p est premier et que n n'en est pas multiple, on a

$$n^{k(p-1)} - 1 = \mathfrak{M}p$$

où k est un nombre naturel quelconque. On peut en déduire, par le même raisonnement que ci-dessus, que si p est premier, mais qu'il divise n ou non, on a toujours

$$n^{k(p-1)+1} - n = \mathfrak{M}p.$$

On peut encore démontrer que si, comme pour le théorème de Fermat, p est premier et que n n'en est pas multiple, on a

$$n^{p(p-1)} - 1 = \mathfrak{M}p^2$$

et plus généralement

$$n^{kp(p-1)} - 1 = \mathfrak{M}p^2.$$

Enfin, en soustrayant l'une de l'autre les relations de Fermat écrites pour deux nombres différents n et m, on voit que si p est premier et que ni n ni m n'en est multiple, on a

$$n^{p-1} - m^{p-1} = \mathfrak{M}p$$

(d'où $n^p m - nm^p = \mathfrak{M}p$ que n et m soient ou non multiples de p) et plus généralement

$$n^{k(p-1)} - m^{k(p-1)} = \mathfrak{M}p.$$

Concernant encore le théorème de Fermat, il est utile de signaler aussi que sa réciproque n'est pas vraie ; il y a en effet certains nombres p tels qu'on ait $n^{p-1} - 1 = \mathfrak{M}p$ sans que ceci entraîne que ce nombre p soit premier, même si n n'en est pas multiple.

La table que nous avons donnée ci-avant, jusque 300, avec les nombres premiers et la décomposition en facteurs des nombres composés, est utile pour voir si deux nombres donnés sont premiers entre eux. Il suffit de vérifier, grâce à la table, si les deux nombres n'ont aucun facteur premier commun (si ce n'est 1, qui n'est évidemment pas indiqué). En particulier, ils sont évidemment premiers entre eux si un des deux est un nombre premier, sauf quand l'autre en est multiple. Il est immédiat que deux nombres pairs ne sont jamais premiers entre eux puisqu'ils ont le facteur 2 en commun. Pour les autres nombres, c'est moins immédiat et il est alors utile de s'aider de la table.

On appelle *indicateur d'Euler d'un nombre n*, du nom de ce célèbre mathématicien suisse L. Euler (1707-1783), le nombre de nombres qui, de 1 à n, sont premiers avec n. Il faut y inclure 1 chaque fois, car d'après la définition, 1 est premier avec tout autre nombre (le p.g.c.d. de 1 et n est toujours 1) ; mais il faut en exclure n, car n (> 1) n'est jamais premier avec lui-même puisque n a toujours n comme diviseur commun avec lui-même. On a pu démontrer que lorsque deux nombres sont premiers entre eux, l'indicateur d'Euler de leur produit est le produit de leurs indicateurs d'Euler respectifs. Prenons par exemple 3 et 4, qui sont premiers entre eux ; il y a 2 nombres < 3 qui sont premiers avec 3, 1 et 2, et aussi 2 nombres < 4 qui sont premiers avec 4, 1 et 3 ; par conséquent, leur produit $3 \times 4 = 12$ devra en avoir $2 \times 2 = 4$, ce qui est bien le cas : ce sont 1, 5, 7 et 11, qui sont premiers avec 12. Autre exemple : 4 et 7, aussi premiers entre eux puisque 7 est premier et que 4 n'en est évidemment pas multiple ; comme nous venons de voir, l'indicateur d'Euler de 4 est 2, tandis que celui de 7 est $7 - 1 = 6$, car comme pour tout nombre premier, tous les nombres qui lui sont inférieurs sont premiers avec lui ; l'indicateur d'Euler de leur produit $4 \times 7 = 28$ doit donc être $2 \times 6 = 12$, ce qui est bien le cas, car tous les nombres < 28 premiers avec 28 sont les 14 nombres impairs inférieurs à 28, moins les 2 nombres 7 et 21 qui ont 7 en facteur commun avec 28.

Dans la table, où tous les nombres premiers inférieurs à 300 sont mis en évidence, on voit qu'il arrive fréquemment qu'il y en ait deux qui sont des nombres impairs successifs et qui ne diffèrent donc que de 2 unités, séparés qu'ils sont seulement par un nombre pair (aucun nombre pair au-delà de 2 n'est premier puisqu'ils sont tous multiples au moins de 2). Deux tels nombres premiers dont la différence n'est que 2 sont parfois appelés *nombres premiers jumeaux*. Jusque 500, ce sont

3 et 5,	29 et 31,	101 et 103,	179 et 181,	239 et 241,	347 et 349,
5 et 7,	41 et 43,	107 et 109,	191 et 193,	269 et 271,	419 et 421,
11 et 13,	59 et 61,	137 et 139,	197 et 199,	281 et 283,	431 et 433,
17 et 19,	71 et 73,	149 et 151,	227 et 229,	311 et 313,	461 et 463.

Comme écart entre nombres premiers successifs, après cet écart de 2, avec 1 nombre composé entre les deux, on trouve des écarts de 4, avec 3 nombres composés entre les deux, des écarts de 6, avec 5 nombres composés intermédiaires, des écarts de 10, 12, 14, 8, ... ; de toute façon, l'écart est nécessairement un nombre pair puisqu'au-delà de 2 les nombres premiers sont tous des nombres impairs.

Chapitre 4

Les nombres fractionnaires

4.1 Quelques définitions

Il arrive qu'on soit amené à compter des morceaux d'objets divisés en plusieurs parties égales. L'exemple classique est celui des tartes qu'on a partagées en quatre, par exemple, parce que chacun en mangera un quart. La fraction obtenue en partageant l'objet, ici la tarte, en quatre se représente par $\frac{1}{4}$, ce qui s'énonce un quart ; la barre horizontale, appelée *barre de fraction*, rappelle le couteau coupant la tarte. Une tarte entière, c'est évidemment quatre quarts de tarte, c'est-à-dire qu'on a $\frac{1}{4} \times 4 = \frac{4}{4} = 1$. Il revient évidemment au même de prendre les quatre morceaux d'une même tarte divisée en quatre ou de diviser quatre tartes en quatre et prendre un morceau de chacune. Si cinq personnes s'apprêtent à manger un quart de tarte chacune, il en faut cinq quarts, soit une tarte entière plus un quart, ce qu'on peut écrire $1\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$. Ce que nous venons d'exposer pour des quarts peut évidemment être transposé à des demis, avec $\frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{2} = 1$, à des tiers, avec $\frac{1}{3} \times 3 = \frac{3}{3} = 1$, à des cinquièmes, avec $\frac{1}{5} \times 5 = \frac{5}{5} = 1$, etc.

Une *fraction* est une expression de la forme $\frac{m}{n}$, où m et n sont des nombres naturels, qui représente m $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, le $n^{\text{ème}}$ étant le résultat de la division de 1 en n parties égales. Le nombre m qui est au-dessus de la barre de fraction et qui indique combien on prend de $n^{\text{èmes}}$ de l'unité s'appelle le *numérateur*. Le nombre n qui est en-dessous de la barre de fraction et qui indique en combien de parts l'unité a été divisée s'appelle le *dénominateur*. Ce sont les *termes* de la fraction.

Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont divisibles par un même nombre, on peut les remplacer simultanément par leurs quotients respectifs par ce diviseur commun. On a en effet toujours

$$\frac{\ell m}{\ell n} = \frac{m}{n}$$

quel que soit le nombre ℓ. Par exemple deux quarts de tarte, c'est une demi-tarte, c'est-à-dire $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$: on a divisé haut et bas par 2. De même, on a $\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\,\frac{1}{2}\cdot$ Si le numérateur et le dénominateur sont de grands nombres, on peut être amené à répéter une telle opération, donc encore diviser haut et bas par un même nombre, éventuellement plusieurs fois. Chaque fois, on simplifie la fraction par un diviseur commun au numérateur et au dénominateur ; on trouve ainsi une fraction égale dont les termes sont plus petits. Quand ce n'est plus possible, la fraction est dite *irréductible* ou *réduite à sa plus simple expression.* Pour cela, il faut et il suffit que ses termes soient premiers entre eux. Plutôt que d'y arriver éventuellement en plusieurs étapes, on peut le faire directement : il suffit de diviser les deux termes par leur p.g.c.d. (plus grand commun diviseur : voir plus haut). Le numérateur et le dénominateur de la fraction de départ sont respectivement égaux aux produits par un même nombre de ceux de la fraction irréductible obtenue ; c'est ce qu'on appelle des *équimultiples* de ceux-ci. Le numérateur et le dénominateur de toute fraction qui lui serait égale seraient aussi des équimultiples de son numérateur et de son dénominateur.

Une fraction telle que $\frac{1}{n}$, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., s'appelle une *unité fractionnaire* et la fraction $\frac{m}{n}$ est la somme de m unités fractionnaires. Les premières unités fractionnaires, que nous venons d'écrire, s'énoncent "un demi", "un tiers", "un quart", tandis que pour les suivantes, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, etc., on dit "un cinquième", "un sixième", etc.

Nous avons vu ci-dessus qu'on peut écrire $1\,\frac{1}{2}$ plutôt que $\frac{3}{2}$ et un peu plus haut, $1\,\frac{1}{4}$ pour $\frac{5}{4}\cdot$ On peut de même écrire par exemple $3\,\frac{1}{2}$ au lieu de $\frac{7}{2}$ et $3\,\frac{3}{4}$ au lieu de $\frac{15}{4}$, etc. Cela revient à faire la division du numérateur m de la fraction par son dénominateur n et écrire le quotient par défaut (voir chapitre 1), qui est le nombre entier de fois que n est contenu dans m, puis écrire à côté le reste de cette division sous forme de la fraction indiquant le nombre d'unités fractionnaires restantes. Oralement, on énonce successivement le nombre entier qui est le quotient par défaut et la fraction restante, en énonçant le "un" lorsque le numérateur de celle-ci est 1, sauf pour $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, et en intercalant "et" lorsque le numérateur est 1. C'est ainsi que par exemple pour $3\,\frac{1}{2}$, $3\,\frac{1}{3}$, $3\,\frac{1}{4}$, $3\,\frac{1}{5}$, $3\,\frac{3}{4}$, $3\,\frac{2}{5}$, on dit respectivement "trois et demi", "trois et un tiers", "trois et quart", "trois et un cinquième", "trois, trois quarts", "trois, deux cinquièmes". Cela constitue le seul cas où la juxtaposition de deux nombres sans aucun signe entre eux représente leur somme, puisque normalement dans une telle juxtaposition, c'est le signe $\times$ ou $\cdot$ qui est sous-entendu et qu'il s'agit donc d'une multiplication, par exemple pour $2n$ qui représente le produit de n par 2, alors qu'ici on a par exemple $3\,\frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4}\cdot$

On appelle *inverse* d'un nombre le nombre qui donne 1 comme produit quand on le multiplie par ce nombre. Il en résulte que $\frac{1}{n}$ est l'inverse de n, car $\frac{1}{n} \times n = 1$. Mais notons bien que cette notion d'inverse d'un nombre s'applique aussi lorsque n est un nombre quelconque, donc à toutes les espèces de nombres, par exemple les nombres irrationnels, que nous introduirons plus loin. L'inverse d'une fraction $\frac{m}{n}$ est $\frac{n}{m}$; on peut écrire

$$\frac{1}{\frac{m}{n}} = \frac{n}{m}\cdot$$

Multiplier par l'inverse d'un nombre revient à diviser par ce nombre ; diviser par l'inverse d'un nombre revient à multiplier par ce nombre.

Inversement, tout nombre naturel peut être considéré comme une fraction dont le dénominateur serait 1, c'est-à-dire $n = \frac{n}{1}\cdot$ Un tel nombre est appelé *entier*, par opposition aux vrais nombres fractionnaires, qui sont supposés être de la forme $\frac{m}{n}$ avec $n \neq 1$; notons que ceci s'applique aussi aux nombres négatifs, que nous introduirons au chapitre 6, aussi bien qu'aux entiers positifs que sont les nombres naturels.

4.2 Les opérations fondamentales

4.2.1 L'addition et la soustraction

L'*addition* de deux fractions n'est pas toujours très aisée à effectuer. C'est facile lorsque les dénominateurs sont les mêmes : il suffit alors d'additionner les numérateurs ; par exemple, trois quarts plus deux quarts font cinq quarts :

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}\cdot$$

Si le dénominateur d'une des deux fractions est multiple de celui de l'autre fraction, il suffit de multiplier les termes de cette autre fraction par le rapport des deux dénominateurs ; on est alors ramené au cas précédent : par exemple,

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}\cdot$$

Dans le cas général, il faut réussir à convertir les fractions données en des fractions égales ayant toutes les deux le même dénominateur ; on dit alors qu'elles sont *réduites au même dénominateur*. Un moyen pour cela serait de multiplier les termes de chacune des deux fractions à additionner par le dénominateur de l'autre :

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq}{nq} + \frac{np}{nq} = \frac{mq+np}{nq}\cdot$$

Mais pour éviter d'avoir de trop grands nombres, on peut simplement prendre comme dénominateur commun le p.p.c.m. (plus petit commun multiple : voir plus haut) des dénominateurs. Par exemple, soit à additionner $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{6}$; puisque le p.p.c.m. de 4 et 6 est $12 = 4 \times 3 = 6 \times 2$, il vient

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}\cdot$$

On procède de même pour additionner plus de deux fractions et de manière analogue pour *soustraire* deux fractions. Dans tous les cas, il est utile de réduire la fraction obtenue à sa plus simple expression ; par exemple

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\cdot$$

Dans les additions et les soustractions peuvent intervenir à la fois des fractions et des nombres entiers ; il suffit de considérer ces derniers comme des fractions de dénominateur 1.

4.2.2 La multiplication

Pour multiplier une fraction par un nombre entier, on multiplie le numérateur par ce nombre, puis on simplifie éventuellement ; par exemple

$$\frac{3}{8} \times 2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}\cdot$$

Pour multiplier une fraction par une autre, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux ; par exemple

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\cdot$$

Par suite, la $p^{\text{ème}}$ puissance d'une fraction est celle dont les termes sont respectivement les $p^{\text{èmes}}$ puissances de ceux de la fraction proposée :

$$\left(\frac{m}{n}\right)^p = \frac{m^p}{n^p}\cdot$$

De la règle qui vient d'être énoncée pour la multiplication des fractions entre elles, il résulte que l'inverse de $\frac{m}{n}$ est $\frac{n}{m}$, puisque

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n} = \frac{n \cdot m}{m \cdot n} = 1.$$

4.2.3 La division

Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par l'inverse de cette autre, c'est-à-dire celle qu'on obtient en intervertissant son numérateur et son dénominateur ; par exemple :

$$\frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Ici encore, les nombres entiers doivent être considérés comme des fractions de dénominateur 1 ; donc pour diviser une fraction par un nombre entier, on multiplie simplement le dénominateur par ce nombre.

4.3 La comparaison des fractions

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction soit plus grande ou plus petite que 1 est que son numérateur soit respectivement plus grand ou plus petit que son dénominateur. Si une fraction est plus petite que 1, on précise volontiers que c'est une "fraction proprement dite". Si le numérateur est plus grand qu'une ou plusieurs fois le dénominateur, au contraire, la fraction est plus grande qu'un nombre naturel. Comme cela a été exposé un peu plus haut, on peut alors séparer sa partie entière et sa partie fractionnaire, celle qui est < 1. Comme nous avons vu, la partie entière est le quotient entier par défaut du numérateur divisé par le dénominateur et la partie fractionnaire est la fraction ayant le reste de la division pour numérateur et ayant pour dénominateur celui de la fraction considérée. Par exemple, dans

$$\frac{20}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = 6\,\frac{2}{3},$$

6 est la partie entière et $\frac{2}{3}$ est la partie fractionnaire ; cette fraction $\frac{20}{3}$ est comprise entre les nombres naturels 6 et 7.

Pour comparer deux fractions, on les réduit au même dénominateur, comme expliqué ci-avant pour les additionner ou les soustraire. La plus grande est évidemment celle qui a le plus grand numérateur quand elles sont réduites au même dénominateur. La comparaison d'une fraction avec l'unité, à laquelle nous venons de faire allusion ci-dessus, peut être considérée comme cas particulier de ceci : il faut comparer la fraction donnée $\frac{m}{n}$ à $1 = \frac{1}{1}$ et on doit alors prendre pour dénominateur commun celui n de la fraction proposée (puisque le p.p.c.m. d'un nombre naturel et de 1 est ce nombre), par lequel on doit multiplier les termes de la fraction $\frac{1}{1}$, ce qui rend le numérateur de celle-ci égal à n. D'autre part, si deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur ; par exemple,

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{5}.$$

4.4 La numération décimale

4.4.1 Mise des nombres sous forme décimale

Un nombre fractionnaire peut être représenté en numération décimale comme suit. Pour la partie entière, on procède comme expliqué au chapitre précédent : les chiffres à partir de la droite donnent les nombres d'unités des différents ordres, c'est-à-dire les unités simples, les dizaines, les centaines, etc. La partie fractionnaire, qu'alors on appelle souvent la *partie décimale*, se met à droite de la partie entière, séparée de celle-ci par une virgule (les Américains et, par suite, les appareils électroniques mettent un point au lieu d'une virgule ; oralement, même chez nous, en raison de la lecture courante d'appareils électroniques, on tend de plus en plus à remplacer le mot "virgule" par le mot "point" ; c'est plus court !). Cette partie décimale se construit d'une manière semblable : les chiffres successifs à partir de la virgule donnent les nombres d'unités décimales des ordres décimaux successifs, c'est-à-dire les dixièmes ($\frac{1}{10}$), les centièmes ($\frac{1}{100}$), les millièmes ($\frac{1}{1\,000}$), les dix-millièmes ($\frac{1}{10\,000}$), etc. Par exemple, on a $\frac{5}{4} = 1\,\frac{1}{4} = 1{,}25$ car $\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ $(= \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4})$. Semblablement, on trouve $\frac{1}{40} = 0{,}025$ puisque $\frac{2}{100} + \frac{5}{1\,000} = \frac{20+5}{1\,000} = \frac{25}{1\,000} = \frac{1}{40}\cdot$ En pratique, pour obtenir les chiffres décimaux successifs de la représentation décimale complète de la fraction $\frac{m}{n}$, on effectue la division de m par n ; on met une virgule à droite du quotient entier ; ensuite on continue la division par n avec le reste après l'avoir multiplié par 10 en mettant un 0 à sa droite, ce qui donne le premier chiffre à droite de la virgule ; avec le nouveau reste, on procède de même, pour obtenir le deuxième chiffre après la virgule, et ainsi de suite. Si finalement on obtient un reste nul, on n'écrit plus rien à droite, c'est-à-dire qu'on ne met jamais des 0 à la droite de la partie décimale. Si au contraire on n'obtient jamais un reste nul et qu'on soit donc amené à continuer indéfiniment, c'est que la partie décimale comporte une infinité de chiffres, cas que nous examinerons ci-dessous.

Il faut noter que quand on déplace la virgule d'un rang vers la droite, on multiplie le nombre par 10 et quand on la déplace d'un rang vers la gauche, on le divise par 10. C'est ce qu'on voit en comparant par exemple les deux cas vus ci-dessus $\frac{1}{40} = 0{,}025$ et $\frac{1}{4} = 0{,}25$ ou encore $\frac{5}{4} = 1{,}25$ avec $\frac{50}{4} = \frac{48+2}{4} = \frac{48}{4} + \frac{2}{4} = 12 + \frac{1}{2} = 12{,}5$. Il en résulte qu'un déplacement de la virgule de n rangs vers la droite ou vers la gauche a pour effet respectivement de multiplier ou diviser le nombre décimal par 10^n.

4.4.2 Cas d'une infinité de décimales

Un gros problème qui se présente dans la mise d'une fraction sous forme de nombre décimal est qu'il peut arriver, comme nous venons d'y faire allusion, qu'on soit amené à continuer indéfiniment, c'est-à-dire qu'il y ait une infinité de chiffres à mettre après la virgule. C'est ainsi que par exemple $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \cdots$ et ainsi de suite, c'est-à-dire que ce n'est qu'à la limite en additionnant une infinité de fractions de la forme $\frac{3}{10^n}$ avec n variant de 1 à l'infini, qu'on arrive à une somme de $\frac{1}{3}$; on a par conséquent $\frac{1}{3} = 0{,}333\,33\ldots$ avec une infinité de 3 après la virgule. On trouve semblablement $\frac{1}{9} = 0{,}111\,11\ldots$ avec une infinité de 1. Il est à noter qu'on n'aura jamais une infinité de 9 à la droite de la partie décimale ; en particulier $0{,}999\,99\ldots$ à la limite vaut 1.

Pour savoir si une fraction donnée va conduire à une infinité de décimales lors de sa conversion en nombre décimal, il faut d'abord la réduire à sa plus simple expression, puis appliquer la règle suivante, valable pour une *fraction irréductible* : *pour qu'une telle fraction soit convertible en nombre décimal ayant un nombre fini de chiffres après la virgule, il faut et il suffit que son dénominateur n'ait pas d'autres facteurs premiers que* 2 *et* 5, c'est-à-dire que sa décomposition en facteurs premiers soit de la forme $2^p \cdot 5^q$, un des deux nombres p ou q pouvant être nul. Le nombre de chiffres décimaux du nombre décimal égal à cette fraction est égal au plus grand des exposants p et q s'ils sont différents ou égal à chacun d'eux si $p = q$. On peut le vérifier sur les exemples donnés plus haut de $\frac{5}{4} = 1{,}25$ avec $4 = 2^2$ et de $\frac{1}{40} = 0{,}025$ avec $40 = 2^3 \cdot 5$ (ou encore $\frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12{,}5$).

Dans le cas contraire où la fraction réduite à sa plus simple expression $\frac{m}{n}$ a un dénominateur n qui contient au moins un autre facteur premier que 2 et 5 et où par conséquent le nombre décimal qui lui est égal (on dit que cette fraction engendre ce nombre décimal, qu'elle en est la *génératrice*) a une infinité de décimales, celles-ci, à partir d'un certain rang, se reproduisent périodiquement. On le voit dans les exemples particulièrement simples donnés ci-avant de $\frac{1}{3} = 0{,}333\,33\ldots$ et de $\frac{1}{9} = 0{,}111\,11\ldots$; dans le premier cas, la période est 3 et dans le second cas, elle est 1. Pour ces deux cas, la période n'a qu'un chiffre. Mais la période peut contenir plusieurs chiffres. C'est le cas pour $\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\,142\,857\,142\,857\ldots$; la période est ici 142 857, qui a six chiffres. C'est le cas aussi pour le nombre décimal périodique $0{,}090\,909\,09\ldots$ engendré par la fraction ordinaire $\frac{1}{11}$; sa période est 09, qui a deux chiffres. C'est le cas encore pour $\frac{5}{11} = 0{,}454\,545\ldots$, dont la période est 45, qui a aussi deux chiffres.

Si la périodicité du nombre décimal apparaît immédiatement après la virgule, on dit que c'est un *nombre décimal périodique simple*. Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'au moins un chiffre apparaît entre la virgule et la première apparition de la période, on dit que c'est un *nombre décimal périodique mixte* ; les chiffres qui sont entre la virgule et la première apparition de la période sont appelés les *chiffres irréguliers*. Le premier cas se présente lorsque la fraction ordinaire irréductible, c'est-à-dire réduite à sa plus simple expression, $\frac{m}{n}$ qui l'engendre a un dénominateur n dont les facteurs premiers sont tous premiers avec 10, donc lorsque ce dénominateur n n'est multiple ni de 2, ni de 5. Le second cas se présente lorsque le dénominateur n de la fraction génératrice, réduite à sa plus simple expression, contient en facteur, avec d'autres facteurs premiers, au moins 2 ou 5 et le nombre de chiffres irréguliers est égal au plus grand des exposants de 2 et 5 dans la décomposition en facteurs premiers de ce dénominateur n. Par exemple, on a $\frac{1}{6} = 0{,}166\,666\ldots$ et effectivement $6 = 2 \cdot 3$: 2 et 5 figurent dans cette décomposition en facteurs premiers du dénominateur 6 respectivement avec l'exposant 1 et l'exposant 0. Autre exemple : $\frac{1}{28} = 0{,}035\,714\,285\,714\,28\ldots$; on a $28 = 2^2 \cdot 7$, d'où les deux chiffres irréguliers 03 avant la première période 571 428. Autres exemples encore : $\frac{4}{35} = 0{,}114\,285\,714\,285\,7\ldots$ et $\frac{8}{35} = 0{,}228\,571\,428\,571\,4\ldots$; on a $35 = 5 \times 7$, d'où le seul chiffre irrégulier 1 ou 2 respectivement avant la période 142 857 ou 285 714.

Le nombre de chiffres contenus dans la période peut être prévu de la manière suivante. Soit $\frac{m}{n}$ la fraction ordinaire irréductible génératrice. Appelons n' le nombre obtenu en supprimant dans le dénominateur n les facteurs 2 et 5 éventuels avec leurs exposants (dans le cas d'une fraction génératrice d'un nombre décimal périodique mixte, tandis que simplement $n' = n$ pour la génératrice d'un nombre décimal périodique simple). Considérons tous les nombres successifs qui sont formés uniquement avec le chiffre 9 : 9, 99, 999, … (donc les nombres qui sont de la forme $10^q - 1$, où $q = 1, 2, 3, \ldots$). Le plus petit de ces nombres qui est multiple de n' a un nombre de chiffres égal au nombre de chiffres de la période dans le nombre décimal périodique que cette fraction engendre. Il y a par exemple un seul chiffre dans la période pour $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ et pour $\frac{1}{6} = 0{,}166\,6\ldots$, car $9 = \mathfrak{M}3$. Il y en a deux pour $\frac{1}{11} = 0{,}090\,909\ldots$, pour $\frac{5}{11} = 0{,}454\,545\ldots$, etc., car $9 \neq \mathfrak{M}11$ et $99 = \mathfrak{M}11$. Il y en a six pour $\frac{1}{7} = 0{,}142\,857\,142\,857\ldots$, pour $\frac{1}{28} = 0{,}035\,714\,285\,714\,28\ldots$, etc., car $9 \neq \mathfrak{M}7$, $99 \neq \mathfrak{M}7$, $999 \neq \mathfrak{M}7$, $9\,999 \neq \mathfrak{M}7$, $99\,999 \neq \mathfrak{M}7$ et $999\,999 = \mathfrak{M}7$. On peut noter que $142\,857 \times 7 = 999\,999$, tandis que $142\,857 \times 2 = 285\,714$, $142\,587 \times 3 = 428\,571$, $142\,857 \times 4 = 571\,428$, $142\,857 \times 5 = 714\,285$, $142\,857 \times 6 = 857\,142$: la multiplication de 142 857 par chacun des nombres < 7 permute simplement les chiffres de la période en respectant leur ordre, c'est-à-dire donne les permutations circulaires de 142 857, d'où il résulte que $\frac{2}{7} = 0{,}285\,714\,285\,714\ldots$, …, $\frac{6}{7} = 0{,}857\,142\,857\,142\ldots$

Inversement, on peut trouver la génératrice d'un nombre décimal périodique comme suit. Considérons d'abord un nombre décimal périodique simple, soit de la forme $N{,}PPP\ldots$ où N est la partie entière, qui peut être $= 0$, et P la période. Si

q est le nombre de chiffres dans P, la génératrice est donnée par

$$\frac{10^q \cdot N + P - N}{10^q - 1},$$

ce qui se réduit à

$$\frac{P}{10^q - 1}$$

si la partie entière est nulle. S'il s'agit d'un nombre décimal périodique mixte, soit de la forme $N{,}RPPP\ldots$ où R est le nombre formé par les chiffres irréguliers, dont nous appelons r le nombre de chiffres, q étant toujours le nombre de chiffres dans P, la génératrice est donnée par

$$\frac{10^{q+r} \cdot N + 10^q \cdot R + P - 10^r \cdot N - R}{(10^q - 1) \cdot 10^r},$$

ce qui se réduit à

$$\frac{10^q \cdot R + P - R}{(10^q - 1) \cdot 10^r}$$

si la partie entière est nulle. Dans chaque cas, il convient de réduire à sa plus simple expression la fraction obtenue si on veut avoir la génératrice sous forme de fraction irréductible. Exemple : soit le nombre décimal périodique $1{,}136\,363\,6\ldots$; on a $N = 1$, $R = 1$, $P = 36$ avec $q = 2$ et $r = 1$; la génératrice est $\frac{1\,000+100+36-10-1}{99\cdot 10} = \frac{1\,125}{990}$, soit $\frac{25}{22}$ après simplification, c'est-à-dire division par 45 haut et bas.

4.4.3 Les expressions des inverses des nombres naturels

Voyons ci-après quelles sont dans le système décimal les expressions des inverses $\frac{1}{n}$ des premiers nombres naturels $n = 1, 2, 3, \ldots$. D'après ce que nous avons vu un peu plus haut, si on n'a pas d'autre facteur premier que 2 et 5, le nombre de décimales est limité ; dans le cas contraire, il est illimité, $\frac{1}{n}$ engendre alors une fraction décimale périodique et nous n'écrirons qu'une période en la soulignant pour la distinguer d'éventuels chiffres irréguliers qui la précéderaient. Les premières de ces expressions sont

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}\underline{3}\ldots$$

$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{6} = 0{,}1\underline{6}\ldots$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}\underline{142\,857}\ldots$$

$$\frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$\frac{1}{9} = 0{,}\underline{1}\ldots$$

$$\frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$\frac{1}{11} = 0{,}\underline{09}\ldots$$

$$\frac{1}{12} = 0{,}08\underline{3}\ldots$$

$$\frac{1}{13} = 0{,}\underline{076\,923}\ldots$$

$$\frac{1}{14} = 0{,}0\underline{71\,428\,5}\ldots$$

$$\frac{1}{15} = 0{,}0\underline{6}\ldots$$

$$\frac{1}{16} = 0{,}062\,5$$

$$\frac{1}{17} = 0{,}\underline{058\,823\,529\,411\,764\,7}\ldots$$

$$\frac{1}{18} = 0{,}0\underline{5}\ldots$$

$$\frac{1}{19} = 0{,}\underline{052\,631\,578\,947\,368\,421}\ldots$$

$$\frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$\frac{1}{21} = 0{,}\underline{047\,619}\ldots$$

$$\frac{1}{22} = 0{,}0\underline{45}\ldots$$

$$\frac{1}{23} = 0{,}\underline{043\,478\,260\,869\,565\,217\,391\,3}\ldots$$

$$\frac{1}{24} = 0{,}041\,\underline{6}\ldots$$

$$\frac{1}{25} = 0{,}04$$

$$\frac{1}{26} = 0{,}0\underline{38\,461\,5}\ldots$$

$$\frac{1}{27} = 0{,}\underline{037}\ldots$$

$$\frac{1}{28} = 0{,}03\underline{5\,714\,28}\ldots$$

$$\frac{1}{29} = 0{,}\underline{034\,482\,758\,620\,689\,655\,172\,413\,793\,1}\ldots$$

$$\frac{1}{30} = 0{,}0\underline{3}\ldots$$

$$\frac{1}{31} = 0{,}\underline{032\,258\,064\,516\,129}\ldots$$

$$\frac{1}{32} = 0{,}031\,25$$

$$\frac{1}{33} = 0{,}\underline{03}\ldots$$

$$\frac{1}{34} = 0{,}0\underline{29\,411\,764\,705\,882\,35}\ldots$$

$$\frac{1}{35} = 0{,}0\underline{28\,571\,4}\ldots$$

$$\frac{1}{36} = 0{,}02\underline{7}\ldots$$

$$\frac{1}{37} = 0{,}\underline{027}\ldots$$

$$\frac{1}{38} = 0{,}0\underline{26\,315\,789\,473\,684\,210\,5}\ldots$$

$$\frac{1}{39} = 0{,}\underline{025\,641}\ldots$$

$$\frac{1}{40} = 0{,}025$$

$$\frac{1}{41} = 0{,}\underline{024\,39}\ldots$$

$$\frac{1}{42} = 0{,}0\underline{23\,809\,5}\ldots$$

On voit que les inverses de $14 = 2 \cdot 7$, de $28 = 2^2 \cdot 7$, de $35 = 5 \cdot 7$ donnent la même période, à une permutation circulaire près des chiffres, que la période 142 857 que donne $\frac{1}{7}$; il en est de même pour les inverses de $56 = 2^3 \cdot 7$, de $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ (on a évidemment $\frac{1}{70} = 0,1 \cdot \frac{1}{7} = 0,0\underline{14\,285\,7}\ldots$), etc. Mais ce n'est pas le cas pour $21 = 3 \cdot 7$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $63 = 3^2 \cdot 7$, $77 = 7 \cdot 11$, etc., car ce n'est vrai que pour les nombres de la forme $2^p \cdot 5^q \cdot 7$, à l'exclusion donc de la présence, avec 7, d'un autre nombre que 2 et 5 dans la décomposition en facteurs premiers. Ce qui a lieu pour les inverses des nombres ayant le nombre premier 7 en facteur se présente aussi avec les nombres premiers 17 (même période, à une permutation circulaire près, pour $34 = 2 \cdot 17$, $68 = 2^2 \cdot 17$, $85 = 5 \cdot 17$, $136 = 2^3 \cdot 17, \ldots$), 19 (idem avec $38 = 2 \cdot 19$, $76 = 2^2 \cdot 19$, $95 = 5 \cdot 19$, $152 = 2^3 \cdot 19, \ldots$), 23 (idem avec $46 = 2 \cdot 23$, $92 = 2^2 \cdot 23$, $115 = 5 \cdot 23$, $184 = 2^3 \cdot 23, \ldots$), etc. On le voit déjà dans le tableau ci-dessus, en comparant la période pour $\frac{1}{17}$ et pour $\frac{1}{34}$, ainsi que celle pour $\frac{1}{19}$ et pour $\frac{1}{38}$. Par contre, on n'a pas le même résultat avec 11 ou avec 13 ; pour les inverses des nombres de la forme $2^p \cdot 5^q \cdot 13$, on retrouve la même période qu'avec $\frac{1}{13}$, à une permutation circulaire près des chiffres, pour les inverses de $52 = 2^2 \cdot 13$, de $208 = 2^4 \cdot 13$, de $325 = 5^2 \cdot 13$, ..., mais pas pour les inverses de $26 = 2 \cdot 13$, $65 = 5 \cdot 13$, $104 = 2^3 \cdot 13$, $1\,625 = 5^3 \cdot 13, \ldots$ (mais on retrouve une même période, à une permutation circulaire près des chiffres, pour $2 \cdot 13$, $2^3 \cdot 13$, $5^3 \cdot 13$, ...).

4.5 Les fractions continues

Venons-en à ce qu'on appelle les *fractions continues* (certains, qui aiment renouveler le vocabulaire, disent maintenant fractions continuées plutôt que continues). Ce sont des expressions de la forme

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4 + \cdots}}},$$

ce qu'on représente de manière abrégée par $(q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ \ldots)$. Les q_1, q_2, ... sont des nombres naturels, qu'on appelle les *quotients incomplets* de la fraction continue. Il peut y en avoir une infinité, mais nous nous limiterons ici aux fractions continues limitées, qui en ont un nombre fini, soit $(q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_n)$, réservant le cas des fractions continues illimitées, c'est-à-dire avec un nombre infini de quotients incomplets, pour le chapitre 6. Donnons un exemple :

$$\begin{aligned}(1,\ 2,\ 3,\ 4) &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{13}{4}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{13}} = 1+\cfrac{1}{\frac{30}{13}}\\ &= 1+\frac{13}{30} = \frac{43}{30}\cdot\end{aligned}$$

Le premier quotient incomplet peut être nul ; on a alors

$$(0,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ldots) = \cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cfrac{1}{q_4}+\cdots}} = \frac{1}{(q_2,\ q_3,\ q_4,\ \ldots)}\cdot$$

On ne considère pas de fraction continue limitée dont le dernier quotient incomplet q_n serait $=1$, car on a $(q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_{n-1},\ 1) = (q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_{n-1}+1)$. Cela étant, on peut démontrer que si deux fractions continues sont égales, tous leurs quotients incomplets sont respectivement égaux.

On appelle *réduites* de la fraction continue les fractions simples égales aux fractions continues obtenues en limitant le nombre de quotients incomplets à un indice donné. Désignons-les par $R_1 = \frac{P_1}{Q_1}$, $R_2 = \frac{P_2}{Q_2}$, $R_3 = \frac{P_3}{Q_3}$, $\ldots$ où les P_m et Q_m $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ sont des nombres naturels. Lorsque la fraction continue est limitée, la dernière réduite n'est autre que la fraction simple égale à cette fraction continue. Les deux premières réduites sont

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{q_1}{1} \quad (P_1 = q_1 \text{ et } Q_1 = 1) \quad \text{et}\\ R_2 &= q_1+\frac{1}{q_2} = \frac{q_1q_2+1}{q_2} \quad (P_2 = q_1q_2+1,\ Q_2 = q_2).\end{aligned}$$

Pour obtenir les suivantes, il suffit d'appliquer la règle que voici : ayant obtenu les premières jusque $R_m = \frac{P_m}{Q_m}$, on obtient la suivante R_{m+1} en multipliant les deux termes P_m et Q_m de la fraction R_m par le nouveau quotient incomplet q_{m+1} et en ajoutant à ces produits les termes respectifs de la fraction R_{m-1}, ce qui donne

$$P_{m+1} = P_m\cdot q_{m+1}+P_{m-1} \quad \text{et} \quad Q_{m+1} = Q_m\cdot q_{m+1}+Q_{m-1}.$$

Cette règle appliquée à l'exemple proposé ci-avant de la fraction continue (1, 2, 3, 4) pour laquelle on a $R_1 = \frac{1}{1}$ et $R_2 = \frac{3}{2}$, donne

$$R_3 = \frac{3\cdot 3+1}{2\cdot 3+1} = \frac{10}{7} \quad \text{et} \quad R_4 = \frac{10\cdot 4+3}{7\cdot 4+2} = \frac{43}{30};$$

cette dernière fraction est bien la valeur obtenue ci-avant pour cette fraction continue : $(1,\ 2,\ 3,\ 4) = R_4 = \frac{43}{30}\cdot$ On peut démontrer que les réduites obtenues suivant cette règle sont des fractions irréductibles et les nombres P_m et Q_m sont évidemment des nombres de plus en plus grands au fur et à mesure que m augmente (sauf que $Q_2 = Q_1 = 1$ si $q_2 = 1$ et que $P_3 = P_2$ si $q_1 = 0$ et $q_3 = 1$). Les réduites vérifient aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned} P_m Q_{m+1} - Q_m P_{m+1} &= 1 \quad \text{si } m \text{ est pair et} \\ Q_m P_{m+1} - P_m Q_{m+1} &= 1 \quad \text{si } m \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Non seulement le numérateur et le dénominateur de chaque réduite sont premiers entre eux puisque, comme nous venons de le dire, ce sont des fractions irréductibles, mais aussi les numérateurs de deux réduites successives sont premiers entre eux et de même pour les dénominateurs. Les valeurs des réduites successives se rapprochent de plus en plus de la valeur de la fraction continue, par valeurs croissantes pour celles d'indice impair et par valeurs décroissantes pour celles d'indice pair, la plus petite étant donc R_1 et la plus grande R_2. Si nous désignons par V la valeur de la fraction continue $(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)$, on a donc $R_1 < R_3 < \cdots < V = R_n < \cdots < R_4 < R_2$. La différence entre deux réduites consécutives R_m et R_{m+1} est $\frac{1}{Q_m Q_{m+1}}$ ($= R_{m+1} - R_m$ si m est impair, $= R_m - R_{m+1}$ si m est pair), et la différence suivante, entre R_{m+1} et R_{m+2}, est inférieure à la moitié de celle-ci. Une réduite $R_m = \frac{P_m}{Q_m}$ est plus proche de la valeur V de la fraction continue que n'importe quelle réduite qui la précède et la différence entre $R_m = \frac{P_m}{Q_m}$ et V est comprise entre $\frac{1}{Q_m(Q_m+Q_{m+1})}$ et $\frac{1}{Q_m Q_{m+1}}$, notamment elle est inférieure à $\frac{1}{Q_m^2}\cdot$

Pour convertir une fraction ordinaire $\frac{A}{B}$, où A et B sont des nombres naturels, en fraction continue, on procède comme suit. On prend pour q_1 le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{A}{B}$ (qui est $= 0$ si $A < B$ et qui est un nombre naturel si $A \geq B$), ce qui s'obtient en faisant la division de A par B ; si q_1 (éventuellement $= 0$) est le quotient par défaut (voir chapitre 1) et C le reste (par défaut), nécessairement $< B$ (mais > 0 sinon la division se ferait exactement, ce qui signifierait que $\frac{A}{B}$ se réduit à un nombre entier et n'est donc pas convertible en fraction continue), on a

$$\frac{A}{B} = q_1 + \frac{C}{B} = q_1 + \frac{1}{\dfrac{B}{C}}\cdot$$

On fait alors la division de B par C, dont le quotient par défaut q_2 est nécessairement > 0 puisque $C < B$; si q_2 est ce quotient, on a

$$\frac{B}{C} = q_2 + \frac{D}{C} = q_2 + \frac{1}{\frac{C}{D}}$$

où D est le reste (par défaut), qui est $< C$. On procède de même avec $\frac{C}{D}$ et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une division de reste nul. Soient L le dividende et M le diviseur de cette division, qui donne $\frac{L}{M} = q_n$ exactement. On aura alors

$$\frac{A}{B} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}} = (q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_n).$$

Les nombres $\frac{B}{C}, \frac{C}{D}, \ldots$ sont appelés *quotients complets* de la fraction continue.

4.6 Les exposants fractionnaires

Encore au sujet des fractions, montrons qu'on peut utiliser des exposants fractionnaires. Si nous reprenons la formule $(n^p)^q = n^{pq}$ donnée au premier chapitre à propos des puissances, on en déduit en échangeant les deux membres et en prenant la racine $q^{\text{ème}}$ membre à membre, que

$$\sqrt[q]{n^{pq}} = n^p,$$

ce qui amène à écrire

$$\sqrt[q]{n^{pq}} = n^{\frac{pq}{q}},$$

c'est-à-dire que pour obtenir la racine $q^{\text{ème}}$ d'une puissance dont l'exposant est multiple de q, il suffit de diviser cet exposant par q. Lorsqu'on a une puissance, par exemple a^ℓ, dont l'exposant ℓ n'est pas multiple de q, on convient d'écrire aussi sa racine $q^{\text{ème}}$ en divisant l'exposant par q, donc d'écrire

$$\sqrt[q]{a^\ell} = a^{\frac{\ell}{q}}.$$

En particulier avec $\ell = 1$, on a

$$\sqrt[q]{a} = a^{\frac{1}{q}}.$$

Par exemple, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

4.7 Les suites de Farcy-Cauchy

A propos des fractions, signalons qu'on a étudié des ensembles de fractions constituant des suites, appelées suites de Farcy-Cauchy, définies de la manière suivante : la suite de Farcy-Cauchy d'indice n, que nous noterons $\mathbb{F}_n$, est l'ensemble ordonné par valeurs croissantes des fractions irréductibles comprises dans l'intervalle $[0, 1]$ dont les numérateur et dénominateur sont $\leq n$. Ce sont donc les suites $\mathbb{F}_n = \{\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_N}{b_N}\}$ (de $N + 1$ fractions) où $0 \leq a_i \leq b_i \leq n$ (et $b_i > 0$) pour tous les $N + 1$ i de 0 à N, avec a_i et b_i premiers entre eux aussi pour $i = 0$, 1, 2, …, N, et l'ordre étant tel que $\frac{a_i - 1}{b_i - 1} < \frac{a_i}{b_i}$ pour $i = 1$, 2, …, N. On a toujours $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $a_N = b_N = 1$, la première et la dernière fractions ayant pour valeurs respectives les extrémités de l'intervalle considéré, c'est-à-dire 0 et 1. Les premières de ces suites sont

$$\mathbb{F}_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}, \qquad \mathbb{F}_4 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\},$$

$$\mathbb{F}_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}, \qquad \mathbb{F}_5 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\},$$

$$\mathbb{F}_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}, \qquad \ldots$$

Dans chaque suite, la somme des dénominateurs de deux fractions successives est supérieure à n : $b_i + b_{i+1} > n$; lorsque $n > 1$, ces dénominateurs des fractions successives sont toujours différents : $b_i \neq b_{i+1}$ $(i > 1)$. Une propriété intéressante est que

$$a_{i+1}b_i - a_i b_{i+1} = 1.$$

Une autre est que

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{b_{i-1} + b_{i+1}},$$

la fraction du second membre étant éventuellement à simplifier pour la rendre irréductible ; lorsque $b_i = n$, on a d'ailleurs exactement $a_i = a_{i-1} + a_{i+1}$ et $b_i = b_{i-1} + b_{i+1}$ $(= n)$.

4.8 Comparaison de la somme et du produit de deux nombres

Une question qui peut se poser au sujet des opérations sur les nombres en général, pour les nombres fractionnaires comme pour les nombres naturels, est de savoir *a priori* si pour deux nombres donnés a et b, leur produit $a \cdot b$ est plus grand ou plus petit que leur somme $a + b$. Ces considérations sont d'ailleurs d'application aussi pour les nombres irrationnels, dont nous parlerons au chapitre 6 ; en fait, ceux-ci peuvent être approchés d'aussi près qu'on veut par des nombres fractionnaires.

4.8.1 Les deux nombres sont égaux

Considérons d'abord le cas où les deux nombres sont égaux : $a = b$. Le produit et la somme à comparer sont alors $a \cdot a = a^2$ et $a + a = 2a$. Le produit $a \cdot a$ est plus grand ou plus petit que la somme $a + a$ suivant que a est respectivement > 2 ou < 2. Par exemple, si $a = 3$, ce qui est > 2, le produit $3 \cdot 3 = 9$ est plus grand que la somme $3 + 3 = 6$; de même, avec $a = 10$, on a $a \cdot a = 100$, qui est plus grand que $10 + 10 = 20$. Si on prend $a = 1$, qui est au contraire < 2, on a $1 \cdot 1 = 1$, plus petit que $1 + 1 = 2$; de même, avec $a = 1{,}5$, qui est aussi < 2, on a un produit $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$, qui est plus petit que la somme $1{,}5 + 1{,}5 = 3$. A la frontière entre les deux cas, quand $a = 2$, la valeur obtenue pour $2 \cdot 2$ et pour $2 + 2$ est la même, puisque c'est 4 aussi bien pour le produit que pour la somme.

4.8.2 Les deux nombres sont différents

Passons maintenant au cas général de deux nombres a et b différents. Remarquons d'abord que si un des deux nombres est plus petit que 1, le produit sera certainement plus petit que la somme. En effet, le produit sera plus petit que l'autre nombre, car quand on multiplie un nombre par un autre plus petit que 1, on obtient un produit plus petit que le nombre multiplié, tandis que la somme sera plus grande que l'autre nombre, car quand on additionne un nombre (positif) à un autre, on obtient un nombre plus grand que cet autre (notons que nous excluons dans tout ceci l'éventualité que l'un des nombres ou les deux seraient négatifs, catégorie de nombres que nous introduirons au chapitre 6 ; les présentes considérations peuvent néanmoins être utilisées pour ce qu'au chapitre 6 nous appellerons leurs valeurs absolues). En supposant que ce soit a qui est < 1, on peut écrire $a \cdot b < b$ et $a + b > b$ (en supposant, comme nous venons de le dire $a > 0$) ou $a \cdot b < b < a + b$, donc $a \cdot b < a + b$. Admettons maintenant que les deux nombres sont ≥ 1 : $a \geq 1$ et $b \geq 1$. A quelle condition b doit-il satisfaire pour que, a étant donné, le produit $a \cdot b$ soit plus grand ou au contraire plus petit que la somme $a + b$? On peut facilement voir que $a \cdot b$ est respectivement plus grand ou plus petit que $a + b$ selon que b est $> \frac{a}{a-1}$ ou $< \frac{a}{a-1}$. Par exemple, si $a = 5$, pour que $a \cdot b$ soit $> a + b$, il faut qu'on ait $b > \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4} = 1{,}25$; c'est notamment le cas de $b = 2$, qui donne alors $a \cdot b = 5 \cdot 2 = 10$ et $a + b = 5 + 2 = 7$; c'est aussi le cas de $b = 10$, qui donne $a \cdot b = 5 \cdot 10 = 50$ et $a + b = 5 + 10 = 15$. Au contraire, avec $b = 1$, qui est $< 1{,}25$, on a $a \cdot b = 5 \cdot 1 = 5$ et $a + b = 5 + 1 = 6$. Comme autre exemple, prenons $a = 1{,}5$; pour qu'on ait $a \cdot b > a + b$, il faut alors que $b > \frac{1{,}5}{1{,}5-1} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$, ce qui est entre autres le cas de $b = 4$, qui donne $a \cdot b = 1{,}5 \cdot 4 = 6$ et $a + b = 1{,}5 + 4 = 5{,}5$ et on a bien $a \cdot b > a + b$. Au contraire, pour $b = 2$, qui est < 3, il vient $a \cdot b = 1{,}5 \cdot 2 = 3$ et $a + b = 1{,}5 + 2 = 3{,}5$ et on a donc cette fois $a \cdot b < a + b$. Dans le cas particulier où $a = 2$, l'expression $\frac{a}{a-1}$ est aussi $= 2$ puisqu'elle s'écrit alors $\frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$, de sorte que le produit $a \cdot b$ est dans ce cas plus grand ou plus petit que la somme $a + b$ suivant que b est lui > 2 ou < 2 respectivement ; si $b = 2$ comme a, il y a égalité entre le produit $a \cdot b = 2 \cdot 2$ et la somme $a + b = 2 + 2$, comme cela a été écrit ci-dessus à la fin de l'examen du cas où $a = b$. Lorsque les nombres sont l'un et l'autre > 2, leur produit est toujours plus grand que leur somme, avec un écart d'autant plus grand que les nombres donnés sont grands : pour les grands nombres, le produit est beaucoup plus grand que la somme et ceci est évidemment vrai aussi pour le produit et la somme de plus de deux nombres.

Signalons d'autre part que le produit de deux nombres est toujours inférieur à la demi-somme de leurs carrés, sauf si ces deux nombres sont égaux, auquel cas il y a égalité :

$$a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

l'égalité n'ayant lieu que si $a = b$. Par exemple, si $a = 5$ et $b = 3$, on a

$$a \cdot b = 15 \quad \text{et} \quad \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{25 + 9}{2} = \frac{34}{2} = 17,$$

l'inégalité annoncée est effectivement vérifiée puisque $15 < 17$.

4.9 Les rapports et les proportions

Changeons de sujet pour voir ici ce qui concerne les rapports et les proportions. Mais il faut garder en tête que ce qui va être dit dans ce domaine reste valable pour toutes les catégories de nombres, pas seulement pour les nombres naturels ou les nombre fractionnaires. Nous anticipons donc ici quelque peu sur les extensions de la notion de nombre qui seront encore vues dans la suite, comme nous venons déjà de le faire pour la comparaison de la somme et du produit de deux nombres.

4.9.1 Le rapport de deux nombres

Le *rapport* de deux nombres a et b pris dans cet ordre est le quotient exact de la division de a par b. On parle d'ailleurs couramment aussi du rapport de deux grandeurs de même nature ; il est égal au rapport des nombres donnant les mesures de ces deux grandeurs. Les nombres a et b sont les *termes* du rapport, qui se note $\frac{a}{b}$; il sont appelés respectivement l'*antécédent* et le *conséquent* de ce rapport. On voit que la notation utilisée est la même que celle des fractions, mais dans les fractions, le numérateur et le dénominateur sont des nombres naturels, tandis que dans un rapport, l'antécédent et le conséquent peuvent être des nombres de n'importe quelle catégorie, chacun d'eux peut être un nombre naturel, un nombre fractionnaire, un nombre irrationnel, ... ; ils peuvent même être négatifs aussi bien que positifs (chapitre 6). Signalons qu'on appelle *rapport inverse* des nombres a et b, le rapport $\frac{b}{a}$, qui est $= 1 : \frac{a}{b}$; le rapport $\frac{a}{b}$ est alors appelé *rapport direct*. Une propriété facile à démontrer est que la valeur du rapport ne change pas si on multiplie ou si on divise à la fois l'antécédent et le conséquent par un même nombre fini et non nul. Si on a une suite de rapports égaux, on obtient des rapports égaux à chacun d'eux quand on fait une même suite d'additions et/ou de soustractions à la fois sur les antécédents et sur les conséquents ; ainsi, si on a les rapports égaux

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

les rapports $\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}$ et $\frac{a_1-a_2+a_3}{b_1-b_2+b_3}$ par exemple sont égaux à chacun d'eux. Si on a une suite de rapports inégaux

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \cdots < \frac{a_n}{b_n},$$

la valeur du rapport ayant pour antécédent la somme de leurs antécédents et pour conséquent la somme de leurs conséquents est comprise entre celle du plus petit et celle du plus grand :

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$

4.9.2 Les proportions

Une *proportion* est une égalité entre deux rapports. Les termes a, b, c et d de la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ont les noms suivants : a et c sont les antécédents, tandis que b et d sont les conséquents, comme nous avons dit ci-dessus au sujet des rapports ; a et d sont appelés les *extrêmes*, b et c sont appelés les *moyens*. La proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

s'énonce de la manière suivante : "a est à b comme c est à d", ce qui exprime effectivement que le rapport de a à b est égal au rapport de c à d. La condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est que le produit des moyens soit égal au produit des extrêmes, donc que $bc = ad$. Dans une proportion, on peut permuter les moyens ou permuter les extrêmes, c'est-à-dire que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{entraîne} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}\cdot$$

On peut aussi permuter chaque antécédent avec son conséquent, ce qui donne

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}\cdot$$

On peut aussi en déduire toute une variété d'autres proportions, notamment

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}, \qquad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}, \qquad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d},$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}, \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}, \qquad \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}, \qquad \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}, \qquad \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}, \quad \ldots$$

ainsi que toutes ces proportions où on permute chaque antécédent avec son conséquent dans les deux membres. Si on a deux proportions

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1} \quad \text{et} \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2},$$

on peut les combiner pour en déduire d'autres, telles que

$$\frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} = \frac{c_1 \cdot c_2}{d_1 \cdot d_2}, \quad \frac{a_1 : a_2}{b_1 : b_2} = \frac{c_1 : c_2}{d_1 : d_2}, \quad \frac{a_1 \cdot c_2}{b_1 \cdot d_2} = \frac{c_1 \cdot a_2}{d_1 \cdot b_2}, \quad \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2} = \frac{c_1 \cdot d_2}{d_1 \cdot c_2}, \quad \ldots$$

On appelle *quatrième proportionnelle* de trois nombres a, b, c pris dans cet ordre (au moins pour le premier, qui joue un rôle particulier, tandis que l'ordre des deux autres est indifférent) le nombre qui est le dernier terme d'une proportion dont a, b et c sont les trois premiers, c'est-à-dire le nombre x tel que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, donc tel que $ax = bc$; par conséquent son expression est $x = \frac{bc}{a}\cdot$

Pour la distinguer d'autres cas, il arrive qu'une proportion telle que nous venons de considérer, de la forme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, soit appelée *proportion géométrique*. On a en effet généralisé cette notion de proportion. D'abord, on obtient ce qu'on a appelé une *proportion arithmétique* si au lieu d'égaler deux rapports, donc deux quotients de deux nombres, on égale deux différences de deux nombres, ce qui donne $a-b = c-d$. Ensuite, on obtient ce qu'on a appelé une *proportion harmonique* si on égale deux différences d'inverses de deux nombres, ce qui donne $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\cdot$ Quand on ne précise pas, c'est qu'il s'agit d'une proportion telle que nous les avons considérées ci-dessus, le mot “géométrique” étant sous-entendu. Dans chaque cas, on appelle *proportion continue* une proportion dans laquelle les moyens sont égaux. On n'a plus alors que trois nombres, que nous désignons par a, b et c et on obtient ainsi une proportion continue arithmétique : $a - b = b - c$, une progression continue géométrique : $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, une proportion continue harmonique : $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\cdot$ Le nombre intermédiaire b, valeur commune des moyens, est alors égal à une certaine moyenne des extrêmes a et c ; c'est ce qu'au chapitre 9, nous appellerons respectivement :

– *moyenne arithmétique* : $b = \frac{a+c}{2}$,
– *moyenne géométrique* (ou *moyenne proportionnelle*) : $b = \sqrt{ac}$,
– *moyenne harmonique* : $b = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} = \frac{2ac}{a+c}\cdot$

Il arrive qu'on soit amené à considérer des suites de proportions continues (géométriques notamment), c'est-à-dire des suites d'égalités telles que $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}, \ldots$. On appelle *troisième proportionnelle* des nombres a et b pris dans cet ordre l'extrême d'une proportion continue (sous-entendu “géométrique”) dont la valeur commune des moyens est b et dont l'autre extrême est a ; c'est donc le nombre x tel que $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$, d'où sa valeur : $x = \frac{b^2}{a}\cdot$

Chapitre 5

Ensembles de nombres remarquables

5.1 Notions anciennes diverses

Dans le chapitre avant-précédent, nous avons décrit la représentation des nombres par la numération décimale. Commençons donc par rappeler, pour mémoire parce que cette notion est aujourd'hui tombée en désuétude, ce qu'on a appelé un *nombre circulaire*. On a appelé ainsi tout nombre d'un seul chiffre dont le carré a, dans le système décimal, le même chiffre comme chiffre des unités. C'est le cas évidemment de 1, dont le carré est 1 ; c'est également le cas pour 5, dont le carré est 25, et pour 6, dont le carré est 36. Il est assez facile de voir que c'est alors nécessairement le cas aussi pour toutes les puissances de ce nombre. C'est évident pour 1, dont toutes les puissances sont 1. C'est encore le cas pour 5, dont les puissances successives sont 25, 125, 625, 3 125, ..., et pour 6, dont les puissances successives sont 36, 216, 1 296, 7 776, ... Les nombres circulaires sont 1, 5 et 6 dans le système décimal, mais dans un système de numération ayant une autre base, ils seraient évidemment différents, si ce n'est 1 qui l'est chaque fois bien sûr.

Au premier chapitre, nous avons déjà considéré des nombres ayant une propriété particulière, par exemple celle d'être premier. Parmi les ensembles de nombres remarquables, on peut ainsi considérer l'ensemble des nombres premiers, qui contient une infinité d'éléments puisque la suite des nombres premiers est illimitée. C'est aussi le cas de l'ensemble des nombres pairs et de l'ensemble des nombres impairs. Ce sont aussi des suites illimitées, tout comme l'ensemble des nombres naturels, dont chaque élément est soit un nombre pair, soit un nombre impair.

Mais nous allons voir des choses un peu plus compliquées.

5.2 Les paires de nombres amiables

Pour expliquer ce que sont les paires de *nombres amiables*, disons d'abord qu'on appelle habituellement *partie aliquote* d'un nombre naturel (supposé > 1) n'importe lequel de ses diviseurs (diviseur premier ou produit de diviseurs premiers) autre que lui-même, mais 1 compris. Deux nombres sont dits amiables quand la somme de toutes les parties aliquotes de l'un est égale à l'autre et que la somme des parties aliquotes de cet autre est égale au premier. C'est le cas de 220 et 284. En effet, $220 = 2^2 \times 5 \times 11$, de sorte que ses parties aliquotes sont 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 et leur somme est égale à 284, tandis que $284 = 2^2 \times 71$ a pour parties aliquotes 1, 2, 4, 71, 142, dont la somme est égale à 220 ; on peut donc écrire pour cette paire

$$\left\{\begin{array}{lcl} 220 & = & 2^2 \times 5 \times 11 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 \\ 284 & = & 2^2 \times 71 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110. \end{array}\right.$$

C'est aussi le cas pour les paires suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1\,184 & = & 2^5 \times 37 = 1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 \\ 1\,210 & = & 2 \times 5 \times 11^2 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 17\,296 & = & 2^4 \times 23 \times 47 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 1\,151 + 2\,302 + 4\,604 + 9\,208 \\ 18\,416 & = & 2^4 \times 1\,151 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 23 + 46 + 47 + 92 + 94 + 184 \\ & & +\, 188 + 368 + 376 + 752 + 1\,081 + 2\,162 + 4\,324 + 8\,648, \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 9\,363\,584 & = & 2^7 \times 191 \times 383 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 73\,727 \\ & & +\, 147\,454 + 294\,908 + 589\,816 + 1\,179\,632 + 2\,359\,264 \\ & & +\, 4\,718\,528 \\ 9\,437\,056 & = & 2^7 \times 73\,727 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 191 + 382 \\ & & +\, 383 + 764 + 766 + 1\,528 + 1\,532 + 3\,056 + 3\,064 + 6\,112 \\ & & +\, 6\,128 + 12\,224 + 12\,256 + 24\,448 + 24\,512 + 49\,024 + 73\,153 \\ & & +\, 146\,306 + 292\,612 + 585\,224 + 1\,170\,448 + 2\,340\,896 \\ & & +\, 4\,681\,792. \end{array}\right.$$

Il y en a une infinité. Les deux dernières que nous venons de citer sont appelées respectivement paire de Fermat, du nom de ce grand mathématicien du XVII^{e} siècle, et paire de Descartes, peut-être le plus célèbre mathématicien et philosophe français. On peut remarquer que la première paire et les deux dernières citées sont obtenues en faisant respectivement $n = 2$, 4 ou 7 dans les deux expressions suivantes : $2^n(3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^n - 1)$ et $2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 1)$. Si n est tel que les expressions figurant dans les trois parenthèses donnent des nombres premiers, on obtient une paire de nombres amiables. Ce n'est pas le cas pour $n = 3$, car alors la troisième parenthèse donne $9 \cdot 2^5 = 9 \cdot 32 - 1 = 287$, qui n'est pas un nombre premier ($287 = 7 \cdot 41$). Ce n'est pas le cas non plus pour $n = 5$, qui donne pour la deuxième parenthèse $3 \cdot 2^5 - 1 = 3 \cdot 32 - 1 = 95$, qui est $\mathfrak{M}5$ et n'est donc pas un nombre premier. Dans le cas où les deux nombres, soient a et b, ont ces expressions, on a

$$a = (2^n - 1)(9 \cdot 2^{2n-1} - 1) + 2^{n+1} - 1 = (2^n - 1)\,\frac{b}{2^n} + 2^{n+1} - 1.$$

Mais il y a d'autres cas possibles, comme le prouve le deuxième exemple ci-dessus.

Je me suis bien amusé quand j'ai vu un auteur parlant des nombres amiables les appeler “nombres amicaux” ! Mais, depuis lors, j'en ai vu d'autres qui commettaient la même erreur. Ils se sont certainement documentés dans des ouvrages en anglais (devenu depuis plus d'un demi-siècle la langue internationale à la place du français, malheureusement pour nous) ou se sont basés sur des textes d'auteurs qui l'avaient fait et on a simplement mal traduit “amicable numbers”. J'ai alors été voir ce qu'en dit un dictionnaire sérieux comme le Harrap's dictionary ; au moins l'édition de 1961, celle que j'ai consultée, donne bien l'expression correcte “nombres amiables” pour la traduction de “amicable numbers” ; c'est parfaitement exact à la fois dans le volume français-anglais et dans le volume anglais-français.

Profitons de ce que nous venons de parler de la somme des parties aliquotes d'un nombre, pour citer quelques théorèmes qui peuvent être utiles. Si deux nombres p et q sont premiers entre eux, c'est-à-dire (voir chapitre 2) s'ils n'ont pas d'autre diviseur commun que 1, la somme des parties aliquotes de leur produit, que nous désignerons par $s(pq)$, est donnée en fonction des sommes $s(p)$ et $s(q)$ de leurs parties aliquotes respectives par la formule

$$s(pq) = p \cdot s(q) + q \cdot s(p) + s(p) \cdot s(q).$$

Prenons par exemple les nombres 4 et 15 premiers entre eux ; la somme des parties aliquotes de $4 = 2^2$ est $s(4) = 1 + 2 = 3$, celle des parties aliquotes de $15 = 3 \cdot 5$ est $s(15) = 1+3+5 = 9$ et la somme des parties aliquotes du produit $4 \cdot 15 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ est $s(60) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 10 + 12 + 15 + 20 + 30 = 108$; on a bien $s(60) = 4 \cdot 9 + 15 \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 36 + 45 + 27 = 108$. Si l'un des deux nombres, soit p, est premier et que p et q sont premiers entre eux (il suffit alors pour cela que q ne soit pas multiple de p), on a

$$s(pq) = (p + 1) \cdot s(q) + q.$$

On a en effet $s(p) = 1$ lorsque p est premier. Par exemple, si avec $q = 4$, nous prenons le nombre premier $p = 13$, pour lesquels on a $s(13) = 1$ et comme ci-dessus

$s(4) = 3$, tandis que pour leur produit $13 \cdot 4 = 52 = 2^2 \cdot 13$, on a $s(52) = 1 + 2 + 4 + 13 + 26 = 46$; on a bien $s(13 \cdot 4) = (13 + 1) \cdot 3 + 4 = 46$. Si au lieu de la somme des parties aliquotes, nous considérons la somme de tous les diviseurs, donc les parties aliquotes plus le nombre lui-même, c'est-à-dire avec la notation ci-dessus, $s(p) + p$ et $s(q) + q$, ainsi que $s(pq) + pq$ pour le produit, on a tout simplement

$$s(pq) + pq = [s(p) + p] \cdot [s(q) + q].$$

Avec l'exemple $4 \cdot 15 = 60$ considéré ci-dessus, on a bien $s(60) + 60 = [s(4) + 4] \cdot [s(15) + 15]$, à savoir $108 + 60 = (3 + 4)(9 + 15)$, soit $168 = 7 \cdot 24$.

Notons que pour un nombre premier p, les parties aliquotes de sa $n^{\text{ème}}$ puissance p^n sont toutes les puissances de ce nombre inférieures à la $n^{\text{ème}}$, en commençant à $p^0 = 1$, donc 1, p, p^2, p^3, ..., p^{n-1}. C'est bien ce que nous avons appliqué pour trouver ci-dessus $s(4) = 1 + 2 = 3$ puisque $4 = 2^2$.

5.3 Les nombres parfaits

Passons maintenant à l'examen d'une notion encore plus ancienne que celle des nombres amiables : les nombres parfaits. Un nombre naturel est appelé *nombre parfait* s'il est égal à la somme de ses parties aliquotes, c'est-à-dire, rappelons-le, de tous ses diviseurs à l'exclusion de lui-même, mais 1 compris. (C'est donc aussi un nombre dont le double est égal à la somme de tous ses diviseurs, c'est-à-dire ses parties aliquotes plus lui-même). C'est le cas de 6, le premier d'entre eux : ses parties aliquotes sont 1, 2, 3 et on a $1 + 2 + 3 = 6$.

Si on rapproche cette définition des nombres parfaits de celle qui est donnée plus haut pour les nombres amiables, on peut dire que chaque nombre parfait constitue en quelque sorte avec lui-même une paire de nombres amiables. Mais ne vous croyez pas pour autant autorisé à dire “je suis amiable avec moi-même, donc je suis parfait” ; ce raisonnement ne serait valable que pour un nombre, ce que vous n'êtes pas !

Un nombre naturel dont la somme des parties aliquotes lui est inférieure est dit *imparfait par défaut*. C'est par exemple le cas de 10, puisque $1 + 2 + 5 = 8 < 10$. C'est le cas de tous les nombres premiers p (supérieurs à 1, qu'on ne considère souvent pas comme faisant partie des nombres premiers, ni d'ailleurs des nombres parfaits), puisqu'alors ils n'ont que 1 pour seule partie aliquote. C'est encore le cas pour toutes les puissances p^n d'un nombre premier p, car dans ce cas, comme nous l'avons noté un peu plus haut, les parties aliquotes de p^n sont 1, p, p^2, ..., p^{n-1}, dont la somme est $= \frac{p^n-1}{p-1}$ (voir au chapitre 9 la somme des termes d'une progression géométrique), ce qui est $< p^n$. C'est aussi le cas de tous les produits de deux nombres premiers, au-delà de 6, comme pour l'exemple donné ci-dessus de 10, qui est $= 2 \times 5$.

Un nombre naturel dont la somme des parties aliquotes lui est supérieur est dit *imparfait par excès*. C'est le cas par exemple de 12 (puisque $1+2+3+4+6 = 16 > 12$), 18, 20, 24, …, 945, ….

5.4 Les nombres d'Euclide

On ne connaît que des nombres parfaits pairs. Ils sont tous de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ avec $n = 2, 3, \ldots$ sous la condition nécessaire et suffisante que $2^n - 1$ soit premier. La démonstration de ce que $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait si $2^n - 1$ est premier se trouve déjà dans le livre IX d'Euclide, ce célèbre mathématicien de l'Antiquité grecque qui enseignait à Alexandre vers 300 avant Jésus-Christ. On appelle *nombre d'Euclide* tout nombre qui a cette forme ; nous les désignerons par la notation

$$\mathcal{E}_n = 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}.$$

Si $2^n - 1$ est premier, les parties aliquotes de $\mathcal{E}_n$ sont 1, 2, …, 2^{n-1}, $2^n - 1$, $2^{n+1} - 2$, …, $2^{2n-2} - 2^{n-2}$. C'est donc parmi ces nombres $\mathcal{E}_n$ qu'on trouve les nombres parfaits ; les premiers sont :

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{E}_2 & = & 2(4-1) = 6\ (= 1+2+3),\ ^{1}, \\
\mathcal{E}_3 & = & 4(8-1) = 28\ (= 1+2+4+7+14), \\
\mathcal{E}_5 & = & 16(32-1) = 496\ (= 1+2+4+8+16+31+62+124+248), \\
\mathcal{E}_7 & = & 64(128-1) = 8\,128\ (= 1+2+4+8+16+32+64+127+254+508 \\
 & & +1\,016+2\,032+4\,064), \\
\mathcal{E}_{13} & = & 4\,096(8\,192-1) = 33\,550\,336\ (= 1+2+4+\cdots+2\,048+4\,096+8\,191 \\
 & & +16\,382+32\,764+\cdots+8\,387\,584+16\,775\,168), \\
\mathcal{E}_{17} & = & 65\,536(131\,072-1) = 8\,589\,869\,056, \\
\mathcal{E}_{19} & = & 262\,144(524\,288-1) = 137\,438\,691\,328, \\
\ldots & &
\end{array}$$

(Par généralisation, on pourrait ajouter $\mathcal{E}_1 = 2^{1-1}(2^1 - 1) = 2^0(2-1) = 1 \times 1 = 1$, nombre pour lequel le fait d'être parfait ou imparfait ne se pose pas, puisque la notion de parties aliquotes n'est définie que pour les nombres naturels > 1).

1. Le nombre 6 est le nombre dont la somme des parties aliquotes égale leur produit, car il est parfait et égal au produit de ses parties aliquotes : $1+2+3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$; pour les nombres parfaits suivants le produit des parties aliquotes est plus grand que leur somme.

Les autres nombres d'Euclide sont des nombres imparfaits par excès ; les premiers sont :

$$\begin{array}{l|l}
\mathcal{E}_4 = 8(16-1) = 120, & \mathcal{E}_{11} = 1\,024(2\,048-1) = 2\,096\,128, \\
\mathcal{E}_6 = 32(64-1) = 2\,016, & \mathcal{E}_{12} = 2\,048(4\,096-1) = 8\,386\,560, \\
\mathcal{E}_8 = 128(256-1) = 32\,640, & \mathcal{E}_{14} = 8\,192(16\,384-1) = 134\,209\,536, \\
\mathcal{E}_9 = 256(512-1) = 130\,816, & \mathcal{E}_{15} = 16\,384(32\,768-1) = 536\,854\,528, \\
\mathcal{E}_{10} = 512(1\,024-1) = 523\,776, & \mathcal{E}_{16} = 32\,768(65\,736-1) = 2\,147\,450\,880, \\
\ldots &
\end{array}$$

Le passage du nombre d'Euclide $\mathcal{E}_n$ au suivant peut se faire à l'aide de la formule de récurrence suivante :

$$\mathcal{E}_{n+1} = 4\mathcal{E}_n + 2^n.$$

5.5 Les nombres de Mersenne

Les nombres qui ont la forme $2^n - 1$, c'est-à-dire la forme du second facteur dans l'expression qui définit les nombres d'Euclide, sont appelés *nombres de Mersenne*, du nom de ce mathématicien et physicien français (1588-1648) qui a notamment fait connaître à Pascal la célèbre expérience de Torricelli relative à la pression barométrique et s'est occupé, entre autres, de la mesure de la pesanteur à l'aide des oscillations du pendule. Ce sont les nombres naturels qui précèdent immédiatement les puissances successives de 2, donc $2-1=1$, $4-1=3$, $8-1=7$, $16-1=15$, etc. Nous les désignerons par la notation $M_n = 2^n - 1$ où $n = 1, 2, 3, \ldots$. Les premiers sont $M_1 = 1$, $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_4 = 15$, $M_5 = 31$, $M_6 = 63$, $M_7 = 127$, $M_8 = 255, \ldots$. On peut noter que l'expression $2^n - 2$ peut s'écrire $(2^n - 1) - 1 = M_n - 1$ ou, si on met 2 en évidence, $2(2^{n-1} - 1) = 2M_{n-1}$; on en déduit que $M_n - 1 = 2M_{n-1}$, d'où $M_n = 2M_{n-1} + 1$, ce qui constitue une formule de récurrence qui, si on passe de n à $n+1$, peut s'écrire

$$M_{n+1} = 2M_n + 1.$$

Dans le système décimal, le chiffre des unités des M_n successifs se reproduisent périodiquement suivant la séquence 1,3,7,5 selon que l'indice n est respectivement $= \mathfrak{M}4 + 1$, $\mathfrak{M}4 + 2$, $\mathfrak{M}4 + 3$, $\mathfrak{M}4$, c'est-à-dire qu'on a $M_{4n+1} = \mathfrak{M}10 + 1$, $M_{4n+2} = \mathfrak{M}10 + 3$, $M_{4n+3} = \mathfrak{M}10 + 7$, $M_{4n} = \mathfrak{M}10 + 5$ (et les deux derniers chiffres apparaissent avec une périodicité de 20, à savoir à partir de $n = 2$: 03, 07, 15, 31, 63, 27, 55, 11, 23, 47, 95, 91, 83, 67, 35, 71, 43, 87, 75, 51). La somme des n premiers nombres de Mersenne est donnée par

$$1 + 3 + 7 + 15 + \cdots + M_n = M_{n+1} - (n+1).$$

On a de plus les formules suivantes :

$$\begin{aligned} M_{2n} &= M_n(M_n+2), \\ M_{2n-1} &= M_n M_{n-1} + M_n + M_{n-1}, \\ M_{m+n} &= M_m M_n + M_m + M_n = 2^n M_m + M_n. \end{aligned}$$

On peut démontrer que quel que soit le nombre naturel a on a toujours

$$a^n - 1 = \mathfrak{M}(a-1).$$

Par suite, $a^n - 1$ a toujours au moins un diviseur > 1 si $a > 2$. Parmi les nombres de la forme $a^n - 1$, ce n'est donc que pour $a = 2$, donc parmi les nombres de Mersenne, qu'on peut en trouver qui soient des nombres premiers. Il est utile de connaître les valeurs de n pour lesquelles $M_n = 2^n - 1$ est premier, puisque c'est à cette condition (nécessaire et suffisante) que le nombre d'Euclide $\mathcal{E}_n = 2^{n-1}M_n$ est parfait, avons-nous vu. Pour que le nombre de Mersenne M_n soit premier, il faut, mais il ne suffit pas toujours (condition nécessaire, mais non suffisante) que son indice n soit premier. Voyons ce qu'il en est pour les premiers nombres de Mersenne dont l'indice n est premier :

n	M_n	n	M_n	n	M_n
1	1 premier	7	127 premier	19	524 287 premier
2	3 premier	11	$2\,047 = 23 \times 89$	23	$8\,388\,607 = 47 \times 178\,481$
3	7 premier	13	8 191 premier	29	$536\,870\,911 = 233 \times 1\,103 \times 2\,089$
5	31 premier	17	131 071 premier	31	2 147 483 647 premier

M_n est aussi premier pour $n = 61$, 89, 107, 127, 521, 607, 1 279, 2 203, 2 281, 3 217, 4 253, 4 423, ...

Pour les premiers nombres de Mersenne ayant un indice qui soit un nombre composé, on a :

$M_4 = 15 = 3 \times 5$,	$M_{14} = 16\,383 = 3 \times 43 \times 127$,
$M_6 = 63 = 3^2 \times 7$,	$M_{15} = 32\,767 = 7 \times 31 \times 151$,
$M_8 = 255 = 3 \times 5 \times 17$,	$M_{16} = 65\,535 = 3 \times 5 \times 17 \times 257$,
$M_9 = 511 = 7 \times 73$,	$M_{18} = 262\,143 = 3^3 \times 7 \times 19 \times 73$,
$M_{10} = 1\,023 = 3 \times 11 \times 31$,	$M_{20} = 1\,048\,575 = 3 \times 5^2 \times 11 \times 31 \times 41$,
$M_{12} = 4\,095 = 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$,	...

Les nombres de Mersenne dont l'indice est pair sont $\mathfrak{M}3$ (rappelons que nous utilisons la notation $\mathfrak{M}$ pour signifier "multiple de") et ceux dont l'indice est impair sont $\mathfrak{M}3 + 1$. On peut écrire que

respectivement	$n = \mathfrak{M}2$	$\neq \mathfrak{M}2$	$= \mathfrak{M}3$	$= \mathfrak{M}4$	$= \mathfrak{M}5$	$= \mathfrak{M}6$	...
entraîne	$M_n = \mathfrak{M}3$	$= \mathfrak{M}3 + 1$	$= \mathfrak{M}7$	$= \mathfrak{M}15$	$= \mathfrak{M}31$	$= \mathfrak{M}63$	...
				$(= \mathfrak{M}3, = \mathfrak{M}5)$		$(= \mathfrak{M}3, = \mathfrak{M}7, = \mathfrak{M}9)$	...

Si m est un nombre premier > 2, on a

$$M_{m-1} = \mathfrak{M}m \quad \text{et} \quad M_{m(m-1)} = \mathfrak{M}m^2.$$

La condition pour que M_n soit	$\mathfrak{M}3$	$\mathfrak{M}5$	$\mathfrak{M}7$	$\mathfrak{M}9$	$\mathfrak{M}11$	$\mathfrak{M}13$	$\mathfrak{M}15$	$\mathfrak{M}17$	$\mathfrak{M}19$	...
est respectivement que n soit	$\mathfrak{M}2$	$\mathfrak{M}4$	$\mathfrak{M}3$	$\mathfrak{M}6$	$\mathfrak{M}10$	$\mathfrak{M}12$	$\mathfrak{M}4$	$\mathfrak{M}8$	$\mathfrak{M}18$	...

5.6 Les nombres de Fermat

D'autres nombres remarquables sont les *nombres de Fermat*, du nom de ce très célèbre mathématicien français Pierre de Fermat qui a vécu de 1601 à 1665, pour qui Pascal avait une grande admiration et que Mersenne a été visiter à Toulouse ; vers la fin du chapitre 3, nous avons déjà eu l'occasion de le citer. Ce sont les nombres $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (dans cette expression, il faut évidemment comprendre 2^{2^n} comme étant $2^{(2^n)}$ et pas $(2^2)^n$). Ils deviennent vite très grands quand on fait grandir n, en raison de ce que l'exposant de 2 dans la puissance qui constitue le premier terme de la somme définissant F_n est elle-même une puissance ayant n en exposant. Les premiers nombres de Fermat sont les suivants ; $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$, $F_5 = 4\,294\,967\,297$ et F_6 est déjà supérieur à 18,4 milliards de milliards. Le nombre de chiffres de F_n dans le système décimal est le nombre entier immédiatement supérieur à $2^n \log 2$ (voir les logarithmes au chapitre 9), ce qui est environ $= 0{,}301\,03 \times 2^n$. A partir de $n = 1$, on a $F_n = \mathfrak{M}3 + 2$ et à partir de $n = 2$, on a $F_n = \mathfrak{M}10 + 7$ $(= \mathfrak{M}5 + 2)$; dans le système décimal, les deux derniers chiffres des F_n successifs à partir de $n = 2$ se reproduisent suivant la séquence 17, 57, 37, 97.

On peut passer de F_n à F_{n+1} par la formule de récurrence

$$F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1 = F_n^2 - 2F_n + 2.$$

Les nombres de Fermat sont les seuls nombres de la forme $2^m + 1$ parmi lesquels on peut trouver des nombres premiers. En effet, lorsque m est impair, on a $2^m + 1 = \mathfrak{M}3$; lorsque m est le double d'un nombre impair, on a $2^m + 1 = \mathfrak{M}5$; plus généralement, lorsque $m = 2^n \times \ell$ où ℓ est un nombre impair, on a

$$2^m + 1 = \mathfrak{M}\left(2^{2^\ell} + 1\right).$$

Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$, F_n est premier ; pour $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$, F_n est un nombre composé (par exemple, $F_5 = \mathfrak{M}641$, $F_6 = \mathfrak{M}274\,177$), on n'en connaît aucun qui soit premier avec $n > 4$.

Les premiers de Fermat, c'est-à-dire les nombres de Fermat qui sont premiers, interviennent dans le théorème de Gauss concernant la construction des polygones réguliers. Ce très célèbre mathématicien et physicien allemand (1777-1855) a obtenu la règle suivante pour le nombre de côtés des polygones réguliers qu'on peut construire avec la règle et le compas, autrement dit les nombres en lesquels on peut, avec ces instruments, diviser exactement la circonférence en arcs égaux : ce nombre est toujours un premier de Fermat ou un produit d'un nombre quelconque de premiers de Fermat distincts, éventuellement multiplié par une puissance de 2 puisqu'on peut toujours, avec la règle et le compas, diviser un arc quelconque en deux, ou c'est simplement une puissance quelconque de 2 à partir de $2^2 = 4$. Les premiers de ces nombres, correspondant respectivement au triangle équilatéral, au carré, aux pentagone, hexagone, octogone, décagone, dodécagone, etc., réguliers, sont donc 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272, ... S'il est impair, le nombre de côtés peut être l'un des suivants : 3, 5, $15 = 3 \times 5$, 17, $51 = 3 \times 17$, $85 = 5 \times 17$, $255 = 3 \times 5 \times 17$, 257, $771 = 3 \times 257$, $1\,285 = 5 \times 257$, $\ldots$; s'il est pair, le nombre de côtés est le produit d'un de ces nombres impairs par 2^k où k est un nombre naturel quelconque, ou simplement 2^k.

5.7 Notations utiles

Avant de passer à d'autres ensembles remarquables de nombres, il est utile d'introduire une notation, volontiers utilisée par les mathématiciens, qui permet de rendre plus concise l'écriture de toute formule où figure une somme de termes ayant tous une même forme avec un nombre prenant les valeurs des nombres naturels successifs ou une suite de ces valeurs dans un certain intervalle. Cela consiste à utiliser la lettre grecque sigma majuscule $\sum$, qu'on fait suivre de l'expression générale des termes de la somme où on représente par une lettre, par exemple i, le nombre qui varie d'unité en unité d'un terme à l'autre. Les valeurs extrêmes que doit prendre ce nombre i sont indiquées sous le $\sum$ pour la plus petite et au-dessus du Σ pour la plus grande. Par exemple, la formule qui à la fin du chapitre 2, donnait la somme des n premiers nombres pairs, qui sont tous de la forme $2i$ où $i = 1, 2, \ldots, n$, peut ainsi s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1).$$

De même, la formule qui, un peu plus haut, donnait la somme des n premiers nombres impairs, qui sont de la forme $2i - 1$ avec $i = 1, 2, \ldots, n$, peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

Un autre exemple peut être fourni par la formule qui, un peu plus haut dans le présent chapitre, donne la somme des n premiers nombres de Mersenne : avec cette notation, elle devient

$$\sum_{i=1}^{n} M_n = M_{n+1} - (n+1).$$

Si la suite de valeurs à donner à ce nombre i qui change d'une unité d'un terme au suivant doit être prolongée indéfiniment jusqu'à l'infini, on indique effectivement comme valeur supérieure l'infini, représenté par le signe ∞, au-dessus du $\sum$. Par exemple, lorsqu'au chapitre 4, nous avons donné $\frac{1}{3} = 0{,}333\,3\ldots$ comme premier exemple de fraction décimale périodique, nous avions écrit $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$; ceci aurait pu être écrit de manière plus concise comme suit :

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i},$$

en utilisant la notation ∞ représentant l'infini. On pourrait semblablement écrire

$$\frac{1}{9} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^i}$$

pour introduire la fraction décimale périodique $\frac{1}{9} = 0{,}111\,1\ldots$.

On procède d'une manière semblable pour un produit d'une suite de facteurs analogues, avec un nombre i prenant les valeurs des nombres naturels successifs, dans un intervalle limité ou non, mais en utilisant alors un pi majuscule $\prod$ au lieu de $\sum$. Nous en verrons des exemples plus loin.

5.8 Les nombres carrés

Parmi les ensembles de nombres remarquables, on peut évidemment citer la suite des *carrés*, c'est-à-dire des produits des nombres naturels par eux-mêmes. Comme nous avons dit au chapitre 2, ils ont été appelés ainsi dès l'Antiquité parce que lorsqu'on les représente par des cailloux ou autres jetons ou figures dessinées, ceux-ci peuvent être disposés en carrés parfaits comme nous le rappelons à la figure 5 ci-dessous :

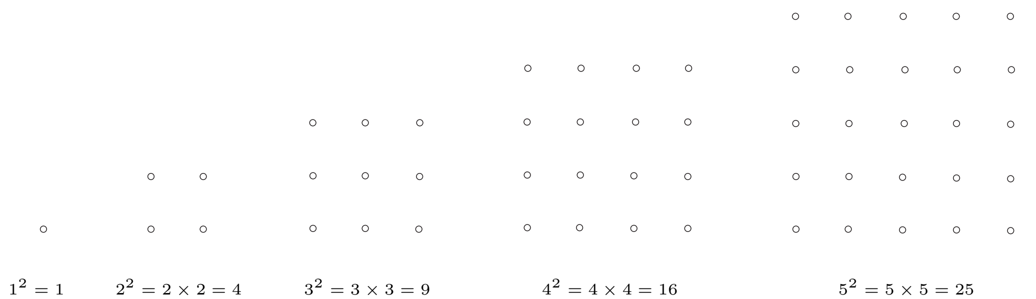


Figure 5 : Les premiers nombres carrés

Comme nous l'avons montré à la fin de ce chapitre 2, pour passer de n^2 à $(n+1)^2$, il suffit d'ajouter $2n+1$, ce qui se démontrait dès les temps anciens, notamment avec Pythagore, à l'aide de jetons ou autres objets de ce genre, ce que rappelle la figure 6. De proche en proche, on en déduit :

$$\begin{array}{rcl} 1^2 & = & 1 \\ 2^2 & = & 1+3=4 \\ 3^2 & = & 1+3+5=9 \\ 4^2 & = & 1+3+5+7=16 \\ & \vdots & \\ n^2 & = & 1+3+5+7+\cdots+(2n-1); \end{array}$$

on voit ainsi que le carré d'un nombre n est la somme des n premiers nombres impairs :

$$n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i-1).$$

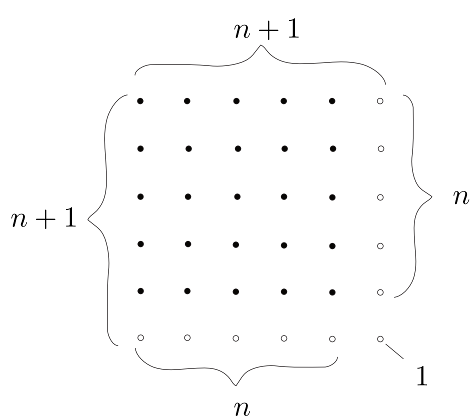


Figure 6 : Passage de n^2 à $(n+1)^2$

En numération décimale, les chiffres des unités des carrés des nombres naturels successifs se reproduisent périodiquement de 10 en 10 suivant la séquence 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0 ; ainsi le chiffre des unités est par exemple le même, 4, pour les carrés de 2, de 12, de 22, etc., ainsi que celui, 9, pour les carrés de 3, de 13, de 23, etc., et ainsi de suite. Comme on voit, mis à part le 0, chiffre des unités des carrés de 10 et de ses multiples, cette séquence est symétrique de part et d'autre de 5, chiffre des unités pour les carrés de 5, de 15, de 25, etc. (voir "nombre circulaire" au début de ce chapitre) ; par suite, elle est aussi symétrique de part et d'autre du 0. On a un phénomène analogue avec les deux derniers chiffres des carrés successifs ; ils forment une séquence se reproduisant périodiquement de 50 en 50 et qui est symétrique de part et d'autre de 25, soit les deux derniers chiffres de $25^2 = 625$. Ainsi, les deux derniers chiffres sont les mêmes pour n^2, $(50+n)^2$, $(100+n)^2$, etc., par exemple 44 pour $12^2 = 144$, $62^2 = 3\,844$, $112^2 = 12\,344$, etc. ; ils sont aussi les mêmes pour $(25+n)^2$ que pour $(25-n)^2$, par exemple 69 pour $37^2 = (25+12)^2 = 1\,369$ et $13^2 = (25-12)^2 = 169$, ainsi que pour $(50+n)^2$ et $(50-n)^2$, etc. Et ainsi de suite.

Une propriété intéressante à signaler c'est que le carré d'un nombre naturel n est égal à une unité près au produit du nombre précédent $n-1$ et du suivant $n+1$; plus précisément, il est égal à ce produit plus une unité : $n^2 = (n-1)\cdot(n+1)+1$. Par exemple, $10^2 = 9\cdot 11 + 1 = 99 + 1 = 100$. Une conséquence de cette relation est que tout nombre précédant un carré au-delà de celui de 2, donc de la forme n^2-1 avec $n > 2$, est toujours un nombre composé, ne peut jamais être un nombre premier.

D'après l'identité $m^2-n^2 = (m+n)(m-n)$ (*identité* signifie égalité vraie quelles que soient les valeurs données aux nombres représentés par des lettres, comme par exemple $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, formule vue au chapitre 1), facile à démontrer, la différence entre les carrés de deux nombres m et n est multiple à la fois de la somme de ces deux nombres et de leur différence. Par exemple, la différence entre $4^2 = 16$ et $7^2 = 49$, qui est $49 - 16 = 33$, est multiple à la fois de $7 + 4 = 11$ et de $7 - 4 = 3$. En particulier, la différence entre les carrés de deux nombres dont la somme ou la différence est 10 ou un multiple de 10 se terminera toujours par 0 en numération décimale ; par exemple, la différence entre les carrés de 8 et de 12, qui sont $8^2 = 64$ et $12^2 = 144$, est $144 - 64 = 80$. Si on a deux nombres se terminant par 5 en numération décimale, à la fois leur somme et leur différence seront multiples de 10 (éventuellement = 10) et par conséquent, la différence entre leurs carrés sera multiple de $10^2 = 100$; par exemple, on a $15^2 = 225$ et $25^2 = 625$, d'où $25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400$, qui est bien $\mathfrak{M}100$.

Un autre résultat encore qu'on peut déduire de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est le suivant. Si on part du produit de deux nombres consécutifs n et $n+1$, on obtient le carré du plus petit en le soustrayant de ce produit et le carré du plus grand en ajoutant celui-ci à ce produit : $n \cdot (n+1) - n = n^2$ et $n \cdot (n+1) + (n+1) = (n+1)^2$. Par exemple, en partant de $5 \cdot 6 = 30$, on obtient $5^2 = 30 - 5 = 25$ et $6^2 = 30 + 6 = 36$.

Euler, que nous avons déjà cité à la fin du chapitre 3, à propos de la notion d'indicateur d'Euler, a noté que tout nombre naturel qui suit un multiple de 4, c'est-à-dire qui est de la forme $4n+1$, et qui est premier est la somme de deux carrés. Par exemple, le nombre premier $13 = 12 + 1 = \mathfrak{M}4 + 1$ est égal à $3^2 + 2^2 = 9 + 4$.

Plus généralement, Lagrange (comte Louis de Lagrange, mathématicien français, 1736-1813) a démontré le théorème suivant (probablement énoncé par Bachet) : tout nombre naturel peut être écrit, d'une ou plusieurs manières, sous la forme d'une somme d'au plus quatre carrés. Parmi ces carrés, peut figurer $1^2 = 1$; mais on n'a jamais besoin d'additionner plus de 4 carrés. Par exemple, $10 = 9 + 1 = 3^2 + 1^2$, $15 = 9 + 4 + 1 + 1 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$.

5.9 Les nombres cubes

Après la suite des carrés des nombres naturels en tant qu'ensemble remarquable de nombres, on peut considérer la suite des nombres *cubes*. Mais notamment en raison de la plus grande difficulté de représenter ceux-ci, évoquée au chapitre 2, ceci a été moins pris en considération, surtout dans les temps anciens. Signalons seulement qu'on a pu démontrer un théorème analogue à celui qu'avait démontré Lagrange pour les carrés et cité ci-dessus : tout nombre naturel peut être écrit sous la forme d'une somme d'au plus neuf cubes.

Il y a, en numération décimale, des régularités analogues à celles que nous avons évoquées pour les nombres carrés. En particulier, les chiffres des unités des cubes des nombres naturels successifs se reproduisent aussi périodiquement de 10 en 10 suivant une séquence qui est ici 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, 0. Cette fois, les chiffres situés symétriquement de part et d'autre du 5 dans cette séquence ne sont pas égaux comme dans le cas des carrés (et des autres puissances d'exposant pair), mais chacun donne avec son symétrique une somme égale à 10. Les nombres formés par les deux derniers chiffres de $(50 - n)^3$ et $(50 + n)^3$ ont pour somme 100 (ou 0 dans le cas des cubes de multiples de 10, qui se terminent tous par 000), de même que les nombres formés des deux derniers chiffres de $(100 - n)^3$ et $(100 + n)^3$, etc. Les deux derniers chiffres des cubes successifs se reproduisent de 100 en 100 ; il en est de même de 50 en 50 pour les nombres pairs, tandis qu'il y a un écart de 50 pour les nombres impairs.

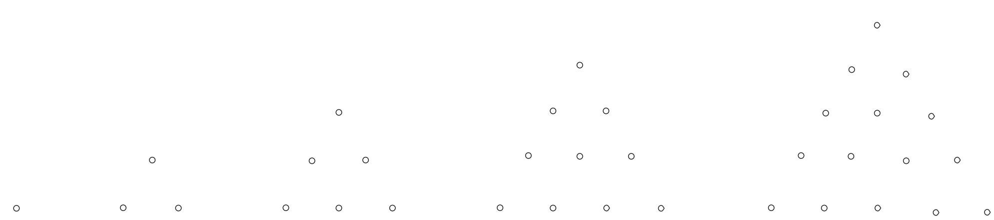
De l'identité $n^3 - 1 = (n - 1) \cdot (n^2 + n + 1)$ (la distributivité permet d'écrire pour le second membre $= n \cdot (n^2 + n + 1) - 1 \cdot (n^2 + n + 1) = n^3 + n^2 + n - n^2 - n - 1$

et en supprimant les termes opposés l'un à l'autre, on obtient bien $n^3 - 1$) montre que tout nombre naturel qui précède un nombre cube supérieur à celui de 2 est nécessairement un nombre composé, comme nous avons vu ci-dessus que c'est le cas pour ceux qui précèdent les nombres carrés supérieurs à celui de 2. C'est d'ailleurs le cas pour tout nombre naturel qui précède une puissance d'exposant p entier quelconque > 1, ceci en vertu de l'identité $n^p - 1 = (n-1)(n^{p-1} + n^{p-2} + \cdots + n + 1)$ qu'on déduit de celle, vue au chapitre 3, donnant $m^p - n^p$, en y faisant $n = 1$ et en remplaçant ensuite m par n, qu'on doit ici supposer > 2 pour que $n - 1 > 1$. C'est même vrai pour les puissances de 2 lorsque l'exposant est pair, car on peut alors écrire $2^{2p} - 1 = 4^p - 1 = (4-1)(4^{p-1} + \cdots + 4 + 1)$, ce qui montre que les nombres naturels qui précèdent les puissances paires de 2 sont multiples de $4 - 1 = 3$ (tandis que si l'exposant est impair, c'est le nombre suivant qui est multiple de 3, donc $2^{2p+1} + 1 = \mathfrak{M}3$).

5.10 Les nombres triangulaires

Mais une autre suite de nombres remarquables qui ont pu, dès l'Antiquité aussi, comme les carrés, être facilement représentés à l'aide de jetons est la suite des *nombres triangulaires* T_n où $n = 1, 2, 3, \ldots$, dont les premiers sont donnés à la figure 7 ci-dessous. Ce sont des triangles dont les trois côtés, celui qui est pris pour base comme les deux autres, comptent un même nombre n de signes. En considérant chaque fois les différentes lignes superposées, on voit que

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} i.$$



$T_1 = 1$ $\quad$ $T_2 = 1 + 2 = 3$ $\quad$ $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$ $\quad$ $T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ $\quad$ $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

Figure 7 : Les premiers nombres triangulaires

Quand on passe d'un nombre triangulaire au suivant, on ajoute une fois sur deux un nombre impair, ce qui change la parité de la somme. Ainsi, les T_n sont impairs et pairs alternativement par paires : T_1 et T_2 sont impairs, T_3 et T_4 sont pairs, T_5

et T_6 sont impairs, T_7 et T_8 sont pairs, etc. D'autre part, lorsque n est pair, T_n est $\mathfrak{M}(\frac{n}{2})$ et $\mathfrak{M}(n+1)$; lorsque n est impair, T_n est $\mathfrak{M}n$ et $\mathfrak{M}(\frac{n+1}{2})$.

La formule de récurrence faisant passer de T_n à T_{n+1} est évidemment

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)$$

(soit $T_n = T_{n-1} + n$ pour passer de T_{n-1} à T_n). On a aussi $T_{n+2} = T_n + 2n + 3$ et $T_{n+3} = T_n + 3(n+2)$; plus généralement :

$$T_{n+m} = T_n + m\left(n + \frac{m+1}{2}\right) = T_n + \frac{m}{2}(2n+m+1)$$

(la dernière expression est préférable lorsque m est pair et la précédente lorsque m est impair et donc $m+1$ pair).

Quand n devient grand, comment calculer T_n sans devoir faire une longue somme ? Le rectangle de la figure 8 ci-dessous est formé de la juxtaposition de deux triangles T_n identiques de chaque côté de la ligne oblique ; ces deux T_n identiques sont seulement un peu déformés pour en faire des triangles rectangles plutôt que des triangles équilatéraux comme à la figure 7, mais le nombre de petits disques à la base, ainsi que dans les deux autres côtés est bien le même, il est égal au nombre de lignes dans la figure. Or dans tout le rectangle, il y a $n(n+1)$ disques. Donc il y en a $\frac{n(n+1)}{2}$ dans chacun des deux triangles égaux :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

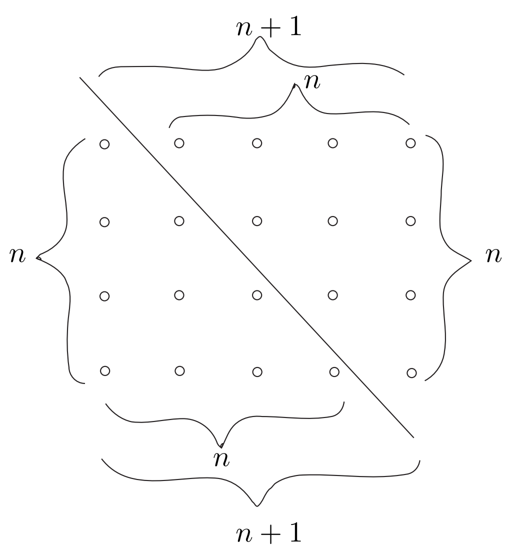


Figure 8 : $(n+1) \times n = 2T_n$

Cette formule peut d'ailleurs être obtenue en utilisant celle qui à la fin du chapitre 2, donnait la somme des n premiers nombres pairs et que nous avons rappelée pour donner un exemple d'utilisation de la notation $\sum$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1) :$$

il suffit simplement de diviser membre à membre par 2, il vient bien

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\cdot$$

Ceci peut évidemment aussi se démontrer par récurrence : si on suppose que la formule est vraie pour $n-1$, c'est-à-dire qu'on a

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2},$$

elle l'est pour n puisqu'alors

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2};$$

or elle l'est pour $n = 1$, donc elle l'est pour tout n. On en déduit les valeurs suivantes des premiers T_n :

$$\begin{array}{l|l|l|l}
T_1 = \dfrac{1\times 2}{2} = 1, & T_4 = \dfrac{4\times 5}{2} = 10, & T_7 = \dfrac{7\times 8}{2} = 28, & T_{10} = \dfrac{10\times 11}{2} = 55, \\
T_2 = \dfrac{2\times 3}{2} = 3, & T_5 = \dfrac{5\times 6}{2} = 15, & T_8 = \dfrac{8\times 9}{2} = 36, & T_{11} = \dfrac{11\times 12}{2} = 66, \\
T_3 = \dfrac{3\times 4}{2} = 6, & T_6 = \dfrac{6\times 7}{2} = 21, & T_9 = \dfrac{9\times 10}{2} = 45, & T_{12} = \dfrac{12\times 13}{2} = 78, \\
\ldots & & &
\end{array}$$

Par généralisation, on peut aussi écrire $T_0 = 0$, ce que donne la formule que nous venons d'utiliser aussi bien que la formule de récurrence prise dans le sens inverse

$$T_n = T_{n+1} - (n+1)$$

si on y fait $n = 0$. On peut remarquer que le nombre triangulaire $T_8 = 36$ est en même temps un nombre carré, puisque $36 = 6^2$ (comme d'autres, le suivant étant

$T_{49} = 1\,225 = 35^2$) ; accessoirement, c'est aussi le cas pour $T_1 = 1$ puisque $1 = 1^2$. D'autre part, les nombres d'Euclide, donc en particulier les nombres parfaits, sont tous des nombres triangulaires : on a

$$\mathcal{E}_n = T_m \quad \text{où } m = 2^n - 1.$$

Si au lieu de juxtaposer par leurs bases deux mêmes triangles T_n comme à la figure 8, nous le faisons avec T_{n-1} et T_n, nous obtenons un carré de côté n, comme le montre la figure 9. On a donc la relation

$$T_{n-1} + T_n = n^2.$$

Grâce aux valeurs ci-dessus des T_n, on en déduit

$$\begin{array}{l|l|l}
2^2 = 1 + 3 = 4, & 6^2 = 15 + 21 = 36, & 10^2 = 45 + 55 = 100, \\
3^2 = 3 + 6 = 9, & 7^2 = 21 + 28 = 49, & 11^2 = 55 + 66 = 121, \\
4^2 = 6 + 10 = 16, & 8^2 = 28 + 36 = 64, & 12^2 = 66 + 78 = 144, \\
5^2 = 10 + 15 = 25, & 9^2 = 36 + 45 = 81, & \ldots
\end{array}$$

On peut vérifier sur ces valeurs la formule

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$$

que nous avons citée plus haut vers la fin de l'étude des nombres carrés, identité qui est d'ailleurs valable non seulement pour des nombres naturels, mais évidemment aussi pour des nombres quelconques.

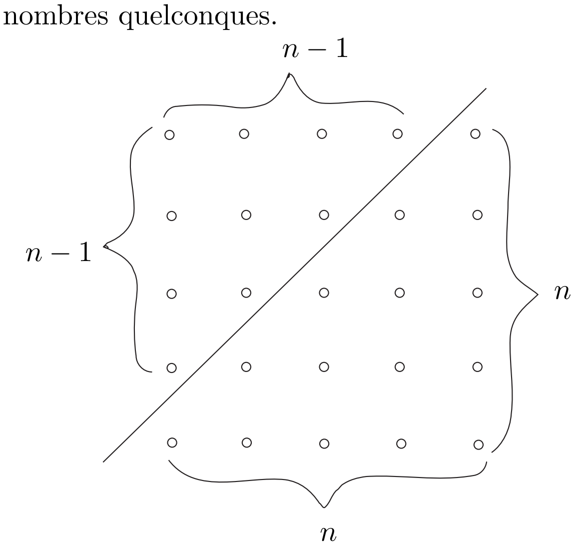


Figure 9 : $T_{n-1} + T_n = n^2$

Au sujet des nombres triangulaires, nous pouvons encore citer les formules suivantes :

$$T_n = \frac{n+1}{n-1}\, T_{n-1}, \quad T_{m+n} = T_m + T_n + mn, \quad T_{2n} = 4T_n - n$$

et plus généralement

$$T_{mn} = m^2 T_n - nT_{m-1} = 2T_m T_n - \frac{1}{2}\, mn(m+n), \quad T_{n^2} = 2T_n^2 - n^3.$$

De la troisième des formules que nous venons d'écrire, on peut déduire

$$\sum_{i=1}^{n}(4i-1) = \sum_{i=1}^{2n} i = n(2n+1).$$

Revenons un peu à la manière dont peuvent être construits les triangles successifs de la figure 7. Pour passer de T_1 à T_2, on prend pour base une ligne de 2 jetons et on appuie sur ceux-ci, au-dessus du petit intervalle qui les sépare, le jeton T_1. Pour passer à T_3, on prend une ligne de 3 jetons et on y superpose le triangle T_2 en mettant les deux jetons de sa base sur les deux petits intervalles qui sont entre les jetons de la base préparée pour T_3. On continue ainsi : on passe de T_{n-1} à T_n en prenant une ligne de n jetons et en y superposant le triangle T_{n-1} de manière que les $n-1$ jetons de sa base viennent au-dessus des $n-1$ petits intervalles entre les n jetons qu'on vient de mettre.

5.11 Les nombres pyramidaux

Passons maintenant du plan, où les jetons étaient considérés comme des disques sans épaisseur, à l'espace, en remplaçant ces disques par des boules. Commençons alors par poser la boule de T_1 au-dessus du centre du triangle T_2 de manière que cette boule s'appuie sur les trois boules qui forment le triangle T_2. Nous constituons ainsi une petite pyramide triangulaire dont les sommets sont les quatre boules. Ensuite, nous posons cette pyramide sur le triangle T_3 de manière que chacune des trois boules de la base vienne sur un des intervalles au centre de chacun des trois petits triangles formés par les six boules de T_3. On voit qu'on peut continuer ainsi en posant chaque fois sur le triangle T_n la pyramide obtenue juste avant avec pour base T_{n-1}. Le nombre de boules dans la pyramide dont chaque côté a n boules est égal à la somme des nombres de boules dans T_1, T_2, etc., jusque T_n compris. Si nous désignons par P_n ce *nombre pyramidal*, on a donc

$$P_n = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{n-1} + T_n = \sum_{i=1}^{n} T_i,$$

c'est-à-dire

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} j \right),$$

avec la formule de récurrence

$$P_n = P_{n-1} + T_n.$$

Les premières valeurs sont $P_1 = 1$, $P_2 = 4$, $P_3 = 10$, $P_4 = 20$, $P_5 = 35$, $P_6 = 56$, $P_7 = 84$, $P_8 = 120$, $P_9 = 165$, $P_{10} = 220$, etc. En utilisant la formule de récurrence sous la forme

$$P_{n-1} = P_n - T_n$$

et en y faisant $n = 1$, on obtient $P_0 = 0$, qu'on peut y ajouter. On peut démontrer par récurrence qu'on a

$$P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

On peut aussi démontrer les formules suivantes :

$$P_n = \frac{n+2}{n-1} P_{n-1}, \quad P_{m+n} = P_m + P_n + mn \left(\frac{m+n}{2} + 1 \right), \quad P_{2n} = 2P_n + n^2(n+1).$$

On pourrait imaginer de passer dans l'espace à quatre dimensions pour y superposer les pyramides de manière à former des hyperpyramides, comme nous venons de superposer les triangles dans l'espace à trois dimensions pour former des pyramides. Si nous désignons par H_n le nombre de boules dans la $n^{\text{ème}}$ hyperpyramide, on a

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{i} \left(\sum_{k=1}^{j} k \right) \right] \quad \text{avec } H_n = H_{n-1} + P_n.$$

Les premières valeurs en sont $H_0 = 0$, $H_1 = 1$, $H_2 = 5$, $H_3 = 15$, $H_4 = 35$, $H_5 = 70$, etc.

Plus généralement, on définit les *nombres hyperpyramidaux* à $p+1$ dimensions ou *nombres figurés* du $(p+2)^{\text{ème}}$ ordre comme étant les nombres H_n^p définis par

$$H_n^p = \sum_{i=1}^{n} H_i^{p-1}$$

avec $H_n^0 = n$, c'est-à-dire les nombres naturels, et donc

$$H_n^1 = T_n, \quad H_n^2 = P_n, \quad H_n^3 = H_n,$$

où il faut veiller à ne pas confondre les indices supérieurs avec des exposants (le p de H_n^p n'est pas un exposant, mais un indice supérieur, comme le n est un indice inférieur). On a

$$H_n^p = H_{n-1}^p + H_n^{p-1},$$

ainsi que l'expression générale

$$H_n^p = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)(n+p)}{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times p \times (p+1)},$$

d'où l'on déduit

$$H_n^p = H_{p+2}^{n-2}$$

et par suite

$$H_{n+1}^{p-1} = H_{p+1}^{n-1},$$

ainsi que les valeurs $H_0^p = 0$, $H_1^p = 1$, $H_2^p = p+2$, $H_3^p = \frac{(p+2)(p+3)}{2}$, $H_4^p = \frac{(p+2)(p+3)(p+4)}{6}$, etc. En particulier, pour $p = 3$,

$$H_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

5.12 Les factorielles

Nous avons obtenu une suite remarquable de nombres, les nombres triangulaires, en additionnant les n premiers nombres naturels, c'est-à-dire en considérant les sommes $\sum_{i=1}^n i$. On obtient semblablement une suite remarquable de nombres en multipliant les n premiers nombres naturels, c'est-à-dire en formant les produits dont les facteurs sont les n premiers nombres naturels : $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$; c'est ce qu'on appelle les *factorielles*, qu'on représente par la notation $n!$ (la notation $\underline{|n}$ a aussi été utilisée). En utilisant la notation $\prod$, que nous avons signalée juste après avoir introduit la notation $\sum$, on peut donc écrire

$$n! = \prod_{i=1}^n i.$$

Les valeurs des premières factorielles sont $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5\,040$, $8! = 40\,320$, $9! = 362\,880$, $10! = 3\,628\,800$, $11! = 39\,916\,800$, $12! = 479\,001\,600, \dots$. Par analogie avec la terminologie que nous venons d'indiquer pour les factorielles, on pourrait appeler "termiennes" les nombres triangulaires, pour lesquelles on fait une somme de termes avec les premiers nombres naturels, comme ici on fait avec ces nombres un produit de facteurs ; on pourrait peut-être même les désigner par une notation telle que $n?$ par exemple, comme on emploie $n!$ pour les factorielles. Si on compare les valeurs ci-dessus des factorielles à celles que nous avions pour T_1, …, T_{12}, on voit qu'assez vite les factorielles grandissent beaucoup plus et qu'on arrive rapidement à des valeurs très grandes ; on a déjà $15! = 1\,307\,674\,368\,000$ et $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$. D'après la définition $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$, il est évident que $n!$ est multiple d'un produit quelconque de nombres naturels pris chacun une fois au plus parmi ceux qui sont inférieurs à n ou égal à n. Ainsi, $10!$ est multiple de $2 \times 5 \times 10 = 100$ et ceci se traduit par la présence de deux zéros à la droite de la valeur de $10!$ écrite dans le système décimal. Il en est de même pour les factorielles des nombres suivants.

Quand n est grand et donc $n!$ très grand, une valeur approchée de $n!$ est donnée par la formule de Stirling (1692-1770) d'autant plus exacte en valeur relative que n est grand :

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(le signe $\simeq$ signifie “approximativement égal à”) où π et e sont des nombres dont nous parlerons ultérieurement, qui ne sont non seulement pas des nombres entiers, mais ne peuvent même pas s'exprimer sous forme de fractions, et dont les valeurs approchées sont $\pi \simeq 3{,}141\,593$ et $e \simeq 2{,}718\,282$. Nous y reviendrons plus loin. Plus précisément même, on peut écrire

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right).$$

De la définition, on déduit immédiatement la formule de récurrence qui permet de passer de $n!$ à $(n+1)!$:

$$(n+1)! = n! \times (n+1).$$

On peut en déduire que

$$\sum_{i=1}^{n}(i! \times i) = (n+1)! - 1$$

et de la définition, on peut déduire que pour $m > n$, on a

$$\frac{m!}{n!} = \prod_{i=1}^{m-n}(n+i) = \prod_{i=1}^{m-n}(m-i+1) \quad \text{et} \quad \frac{m!}{(m-n)!} = \prod_{i=1}^{n}(m-i+1).$$

La formule de récurrence mise sous la forme

$$n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$$

donne, quand on y fait $n = 0$, $0! = 1$, ce qu'on peut ajouter aux valeurs données plus haut.

Notons encore les résultats suivants :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} = \frac{2^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} = 0.$$

Il est facile de voir que

$$n! + (n-1)! = \mathfrak{M}(n+1);$$

en effet, $n! + (n-1)! = (n-1)! \cdot n + (n-1)! = (n-1)! \cdot (n+1)$. On peut d'autre part vérifier que si p est un nombre premier supérieur à 3, on a

$$(p-2)! = \mathfrak{M}p + 1.$$

Il est possible d'en déduire que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre n soit premier est qu'on ait

$$(n-1)! + 1 = \mathfrak{M}n;$$

ceci constitue le théorème de Wilson, publié en 1770 et démontré par Lagrange en 1771.

La notation des factorielles permet de condenser appréciablement certaines expressions. Par exemple, le nombre hyperpyramidal à $p+1$ dimensions H_n^p pour lequel nous avons écrit un peu plus haut

$$H_n^p = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)(n+p)}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times p \times (p+1)}$$

s'écrit plus simplement

$$H_n^p = \frac{(n+p)!}{(n-1)!(p+1)!};$$

en particulier, lorsque $p = 3$,

$$H_n = \frac{(n+3)!}{(n-1)!4!}.$$

Nous avons suggéré ci-dessus d'appeler termiennes les nombres triangulaires $T_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n$; il conviendrait plus exactement de les appeler "termiennes simples" par opposition aux "termiennes doubles paires" $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2+4+\cdots+2n$ et aux "termiennes doubles impaires" $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+\cdots+(2n-1)$, c'est-à-dire respectivement la somme des n premiers nombres naturels pairs et la somme des n premiers nombres naturels impairs ; d'après les formules de la fin du chapitre 2, rappelées lors de l'introduction de la notation $\sum$, ces sommes valent respectivement $n(n+1)$ et n^2. Semblablement, il convient, plus explicitement, d'appeler "factorielles simples" celles qui sont définies ci-dessus, pour lesquelles on sous-entend en général "simples", tandis qu'on appellera "factorielles doubles paires" et "factorielles doubles impaires" respectivement les produits des premiers nombres naturels pairs et les produits des premiers nombres naturels impairs. On peut les représenter à l'aide d'un double !.

Pour les factorielles doubles paires, on aura donc

$$(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n = \prod_{i=1}^{n} 2i,$$

avec la formule de récurrence

$$(2n+2)!! = (2n)!! \times (2n+2).$$

Les premières valeurs sont $2!! = 2$, $4!! = 8$, $6!! = 48$, $8!! = 384$, $10!! = 3\,840$, $12!! = 46\,080$, $14!! = 645\,120$, $16!! = 10\,321\,920$, etc. Si on divise membre à membre la relation de récurrence par le dernier facteur et qu'on y fait $n = 0$, on trouve

$$0!! = \frac{2!!}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

on peut donc, par généralisation, ajouter aux valeurs ci-dessus $0!! = 1$. De la formule de récurrence, on peut aussi déduire que

$$\sum_{i=1}^{n} [(2i)!!(2i+1)] = (2n+2)!! - 2 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{n} [(2i)!!(2i+1)] = (2n+2)!! - 1.$$

Enfin, il est facile de voir qu'on a la relation suivante avec les factorielles simples :

$$(2n)!! = n! \times 2^n.$$

Pour les factorielles doubles impaires, on aura

$$(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3) \times (2n-1) = \prod_{i=1}^{n} (2i-1),$$

avec la formule de récurrence

$$(2n+1)!! = (2n-1)!! \times (2n+1).$$

Les premières valeurs sont $1!! = 1$, $3!! = 3$, $5!! = 15$, $7!! = 105$, $9!! = 945$, $11!! = 10\,395$, $13!! = 135\,135$, $15!! = 2\,027\,025$, etc. Par généralisation, on peut écrire $(-1)!! = 1$, qu'on déduit de la formule de récurrence quand on y fait $n = 0$. Grâce à la formule de récurrence, on peut obtenir

$$\sum_{i=0}^{n}[(2i-1)!! \times 2i] = (2n+1)!! - 1.$$

Enfin, on peut voir que

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{n!2^n} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!2^{n-1}}.$$

5.13 Les triades pythagoriques

Vers le début de ce chapitre, nous avons étudié des nombres qui sont remarquables par les propriétés que chacun d'eux a vis-à-vis d'un autre et réciproquement : c'étaient les nombres amiables, qui forment des groupes de deux. Nous allons maintenant voir des nombres qui sont liés par trois, ce sont les *triades* dites *pythagoriques*, qu'on a aussi appelées *ternes pythagoriciens*. Nous avons rappelé au chapitre 2 le théorème de Pythagore selon lequel dans un triangle rectangle, c'est-à-dire dont un angle est droit, le carré de la longueur de l'hypoténuse, le côté opposé à l'angle droit, est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. On a cherché à construire des triangles dont les longueurs des côtés répondent à cette condition tout en étant des multiples d'une même unité de longueur. Il faut pour cela trouver deux nombres naturels x et y dont la somme des carrés soit égale au carré d'un troisième, soit z ; ce dernier est alors, avec l'unité choisie, la mesure de l'hypoténuse et les deux premiers les mesures des côtés de l'angle droit :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Cette relation est satisfaite par les nombres 3, 4 et 5, car on a $3^2 + 4^2 = 5^2$, c'est-à-dire $9 + 16 = 25$; (3, 4 ; 5) est la première de ce qu'on appelle les *triades pythagoriques*. Si on multiplie chacun des trois nombres par un même nombre k, on obtient encore une triade pythagorique, car cela revient à multiplier membre à membre par k^2 la relation à satisfaire :

$$k^2x^2 + k^2y^2 = k^2z^2.$$

Par exemple, avec $k = 2$, il vient $6^2 + 8^2 = 10^2$, soit $36 + 64 = 100$. Toute triade pythagorique formée de nombres premiers entre eux en donne ainsi une infinité d'autres, formées avec les multiples. Or on a aussi le moyen de former en nombre infini des triades de nombres premiers entre eux qui soient pythagoriques. Parmi les premières, on peut citer (3, 4 ; 5), (5, 12 ; 13), (8, 15 ; 17), (7, 24 ; 25), (20, 21 ; 29), (12, 35 ; 37), (9, 40 ; 41), ... On peut trouver ces triades, y compris celles qui sont formées avec les multiples, en introduisant des nombres naturels quelconques pour k, m et n (avec $m > n$) dans

$$x = k(m^2 - n^2), \quad y = 2kmn, \quad z = k(m^2 + n^2)$$

(ceci ne conduit pas chaque fois à des valeurs telles que $x < y$, comme dans les exemples que nous venons de donner, où nous avons systématiquement mis en premier lieu le plus petit des deux nombres x et y, ce qui n'a pas d'importance puisque $x^2 + y^2 = y^2 + x^2$ en vertu de la commutativité de l'addition). La première des triades citées, qui est particulièrement simple et que nous avons prise pour exemple ci-dessus, est de loin la plus connue (on l'appelle souvent *terne pythagoricien*, mais on utilise aussi volontiers cette expression pour toutes ces triades). On l'a même souvent employée lors de constructions, pour avoir des murs bien à angle droit l'un de l'autre : il suffit de fixer sur le terrain deux points qui soient, sur les côtés de l'angle qui doit être droit, à 3 mètres et à 4 mètres du sommet de cet angle, pris comme point de départ, tout en étant exactement à 5 mètres l'un de l'autre ; certains utilisent pour cela une corde à noeuds de 12 mètres ($= 3 + 4 + 5$), qu'il suffit de tendre suivant les côtés d'un triangle qui alors est automatiquement un triangle rectangle. La triade pythagorique (3, 4 ; 5) et ses multiples (6, 8 ; 10), (9, 12 ; 15), (12, 16 ; 20), ... sont les seules pour lesquelles on a $y - x = z - y$, c'est-à-dire pour lesquelles x, y, z sont en progression arithmétique (voir chapitre 9) ; d'autre part, satisfaire à $x^2 + y^2 = z^2$ n'est pas possible avec des nombres naturels en progression géométrique, donc tels que $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$, car il faudrait pour cela, comme on peut le déduire de ce qui sera vu au chapitre 10, que $\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \sqrt{\Phi}$, ce qui est un nombre irrationnel.

A propos de ce problème consistant à trouver des nombres naturels x, y et z qui satisfont à la relation $x^2 + y^2 = z^2$, on s'est évidemment posé la question de savoir si on peut aussi trouver des nombres naturels satisfaisant une relation de la forme $x^n + y^n = z^n$ lorsque $n = 3$ par exemple ou plus généralement lorsque n est plus grand que 2. C'est possible avec plus de deux termes dans le premier membre ; par exemple pour $n = 3$, on a $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3$, ... Mais comme l'a affirmé Fermat, ce n'est pas possible avec seulement deux termes dans le premier membre, c'est-à-dire que la relation $x^n + y^n = z^n$ n'est pas possible en nombres naturels avec $n > 2$. C'est ce qu'on a appelé le "grand théorème de Fermat", dont on a longtemps recherché la démonstration. On en a trouvé des démonstrations partielles en allant jusqu'à des valeurs de plus en plus grandes pour n, mais ce n'est qu'il y a quelques années seulement qu'on a pu en obtenir une démonstration complète. Comme les autres sciences, les sciences mathématiques ont fait beaucoup de progrès à l'époque contemporaine et parmi ceux-ci il y a eu les démonstrations de certaines propositions qui étaient restées non démontrées jusqu'alors. Un autre exemple est la conjecture de Catalan, à laquelle il sera incidemment fait allusion vers le début du chapitre 10 : on n'a aussi obtenu que récemment la démonstration de ce que l'équation de Catalan

$$a^m - b^n = 1$$

n'a pas d'autre solution en nombres naturels pour a, b, m et n tous > 1 que $3^2 - 2^3 = 1$.

Nous verrons encore d'autres groupes de nombres particuliers, notamment les coefficients binomiaux et les nombres de la suite de Fibonacci, après avoir étudié les combinaisons, au chapitre 7.

Chapitre 6

Autres catégories de nombres

6.1 Les nombres relatifs

6.1.1 Les nombres négatifs

La première extension que nous allons considérer de la notion de nombre consiste à introduire les *nombres négatifs*. Nous en avons la notion par la considération d'échelles, par exemple celle des températures, sur lesquelles le zéro choisi pour origine peut être dépassé dans un sens aussi bien que dans l'autre. Dans le cas des températures, il existe un zéro absolu, correspondant à l'annulation de l'agitation thermique des atomes et molécules. Mais quand on a construit des thermomètres pour caractériser quantitativement l'état de température des corps, ce zéro absolu n'étant pas accessible, on a choisi pour origine une température facilement reproductible avec précision, notamment celle de la fusion de la glace d'eau pure à la pression normale d'1 atmosphère. Mais alors, quand il gèle, la température est un nombre négatif ! Dès avant cela, pour repérer la position d'un point sur une droite, on a pu donner sa distance à un point fixe choisi pour origine, mais en affectant le nombre exprimant cette distance du signe $+$ ou du signe $-$ suivant le sens dans lequel il fallait se déplacer à partir de cette origine pour atteindre le point considéré. Ici, il n'y a d'ailleurs pas de zéro absolu comme origine possible, puisque la géométrie nous apprend que la droite est illimitée dans les deux sens. Il en va de même pour indiquer la position d'un point dans un plan. Ceci peut se faire grâce au choix d'un système de coordonnées consistant en deux droites, le plus souvent perpendiculaires l'une à l'autre, dont l'intersection O sert d'origine sur chacune d'elles. On choisit d'orienter de gauche à droite la droite horizontale, qui est appelée *axe des abscisses*, et de bas en haut la droite verticale, qui est appelée *axe des ordonnées*. Pour déterminer la position d'un point quelconque P du plan, on le projette sur chacun des axes parallèlement à l'autre axe. La mesure de la distance à O de la projection sur l'axe des abscisses est un nombre appelé l'*abscisse* x de P et la mesure de la distance à O de la projection sur l'axe des ordonnées est un nombre appelé l'*ordonnée* y de P. Chacun de ces deux nombres, les distances des projections de P à partir de O, est affecté du signe $+$ ou du signe $-$ selon le sens dans lequel on va de O à la projection de P considérée. Il en résulte que x est positif ou négatif suivant que P est à droite ou à gauche de l'axe vertical et y est positif ou négatif suivant que P est au-dessus ou en-dessous de l'axe horizontal. Pour l'ensemble des points situés sur une courbe du plan, il existe une relation entre leurs coordonnées x et y, qui est appelée l'*équation de la courbe*. C'est la base de la géométrie analytique. En particulier, on peut voir que si cette équation est linéaire, c'est-à-dire peut être mise sous la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont des nombres pouvant eux aussi être positifs ou négatifs, donc une relation où x et y ne figurent qu'avec l'exposant 1 (évidemment sous-entendu), la courbe (au sens général) est une droite. Si en particulier on a $c = 0$, la droite passe par O.

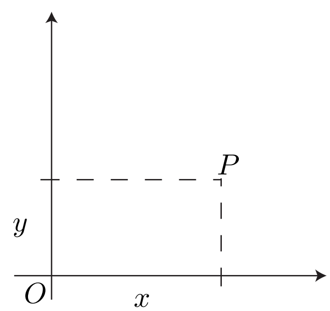


Figure 10 : Système de coordonnées dans le plan

Introduire les nombres fractionnaires, comme nous l'avons fait au chapitre 4, cela revient à introduire des nombres parmi lesquels se trouve toujours le quotient exact d'une division de nombres naturels même quand le dividende n'est pas multiple du diviseur ; ce n'est pas le cas quand on se limite aux nombres naturels. Mais avant la division, opération inverse de la multiplication, nous avions dans un tout premier stade, la soustraction, opération inverse de l'addition. Or pour elle aussi on ne trouve pas toujours le résultat parmi les nombres naturels : si nous soustrayons un plus grand nombre d'un plus petit, la différence est parmi les nombres négatifs. En stricte logique, il serait donc naturel d'introduire les nombres négatifs avant les nombres fractionnaires, étant donné que la soustraction vient avant la division puisque l'addition vient avant la multiplication. Pourtant la notion de nombres négatifs a seulement été introduite il y a quelque siècles, alors que celle de fractions l'a été dès la haute Antiquité. Mais la considération assez simple de différences négatives n'avait guère besoin d'être formalisée jusqu'à ce qu'on soit amené à l'introduire à propos de considérations comme celles de la géométrie analytique ou celles d'échelles graduées à partir de zéros choisis selon des opportunités diverses. Au contraire, l'introduction de nombres fractionnaires s'était depuis longtemps avérée nécessaire lors du décompte d'objets dont on était amené à considérer des parties qui étaient mesurables.

6.1.2 Les nombres opposés - Valeurs absolues

Par opposition aux nombres négatifs, les autres sont évidemment appelés *nombres positifs*, à l'exclusion toutefois de zéro, qui n'est en quelque sorte ni l'un ni l'autre. Un nombre positif a est un nombre tel que $a > 0$, de même qu'un nombre négatif b est un nombre tel que $b < 0$. Un nombre obtenu à partir d'un autre en changeant son signe est appelé l'*opposé* de cet autre. La *valeur absolue* d'un nombre est par définition ce nombre lui-même s'il est positif et son opposé s'il est négatif ; c'est donc toujours un nombre positif. Le nombre 0 n'ayant pas de signe, il est en quelque sorte son propre opposé, sa valeur absolue est aussi 0. On désigne la valeur absolue d'un nombre en l'entourant de deux barres verticales, par exemple $|-4| = 4$ et $|+4| = 4$. On sous-entend en général le signe $+$ pour les nombres positifs et *a fortiori* pour les valeurs absolues. Les nombres naturels, leurs opposés et le 0 sont appelés les *nombres entiers*.

Bien entendu, comme on le comprend par les considérations grâce auxquelles nous avons introduit la notion de nombres négatifs, les nombres fractionnaires peuvent être, aussi bien que les entiers, considérés avec le signe $+$ ou le signe $-$, c'est-à-dire qu'ils peuvent être aussi bien négatifs que positifs. Les notions de nombre opposé et de valeur absolue les concernent donc aussi. Il en est d'ailleurs de même pour les nombres irrationnels, dont il sera question ci-après ; ils peuvent d'ailleurs être approchés d'aussi près qu'on veut par les nombres fractionnaires.

On appelle parfois *nombres relatifs* les nombres, entiers ou non, considérés avec leur signe, c'est-à-dire tous les nombres positifs, tous les nombres négatifs et le zéro.

Pour additionner à un nombre quelconque a un nombre négatif $-b$, on soustrait sa valeur absolue $|-b| = b$:

$$a + (-b) = a - b;$$

pour soustraire un nombre négatif, on additionne sa valeur absolue :

$$a - (-b) = a + b.$$

On appelle *somme algébrique* une somme de termes avec aussi bien des signes $-$ que des signes $+$. Considérons une égalité dont les membres sont constitués de telles sommes algébriques. De ce qui a été dit à la fin du chapitre 1 concernant les égalités et du fait que la somme d'un nombre et de son opposé est nulle, c'est-à-dire est 0, on déduit qu'une telle égalité est conservée quand on fait passer d'un de ses membres à l'autre un nombre ou une expression quelconque contenant des nombres, à condition de simplement changer son signe. Par exemple, chacune des égalités $a = b + c$ et $a - c = b$ entraîne l'autre, ce qui a déjà été dit au chapitre 1.

6.1.3 La règle des signes

Comme nous avons dit aussi au premier chapitre, les règles de commutativité, d'associativité et de distributivité pour l'addition et la multiplication sont générales ; elles s'appliquent donc aux nombres relatifs. Pour que tout cela reste cohérent, il faut dans toute multiplication dont les facteurs sont des nombres relatifs, appliquer la règle suivante : le produit de deux nombres de même signe est égal au produit de leurs valeurs absolues affecté du signe + et le produit de deux nombres de signes différents est égal au produit de leurs valeurs absolues affecté du signe $-$. Par exemple,

$$(+4) \times (+3) = +12, \ (-4) \times (-3) = +12, \ (+4) \times (-3) = -12, \ (-4) \times (+3) = -12.$$

On exprime en général ceci de manière concise en disant : + par + ou $-$ par $-$ donnent +, + par $-$ ou $-$ par + donnent $-$. C'est la "règle des signes".

Il résulte de ceci que pour indiquer que deux nombres a et b ont le même signe, c'est-à-dire sont tous deux positifs ou tous deux négatifs, il suffit d'écrire que $a \cdot b > 0$, tandis que pour indiquer qu'ils sont de signes différents, il suffit d'écrire que $a \cdot b < 0$.

Appliquons ceci au produit de n facteurs égaux à $-a$, ce qui constitue la $n^{\text{ème}}$ puissance de $-a$. Si $a = |-a|$, on trouve de proche en proche

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = a^2, \quad (-a)^3 = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = a^2 \cdot (-a) = -a^3, \ldots ;$$

plus généralement,

$$(-a)^n = a^n \quad \text{si } n \text{ est pair et} \quad (-a)^n = -a^n \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

En particulier, $(-1)^n = 1$ ou -1 selon que n est pair ou impair respectivement. Il suffit donc de mettre $(-1)^n$ en facteur devant une expression si on veut qu'elle soit affectée du signe + ou du signe $-$ selon la parité de n. C'est notamment ce qu'on fait pour obtenir des *sommes alternées*, c'est-à-dire dont les termes sont alternativement additionnés et soustraits, représentées avec le signe $\sum$ et une lettre i prenant les valeurs de nombres naturels successifs. Prenons un exemple particulièrement simple :

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i = -1 + 2 - 3 + 4 - \cdots - (2n-1) + 2n;$$

chacune des n paires successives de termes donne pour somme $+1$ et comme il y en a n, il vient

$$\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i = n.$$

C'est d'ailleurs bien ce qu'on peut déduire des deux égalités données en exemples lorsque nous avons introduit la notation $\sum$ et qui étaient

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2;$$

prenons cette dernière avec le signe $-$:

$$-\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = -1 - 3 - \cdots - (2n-1),$$

et l'autre avec le signe $+$:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2 + 4 + \cdots + 2n,$$

au total, ceci donne bien

$$\sum_{i=1}^{2n}(-1)^i i,$$

alors que les seconds membres donnent

$$-n^2 + n(n+1) = -n^2 + n^2 + n = n.$$

Il est facile de voir que si a est positif et que $b > a$, b est nécessairement positif aussi ; de la transitivité des inégalités, on déduit en effet que $a > 0$ et $b > a$ entrainent $b > 0$. Semblablement, on voit que si a est négatif et que $b < a$, b est négatif aussi ; en effet les inégalités $a < 0$ et $b < a$ entraînent $b < 0$.

La règle des signes énoncée ci-dessus pour la multiplication des nombres relatifs entraîne, comme on le voit facilement, que cette règle est la même pour l'opération inverse, la division.

L'inverse d'un nombre a le même signe que ce nombre, puisque c'est le quotient de 1, qui est positif, par ce nombre.

Si on multiplie ou si on divise une inégalité membre à membre par un même nombre, elle reste vérifiée dans le même sens si ce nombre est positif, tandis qu'elle change de sens si ce nombre est négatif ; par exemple, l'inégalité $5 > 3$ multipliée membre à membre par 2 donne l'inégalité $10 > 6$, dans le même sens, tandis que multipliée membre à membre par -2, elle donne $-10 < -6$, dans le sens opposé. Si deux nombres a et b sont tels que $a > b$, on en déduit en divisant membre à membre par ab, qu'on a alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ si a et b sont de même signe, c'est-à-dire si $ab > 0$, tandis qu'on a alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ si a et b sont de signes différents, c'est-à-dire si $ab < 0$. (En effet, après simplification, $\frac{a}{ab}$ devient $\frac{1}{b}$ et $\frac{b}{ab}$ devient $\frac{1}{a}\cdot$) Si par exemple $a = 5$ et $b = 2$, ce qui correspond bien à $a > b$, on a $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$, soit $0{,}2 < 0{,}5$; mais si on a $a = 5$ et $b = -2$, ce qui donne encore $a > b$, on a $\frac{1}{5} > \frac{1}{-2}$, ce qui est évident puisque le premier membre ($\frac{1}{5} = 0,2$) est positif, alors que le second ($\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$) est négatif.

6.1.4 Les exposants négatifs

Ci-dessus, nous avons vu que les termes d'une somme ou les facteurs d'un produit peuvent être négatifs, mais c'est aussi le cas pour un exposant, ce qui donne ce qu'on appelle une puissance négative. La formule

$$n^p : n^q = n^{p-q}$$

vue au chapitre 1 pour $p > q$ et qui peut s'écrire $n^{p-q} = \frac{n^p}{n^q}$ avec la notation des fractions, peut être étendue au cas où $q > p$; dans le cas où ce n'est plus $p - q$ qui est positif, mais bien $q - p$, elle donne

$$n^{p-q} = n^{-(q-p)} = \frac{1}{n^{q-p}}\cdot$$

En changeant de notation, on peut écrire

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\cdot$$

En particulier pour l'inverse d'un nombre a, on a

$$\frac{1}{a} = a^{-1}.$$

6.1.5 L'identité de Bézout

Ayant introduit les nombres relatifs, c'est-à-dire la possibilité pour les nombres d'être négatifs aussi bien que positifs, nous pouvons énoncer une règle concernant les nombres premiers entre eux, ce qu'on appelle l'*identité de Bézout* (E. Bézout, mathématicien français, 1730-1783), où des coefficients sont effectivement l'un positif et l'autre négatif. Cette règle peut s'énoncer comme suit : la condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres naturels m et n soient premiers entre eux est qu'il existe des entiers relatifs a et b tels que

$$ma + nb = 1.$$

Par exemple, avec 4 et 7, qui sont premiers entre eux, si on prend $a = -5$ et $b = +3$, on obtient $4 \times (-5) + 7 \times 3 = -20 + 21 = 1$; on peut aussi prendre $a = +9$ et $b = -5$, ce qui donne $4 \times 9 = 7 \times (-5) = 36 - 35 = 1$, ou encore $a = +16$ et $b = -9$, ce qui donne $4 \times 16 + 7 \times (-9) = 64 - 63 = 1$, etc. Comme autre exemple, prenons 8 et 15, qui sont aussi premiers entre eux ; avec $a = 2$ et $b = -1$, on obtient $8 \times 2 + 15 \times (-1) = 16 - 15 = 1$ et avec $a = -13$ et $b = +7$, on obtient $8 \times (-13) + 15 \times 7 = -104 + 105 = 1$, etc. Si m et n n'étaient pas premiers entre eux et avaient donc un diviseur commun, celui-ci diviserait chacun des termes ma et nb et donc aussi leur somme $ma + nb$; le premier membre de l'égalité étant multiple de ce diviseur, il devrait en être de même du second membre, ce qui n'est pas possible puisque celui-ci est 1. Ceci montre que la condition que m et n soient premiers entre eux est nécessaire pour qu'on puisse avoir une relation de la forme $ma + nb = 1$. A vrai dire, nous aurions pu présenter la règle ci-dessus dès que la notion de nombres premiers entre eux a été vue plus haut, sans attendre d'avoir introduit les nombres négatifs ; il suffisait pour cela de présenter cette règle sous la forme suivante : la condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres naturels m et n soient premiers entre eux est qu'on puisse trouver deux nombres naturels a et b tels que les produits ma et nb aient entre eux une différence, dans un sens ou dans l'autre, qui soit égale à 1. Nous avons toutefois préféré présenter cette règle de Bézout sous sa forme habituelle et donc pour cela attendre qu'aient été introduits les nombres relatifs.

Si nous nous souvenons que, comme cela a été dit au chapitre 2 quand la notion de nombres premiers entre eux a été introduite, des nombres premiers entre eux sont des nombres dont le p.g.c.d. est 1, nous pouvons considérer la règle ci-dessus comme un cas particulier du théorème de Bézout, qui dit que si d est le p.g.c.d. de m et n, il existe des nombres entiers relatifs a et b tels que

$$d = am + bn;$$

ceci donne bien la règle ci-dessus lorsque $d = 1$. (Notons que quand on dit absolument "le théorème de Bézout", il s'agit en général d'un autre théorème, dans un autre domaine, qui dit que deux équations en x et y de degrés m et n admettent en général mn solutions.)

6.2 Les nombres irrationnels

Souvenons-nous maintenant du désarroi causé chez les pythagoriciens par la découverte, évoquée vers la fin du chapitre 2, de ce que la diagonale d'un carré et son côté sont des grandeurs incommensurables : le rapport de leurs longueurs ne se trouve ni parmi les nombres entiers ni parmi les nombres fractionnaires aussi grands qu'on prenne les termes de la fraction. Ce rapport est en effet égal à $\sqrt{2}$. Or la racine carrée d'un nombre naturel qui n'est pas un carré ne se trouve non seulement pas parmi les nombres naturels, mais ne se trouve pas non plus parmi les fractions. En effet, pour élever au carré cette fraction, supposée réduite à sa plus simple expression, c'est-à-dire dont le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux, il faudrait élever au carré son numérateur et son dénominateur, en les multipliant par eux-mêmes ; mais on obtient ainsi deux nombres qui sont aussi premiers entre eux puisqu'on a toujours les mêmes facteurs premiers dans chacun d'eux, avec simplement des exposants doublés. La fraction obtenue ne peut donc pas se réduire à un nombre entier, 2 par exemple. Une fraction dont le carré serait 2 ou un autre nombre naturel non carré ne peut donc pas exister. Cela amène à une nouvelle extension de la notion de nombre, où on trouvera, entre autres, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc. On les appelle les *nombres irrationnels* par opposition aux nombres entiers ou fractionnaires, qu'on appelle les *nombres rationnels*.

Pour exprimer un tel nombre sous forme décimale, on ne peut en donner que des valeurs approchées en limitant la valeur à un nombre fini de décimales. La vraie valeur du nombre irrationnel ne pourrait être donnée qu'avec une infinité de décimales et contrairement à ce qui se passe, avons-nous vu, pour certains nombres fractionnaires lorsqu'il y a dans le dénominateur d'autres facteurs premiers que 2 et 5, il n'apparaît aucune périodicité dans les chiffres décimaux successifs. Par exemple, $\sqrt{2}$ a la valeur approchée $\sqrt{2} \simeq 1{,}414\,213\,562\,37\ldots$ et il n'y a aucune règle indiquant la suite des chiffres.

Parmi les nombres irrationnels, on distingue les nombres irrationnels algébriques et les nombres transcendants. Pour préciser cette différence, nous devons introduire les notions de polynôme et d'équation.

Un *polynôme* en un nombre x, laissé sous forme littérale (on prend en général une lettre de la fin de l'alphabet), est une somme de termes donc chacun est formé du produit d'une puissance de x à exposant entier positif ou nul par un nombre quelconque, appelé *coefficient*. C'est donc une expression de la forme $ax^n + bx^{n-1} + \cdots + fx + g$ où n est un nombre naturel quelconque et où certains des coefficients b, …, g peuvent être nuls, mais pas a s'il s'agit d'un polynôme dit de degré n en x ou du $n^{\text{ème}}$ degré en x. Le dernier terme, où l'exposant de x est nul, ne dépend pas de x, puisque $x^0 = 1$.

Une *équation* à une inconnue est une égalité où figure un nombre laissé sous forme littérale, par exemple x, qui est satisfaite lorsqu'on donne à x une valeur déterminée ou éventuellement l'une ou l'autre parmi certaines valeurs déterminées. Cette lettre x est appelée l'*inconnue* et une valeur telle que l'égalité est satisfaite quand on remplace x par cette valeur est appelée *solution* ou *racine de l'équation.* Par exemple, $3x-2=0$ est une équation en x ; on peut voir qu'elle admet la solution $x=\frac{2}{3}$, c'est-à-dire que sa racine est $\frac{2}{3}\cdot$ Lorsqu'on effectue des opérations qui n'affectent pas l'égalité telles qu'ajouter ou soustraire une même quantité membre à membre ou multiplier ou diviser les deux membres par une même quantité non nulle, il se peut qu'on puisse mettre l'équation sous la forme d'un polynôme égalé à 0 ; c'est ce que nous avons fait pour l'équation ci-avant, qui aurait pu avoir été présentée sous la forme $3x=2$ et qui prend alors la forme ci-dessus si on soustrait 2 membre à membre. Dans un tel cas, on dit que c'est une *équation algébrique* de degré n si n est le degré du polynôme qui donne l'équation quand on l'égale à 0. En particulier, celle que nous venons de donner en exemple est une équation de degré 1. Une équation de degré 1 est appelée *équation linéaire.* La forme générale de l'équation du 2^{d} degré mise sous sa forme canonique est

$$ax^2+bx+c=0.$$

Elle admet deux racines qui sont

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

si on suppose que $b^2-4ac \geq 0$. Dans le cas particulier où $b^2-4ac=0$, ces deux racines coïncident et se réduisent donc à une seule, qui est $-\frac{b}{2a}$; on dit dans ce cas qu'on a une racine double. Si l'expression b^2-4ac est égale à un nombre carré, les solutions sont des nombres rationnels (à supposer, bien sûr, que a et b le soient), tandis que si ce n'est pas le cas, les solutions sont des nombres irrationnels.

Comme nous l'annoncions plus haut, il existe deux catégories de nombres irrationnels. D'une part, il y a les nombres algébriques : ce sont ceux qui peuvent être racine d'une équation algébrique à coefficients entiers (ou dont les coefficients sont des nombres fractionnaires, car en multipliant membre à membre par le p.p.c.m. des dénominateurs de tous ces coefficients, on est ramené à des coefficients entiers). D'autre part, il y a tous les autres nombres irrationnels ; ce sont ceux qu'on appelle les *nombres transcendants*, dont nous parlerons au chapitre 8. Parmi les *nombres algébriques*, on comprend, d'après la définition, non seulement les nombres irrationnels algébriques, mais aussi tous les nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres entiers ou fractionnaires.

Apportons quelques précisions concernant les polynômes et les équations. Dans la phrase par laquelle nous venons de distinguer les nombres irrationnels algébriques des autres, les transcendants, en disant qu'ils sont racines d'une équation algébrique à coefficients entiers, nous aurions dû, pour être vraiment explicite, préciser que l'expression "équation algébrique" devait être entendue dans son sens étroit, à savoir qu'il s'agissait d'une équation algébrique rationnelle et entière, rationnelle pour indiquer que l'inconnue n'apparaît dans aucun radical, signe d'une extraction de racine, quel qu'en soit le degré, et entière pour indiquer que l'inconnue n'apparaît dans aucun dénominateur d'expression fractionnaire. C'est donc une équation ayant la forme d'un polynôme égalé à 0, lui-même rationnel et entier, donc de la forme donnée un peu plus haut, soit une somme algébrique dont les termes sont des monômes de la forme cx^k où k est un nombre entier positif ou nul (on dit *somme algébrique* pour signifier que ces monômes peuvent être soustraits aussi bien qu'additionnés les uns aux autres, compte tenu de ce que soustraire une quantité algébrique revient à l'additionner à condition de changer son signe, ici le signe du coefficient c de la puissance de x). Le polynôme dont nous avons donné le modèle plus haut était réduit, c'est-à-dire que tous les termes où figure éventuellement une même puissance de x avaient été rassemblés en un monôme unique ayant pour coefficient la somme algébrique des coefficients de tous ces éventuels termes semblables. Nous avons de plus écrit ce polynôme sous forme ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x. Par contre, lorsque l'expression "équation algébrique" est prise dans son sens général, cela signifie que c'est une égalité où l'inconnue intervient avec des nombres donnés ou supposés connus par des opérations d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions, d'élévations à des puissances d'exposants donnés, opérations qui peuvent être en nombre quelconque et en ordre quelconque. Cela s'oppose alors à des équations où l'inconnue apparaîtrait dans des fonctions plus générales (voir chapitre 8) que celles qui ont simplement la forme d'opérations algébriques. Comme exemple d'équation non algébrique, on peut citer l'équation exponentielle $a^x = b$, dans laquelle l'inconnue est en exposant ; elle a le plus souvent pour solution un nombre transcendant, mais la solution peut être rationnelle si les nombres donnés a et b sont choisis pour que ce soit le cas, par exemple $3^x = 9$ qui a pour solution $x = 2$ ou $2^x = \sqrt{2}$ qui a pour solution $x = \frac{1}{2}\cdot$ Pour en terminer avec ces compléments sur les polynômes et les équations, il faut signaler que des équations peuvent être à plusieurs inconnues et que les polynômes peuvent porter sur plusieurs nombres laissés sous forme littérale. Si par exemple il y en a deux, x et y, le polynôme, s'il est rationnel et entier, est une somme algébrique de monômes de la forme cx^ky^ℓ où k et ℓ sont des entiers positifs ou nuls. Dans le cas d'équations à plusieurs inconnues, pour déterminer les solutions, il faut disposer d'un système d'équations dont le nombre est égal au nombre d'inconnues.

Revenons aux nombres irrationnels. Notons qu'on réserve parfois le nom de nombres irrationnels aux nombres algébriques irrationnels et qu'on utilise alors pour qualifier à la fois les nombres irrationnels algébriques et les nombres transcendants le terme général de *nombres incommensurables*, pour signifier que ce sont tous les nombres tels que chacun d'eux n'a aucun sous-multiple commun avec 1 (*sous-multiple* est l'antonyme de multiple ; par exemple, $\frac{12}{31}$ et 1 ont $\frac{1}{31}$ comme sous-multiple commun puisque $\frac{1}{31} \times 12 = \frac{12}{31}$ et $\frac{1}{31} \times 31 = 1$).

Le plus connu des nombres transcendants est le rapport entre la longueur d'une circonférence et celle de son diamètre, nombre qu'on a l'habitude de représenter par la lettre grecque π et dont nous donnerons un peu plus loin la valeur approchée, un peu supérieure à 3. Il y a longtemps qu'on a imaginé que c'est un nombre transcendant, donc qu'il n'existe aucune équation de la forme

$$a_0\pi^n + a_1\pi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\pi + a_n = 0$$

où les a sont des nombres rationnels, dont ce nombre soit racine, quelque grand que soit le nombre naturel n ; mais ce n'est qu'à une époque relativement récente, au XIX$^{\text{e}}$ siècle, qu'on en a obtenu la démonstration rigoureuse comme nous le rappellerons au chapitre 8. Depuis lors, on a démontré la transcendance de certains autres nombres. On sait d'ailleurs que les nombres transcendants sont infiniment plus nombreux que les nombres algébriques, qui sont déjà en nombre infini ; nous y reviendrons à la fin du chapitre 8.

Revenons maintenant un peu sur la notion de fractions continues, dont il a été question vers la fin du chapitre 4. Nous y avons vu comment convertir un nombre fractionnaire $\frac{A}{B}$ en une fraction continue, qui est alors limitée. Si au contraire on part d'un nombre irrationnel, aucune des divisions successives qu'on doit effectuer pour obtenir les quotients incomplets q_1, q_2, ... ne donnera un reste nul ; on est amené à continuer indéfiniment. Tout nombre irrationnel est en effet égal à une fraction continue illimitée $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$. Réciproquement, la valeur d'une fraction continue illimitée est un nombre irrationnel.

Parmi ces fractions continues illimitées, il y en a qui sont *périodiques*, c'est-à-dire que pour ces fractions, à partir d'un certain rang, un même quotient incomplet ou une même suite de quotients incomplets se reproduit indéfiniment. Cette suite de quotients incomplets se reproduisant indéfiniment et dans le même ordre s'appelle la *période*. La fraction continue est dite *périodique simple* si la période se présente dès le premier quotient incomplet, donc lorsque celui-ci fait déjà partie de la période. Dans le cas contraire où un ou plusieurs quotients incomplets se présentent avant que n'apparaisse la période, on dit que c'est une fraction continue *périodique mixte*. Dans le premier cas, avec la notation indiquée au chapitre 4, elle se présente sous la forme $(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n,\ q_1,\ \ldots)$ et dans le second cas sous la forme $(q_1, q_2, \ldots, q_\ell, q_{\ell+1}, q_{\ell+2}, \ldots, q_n, q_{\ell+1}, q_{\ell+2}, \ldots, q_n, q_{\ell+1}, \ldots)$. Pour simplifier, on convient de ne pas répéter la période et de simplement la mettre entre des ;. On écrit donc pour la fraction continue périodique simple, $(\,;\, q_1, q_2, \ldots, q_n\,;)$ et pour la fraction continue périodique mixte, $(q_1, q_2, \ldots, q_\ell\,;\, q_{\ell+1}, q_{\ell+2}, \ldots, q_n\,;)$. Par exemple, on écrira $(1\,;\,2\,;)$ pour $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}$ (ce qui est la fraction continue égale à $\sqrt{2}$: voir ci-dessous). En appliquant la règle donnée au chapitre 4 à la fraction continue périodique simple $a = (\,;\, q_1, q_2, \ldots, q_n\,;)$ écrite sous la forme $a = (q_1, q_1, \ldots, q_n, a)$, on trouve la relation

$$a = \frac{P_n a + P_{n-1}}{Q_n a + Q_{n-1}},$$

ce qui donne pour a l'équation du 2^{d} degré

$$Q_n a^2 + (Q_{n-1} - P_n)a - P_{n-1} = 0;$$

le nombre a, racine de cette équation du 2^{d} degré, a donc la forme d'un nombre irrationnel du 2^{d} degré, c'est-à-dire la somme d'un nombre rationnel et d'une racine carrée affectée d'un coefficient qu'on peut on non faire rentrer dans la racine (par exemple $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ puisque $12 = 4 \times 3$ et $\sqrt{4} = 2$), la partie rationnelle pouvant être éventuellement nulle. On peut démontrer qu'il en est de même pour les fractions continues périodiques mixtes. Réciproquement, ce sont les nombres irrationnels de cette forme qui donnent des fractions continues illimitées périodiques. C'est le cas en particulier pour les racines carrées de tous les nombres naturels qui ne sont pas des carrés. Avec les notations que nous venons d'indiquer, les fractions continues égales aux premières de ces racines sont les suivantes :

$\sqrt{2} = (1\,;\,2;\,)$,	$\sqrt{14} = (3\,;\,1,\,2,\,1,\,6\,;)$,	$\sqrt{26} = (5\,;\,10\,;)$,
$\sqrt{3} = (1\,;\,1,\,2\,;)$,	$\sqrt{15} = (3\,;\,1,\,6\,;)$,	$\sqrt{27} = (5\,;\,5,\,10\,;)$,
$\sqrt{5} = (2\,;\,4\,;)$,	$\sqrt{17} = (4\,;\,8\,;)$,	$\sqrt{28} = (5\,;\,3,\,2,\,3,\,10\,;)$,
$\sqrt{6} = (2\,;\,2,\,4\,;)$,	$\sqrt{18} = (4\,;\,4,\,8\,;)$,	$\sqrt{29} = (5\,;\,2,\,1,\,1,\,2,\,10\,;)$,
$\sqrt{7} = (2\,;\,1,\,1,\,1,\,4\,;)$,	$\sqrt{19} = (4\,;\,2,\,1,\,3,\,1,\,2,\,8\,;)$,	$\sqrt{30} = (5\,;\,2,\,10\,;)$,
$\sqrt{8} = (2\,;\,1,\,4\,;)$,	$\sqrt{20} = (4\,;\,2,\,8\,;)$,	$\sqrt{31} = (5\,;\,1,\,1,\,3,\,5,\,3,\,1,\,1,\,10\,;)$,
$\sqrt{10} = (3\,;\,6\,;)$,	$\sqrt{21} = (4\,;\,1,\,1,\,2,\,1,\,1,\,8\,;)$,	$\sqrt{32} = (5\,;\,1,\,1,\,1,\,10\,;)$,
$\sqrt{11} = (3\,;\,3,\,6\,;)$	$\sqrt{22} = (4\,;\,1,\,2,\,4,\,2,\,1,\,8\,;)$,	$\sqrt{33} = (5\,;\,1,\,2,\,1,\,10\,;)$,
$\sqrt{12} = (3\,;\,2,\,6\,;)$,	$\sqrt{23} = (4\,;\,1,\,3,\,1,\,8\,;)$,	$\sqrt{34} = (5\,;\,1,\,4,\,1,\,10\,;)$,
$\sqrt{13} = (3\,;\,1,\,1,\,1,\,1,\,6\,;)$,	$\sqrt{24} = (4\,;\,1,\,8\,;)$,	$\sqrt{35} = (5\,;\,1,\,10\,;)$,
$\ldots$		

On peut même donner des formules générales telles que

$\sqrt{n^2-1} = (n-1\,;\,1,\,2(n-1)\,;)$,	$\sqrt{n^2+2} = (n\,;\,n,\,2n\,;)$
$\sqrt{n^2+1} = (n\,;\,2n\,;)$,	$\sqrt{n(n+1)} = (n\,;\,2,\,2n\,;)$
$\sqrt{n^2-2} = (n-1\,;\,1,\,n-2,\,1,\,2(n-1)\,;)$ (si $n > 2$),	

et d'autres, où n est un nombre naturel quelconque. On a la formule générale suivante :

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = (q_1;\, q_2,\, q_3,\, \ldots, q_3,\, q_2,\, 2q_1\,;) \quad \text{si } m > n,$$

en particulier lorsque $n = 1$ donc pour $\sqrt{m}$, et

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = (0,\, q_1;\, q_2,\, q_3,\, \ldots,\, q_3,\, q_2,\, 2q_1\,;) \quad \text{si } m < n;$$

il peut arriver qu'on ne doive pas aller jusque q_3, éventuellement même pas jusque q_2, par exemple pour $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, etc., pour lesquels on a simplement $(q_1;\, 2q_1\,;)$.

Pour des nombres irrationnels d'un degré supérieur au second, on obtient des fractions continues illimitées, mais non périodiques, comme pour les nombres transcendants.

La manière indiquée au chapitre 4 pour obtenir les réduites successives reste évidemment valable ; simplement le nombre de ces réduites est ici illimité. Elles se rapprochent ici aussi de plus en plus du nombre égal à la fraction continue, en étant alternativement plus petites, pour celles d'indices impairs, et plus grandes, pour celles d'indices pairs. Comme nous avons dit au chapitre 4, la règle qui y est indiquée pour les obtenir fournit chaque fois une fraction irréductible. D'autre part, on démontre que toute fraction irréductible qui s'approche plus du nombre égal à la fraction continue qu'une certaine réduite est moins simple que celle-ci, c'est-à-dire qu'elle a un numérateur et un dénominateur plus grands que ceux de la réduite. Ceci montre l'intérêt qu'il y a à utiliser les réduites du développement en fraction continue d'un nombre pour avoir des valeurs approchées de ce nombre. Par exemple, le nombre transcendant π, auquel nous avons fait allusion un peu plus haut et dont la valeur approximative dans le système décimal est $\pi \simeq 3,141\,592\,653\,589\,793\ldots$, a pour développement en fraction continue, évidemment illimitée, $\pi = (3,\, 7,\, 15,\, 1,\, 292,\, 1,\, 1,\, 1,\, 2,\, 1,\, 3,\, 1,\, \ldots)$. Les premières réduites sont

$$\begin{array}{l|l|l} R_1 = \dfrac{3}{1}, & R_3 = \dfrac{333}{106}, & R_5 = \dfrac{103\,993}{33\,102}, \\[2ex] R_2 = \dfrac{22}{7}, & R_4 = \dfrac{355}{113}, & R_6 = \dfrac{104\,348}{33\,215}, \quad \ldots \end{array}$$

La première approximation, 3, donnée par la première réduite, est banale : on trouve à l'aide d'une simple corde qu'une circonférence mesure un peu plus de 3 fois la longueur de son diamètre. La valeur approchée suivante, $\frac{22}{7}$, donnée par la deuxième réduite, a été trouvée dès l'Antiquité par Archimède grâce aux travaux qu'il a consacrés à la circonférence de cercle. Les approximations suivantes, $\frac{333}{106}$ et $\frac{355}{113}$, ont respectivement été trouvées par Rivard et par Métius. L'écart entre une réduite et le nombre est évidemment inférieur à l'écart entre cette réduite et la suivante puisqu'elles sont alternativement plus petites et plus grandes que le nombre ; or la différence entre R_m et R_{m+1} est $\frac{1}{Q_m Q_{m+1}}$, avons-nous vu au chapitre 4. On peut donc écrire

$$\pi - 3 < \frac{1}{7}, \qquad \pi - \frac{333}{106} < \frac{1}{106 \times 113} = \frac{1}{11\,978},$$

$$\frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{7 \times 106} = \frac{1}{742}, \qquad \frac{355}{113} - \pi < \frac{1}{113 \times 33\,102} = \frac{1}{3\,740\,526}, \text{ etc.}$$

Ainsi, déjà pour la fraction trouvée par A. Métius, mathématicien hollandais (1571-1635) qui n'est guère connu que par cette découverte, on a déjà une approximation qui dépasse largement les besoins courants, alors que les termes de cette fraction ne sont pas des nombres très grands. Convertie en fraction décimale, elle donne les six premiers chiffres décimaux exacts puisque $\frac{355}{113} \simeq 3{,}141\,592\,9$ (rappelons que le signe $\simeq$ signifie "approximativement égal à"), alors qu'avec l'approximation d'Archimède, utilisée jusqu'alors, on a $\frac{22}{7} \simeq 3{,}142\,86$, soit à peine trois décimales exactes. Mais à l'heure actuelle, grâce à l'électronique, nous disposons, il est vrai, de moyens de calcul qui rendent maintenant pratiquement sans intérêt ce genre d'approximations, avec des fractions.

Il y a tout un temps, quelqu'un, manifestement courageux et opiniâtre, a calculé la valeur de π avec un nombre énorme de décimales, évidemment sans les moyens dont nous disposons maintenant. Je ne sais pas quelle a été sa motivation ; peut-être espérait-il vraiment découvrir dans toutes ces décimales une régularité inattendue ou faisait-il cela seulement pour le plaisir de la performance, mais il y a certainement consacré une grande partie de sa vie. Quand on a construit à Paris, en vue de l'Exposition universelle de 1937, le "Palais de la Découverte", qui a subsisté (j'ignore si c'est toujours le cas), on s'est souvenu de ce prodigieux travail et on a aligné tous les chiffres trouvés $3{,}141\,592\ldots$ sur les murs, juste sous le plafond, de la salle consacrée aux sciences mathématiques. Il y avait tellement de chiffres qu'un seul rang tout autour de cette salle n'a pas suffi et de loin ! Malheureusement, quand on a disposé de machines électroniques, capables de refaire un tel travail en un temps fort court, on s'est aperçu qu'à partir d'une certaine décimale, elles étaient erronées : ce calculateur courageux avait commis une erreur, comme cela peut arriver à tout qui travaille avec son cerveau, sans la sécurité que nous donnent aujourd'hui les machines électroniques. Il y a quelques années déjà, j'ai vu un collègue, qui avait mis un programme de calcul de π sur un petit ordinateur, obtenir toute une page de décimales en quelques minutes à peine ! Et il pouvait évidemment prolonger le calcul à volonté.

6.3 Les extensions successives de la notion de nombres

Revenons maintenant aux extensions successives de la notion de nombres. Nous avons vu qu'aux nombres naturels, on peut ajouter les nombres négatifs, ce qui permet d'avoir toujours la possibilité de soustraire un nombre naturel d'un autre. On obtient ainsi tous les nombres entiers : les nombres naturels, leurs opposés, plus le zéro. Nous avons aussi ajouté les nombres fractionnaires, qui permettent de toujours pouvoir diviser un nombre entier par un autre, pour autant que cet autre ne soit pas zéro. Comme pour la multiplication, si les deux nombres sont de même signe, la fraction est positive, tandis qu'elle est négative si les deux nombres sont de signes différents. Tous ces nombres sont les nombres rationnels. Nous avons ensuite introduit des nombres irrationnels pour permettre l'extraction des racines carrées, cubiques, etc. de nombres qui ne sont pas des carrés, cubes, etc. ; les irrationnels algébriques sont des combinaisons (sommes, produits, ...) de telles racines et de nombres rationnels éventuels. Ils peuvent aussi être positifs ou négatifs. On peut représenter tous ces nombres par des points sur un axe : chaque nombre est représenté par le point qui a ce nombre pour abscisse, positive ou négative, à partir d'une origine choisie et avec une unité de longueur choisie. Si on donne un point quelconque de l'axe, on peut trouver des points parmi tous ceux que nous venons d'obtenir qui soient aussi proches qu'on veut du point donné, et cela même en aussi grand nombre qu'on veut. Néanmoins tous ces nombres algébriques ne sont qu'en infinité dénombrable, c'est-à-dire qu'on peut imaginer un système de correspondance biunivoque entre eux et les nombres naturels, qui sont déjà en nombre infini. Mais les abscisses de tous les points de l'axe ou d'une portion finie quelconque de celui-ci forment un ensemble de nombres infiniment plus nombreux. C'est ce qu'en théorie des ensembles, on appelle la *puissance du continu*, qui dépasse infiniment la puissance du dénombrable. Les nombres transcendants sont infiniment plus nombreux que les nombres algébriques.

6.4 Les nombres imaginaires - Les nombres complexes

D'autre part, il y a encore une opération qui reste impossible avec tous les nombres que nous avons jusqu'ici introduits. Quand on fait le produit de n facteurs égaux à un nombre négatif, c'est-à-dire quand on prend la puissance $n^{\text{ème}}$ de ce nombre négatif, on voit d'après la règle des signes énoncée plus haut, que le résultat est négatif si n est impair, mais qu'il est positif si n est pair. Donc quand on prendra une racine d'indice impair, la racine cubique par exemple, d'un nombre, on obtiendra un résultat positif ou négatif suivant que ce nombre est lui-même positif ou négatif. Pour la racine d'indice pair, la racine carrée par exemple, d'un nombre positif, on trouve à la fois un nombre positif et son opposé. Par exemple, pour la racine carrée de $+4$, on peut aussi bien prendre $+2$ et -2, puisque $(+2) \times (+2) = +4$ et $(-2) \times (-2) = +4$. Notons qu'on donne parfois le nom de *racine arithmétique* à la racine positive, qu'on représente par le signe $\sqrt{\ }$ sans $\pm$ devant. Mais si on veut prendre une racine d'indice pair, en particulier la racine carrée, d'un nombre négatif, on ne trouve aucune réponse parmi tous les nombres que nous avons introduits, puisque les carrés de ces nombres sont tous positifs. On a eu la hardiesse d'ajouter à tous les nombres déjà considérés, appelés nombres *réels*, des nombres, dits *imaginaires*, dont les carrés sont les nombres réels négatifs. L'unité parmi ces nombres imaginaires est $\sqrt{-1}$, qu'on désigne par la lettre i, c'est-à-dire qu'on pose $i = \sqrt{-1}$. Un nombre imaginaire tel que ai, où a est réel, ne peut évidemment pas être représenté par un point sur l'axe considéré plus haut, dont chaque point a pour abscisse un nombre réel. On est obligé de les représenter par les points d'un autre axe, qu'on prend perpendiculaire au premier et passant par le point choisi pour origine. On appelle *nombre complexe* un nombre formé de la somme d'un réel a et d'un nombre imaginaire pur tel que bi, c'est donc un nombre de la forme $a + bi$ où a et b sont réels. Le terme a est appelé *partie réelle* et le terme bi est appelé *partie imaginaire*. Dans le plan déterminé par les deux axes considérés ci-avant, l'axe des réels et l'axe des imaginaires, le nombre $a + bi$ est représenté par le point P ayant a pour abscisse et b pour ordonnée ; il est dit être l'*image* de $a + bi$ et ce nombre complexe est appelé l'*affixe* de P. L'égalité de deux nombres complexes exige à la fois l'égalité de leurs parties réelles et l'égalité de leurs parties imaginaires, c'est-à-dire que l'égalité $a + bi = c + di$ entraîne à la fois les égalités $a = c$ et $b = d$. Les nombres complexes sont d'ailleurs parfois tous appelés nombres imaginaires et alors on appelle *imaginaire pur* un nombre tel que ai où a est réel. Le *module* du nombre complexe $a + bi$ est le nombre réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$; il est commun à $a + bi$ et à $a - bi$ (et à $-a + bi$ et $-a - bi$). On voit que le module d'un nombre réel a, donc pour lequel $b = 0$, est sa valeur absolue, c'est-à-dire ce nombre lui-même s'il est positif et son opposé s'il est négatif. Le module de $a + bi$ est représenté par la notation $|a + bi|$. Dans la représentation géométrique décrite ci-avant, il est égal à la mesure de la distance entre l'origine O, intersection des deux axes, et l'image P de $a + bi$ dans ce plan ; ceci résulte du théorème de Pythagore appliqué à l'un ou l'autre des deux triangles rectangles dont OP est l'hypoténuse et dont les côtés de l'angle droit sont l'un sur un axe et l'autre parallèle à l'autre axe. Deux nombres complexes dont les parties réelles sont égales et dont les parties imaginaires ont pour coefficients des nombres opposés, c'est-à-dire de la forme $a + bi$ et $a - bi$, sont dits *nombres complexes conjugués*.

Les règles ordinaires pour les différentes opérations algébriques sont applicables aux nombres complexes à condition de remplacer systématiquement i^2 par -1. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)-(c+di) &= (a-c)+(b-d)i,\\ (a+bi)\times(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i;\end{aligned}$$

en particulier

$$(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2,$$

c'est-à-dire que le produit de deux nombres complexes conjugués est réel et égal au carré de leur module (on a donc $|a+bi|=\sqrt{(a+bi)\cdot(a-bi)}$),

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$$

(on ne laisse jamais i au dénominateur : il faut toujours avoir finalement la somme d'un nombre réel et d'un imaginaire pur ; pour cela, on multiplie les termes de la fraction par le conjugué du dénominateur, ce qui donne le carré de son module, comme nous venons de voir), en particulier pour l'inverse d'un nombre complexe, on a

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\,i.$$

Pour les puissances successives de i, on a $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, etc. ; plus généralement, n étant un nombre naturel quelconque, $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$. Quand dans une expression apparaît la racine carrée d'un nombre négatif telle que $\sqrt{-a}$ où a est positif, on fait sortir du radical le facteur -1 sous forme de i en facteur pour le radical : $\sqrt{-a}=\sqrt{a(-1)}=\sqrt{a}\sqrt{-1}=\sqrt{a}i$. Ainsi pour les deux solutions de l'équation du 2^{d} degré, considérée un peu plus haut, nous n'avons plus à exiger qu'on ait $b^2-4ac\geq 0$ comme nous l'avions écrit ; si $b^2-4ac<0$, ces deux solutions deviennent les deux nombres complexes conjugués

$$-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\,i \quad \text{et} \quad -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\,i;$$

où $\sqrt{4ac-b^2}$ est réel puisque dans ce cas $4ac-b^2>0$. Dans le cas général, une équation pourra donner comme solutions des nombres complexes, qui pour certaines au moins peuvent se ramener à un nombre réel, si la partie imaginaire est nulle, où à un imaginaire pur, si la partie réelle est nulle. Lorsque l'équation est une équation algébrique à coefficients réels entiers (ou fractionnaires, ce qui est équivalent, avons-nous vu, disons en général à coefficients rationnels), les solutions sont par définition des nombres algébriques, d'après ce que nous avons vu. On peut donc définir un *nombre algébrique* comme étant un nombre complexe racine d'une équation algébrique (au sens étroit) à coefficients rationnels, ce nombre complexe pouvant éventuellement se ramener à un nombre réel ou un nombre imaginaire pur.

On pourrait croire que l'introduction des nombres imaginaires est une simple fantaisie ; mais c'est très loin d'être le cas. Leur usage s'est avéré être très utile dans beaucoup de travaux en mathématique pure, comme l'a notamment montré le mathématicien et physicien allemand C. F. Gauss (1777-1855), et en mathématique appliquée, en particulier pour les calculs concernant les courants électriques alternatifs. A titre d'exemple, nous allons voir qu'on peut, grâce aux nombres complexes, démontrer facilement un théorème qu'il serait compliqué de démontrer autrement. Si nous faisons le carré du nombre $m + ni$ où m et n sont des nombres entiers, en appliquant les règles de calcul rappelées ci-avant, nous allons obtenir un nombre complexe tel que $M + Ni$ où M et N sont aussi des nombres entiers :

$$(m + ni)^2 = M + Ni;$$

en faisant la même chose avec $(m - ni)$, on obtient nécessairement

$$(m - ni)^2 = M - Ni$$

avec les mêmes M et N. Multiplions membre à membre ces deux égalités en notant, pour le premier membre, que le produit des carrés est égal au carré du produit et pour les deux membres, que le produit de nombres conjugués est égal au carré de leur module, comme écrit ci-dessus ; il vient

$$(m^2 + n^2)^2 = M^2 + N^2.$$

Ceci montre que le carré d'une somme de carrés est aussi une somme de carrés. Par exemple, $(3^2 + 2^2)^2 = (9 + 4)^2 = 13^2 = 169$ est bien une somme de carrés, car on a $169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$. Ce qui est intéressant, c'est que ce raisonnement peut être généralisé à une puissance entière quelconque p de la somme de deux carrés : on a

$$(m + ni)^p = M' + N'i \quad \text{et} \quad (m - ni)^p = M' - N'i$$

où M' et N' sont de nouveau des nombres entiers. Faisons encore le produit membre à membre de ces deux égalités ; il vient

$$(m^2 + n^2)^p = M'^2 + N'^2,$$

d'où l'on déduit l'énoncé général suivant : une puissance entière quelconque d'une somme de deux carrés est elle aussi la somme de deux carrés. On peut par exemple le vérifier pour le cube de la somme des deux carrés pris dans l'exemple précédent :

$$(3^2 + 2^2)^3 = (9 + 4)^3 = 13^3 = 2\,197, \quad \text{or} \quad 2\,197 = 2\,116 + 81 = 46^2 + 9^2.$$

La lettre qui prend des valeurs entières successives dans une somme notée par un $\sum$ ou dans un produit noté par un $\prod$ doit évidemment être choisie distincte des autres lettres figurant dans la formule. Lorsqu'il y a des nombres complexes dans celle-ci, il faut donc, pour éviter toute confusion avec l'unité imaginaire i, utiliser pour cela une autre lettre que i, que nous utilisions habituellement plus haut pour cet usage. Le plus souvent, on adopte pour cela la lettre n lorsqu'elle ne figure pas par ailleurs dans la formule. Dans mes travaux personnels, j'utilisais généralement toujours i (ou i et j quand deux sommes $\sum$ étaient imbriquées) sans avoir de risque de confusion avec l'unité imaginaire, car je représentais toujours celle-ci par la lettre grecque iota ι et pas par i. Vous êtes bien sûr libre de faire de même ou au contraire de vous conformer à l'usage courant de désigner par i l'unité imaginaire, mais alors de choisir une autre lettre pour les valeurs entières successives dans les notations $\sum$ ou $\prod$ chaque fois que des nombres imaginaires interviennent.

Chapitre 7

L'analyse combinatoire et autres ensembles de nombres remarquables

7.1 Les permutations simples

Un grand intérêt des factorielles, que nous avons considérées au chapitre 5, c'est qu'elles fournissent la solution du problème des *permutations.* Si on a deux objets, par exemple les deux lettres a et b, qu'on peut permuter, on a deux manières possibles de les ranger : soit dans l'ordre ba en mettant b devant a, soit dans l'ordre ab en mettant b après a ; on dit donc qu'il y a 2 permutations possibles de 2 objets permutables. Si on ajoute un $3^{\text{ème}}$ objet, soit la lettre c, on peut mettre pour chacune des permutations précédentes, c devant ba ou ab, entre ces deux lettres ou après les deux lettres, ce qui donne trois ordres possibles pour chacune des possibilités avec a et b seuls : cba, bca et bac dans le premier cas et cab, acb et abc dans le second ; il y a donc 3 fois plus d'ordres possibles quand on permute 3 objets que quand on en permute 2. Plus généralement, si on a permuté $n-1$ objets pour en avoir tous les rangements possibles et qu'on ajoute un $n^{\text{ème}}$, on aura pour chacun d'eux n rangements possibles, puisqu'on peut mettre ce $n^{\text{ème}}$ devant, ou dans une des places intermédiaires entre les $n-1$ premiers ou encore après tous ceux-ci, ainsi qu'on s'en rend compte par l'exemple ci-dessus de trois lettres. Il y aura donc en tout n fois plus de possibilités pour les n objets que pour les $n-1$ précédents. En partant évidemment de 1 pour un seul objet, on voit de proche en proche qu'il y aura $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!$ permutations possibles de n objets. Ceci résulte de ce que pour les factorielles et les nombres de permutations, on part de 1 pour $n = 1$ dans les deux cas et de ce que la relation de récurrence est la même : pour passer de $n-1$ à n, on doit multiplier par n.

Si six personnes décident de dîner ensemble tous les jours et cela jusqu'à ce qu'elles aient épuisé toutes les possibilités de se ranger autour de la table, elles pourront le faire pendant près de deux ans puisque $6! = 720$ et que $365\,j \times 2 = 730\,j$. Mais si dix personnes prennent une décision analogue, elles ne vivront certainement pas assez longtemps, et de très loin, pour arriver au bout, puisque le nombre de permutations de 10 objets, soit $10! = 3\,628\,800$, est plus de 9 900 fois le nombre de jours dans une année !

7.2 Les permutations avec répétition

D'après ce qu'on vient de voir, qu'on appelle le problème des *permutations simples*, le nombre de mots, prononçables ou non, qu'on peut écrire avec les lettres d'un mot donné qui en contient n toutes différentes, est $n!$. Mais si par exemple une des lettres du mot y figure p fois et une autre q fois, le nombre de mots différents qu'on peut écrire avec ces lettres n'est plus que $\frac{n!}{p!q!}$ puisque les mots obtenus en permutant une de ces deux lettres ne peuvent plus être considérés comme distincts. Supposons par exemple qu'on ait 8 lettres dont 3 sont les mêmes et 2 autres aussi les mêmes, comme *aaabbcde*, le nombre de permutations possibles sera $\frac{8!}{3!2!} = \frac{40\,320}{6\times 2} = 3\,360$, alors qu'on en aurait 40 320 si toutes les lettres étaient différentes. C'est ce qu'on appelle les *permutations avec répétition*.

Si les 6 personnes considérées ci-dessus s'installent à une table autour de laquelle il y a 10 chaises et pas seulement 6 comme il a été tacitement supposé ci-dessus, le nombre de possibilités qu'elles auront sera évidemment beaucoup plus grand, pour autant qu'elles n'aient aucune exigence de rester sur des chaises voisines : ce sera le nombre de permutations des 10 places, mais divisé par le nombre de permutations des 4 places vides, puisqu'on ne peut pas considérer comme distincts les cas où des places vides sont échangées, soit donc $\frac{10!}{4!} = \frac{3\,628\,800}{24} = 151\,200$. Au lieu d'un peu moins de deux ans, elles en auront alors pour plus de 400 ans et n'auront donc plus la possibilité d'épuiser tous les cas avant d'être décédées. Plus généralement, si on a n personnes à ranger sur m sièges avec $m > n$, il suffit d'adjoindre à ces n personnes $m-n$ petits cartons blancs identiques et permuter sur les m sièges ces m personnes et cartons et alors diviser les $m!$ possibilités ainsi obtenues par le nombre de permutations des $m-n$ petits cartons indiscernables, ce qui donne

$$\frac{m!}{(m-n)!}.$$

7.3 Les arrangements simples

Passons à un problème un peu plus compliqué : les *arrangements*. Ayant m objets, on se propose de savoir combien de groupes de n ($\leq m$) de ces objets on peut former, chaque groupe différant des autres au moins par le choix des objets ou par l'ordre dans lequel on les met. C'est ce qu'on appelle les arrangements de m objets n à n. Nous supposons d'abord les objets tous différents dans chacun des groupes, ce sont les *arrangements simples*. Désignons par A_m^n leur nombre, ce qui s'énonce A, m, n et où il faut bien noter que n est un indice supérieur et pas un exposant. On peut voir qu'on passe des arrangements des m objets $n-1$ à $n-1$ aux arrangements de ces m objets n à n en mettant successivement à droite de chacun des groupes de $n-1$ objets, chacun des $m-(n-1)$ objets restants. Par exemple, si on a 4 lettres, les groupes de ces lettres prises 1 à 1 sont a, b, c et d ; ajoutons à la droite de chacun de ces groupes une des trois autres lettres : ab, ac, ad à partir de a, ba, bc, bd à partir de b, ca, cb, cd à partir de c, da, db, dc à partir de d ; on obtient bien tous les arrangements possibles des 4 lettres 2 à 2. Donc quand on passe des A_m^{n-1} arrangements des m lettres $n-1$ à $n-1$ aux arrangements de ces m lettres n à n, on multiplie leur nombre par $m-(n-1) = m-n+1$: on a

$$A_m^n = (m-n+1)A_m^{n-1}.$$

Ecrivons cette relation de récurrence pour $n = 2$, 3, ..., n, il vient

$$A_m^2 = (m-1)A_m^1, \quad A_m^3 = (m-2)A_m^2, \quad \ldots, \quad A_m^n = (m-n+1)A_m^{n-1},$$

puis multiplions toutes ces égalités membre à membre et simplifions le résultat membre à membre par A_m^2, ..., A_m^{n-1} ; nous obtenons, compte tenu de ce qu'on a évidemment $A_m^1 = m$ (comme par exemple quand on a pris ci-dessus les 4 lettres a, b, c, d 1 à 1),

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Notons que le second membre est le quotient de $m!$ par $(m-n)!$; on peut donc écrire

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Remarquons que quand on fait des groupes comprenant chacun toutes les m lettres dont on dispose, c'est-à-dire quand $n = m$, on retrouve simplement toutes les permutations des m lettres ; effectivement la formule que nous avons obtenue pour A_m^n devient dans ce cas

$$A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots 1,$$

c'est-à-dire $A_m^m = m!$.

On constate que le résultat obtenu $\frac{m!}{(m-n)!}$ est le même que lorsqu'on faisait des permutations avec répétition pour ranger n personnes à m places avec $m > n$. Pour comprendre ceci, le mieux est d'imaginer que ce sont les sièges qui sont numérotés de 1 à m et qu'on va en faire des arrangements n à n en les attribuant aux n personnes, chaque arrangement différant des autres au moins par les numéros de sièges choisis ou par l'ordre dans lequel ils sont attribués aux n personnes ; ce sont bien les A_m^n arrangements des m numéros n à n.

7.4 Les arrangements avec répétition

Si parmi les n objets de chacun des groupes qu'on forme peuvent figurer plusieurs fois chacun des m objets disponibles, on parle d'*arrangements avec répétition*. Reprenons par exemple les 4 lettres a, b, c, d. Les arrangements de ces lettres prises 1 à 1 restent évidemment a, b, c, d ; on ne peut pas encore en répéter puisqu'il n'y en a qu'une dans chaque groupe. Mais si on prend les lettres 2 à 2, on forme tous les groupes possibles en mettant à droite de ces groupes des lettres prises 1 à 1, non plus les autres lettres seulement, mais toutes les 4 lettres disponibles, si bien que le nombre de groupes est multiplié par 4 et plus par 3. Plus généralement, pour passer des arrangements de m objets $n-1$ à $n-1$ aux arrangements de ces m objets n à n, on multiplie leur nombre par m quand il peut y avoir répétition et plus seulement par $m-(n-1)$. Si nous désignons par $A_m'^n$ leur nombre, on a donc

$$A_m'^n = mA_m'^{n-1}.$$

Puisque $A_m'^1 = m$ (comme pour A_m^1), on voit que

$$A_m'^n = m^n.$$

Notons qu'ici on ne doit plus nécessairement avoir $n \leq m$ comme on devait l'exiger pour les arrangements simples.

Une application de ceci est de trouver combien il y a par exemple de nombres de 3 chiffres dans le système décimal. C'est le nombre d'arrangements des 10 chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pris 3 à 3, dont nous devons toutefois exclure ceux qui commencent par 0 tels que 000, 001, 002, ..., 009, 010, 011, ..., 099. Ce nombre d'arrangements est $10^3 = 1\,000$, mais il y en a évidemment 1 sur 10 qui commence par 0 et il faut donc en exclure le dixième, ce qui donne $1\,000 - 100 = 900$. C'est bien le cas puisque les nombres de 3 chiffres sont tous ceux qui vont de 100 à 999 ; il y en a donc bien $999 - 99 = 900$.

7.5 Les combinaisons simples

L'examen des permutation et des arrangements nous a déjà fait voir une grande partie de ce qu'on appelle l'*analyse combinatoire*. Voyons maintenant les *combinaisons*. Les combinaisons de m objets n à n sont les groupements que l'on peut faire en prenant chaque fois n de ces m objets, chaque groupe différant par les objets choisis parmi les m qui sont disponibles, mais sans plus distinguer, comme on le faisait pour les arrangements, ceux qui diffèrent par l'ordre dans lequel on range ces objets. Nous considérons d'abord les *combinaisons simples*, c'est-à-dire celles pour lesquelles ne peut figurer dans chaque groupe qu'au plus un exemplaire de chaque objet, ce qui exige que $n \leq m$. Le nombre de combinaisons simples de m objets n à n est représenté par la notation C_m^n, ce qui s'énonce C, m, n et où il faut bien noter, comme pour les A_m^n, que n est un indice supérieur et pas un exposant (l'indice inférieur est parfois appelé *base* et l'indice supérieur alors appelé simplement *indice* ; la notation $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ a aussi parfois été utilisée). On a évidemment $C_m^1 = m$; par exemple, les combinaisons 1 à 1 des 4 lettres a, b, c, d sont les 4 groupes d'1 lettre a, b, c et d. Calculons de deux manières le nombre de fois qu'un objet déterminé se trouve dans toutes les C_m^n combinaisons. Puisqu'il y a n objets dans chaque combinaison, il y a en tout nC_m^n objets dans toutes ces combinaisons ; or $\frac{1}{m}$ de ces objets est celui dont nous voulons évaluer le nombre ; celui-ci figure donc $\frac{n}{m}\, C_m^n$ fois. D'autre part, ce nombre est égal au nombre de combinaisons des $m-1$ autres objets pris $n-1$ à $n-1$. On a donc

$$\frac{n}{m}\, C_m^n = C_{m-1}^{n-1},$$

ce qui donne la formule de récurrence

$$C_m^n = \frac{m}{n}\, C_{m-1}^{n-1}.$$

De proche en proche, en donnant à n les valeurs n, $n-1$, ..., 2, on trouve

$$C_m^n = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} \cdots \frac{m-n+2}{2}\, C_{m-n+1}^1$$

et puisque

$$C_{m-n+1}^1 = m-n+1$$

d'après la formule générale $C_m^1 = m$ ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} C_m^n &= \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} \cdots \frac{m-n+2}{2} \cdot \frac{m-n+1}{1} \\ &= \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+2)(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$$

et si on remarque que le numérateur est égal à $\frac{m!}{(m-n)!}$ (d'après la formule $\frac{m!}{(m-n)!} = \prod_{i=1}^{n}(m-i+1)$ donnée au chapitre 5),

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n!)n!}.$$

Remarquons que si dans chacun des C_m^n groupes obtenus en faisant les combinaisons des m objets n à n, nous faisons maintenant attention à l'ordre dans lequel les n objets se trouvent et que nous en faisons, dans tous, les $n!$ permutations possibles, nous obtenons les arrangements de ces m objets n à n. Par conséquent, on a

$$A_m^n = n! C_m^n$$

C'est bien ce que donne la comparaison de la formule que nous avions obtenue pour A_m^n avec celle que nous venons d'obtenir pour C_m^n. On aurait ainsi pu obtenir directement cette dernière à partir de celle que nous avions pour A_m^n.

L'expression obtenue pour C_m^n montre qu'on a

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

C'est normal : chaque fois qu'on prend n objets parmi les m disponibles, on en laisse $m-n$; ceci établit une parfaite correspondance biunivoque entre les combinaisons des m objets n à n et leurs combinaisons $m-n$ à $m-n$. En particulier,

$$C_m^0 = C_m^m = 1;$$

en quelque sorte, il y a une seule manière de faire des groupes de 0 objets avec les m disponibles, c'est de n'en prendre aucun, comme il y a une seule manière de faire des groupes des m objets, il n'y en a qu'un, celui qui contient tous les objets.

Considérons les termes de la suite C_m^0, C_m^1, ..., C_m^{m-1}, C_m^m. A partir des termes extrêmes $C_m^0 = C_m^m = 1$ qui sont les plus petits, les termes grandissent vers le milieu, jusqu'à un maximum atteint par le terme du milieu $C_m^{\frac{m}{2}}$ si m est pair et par les deux termes voisins de ce milieu si m est impair, soit

$$C_m^{\frac{m-1}{2}} = C_m^{\frac{m+1}{2}}.$$

Voir un peu plus loin le tableau de ces nombres (triangle de Pascal).

Une relation importante pour les C_m^n est la suivante :

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n.$$

Le premier terme du second membre est le nombre de combinaisons qui, parmi les C_m^n, contiennent l'un déterminé des m objets disponibles, puisque, comme nous l'avons vu pour obtenir ci-avant la formule de récurrence, ce nombre est égal au nombre de combinaisons $n-1$ à $n-1$ des $m-1$ autres objets. Le second terme représente le nombre des autres combinaisons, c'est-à-dire celles qui ne contiennent pas l'objet déterminé considéré, donc les combinaisons n à n des $m-1$ autres objets. On peut d'ailleurs démontrer cette relation à partir de la formule générale des C_m^n, qui donne

$$\frac{m!}{(m-n)!n!} = \frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!} + \frac{(m-1)!}{(m-n-1)!n!};$$

ceci se déduit de l'égalité

$$\frac{m}{(m-n)n} = \frac{1}{m-n} + \frac{1}{n}$$

en multipliant les numérateurs par $(m-1)!$ et les dénominateurs par $(m-n-1)!(n-1)!$; or cette égalité s'obtient directement en réduisant au même dénominateur les deux fractions du second membre pour faire leur somme.

Si on écrit la relation que nous venons d'établir en y prenant pour m les valeurs successives $n+1$, $n+2$, … jusqu'une valeur quelconque m ($\geq n$) et qu'on additionne membre à membre toutes ces égalités, puis qu'on supprime les termes communs aux deux membres (le premier membre de chaque égalité, sauf la dernière, où c'est C_m^n, se simplifie avec le second terme du second membre de l'égalité suivante), on obtient

$$C_m^n = C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1} + \cdots + C_{m-2}^{n-1} + C_{m-1}^{n-1} = \sum_{i=n-1}^{m-1} C_i^{n-1},$$

à condition de remplacer dans la première des égalités additionnées C_n^n par C_{n-1}^{n-1}, qui lui est égal puisque $C_{n-1}^{n-1} = C_n^n = 1$.

7.6 Les combinaisons avec répétition

Considérons maintenant le cas où chacun des m objets peut être pris plusieurs fois, jusqu'à n fois, dans chacun des n groupes. Quand ce n'était pas le cas, nous avions par exemple pour 4 lettres a, b, c et d prises 2 à 2, les $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ combinaisons ab, ac, ad, bc, bd, cd ; maintenant nous avons toutes les possibilités aa, ab, ac, ad, bb, bc, bd, cc, cd, dd obtenues en adjoignant à chacune des lettres non plus seulement une des autres, mais toutes les 4 lettres y compris donc cette lettre elle-même. On n'a d'ailleurs plus ici à exiger que $m \geq n$; on peut par exemple prendre les combinaisons de 2 lettres a et b 3 à 3 : aaa, aab, abb, bbb. Pour calculer le nombre D_m^n de ces combinaisons avec répétition de m objets n à n, évaluons de deux manières, comme pour les C_m^n, le nombre de fois qu'un objet déterminé figure dans ces D_m^n combinaisons avec répétition. Il y a en tout nD_m^n objets dans toutes ces combinaisons et comme chacun des m objets s'y trouve un même nombre de fois, il y a $\frac{n}{m}\, D_m^n$ fois cet objet. D'autre part, toutes les combinaisons contenant cet objet peuvent être obtenues en l'ajoutant aux D_m^{n-1} combinaisons de tous les objets pris $n-1$ à $n-1$; or celles-ci, par le raisonnement qui vient d'être fait, contiennent déjà $\frac{n-1}{m}\, D_m^{n-1}$ fois cet objet et nous devons ajouter une fois l'objet à chacune des D_m^{n-1} combinaisons, ce qui fait en tout

$$\frac{n-1}{m}\, D_m^{n-1} + D_m^{n-1} = \frac{m+n-1}{m}\, D_m^{n-1}.$$

Comme ceci doit être égal à $\frac{n}{m}\, D_m^n$, on en déduit

$$D_m^n = \frac{m+n-1}{n}\, D_m^{n-1}.$$

En prenant pour n les valeurs successives $2, 3, \ldots, n$ et en faisant le produit membre à membre de toutes les égalités ainsi obtenues et de $D_m^1 = 1$, ce qui est évident, on obtient

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{n!},$$

ce qui peut s'écrire

$$D_m^n = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}.$$

Si on compare ceci à l'expression de C_m^n, on en déduit

$$D_m^n = C_{m+n-1}^n \quad (\text{et } C_m^n = D_{m-n+1}^n).$$

En introduisant ceci dans les formules obtenues ci-avant pour les C_m^n, on trouve

$$D_m^n = D_{n+1}^{m-1}, \quad D_m^n = D_m^{n-1} + D_{m-1}^n;$$

puis en utilisant cette dernière formule comme plus haut pour C_m^n, on trouve encore

$$D_m^n = D_1^{n-1} + D_2^{n-1} + \cdots + D_{m-1}^{n-1} + D_m^{n-1} = \sum_{i=1}^{m} D_i^{n-1}.$$

7.7 Les distributions

Enfin, passons aux *distributions*. Réaliser une distribution de n objets entre m cellules consiste à les répartir entre ces m cellules, lorsque ces objets sont indiscernables. Ceci signifie qu'on ne peut pas plus faire attention à quels objets sont dans telle ou telle cellule qu'à l'ordre des objets dans les cellules ; ce qui compte seulement c'est le nombre total d'objets dans chaque cellule. Si par exemple les objets identiques sont trois mêmes pièces à répartir entre deux porte-monnaie, nous aurons les 4 possibilités suivantes :

1) les trois pièces dans le premier porte-monnaie et rien dans le second,
2) seulement deux pièces dans le premier et la troisième pièce dans le second,
3) une seule pièce dans le premier et les deux autres pièces dans le second,
4) rien dans le premier et les trois pièces dans le second.

Plus généralement, il faut attribuer une cellule à chacun des n objets, ce qui revient à former un groupe de n cellules prises parmi les m qui sont données, certaines d'entre elles pouvant être prises plusieurs fois, l'ordre dans lequel on les place dans le groupe formé n'intervenant pas puisque les objets sont indiscernables. C'est donc une combinaison avec répétition des m cellules prises n à n. Leur nombre est par conséquent

$$D_m^n = \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}{n!} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}.$$

Parmi les combinaisons avec répétition des m cellules n à n, il y en aura où certaines cellules ne figureront pas, ce qui signifie que ces cellules ne seront attachées à aucun objet, autrement dit qu'elles seront vides. Si on s'impose au contraire qu'il y ait au moins un objet par cellule, le résultat ci-dessus doit être modifié. Il faudra d'ailleurs pour que ce cas puisse être réalisé, que le nombre d'objets soit au moins égal au nombre de cellules, c'est-à-dire qu'on ait $n \geq m$ (si cette condition n'était pas réalisée dans le cas précédent, il y aurait toujours des cellules vides, en fait $m - n$ ou plus). Pour être certain que toutes les cellules contiennent au moins un objet, il suffit de retirer m objets parmi les n avant d'effectuer la distribution, puis après que celle-ci a été réalisée comme ci-dessus avec les $n - m$ objets restants, d'ajouter les m objets préalablement retirés en en plaçant un dans chacune des m cellules. Puisque les objets sont indiscernables, le problème de savoir lesquels nous avons retirés et dans quelle cellule nous plaçons ensuite chacun d'eux ne se pose pas et il n'y a qu'une manière de réaliser le processus que nous venons d'indiquer par distribution des $n-m$ objets en les m cellules. Donc le nombre de distributions des n objets en les m cellules avec la condition que chacune de celles-ci contienne au moins un objet est

$$D_m^{n-m} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \frac{m(m+1)\dots(m-1)}{(n-m)!}\cdot$$

En particulier, s'il y a autant d'objets que de cellules, il n'y a évidemment qu'une manière de les répartir avec au moins un objet par cellule, c'est d'en mettre un dans chaque cellule ; ce résultat évident pour $n = m$ vient en fait d'être implicitement utilisé dans le raisonnement ci-dessus lors du replacement des m objets préalablement retirés. La formule est d'ailleurs en parfait accord avec ce résultat : si $n = m$, elle donne bien

$$\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = 1$$

puisqu'alors on a

$$\frac{(n-1)!}{(m-1)!} = 1 \quad \text{et} \quad (n-m)! = 0! = 1.$$

7.8 La formule du binôme de Newton

Une application classique de l'analyse combinatoire, tout au moins des combinaisons simples, c'est la recherche du développement de la puissance entière positive d'un binôme, c'est-à-dire d'une somme de deux termes, donc d'une expression de la forme $(a+b)^m$. Rappelons à ce sujet la formule

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

que nous avons obtenue dès le premier chapitre en appliquant les propriétés de l'addition et de la multiplication : on met le premier membre sous la forme $(a+b)(a+b)$ et pour faire ce produit, on multiplie le premier terme de la première parenthèse par chacun des termes de la seconde, ce qui donne $a \cdot a + a \cdot b$, et on y ajoute les produits du second terme de la première parenthèse par les termes de la seconde, ce qui donne $b \cdot a + b \cdot b$; puisque $a \cdot a = a^2$, $a \cdot b = b \cdot a$ et $b \cdot b = b^2$, on trouve au total $a^2+2ab+b^2$. On peut continuer en faisant un travail semblable pour $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$. Un premier terme, en a^3, est obtenu en prenant a dans les 3 parenthèses et donc b dans aucune. Le second terme, en a^2b, est ensuite obtenu en prenant a dans 2 des parenthèses et donc b dans 1 seule des 3, ce qui offre 3 possibilités, qui sont les 3 possibilités de prendre les 3 parenthèses 1 à 1, soit $C_3^1 = 3$, d'où au total $3a^2b$. Ensuite, on aura les ab^2 en prenant a dans 1 parenthèse et donc b dans 2 parenthèses ; les possibilités sont aussi au nombre de 3, car ce sont les $C_3^2 = 3$ combinaisons des 3 parenthèses prises 2 à 2. Enfin, pour le dernier terme, en b^3, on a 1 seule possibilité, celle de prendre b dans les 3 parenthèses, ce qui correspond à $C_3^3 = 1$ possibilité. Finalement, on aura donc

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Plus généralement, considérons le développement de $(a+b)^m$. Un premier terme, en a^m, est celui pour lequel a est pris dans les m parenthèses et donc b dans aucune ; ceci fait $C_m^0 = 1$ possibilité, d'où a^m avec le coefficient 1. Le terme suivant, en $a^{m-1}b$, est obtenu avec toutes les possibilités de prendre b dans 1 des m parenthèses et a dans toutes les autres, ce qui correspond à $C_m^1 = m$ possibilités. Pour le terme réunissant les produits de la forme $a^{m-n}b^n$, on a C_m^n possibilités de prendre b dans n des m parenthèses, ce qui donne $C_m^n a^{m-n}b^n$. On continue jusqu'au dernier terme, en b^m, pour lequel b est pris dans toutes les parenthèses et a dans aucune, ce qui n'offre que $C_m^m = 1$ possibilité, donc ce terme en b^m a pour coefficient 1. On a ainsi $m+1$ termes, puisque l'exposant de b varie de 0 à m (et celui de a, de m à 0) et les coefficients respectifs sont les C_m^n, où n varie de 0 à m, comme l'exposant de b. On peut donc écrire

$$(a+b)^m = a^m + C_m^1 a^{m-1}b + \cdots + C_m^{m-1}ab^{m-1} + b^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i a^{m-i}b^i.$$

Cette formule est traditionnellement appelée *formule du binôme de Newton* (du nom de ce célèbre mathématicien et physicien anglais, I. Newton, 1642-1727). Pour $m = 2$ et $m = 3$, elle donne les formules rappelées ci-dessus ; il vient ensuite

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,\\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Par souci de généralisation, on peut commencer avec

$$(a+b)^0 = 1 \quad \text{et} \quad (a+b)^1 = a+b.$$

7.8.1 Le triangle de Pascal

En mettant sur des lignes successives les coefficients apparaissant dans le développement de $(a+b)^m$ pour $m = 0, 1, 2, \ldots$, on obtient le tableau suivant :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 \\
 & & & & & & & & & \dots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

pour

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
 & & & & & \text{etc.} & & & & &
\end{array}
$$

C'est ce qu'on appelle le *triangle de Pascal* (du nom de ce célèbre mathématicien, physicien et philosophe français, B. Pascal, 1623-1662). Les nombres qui y figurent, les C_m^n, qui sont en réalité les nombres de combinaisons de m objets n à n, sont appelés les *coefficients binomiaux*, en raison de leur rôle dans la formule du binôme de Newton. L'indice m donne le rang de la ligne où le nombre se trouve, qui est $m+1$, et l'indice n correspond au rang du nombre sur cette ligne, qui est $n+1$; ces nombres naturels m et n sont tels que $0 \leq n \leq m$, quoiqu'on puisse considérer, par esprit de généralisation, C_m^{-n} et C_m^{m+n}, tous $= 0$. Pour éviter la confusion de l'indice supérieur n avec un exposant, certains auteurs ont parfois utilisé la notation ${}^mC_n$ ou ${}_mC_n$ au lieu de C_m^n ; comme nous l'avons signalé plus haut, la notation $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ pour C_m^n a aussi été très utilisée.

La symétrie gauche-droite de ce tableau, liée à la symétrie des rôles de a et b dans la formule, est en accord avec la relation $C_m^n = C_m^{m-n}$ donnée plus haut. Une autre relation donnée pour les C_m^n, à savoir

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-1}^n,$$

entraîne que chaque nombre dans le tableau est la somme des deux nombres voisins sur la ligne précédente, comme on voit que c'est effectivement le cas. Ceci permet d'écrire facilement des lignes successives, pour prolonger le triangle de Pascal.

7.8.2 Autres propriétés des coefficients binomiaux

Ces coefficients binomiaux constituent un ensemble remarquable de nombres, que nous aurions dû peut-être logiquement considérer en même temps que d'autres que nous avons présentés au chapitre 5. Ce n'est néanmoins qu'ici que nous allons donner une collection de formules qui les concernent, non seulement parce que ces nombres sont présentés ci-dessus à partir de l'analyse combinatoire, mais surtout parce que nous avons introduit seulement au chapitre 6 les nombres négatifs et par suite le facteur $(-1)^i$ qui permet, dans une somme où i prend des valeurs entières successives, d'attribuer aux termes successifs le signe $+$ ou $-$ alternativement suivant la parité de i : ce sera utile pour certaines formules données un peu plus loin.

Pour les C_m^n situés sur les côtés du triangle de Pascal ou proches de ses côtés, on a

$$\begin{aligned}
&C_m^0 = C_m^m = 1, \qquad C_m^1 = C_m^{m-1} = m, \quad C_m^2 = C_m^{m-2} = \frac{m(m-1)}{2},\\
&C_m^3 = C_m^{m-3} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}, \qquad \ldots .
\end{aligned}$$

Notons que $C_{2^n}^2 = \mathcal{E}_n$ (nombre d'Euclide, voir chapitre 5) et que $C_{n+1}^2 = T_n$ (nombre triangulaire, voir chapitre 5). On a d'autre part les relations de récurrence

$$C_m^n = \frac{m}{n}\, C_{m-1}^{n-1} = \frac{m}{m-n}\, C_{m-1}^n = \frac{m-n+1}{n}\, C_m^{n-1};$$

en combinant avec le fait que $C_m^n = C_m^{m-n}$, on trouve encore par exemple

$$nC_m^n = mC_{m-1}^{m-n} \quad \text{et} \quad nC_m^n = (m-n+1)C_m^{m-n+1}.$$

Indiquons des diviseurs de C_m^n (nous utilisons, comme ailleurs, la notation $\mathfrak{M}$ pour signifier “multiple de”). Si m est multiple de n, c'est-à-dire est de la forme ℓn, on a

$$C_{\ell n}^n = \mathfrak{M}\ell.$$

Si au contraire m et n sont premiers entre eux, on a

$$C_m^n = \mathfrak{M}m;$$

si $m+1$ et $n+1$ sont premiers entre eux, on a

$$C_m^n = \mathfrak{M}(n+1);$$

si $m-n+1$ et n sont premiers entre eux, on a

$$C_m^n = \mathfrak{M}(m-n+1).$$

Si m est un nombre premier p ou est une puissance p^k d'un nombre premier p, C_m^n avec $1 \leq n \leq m-1$, C_{m+1}^n avec $2 \leq n \leq m-1$, …, C_{2m-3}^{m-2}, C_{2m-3}^{m-1}, C_{2m-2}^{m-1} sont $= \mathfrak{M}p$; par exemple, si nous considérons $m = 9 = 3^2$, on a C_9^1, …, C_9^8, C_{10}^2, …, C_{10}^8, C_{11}^3, …, C_{11}^8, C_{12}^4, …, C_{12}^8, C_{13}^5, …, C_{13}^8, C_{14}^6, C_{14}^7, C_{14}^8, C_{15}^7, C_{15}^8, C_{16}^8 tous $= \mathfrak{M}3$. Plus généralement, si

$$m = \mathfrak{M}(p^k)$$

où p est premier et où k est un nombre naturel, éventuellement 1, C_m^n où $(\ell-1)p^k + 1 \leq n \leq \ell p^k - 1$, C_{m+1}^n où $(\ell-1)p^k + 2 \leq n \leq \ell p^k - 1$, …, $C_{m+p^k-3}^{\ell p^k-2}$, $C_{m+p^k-3}^{\ell p^k-1}$, $C_{m+p^k-2}^{\ell p^k-1}$ sont $= \mathfrak{M}p$ avec $\ell = 1, 2, \ldots, \frac{m}{p^k}$; par exemple, avec $m = 15$, $p = 5$ et $k = 1$, les C_m^n suivants sont $= \mathfrak{M}5$:

$$C_{15}^1,\ C_{15}^2,\ C_{15}^3,\ C_{15}^4,\ C_{16}^2,\ C_{16}^3,\ C_{16}^4,\ C_{17}^3,\ C_{17}^4,\ C_{18}^4 \qquad (\text{pour } \ell = 1),$$

$$C_{15}^6,\ C_{15}^7,\ C_{15}^8,\ C_{15}^9,\ C_{16}^7,\ C_{16}^8,\ C_{16}^9,\ C_{17}^8,\ C_{17}^9,\ C_{18}^9 \qquad (\text{pour } \ell = 2),$$

$$C_{15}^{11},\ C_{15}^{12},\ C_{15}^{13},\ C_{15}^{14},\ C_{16}^{12},\ C_{16}^{13},\ C_{16}^{14},\ C_{17}^{13},\ C_{17}^{14},\ C_{18}^{14} \qquad (\text{pour } \ell = 3);$$

autre exemple : avec $m = 14$, $p = 2$ et $k = 1$, respectivement pour $\ell = 1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, les C_m^n suivants sont $= \mathfrak{M}2$: C_{14}^1, C_{14}^3, C_{14}^5, C_{14}^7, C_{14}^9, C_{14}^{11}, C_{14}^{13}. En particulier, pour $\ell = 1$ et $\ell = \frac{m}{p^k}$, les C suivants sont $= \mathfrak{M}p$:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \text{ avec } 1 \leq n \leq p^k - 1, \quad C_{m+1}^n = C_{m+1}^{m+1-n} \text{ avec } 2 \leq n \leq p^k - 1, \ldots,$$

$$C_{m+p^k-3}^{p^k-2} = C_{n+p^k-3}^{m-1}, \quad C_{m+p^k-3}^{p^k-1} = C_{m+p^k-3}^{m-2}, \quad C_{m+p^k-2}^{p^k-1} = C_{m+p^k-2}^{m-1};$$

par exemple, avec $m = 12$ et $p^k = 2^2$, les C_m^n suivants sont $= \mathfrak{M}2$, c'est-à-dire sont pairs : $C_{12}^1 = C_{12}^{11}$, $C_{12}^2 = C_{12}^{10}$, $C_{12}^3 = C_{12}^9$, $C_{13}^2 = C_{13}^{11}$, $C_{13}^3 = C_{13}^{10}$, $C_{14}^3 = C_{14}^{11}$. Toujours avec p^k où p est premier et k un nombre naturel pouvant être $= 1$, on a

$$C_m^{kp^k-1} = \mathfrak{M}p \quad (m \neq \mathfrak{M}p^k - 1),$$

$$C_{p-1}^1 \neq \mathfrak{M}p$$

et plus généralement,

$$C_{p^k-1}^n \neq \mathfrak{M}p.$$

Des relations écrites plus haut, on peut en déduire d'autres :

$$
\begin{aligned}
C_m^n + C_m^{n-1} &= \frac{m+1}{n}\, C_m^{n-1} = C_{m+1}^n, \\
C_m^n - C_{m-1}^n &= \frac{n}{m-n}\, C_{m-1}^n = C_{m-1}^{n-1}, \\
\frac{m+n}{m}\, C_m^n &= C_{m-1}^n + 2C_{m-1}^{n-1}, \\
C_m^n &= C_{m-2}^n + 2C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2} = C_{m-3}^n + 3C_{m-3}^{n-1} + 3C_{m-3}^{n-2} + C_{m-3}^{n-3} \\
&= \cdots, \\
nC_m^n &= mC_{m-1}^{n-1}, \quad n(n-1)C_m^n = m(m-1)C_{m-2}^{n-2}, \\
&\vdots \\
C_m^n &= \frac{n+1}{m-n}\, C_m^{n+1}, \\
\frac{C_{m-1}^n}{m-n} &= \frac{C_{m-1}^{m-n}}{n} = \frac{C_m^{m-n}}{m} = \frac{C_{m-1}^{m-n-1}}{m-n} = \frac{C_{m-1}^{n-1}}{n} = \frac{C_m^n}{m}, \\
C_n^\ell C_m^n &= C_m^{n-\ell} C_{m-n+\ell}^\ell = C_m^\ell C_{m-\ell}^{n-\ell} = C_m^\ell C_{m-\ell}^{m-n} \quad \text{où } \ell \leq n \leq m, \\
C_m^n C_{m-n}^\ell &= C_m^{n+\ell} C_{n+\ell}^n, \\
C_m^n &= \frac{m(m-1)\ldots(m-\ell+1)}{n(n-1)\ldots(n-\ell+1)}\, C_{m-\ell}^{n-\ell} \\
&= \frac{m!(n-\ell)!}{n!(m-\ell)!}\, C_{m-\ell}^{n-\ell} = \frac{C_m^\ell}{C_n^\ell}\, C_{m-\ell}^{n-\ell} \quad \text{où } \ell \leq n \leq m, \\
C_{m+1}^m C_m^{m-1} &= m(m+1), \quad C_{n+\ell}^{n-\ell} = \frac{n(n+\ell)}{(2\ell)!} \prod_{i=1}^{\ell-1} (n^2 - i^2), \\
C_{2n}^n &= 2C_{2n-1}^{n-1} = 2C_{2n-1}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad C_{kn-1}^{n-1} = \frac{1}{k}\, C_{kn}^n.
\end{aligned}
$$

Notons que le nombre pyramidal P_n (voir chapitre 5) est tel que

$$P_n = C_{n+2}^3$$

et le nombre hyperpyramidal H_n^p est tel que

$$H_n^p = C_{n+p}^{p+1},$$

en particulier

$$H_n = C_{n+3}^4,$$

tandis que, comme nous avons écrit plus haut, les nombres triangulaires sont tels que

$$T_n = C_{n+1}^2$$

et qu'on a

$$C_n^1 = n,$$

c'est-à-dire les nombres naturels successifs, et

$$C_n^0 = 1$$

pour tous les n.

Si dans la formule du binôme de Newton, on donne à a et à b la valeur 1, on obtient la formule suivante :

$$\sum_{i=0}^{m} C_m^i = C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

Si on donne à a la valeur 1 et à b la valeur -1, on obtient la somme alternée suivante :

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i = C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - \cdots + (-1)^m C_m^m = 0,$$

sauf dans le cas particulier où m serait $= 0$, auquel cas la somme se réduirait à son premier terme $C_0^0 = 1$ et elle serait donc alors $= 1$ (en accord avec ce que donne la formule précédente puisque $2^0 = 1$). (Puisque $C_m^0 = 1$, cette formule peut aussi s'écrire $\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} C_m^i = 1$.) Lorsqu'on se limite aux $n+1$ premiers termes dans la dernière formule, la valeur de la somme est donnée par

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_m^i = C_m^0 - C_m^1 + C_m^2 - \cdots + (-1)^n C_m^n = (-1)^n C_{m-1}^n.$$

Parmi les formules donnant des sommes de termes avec des coefficients binomiaux, citons encore les suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m}(C_m^i)^2 &= (C_m^0)^2+(C_m^1)^2+(C_m^2)^2+\cdots+(C_m^{m-1})^2+(C_m^m)^2 = C_{2m}^m = \frac{(2m)!}{(m!)^2};\\
\sum_{i=0}^{E(\frac{m}{2})} C_m^{2i} &= C_m^0+C_m^2+C_m^4+\cdots = \sum_{i=1}^{E(\frac{m+i}{2})} C_m^{2i-1} = C_m^1+C_m^3+C_m^5+\cdots\\
&= 2^{m-1} \quad (m>0)
\end{aligned}$$

où $E(\ )$ = “plus grand entier contenu dans”, soit si m est pair, $m=2\ell$,

$$\sum_{i=0}^{\ell} C_{2\ell}^{2i} = C_{2\ell}^0+C_{2\ell}^2+\cdots+C_{2\ell}^{2\ell} = \sum_{i=1}^{\ell} C_{2\ell}^{2i-1} = C_{2\ell}^1+C_{2\ell}^3+\cdots+C_{2\ell}^{2\ell-1} = 2^{2\ell-1}$$

et si m est impair, $m=2\ell+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\ell} C_{2\ell+1}^{2i} &= C_{2\ell+1}^0+C_{2\ell+1}^2+\cdots+C_{2\ell+1}^{2\ell}\\
&= \sum_{i=1}^{\ell} C_{2\ell+1}^{2i+1} = C_{2\ell+1}^1+C_{2\ell+1}^3+\cdots+C_{2\ell+1}^{2\ell+1} = 2^{2\ell};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i C_{2\ell}^{2i} &= C_{2\ell}^0-C_{2\ell}^2+\cdots+(-1)^\ell C_{2\ell}^{2\ell}\\
&= 2^\ell \qquad \text{si } \ell = \mathfrak{M}4,\\
&= -2\ell \qquad \text{si } \ell = \mathfrak{M}4+2 \text{ et}\\
&= 0 \qquad \text{si } \ell = \mathfrak{M}4\pm 1,
\end{aligned}$$

ce qui donne (faire respectivement $\ell = 2k$ ou $\ell = 2k+1$ avant de revenir à la notation ℓ à la place de k)

$$\sum_{i=0}^{2\ell}(-1)^i C_{4\ell}^{2i} = C_{4\ell}^0 - C_{4\ell}^2+\cdots+C_{4\ell}^{4\ell} = (-1)^\ell 2^{2\ell}$$

et

$$\sum_{i=0}^{2\ell+1}(-1)^i C_{4\ell+2}^{2i} = C_{4\ell+2}^0 - C_{4\ell+2}^2+\cdots-C_{4\ell+2}^{4\ell+2} = 0$$

(ce qui est d'ailleurs évident d'après la relation vue plus haut $C_m^n = C_m^{m-n}$) ;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^{i-1}C_{2\ell}^{2i-1} &= C_{2\ell}^1 - C_{2\ell}^3 + C_{2\ell}^5 - \cdots + (-1)^{\ell-2}C_{2\ell}^{2\ell-3} + (-1)^{i-1}C_{2\ell}^{2\ell-1} \\
&= 0 \qquad \text{si } \ell = \mathfrak{M}2,\ ^1 \\
&= 2^\ell \qquad \text{si } \ell = \mathfrak{M}4+1 \text{ et} \\
&= -2^\ell \quad \text{si } \ell = \mathfrak{M}4-1,\ ^2; \\
\sum_{i=0}^{\ell-1} C_{4\ell}^{4i+1} &= C_{4\ell}^1 + C_{4\ell}^5 + \cdots + C_{4\ell}^{4\ell-3} \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} C_{4\ell}^{4i-1} = C_{4\ell}^3 + C_{4\ell}^7 + \cdots + C_{4\ell}^{4\ell-1} = 2^{2(2\ell-1)}, \\
\sum_{i=0}^{\ell} C_{4\ell}^{4i} &= C_{4\ell}^0 + C_{4\ell}^4 + \cdots + C_{4\ell}^{4\ell} = 2^{2\ell-1}\left[2^{2\ell-1} + (-1)^\ell\right], \\
\sum_{i=1}^{\ell} C_{4\ell}^{4i-2} &= C_{4\ell}^2 + C_{4\ell}^6 + \cdots + C_{4\ell}^{4\ell-2} = 2^{2\ell-1}\left[2^{2\ell-1} - (-1)^\ell\right], \\
\sum_{i=0}^{\ell} C_{4\ell+2}^{4i} &= C_{4\ell+2}^0 + C_{4\ell+2}^4 + \cdots + C_{4\ell+2}^{4\ell} \\
&= \sum_{i=0}^{\ell} C_{4\ell+2}^{4i+2} = C_{4\ell+2}^2 + C_{4\ell+2}^6 + \cdots + C_{4\ell+2}^{4\ell+2} = 2^{4\ell}, \\
\sum_{i=0}^{\ell} C_{4\ell+2}^{4i+1} &= C_{4\ell+2}^1 + C_{4\ell+2}^5 + \cdots + C_{4\ell+2}^{4\ell+1} = 2^{2\ell}\left[2^{2\ell} + (-1)^\ell\right], \\
\sum_{i=1}^{\ell} C_{4\ell+2}^{4i-1} &= C_{4\ell+2}^3 + C_{4\ell+2}^7 + \cdots + C_{4\ell+2}^{4\ell-1} = 2^{2\ell}\left[2^{2\ell} - (-1)^\ell\right]; \\
\sum_{i=0}^{m-n} C_{m-i}^n &= C_m^n + C_{m-1}^n + \cdots + C_{n-1}^n + C_n^n = C_{m+1}^{n+1},
\end{aligned}$$

1. (donc $\sum_{i=1}^{2\ell}(-1)^{i-1}C_{4\ell}^{2i-1} = C_{4\ell}^1 - C_{4\ell}^3 + \cdots - C_{4\ell}^{4\ell-1} = 0$, ce qui est aussi évident d'après $C_m^n = C_m^{m-n}$)

2. (donc $\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^{\ell-1}C_{4\ell+2}^{2i-1} = C_{4\ell+2}^1 - C_{4\ell+2}^3 + \cdots + C_{4\ell+2}^{4\ell+1} = (-1)^\ell 2^{2\ell+1}$)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} C_{m-i}^{n-i} &= C_m^n + C_{m-1}^{n-1} + \cdots + C_{m-n+1}^1 + C_{m-n}^0 = C_{m+1}^n,\\
\sum_{i=0}^{n} C_{m+i}^{m} &= C_m^m + C_{m+1}^m + \cdots + C_{m+n}^m\\
&= \sum_{i=0}^{n} C_{m+i}^{i} = C_m^0 + C_{m+1}^1 + \cdots + C_{m+n}^n = C_{m+n+1}^{m+1}\\
&= C_{m+n+1}^n,\\
\sum_{i=1}^{n} C_{m+i-1}^{m} &= C_m^m + C_{m+1}^m + \cdots + C_{m+n-1}^m\\
&= \sum_{i=1}^{n} C_{m+i-1}^{i-1} = C_m^0 + C_{m+1}^1 + \cdots + C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n}^{m+1}\\
&= C_{m+n}^{n-1};\\
\sum_{i=1}^{m} iC_m^i &= C_m^1 + 2C_m^2 + \cdots + mC_m^m = m2^{m-1},\\
\sum_{i=1}^{m} i(2i-1)C_m^i &= m^2 2^{m-1},\\
\sum_{i=1}^{m} i^2 C_m^i &= C_m^1 + 4C_m^2 + \cdots + m^2 C_m^m = m(m+1)2^{m-2},\\
\sum_{i=1}^{E(\frac{m-1}{2})} iC_m^{2i+1} &= \left\{\begin{array}{ll} C_m^3 + 2C_m^5 + \cdots + \dfrac{m-2}{2}\, C_m^{m-1} & \text{si } m \text{ est pair,}\\ \\ C_m^3 + 2C_m^5 + \cdots + \dfrac{m-1}{2}\, C_m^{m} & \text{si } m \text{ est impair} \end{array}\right\}\\
&= (m-2)2^{m-3} \quad \text{pour } m \geq 3
\end{aligned}$$

(comme plus haut, $E(\ )=$ “plus grand entier contenu dans”) ; notons enfin cette formule que nous avons aussi obtenue :

$$\sum_{i=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^i C_n^i C_{2n-2i}^n = 2^n,$$

ainsi que

$$\sum_{i=1}^{n} C_{i+1}^i C_i^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} (i+1)i = 2\sum_{i=1}^{n} T_i = 2P_i = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

7.8.3 La suite de Fibonacci

Ci-dessus, nous avons additionné d'abord des coefficients binomiaux situés sur une même droite parallèle à la base du triangle de Pascal, lorsque l'indice supérieur seul varie dans la somme, ensuite ceux qui sont sur une même droite parallèle au côté gauche du triangle de Pascal, lorsque seul varie l'indice inférieur, et enfin ceux qui sont sur une même droite parallèle au côté droit de ce triangle, lorsque les deux indices varient ensemble de la même quantité (ce qui est équivalent au cas précédent en raison de la symétrie de ce triangle). Nous allons maintenant voir ce que donne l'addition de ceux qui sont sur une droite d'inclinaison moyenne ; ces sommes sont égales à des nombres qui constituent une suite appelée *suite de Fibonacci*, du nom de ce mathématicien que nous avons cité au chapitre 2 pour son rôle dans l'introduction des chiffres arabes en Occident. Il n'est cependant pas l'inventeur de cette suite ; simplement, elle se trouve parmi les multiples connaissances de l'Antiquité grecque qui lui ont été transmises par les mathématiciens arabes et qu'il a exposées dans ses ouvrages au cours de la première moitié du XIII$^{\text{e}}$ siècle. Il s'agit d'une suite de nombres tels que chacun d'eux est égal à la somme des deux précédents, les deux premiers étant 1 et 1. On obtient ainsi 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, 6 765, 10 946, 17 711, 28 657, 46 368, ... Nous poserons $\mathcal{F}_0 = 1$, $\mathcal{F}_1 = 1$, $\mathcal{F}_2 = 2$, $\mathcal{F}_3 = 3$, $\mathcal{F}_4 = 5$, etc. avec des $\mathcal{F}$ (F calligraphiques) pour les distinguer de ceux que nous avons utilisés pour désigner (au chapitre 5) les nombres de Fermat (F italiques). La formule de récurrence s'écrit alors

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-1}.$$

En additionnant les coefficients binomiaux qui, dans le triangle de Pascal, sont sur des droites montant obliquement de gauche à droite, on trouve (encore une fois, $E(\ )$ signifie "plus grand entier contenu dans")

$$\sum_{i=0}^{E(\frac{m}{2})} C_{m-i}^{i} = \mathcal{F}_m.$$

Le lecteur peut vérifier dans le triangle de Pascal donné plus haut, en partant de la gauche par exemple de la 7$^{\text{ème}}$ ligne, soit de C_6^0, et en montant obliquement, qu'on a $1+5+6+1 = 13$, ce qui est bien $\mathcal{F}_6$. De même, si on part de la gauche de la ligne suivante, soit de C_7^0, il vient $1+6+10+4 = 21$, ce qui est bien $\mathcal{F}_7$. Compte tenu de la symétrie gauche-droite du triangle de Pascal, d'après $C_m^n = C_m^{m-n}$, on obtient les mêmes résultats pour les sommes des coefficients binomiaux se trouvant sur les droites montant de la même manière de droite à gauche au lieu de gauche à droite ; la formule s'écrit alors

$$\sum_{i=0}^{E(\frac{m}{2})} C_{m-i}^{m-2i} = \mathcal{F}_m.$$

Notons qu'on a aussi

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} C_n^i 5^{E(\frac{i}{2})} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{E(\frac{n}{2})} C_{n+1}^{2i+1} 5^i.$$

Au sujet de la suite de Fibonacci, on peut démontrer que le carré d'un de ses termes diffère du produit des deux termes voisins d'1 unité seulement, alternativement dans un sens ou dans l'autre : on a

$$\mathcal{F}_n^2 - \mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+1} = (-1)^n.$$

Par exemple, $\mathcal{F}_3^2 = 3^2 = 9$ alors que $\mathcal{F}_2 \cdot \mathcal{F}_4 = 2 \times 5 = 10 = \mathcal{F}_3^2 + 1$ et $\mathcal{F}_4^2 = 5^2 = 25$ alors que $\mathcal{F}_3 \cdot \mathcal{F}_5 = 3 \times 8 = 24 = \mathcal{F}_4^2 - 1$. Ceci rappelle une propriété que nous avons signalée au chapitre 5 pour les carrés de tous les nombres naturels ; toutefois dans la suite formée par ces derniers, la différence d'1 unité est toujours dans le même sens, le carré d'un nombre de cette suite étant chaque fois supérieur d'1 unité au produit des deux nombres voisins, puisqu'on a

$$n^2 = (n-1)(n+1) + 1.$$

Dans la suite de Fibonacci, si on prend quatre termes consécutifs, le produit des deux termes extrêmes est égal, à 1 unité près, au produit des deux autres ; si les quatre termes successifs sont $\mathcal{F}_{n-1}$, $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_{n+1}$ et $\mathcal{F}_{n+2}$, on a

$$\mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_n \cdot \mathcal{F}_{n+1} - (-1)^n.$$

Par exemple, avec $n = 3$, $\mathcal{F}_2 \cdot \mathcal{F}_5 = 2 \times 8 = 16$ et $\mathcal{F}_3 \cdot \mathcal{F}_4 = 3 \times 5 = 15$, d'où $\mathcal{F}_2 \cdot \mathcal{F}_5 = \mathcal{F}_3 \cdot \mathcal{F}_4 + 1$; avec $n = 4$, on a $\mathcal{F}_3 \cdot \mathcal{F}_6 = 3 \times 13 = 39$ et $\mathcal{F}_4 \cdot \mathcal{F}_5 = 5 \times 8 = 40$, d'où $\mathcal{F}_3 \cdot \mathcal{F}_6 = \mathcal{F}_4 \cdot \mathcal{F}_5 - 1$. On peut en donner une démonstration générale comme suit : étant donné que d'après la formule générale de récurrence, on a

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n,$$

il vient

$$\mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n-1} \cdot (\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n) = \mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_n,$$

or d'après la relation précédente,

$$\mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n^2 - (-1)^n,$$

donc

$$\mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_n^2 - (-1)^n + \mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n \cdot (\mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-1}) - (-1)^n = \mathcal{F}_n \cdot \mathcal{F}_{n+1} - (-1)^n$$

puisque

$$\mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-1} = \mathcal{F}_{n+1}.$$

On peut aussi démontrer que $\mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+2}$ est égal à la différence des carrés de $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_{n+1}$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1}^2 - \mathcal{F}_n^2;$$

en effet, d'après la formule de récurrence, on a

$$\mathcal{F}_{n-1} = \mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n,$$

donc

$$\mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+2} = (\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n)(\mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n)$$

et si on applique à ceci l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, on obtient bien la formule qui vient d'être écrite.

Quant à la somme des $n+1$ premiers termes de la suite de Fibonacci, elle est donnée par

$$\sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{n+2} - 1$$

comme on peut facilement le démontrer par récurrence (c'est vrai pour $n = 1$ puisque $1 + 1 = 3 - 1$ et la relation de récurrence écrite sous la forme $\mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_{n+2}$ permet de voir que si c'est vrai pour $n - 1$, ce l'est aussi pour n). De cette relation, on déduit facilement que si $m < n$, on a

$$\sum_{i=m}^{n} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{n+2} - \mathcal{F}_{m+1}.$$

Il est amusant de noter des théorèmes particuliers pour certaines sommes de nombres donnés de termes consécutifs : notamment, la somme de 6 termes consécutifs est égale au produit de l'avant-dernier terme par 4, c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1} + \cdots + \mathcal{F}_{n+4} + \mathcal{F}_{n+5} = 4\mathcal{F}_{n+4};$$

par exemple, pour $n = 0$, $1+1+2+3+5+8 = 20 = 4 \times 5$ et pour $n = 4$, $5+8+13+21+34+55 = 136 = 4 \times 34$; pour les sommes de 10 termes consécutifs, on a

$$\mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1} + \cdots + \mathcal{F}_{n+8} + \mathcal{F}_{n+9} = 11\mathcal{F}_{n+6},$$

par exemple, $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55 = 143 = 11 \times 13$ et $8 + 13 + \cdots + 610 = 1\,584 = 11 \times 144$.

Notons d'autre part que la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}_n$ soit

$$\mathfrak{M}_2\ \mathfrak{M}_3\ \mathfrak{M}_4\ \mathfrak{M}_5\ \mathfrak{M}_6\ \mathfrak{M}_7\ \mathfrak{M}_8\ \mathfrak{M}_9\ \mathfrak{M}_{10}\ \mathfrak{M}_{11}\ \mathfrak{M}_{12}\ \mathfrak{M}_{13}\ \mathfrak{M}_{14}\ \mathfrak{M}_{15}\ \mathfrak{M}_{16}\ \mathfrak{M}_{17}\ \ldots$$

(avec $\mathfrak{M}$ = "multiple de") est que $n+1$ soit respectivement

$$\mathfrak{M}_3\ \mathfrak{M}_4\ \mathfrak{M}_6\ \mathfrak{M}_5\ \mathfrak{M}_{12}\ \mathfrak{M}_8\ \mathfrak{M}_6\ \mathfrak{M}_{12}\ \mathfrak{M}_{15}\ \mathfrak{M}_{10}\ \mathfrak{M}_{12}\ \mathfrak{M}_7\ \mathfrak{M}_{24}\ \mathfrak{M}_{20}\ \mathfrak{M}_{12}\ \mathfrak{M}_9\ \ldots$$

La première de ces propositions implique que deux nombres pairs successifs de la suite de Fibonacci entourent deux nombres impairs : on a successivement deux impairs et un pair, donc un sur trois est pair.

En plus de toutes ces propriétés, en général assez facilement obtenues, de la suite de Fibonacci, signalons un théorème assez récent : parmi les termes de cette suite au-delà des deux premiers, les seuls qui soient des puissances exactes sont $\mathcal{F}_5 = 8 = 2^3$ et $\mathcal{F}_{11} = 144 = 12^2$.

Enfin, on peut signaler aussi au sujet de la suite de Fibonacci que ses termes permettent d'obtenir des triades pythagoriques $(x,\ y,\ z)$, c'est-à-dire telles que $x^2 + y^2 = z^2$ (voir fin du chapitre 5). Il suffit de prendre pour x le produit de deux termes séparés par deux autres et pour y, le double produit de ces deux autres ; alors z est la somme des carrés de ces deux autres, ce qui s'écrit

$$(\mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+2})^2 + (2\mathcal{F}_{n+1} \cdot \mathcal{F}_n)^2 = (\mathcal{F}_{n+1}^2 + \mathcal{F}_n^2)^2.$$

En effet, le premier carré est, d'après une relation obtenue ci-dessus, $(\mathcal{F}_{n+1}^2 - \mathcal{F}_n^2)^2$, soit en vertu de l'identité $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, $\mathcal{F}_{n+1}^4 + \mathcal{F}_n^4 - 2\mathcal{F}_{n+1}^2 \cdot \mathcal{F}_n^2$ et comme le second terme est égal à $4\mathcal{F}_{n+1}^2 \cdot \mathcal{F}_n^2$, cela fait, pour tout le premier membre, $\mathcal{F}_{n+1}^4 + \mathcal{F}_n^4 + 2\mathcal{F}_{n+1}^2 \cdot \mathcal{F}_n^2$, ce qui est bien égal au second membre en vertu de l'identité $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Par exemple, avec $n = 4$, on a $\mathcal{F}_{n-1} \cdot \mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_3 \cdot \mathcal{F}_6 = 3 \times 13 = 39$, $2\mathcal{F}_{n+1} \cdot \mathcal{F}_n = 2\mathcal{F}_5 \cdot \mathcal{F}_4 = 2 \times 8 \times 5 = 80$ et $\mathcal{F}_{n+1}^2 + \mathcal{F}_n^2 = 8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89$, ce qui donne $39^2 + 80^2 = 89^2$, soit $1\,521 + 6\,400 = 7\,921$.

7.9 Les nombres d'Euler et les nombres de Bernoulli

Parmi les ensembles de nombres remarquables, on peut encore citer les nombres de L. Euler E_n et les nombres de J. Bernoulli B_n. On peut les définir par récurrence respectivement avec les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{2n(2n-1)}{2!}\, E_{n-1} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}\, E_{n-2} + \cdots - (-1)^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} C_{2n}^{2i} E_{n-i} \quad \text{avec } E_0 = 1; \\
B_n &= \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \Bigg[(2n-1)E_{n-1} - \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{3!}\, E_{n-2} \\
&\quad + \cdots - (-1)^n \Big] \\
&= \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} C_{2n-1}^{2i-1} E_{n-i}.
\end{aligned}$$

Les premières valeurs des E_n (après $E_0 = 1$) sont $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, $E_4 = 1\,385$, $E_5 = 50\,521$, $E_6 = 2\,702\,765, \ldots$. Elles sont toutes entières et impaires : $E_n = \mathfrak{M}2 - 1$; elles sont toutes égales à un multiple de 3 moins ou plus 1 suivant que l'indice est pair ou impair respectivement : $E_{2n} = \mathfrak{M}3 - 1$, $E_{2n+1} = \mathfrak{M}3 + 1$. Les premières valeurs des B_n sont $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, $B_4 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{1}{66}$, $B_6 = \frac{691}{2\,730}, \ldots$. Elles sont toutes fractionnaires. A propos des nombres de Bernoulli, notons la formule suivante qui donne la somme des $p^{\text{èmes}}$ puissances des nombres naturels successifs :

$$\sum_{i=1}^{n} i^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{2}\, C_p^1 B_1 n^{p-1} - \frac{1}{4}\, C_p^3 B_2 n^{p-3} + \frac{1}{6}\, C_p^5 B_3 n^{p-5} - \cdots,$$

la somme étant arrêtée à la puissance de n dont l'indice précède 0 ; en particulier, pour respectivement $p = 2, 3, 4, 5$, ceci donne

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \\
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}, \\
\sum_{i=1}^{n} i^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}, \\
\sum_{i=1}^{n} i^5 &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.
\end{aligned}$$

Nous ne nous attarderons par sur ce qui concerne ces nombres, qui interviennent dans des formules d'analyse mathématique. Notons au sujet des nombres de Bernoulli que certains auteurs utilisent d'autres définitions et notations que ci-dessus, donc avec des valeurs différentes, par exemple en les définissant par $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_{2p+1} = 0$ pour $p \geq 1$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$, $\beta_4 = -\frac{1}{30}$, $\beta_6 = \frac{1}{42}$, $\beta_8 = -\frac{1}{30}$, $\beta_{10} = \frac{5}{66}, \ldots$, et $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{42}$, $B_3 = \frac{5}{66}, \ldots$.

7.10 Généralisation de la formule du binôme de Newton

Revenons brièvement à la formule du binôme de Newton pour noter que si on prend le carré ou le cube d'une somme de trois termes au lieu de deux, c'est-à-dire de ce qu'on appelle un trinôme au lieu de ce qu'on appelle un binôme, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \quad \text{et}\\ (a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2+6abc.\end{aligned}$$

Leibniz (G. Leibniz, célèbre mathématicien et philosophe allemand, contemporain de Newton : 1646-1716) a complètement généralisé en montrant que le développement de la $m^{\text{ème}}$ puissance d'une somme de n termes, c'est-à-dire d'une expression telle que $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^m$, est formé des

$$D_n^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!} \text{ termes de la forme } \frac{m!}{p_1!p_2!\ldots p_n!}\, a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n}$$

où les p_i sont des nombres tels que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = m,$$

certains d'entre eux pouvant être nuls ; ceci est ce qu'on appelle les *partitions* (entières) n à n du nombre m, dont le nombre est D_n^m. A titre d'exemple, appliquons ceci au développement de $(a+b+c)^3$ donné ci-dessus, où a, b et c sont ici remplacés par a_1, a_2 et a_3 ; le second membre est constitué de tous les termes de la forme $a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3}$ où certains des p_i peuvent être nuls, ce qui est marqué par l'absence du a_i correspondant puisque $a^0 = 1$ quel que soit a, avec des coefficients $\frac{3!}{p_1!p_2!p_3!}$. Ces p_1, p_2, p_3 sont donnés par toutes les partitions entières possibles 3 à 3 du nombre 3, qui sont les suivantes : 3+0+0, 0+3+0, 0+0+3, 2+1+0, 2+0+1, 1+2+0, $0+2+1$, $1+0+2$, $0+1+2$, $1+1+1$. Les coefficients sont pour les trois premiers termes, $\frac{3!}{3!0!0!} = \frac{3!}{0!3!0!} = \frac{3!}{0!0!3!} = \frac{3!}{3!} = 1$ puisque $0! = 1$; pour les suivants avant le dernier, ils sont $\frac{3!}{2!1!0!} = \frac{3!}{2!0!1!} = \frac{3!}{1!2!0!} = \frac{3!}{0!2!1!} = \frac{3!}{1!0!2!} = \frac{3!}{0!1!2!} = \frac{3!}{2!} = 3$, compte tenu de ce que $0! = 1! = 1$; enfin pour le dernier terme, le coefficient est $\frac{3!}{1!1!1!} = 3! = 6$. Quant au nombre total de termes, il est bien $D_3^3 = \frac{(3+3-1)!}{(3-1)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$.

Chapitre 8

Les limites et les nombres transcendants

8.1 Les variables et les fonctions

Au début du chapitre 4, nous avons vu qu'on est amené à représenter par des nombres fractionnaires des morceaux d'objets pouvant être divisés en plusieurs parties, ces dernières constituant des portions déterminées d'objets entiers. Mais il existe des quantités qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles dans un certain intervalle. Par exemple, un thermomètre à mercure comporte une échelle graduée qui permet de voir avec une certaine approximation quelle est la longueur de la colonne de mercure et donc quelle est la température. Celle-ci varie au cours du temps ; c'est une grandeur variable. Chaque jour, elle passe d'un minimum à un maximum et vice-versa, en passant par toutes les valeurs intermédiaires ; de plus, ces variations ne sont pas identiques d'un jour à l'autre. La température à un endroit donné varie en fonction de l'heure, du jour, etc., c'est-à-dire en fonction du temps ; celui-ci est d'ailleurs aussi une variable, comme le montrent les horloges et les calendriers. Si nous le désignons par t et la température à un certain endroit par T, on écrit

$$T = f(t)$$

pour indiquer que T est fonction du temps t. Les quantités *variables* sont nombreuses ; comme autre exemple, on peut citer la distance parcourue par un mobile et bien d'autres choses encore. La température à un endroit varie de manière aléatoire et le thermomètre permet de la mesurer empiriquement. Dans les stations météorologiques, il existe des thermomètres enregistreurs, qui permettent d'obtenir une représentation graphique des variations de T en fonction du temps t ; celui-ci est porté horizontalement, en abscisse, tandis que T est porté verticale-ment, en ordonnée. Cependant, il existe beaucoup de grandeurs qui ne varient pas aléatoirement, mais qui montrent au contraire des variations bien déterminées en fonction d'une autre. C'est notamment le cas de grandeurs intervenant dans des lois physiques. Ainsi, on sait que la force électrostatique entre deux petites sphères électriquement chargées est non seulement proportionnelle au produit de leurs charges, mais aussi inversement proportionnelle au carré de la distance entre les centres de ces sphères. En théorie des nombres, il y a évidemment une infinité de grandeurs dont l'une y est *fonction* d'une autre x ; on peut alors écrire

$$y = f(x)$$

où x est appelé la *variable indépendante* et y la *variable fonction*, dont la valeur dépend de celle de x, qui est parfois appelé l'*argument* de la fonction. Par exemple, l'inverse $\frac{1}{x}$ d'un nombre x varie en fonction de ce nombre x ; c'est aussi le cas du carré x^2 du nombre x et plus généralement d'une puissance $n^{\text{ème}}$ quelconque de x. Deux nombres a et b étant des *constantes*, c'est-à-dire dont les valeurs ont été choisies indépendamment de x, avec $a \neq 0$, l'expression $ax + b$ est fonction de la valeur de x ; une telle expression est appelée *fonction linéaire* de x. Plus généralement, un polynôme du $n^{\text{ème}}$ degré en x, soit $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est une fonction de x, c'est-à-dire que c'est une variable dont la valeur dépend de celle de x ; la fonction linéaire correspond au cas où $n = 1$.

8.1.1 Les fonctions circulaires

En géométrie, il y a beaucoup de grandeurs qui sont fonctions d'autres grandeurs, par exemple de celles qui définissent la position d'un point P. C'est le cas en particulier des *fonctions circulaires* sinus et cosinus, qu'on abrège en sin et cos, qui sont définies de la manière suivante. Le point P est un point de la circonférence de centre O et sa position sur celle-ci est déterminée par la longueur α de l'arc AP ayant pour origine le point A, intersection de la circonférence avec la partie positive, c'est-à-dire vers la droite, de l'axe horizontal passant par O. Cette longueur α de l'arc est mesurée en radians, c'est-à-dire en prenant pour unité l'arc dont la longueur est égale à celle du rayon de la circonférence. Etant donné que la longueur d'une circonférence est égale à π fois son diamètre, donc 2π fois son rayon, l'arc α correspondant à un tour complet vaut 2π ; au point B correspondant au quart de la circonférence, on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$; en C correspondant à la demi-circonférence, on a $\alpha = \pi$ (ou $\alpha = -\pi$) ; en D correspondant aux trois quarts de la circonférence, on a $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ $\left(\text{ou } \alpha = -\frac{\pi}{2}\right)$.

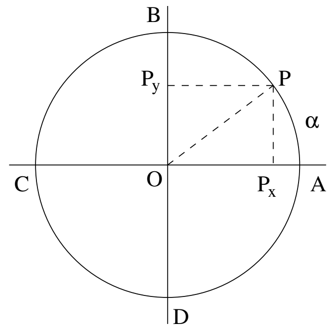


Figure 11 : Les fonctions sin et cos

Par définition, le *sinus* de l'arc α d'extrémité P ou de l'angle $\widehat{AOP}$ (pris avec son signe, c'est-à-dire orienté de OA vers OP) est la distance de P à l'axe OA, prise avec le signe + ou le signe − suivant que P est au-dessus ou en-dessous de OA. Si nous désignons par P_x la projection orthogonale de P sur OA, on a donc

$$\sin\alpha = \overline{P_xP},$$

cette longueur $\overline{P_xP}$ étant prise avec son signe : + vers le haut, − vers le bas. Si on considère le système de coordonnées (voir début du chapitre 6) formé de OA pour axe des abscisses x et OB pour axe des ordonnées y, on peut dire que $\sin\alpha$ est l'ordonnée y de P dans ce système. Si P_y est la projection orthogonale de P sur OB, on a évidemment

$$\overline{OP_y} = \overline{P_xP};$$

par conséquent, on a aussi

$$\sin\alpha = \overline{OP_y},$$

cette longueur étant aussi prise avec son signe, le sens positif étant celui de O vers B. Le *cosinus* de cet arc α d'origine A et d'extrémité P ou de l'angle orienté $\widehat{AOP}$ est la distance de P à l'axe OB, prise avec le signe + ou le signe − suivant que P est à droite ou à gauche de OB respectivement. On a donc

$$\cos\alpha = \overline{P_yP},$$

cette longueur étant prise avec le signe + ou le signe − suivant que P est à droite ou à gauche de OB. On a évidemment aussi

$$\cos\alpha = \overline{OP_x}$$

à condition toujours de prendre cette longueur avec son signe, le sens positif étant celui de O vers A. Dans le système de coordonnées évoqué ci-dessus, $\cos\alpha$ est l'abscisse de P. Si dans le triangle rectangle OP_xP ou le triangle rectangle OP_yP, on applique le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse, dont nous avons parlé vers la fin du chapitre 2, on voit facilement que

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

(notons qu'on écrit toujours $\sin^n \alpha$ pour $(\sin \alpha)^n$ et $\cos^n \alpha$ pour $(\cos \alpha)^n$). Par des considérations géométriques, on peut aussi démontrer que

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \quad \text{et} \quad \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

Des définitions, il résulte que

$$\sin 0 = 0, \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1, \qquad \sin \pi = 0, \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$$

$$\cos 0 = 1, \qquad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \qquad \cos \pi = -1, \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = 0,$$

ainsi que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$$

on peut aussi trouver que

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

8.1.2 Les fonctions périodiques

Si on ajoute 2π à α, P revient à la même position ; par conséquent, on a

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha \quad \text{et} \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha.$$

Si on répète cette opération un nombre quelconque de fois, on obtient

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha \quad \text{et} \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$$

où k est un nombre entier quelconque, positif ou négatif puisqu'on revient à la même position pour P quand on recule d'un nombre entier de 2π comme quand on avance d'un nombre entier de 2π. Une fonction $f(x)$ telle que

$$f(x + \mathcal{P}) = f(x)$$

et par conséquent

$$f(x + k\mathcal{P}) = f(x)$$

où k est entier est dite être une *fonction périodique* et $\mathcal{P}$ est appelée la *période* de cette fonction. Les fonctions sin et cos sont des fonctions périodiques de période 2π.

8.1.3 Les fonctions paires et impaires

Si on change le signe de l'arc (ou de l'angle) α, le point P passe de la position qu'il avait à la position symétrique de celle-ci par rapport à la droite OA, ce qui change le signe de $\sin\alpha$ et laisse $\cos\alpha$ inchangé. Une fonction $f(x)$ telle que

$$f(-x) = f(x)$$

est dite être une *fonction paire*, tandis qu'une fonction $f(x)$ telle que

$$f(-x) = -f(x)$$

est dite être une *fonction impaire*. Les fonctions sin et cos sont respectivement une fonction impaire et une fonction paire :

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x.$$

D'autres fonctions paires sont notamment toutes les puissances paires de la variable indépendante x, telles que x^2, $\frac{1}{x^2}$, x^4, etc., puisque $(-x)^2 = x^2$, $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$, etc. ; au contraire, les puissances impaires de la variable indépendante, telles que x, $\frac{1}{x}$, x^3, etc. sont des fonctions impaires.

Si on représente graphiquement les variations de la fonction $y = \sin x$, on obtient une courbe, appelée *sinusoïde*, qui part de $y = 0$ en $x = 0$ et oscille indéfiniment entre $y = +1$ et $y = -1$. C'est ce que montre la figure 12 ci-dessous, qui pourrait être prolongée autant qu'on veut à gauche et à droite. La fonction $y = \cos x$ donne la même courbe, mais décalée de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche puisque le premier maximum $y = 1$, qui a lieu en $x = \frac{\pi}{2}$ pour $y = \sin x$, a lieu dès $x = 0$ pour $y = \cos x$.

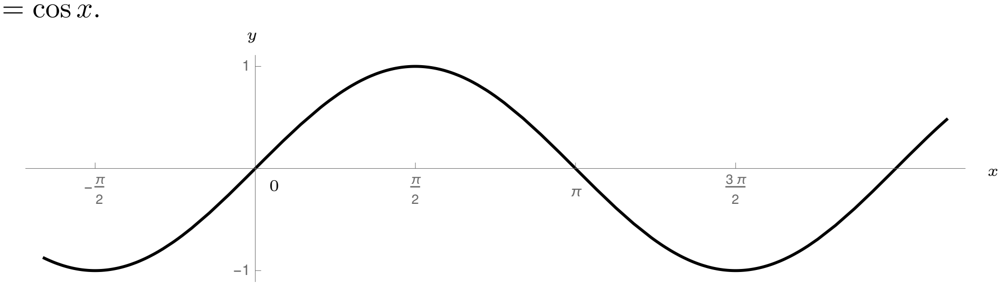


Figure 12 : Graphique de la fonction $y = \sin x$

8.1.4 Les fonctions algébriques - les fonctions transcendantes

Une fonction $y = f(x)$ dont l'expression est formée tout au plus de la combinaison d'opérations algébriques telles que des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions, des élévations à des puissances entières ou fractionnaires, est appelée *fonction algébrique*. La relation entre x et y peut alors toujours être exprimée par une équation dont chaque membre est un polynôme entier en x et en y. C'est par exemple le cas de la fonction linéaire

$$y = ax + b,$$

des puissances entières de la variable, que nous venons de considérer à propos des fonctions paires et impaires, de la fonction

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

qu'on appelle *fonction homographique*, ainsi qu'une infinité d'autres. Toutes les autres fonctions sont appelées *fonctions transcendantes* ; c'est le cas en particulier des fonctions sin et cos, ainsi que de la fonction exponentielle, c'est-à-dire une puissance dans laquelle l'exposant est la variable :

$$y = a^x.$$

8.1.5 Les fonctions inverses

Lorsqu'on écrit $y = f(x)$ pour indiquer que y est fonction de x, cela signifie qu'inversement x est fonction de y, donc qu'on peut aussi écrire

$$x = g(y).$$

La fonction g est appelée *fonction inverse* de la fonction f ; elles sont inverses l'une de l'autre. Simplement les rôles de la variable indépendante et de la variable fonction sont intervertis. On a

$$x = g[f(x)] \quad \text{et} \quad y = f[g(x)].$$

Par exemple, la fonction inverse du carré de la variable est la racine carrée, à condition de mettre + ou − devant celle-ci puisqu'en vertu de la règle des signes, $(-x)^2 = x^2$: si $y = x^2$, on a $x = \pm\sqrt{y}$. La fonction inverse d'une fonction linéaire est aussi une fonction linéaire, car de $y = ax+b$ (avec $a \neq 0$), on déduit $x = \frac{1}{a}\,y - \frac{b}{a}$.

8.1.6 Les graphiques

Il est souvent utile pour se faire une représentation d'une fonction, d'en avoir une figuration graphique. Nous en donnons quelques exemples à la figure 13. A une fonction linéaire $y = ax + b$ correspond une simple droite ; la constante b est l'ordonnée de l'intersection de cette droite avec l'axe Oy et la constante a donne ce qu'on appelle la *pente* de la droite, d'autant plus grande que l'angle fait par la droite avec Ox est proche de $\frac{\pi}{2}\cdot$ L'exemple représenté correspond à $y = 3x + 2$. Le cas particulièrement simple $y = x$ donne la droite en trait interrompu, bissectrice de l'angle xOy. Une fonction $y = ax^2$ est représentée par une parabole ayant son sommet en O et dont l'axe de symétrie coïncide avec Oy. Sur la figure, nous avons pris $a = 1$ et alors cette parabole passe par le point $x = 1$, $y = 1$ (et le point $x = -1$, $y = 1$). Le fait que cette fonction soit représentée par une courbe symétrique par rapport à Oy correspond au fait que $(-x)^2 = x^2$. La fonction inverse de celle-ci, à savoir $y = \pm\sqrt{x}$, est représentée par une parabole passant aussi par O, mais dont l'axe coïncide avec Ox. La courbe représentant une fonction et celle représentant sa fonction inverse sont toujours des courbes symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite $y = x$, dessinée en trait interrompu sur la figure 13 ; ceci résulte directement des rôles réciproques joués par x et y pour une fonction et sa fonction inverse. Il peut d'ailleurs arriver qu'une fonction soit sa propre fonction inverse ; ce sont celles pour lesquelles la courbe représentative est symétrique par rapport à la droite $y = x$. C'est le cas en particulier pour la fonction $y = x$ elle-même, ainsi que pour la fonction $y = -x$, qui est représentée par la droite passant par O et perpendiculaire à la droite $y = x$. C'est le cas aussi pour $y = \frac{a}{x}$, qui donne graphiquement une hyperbole dont les asymptotes (asymptote d'une courbe = droite telle que la distance d'un point de la courbe à cette droite tend vers 0 lorsque le point s'éloigne indéfiniment sur la courbe) sont Ox et Oy ; l'axe de symétrie de l'hyperbole est la droite $y = x$ si $a > 0$, comme sur la figure, où nous avons pris $a = 1$, ou la droite $y = -x$ si $a < 0$.

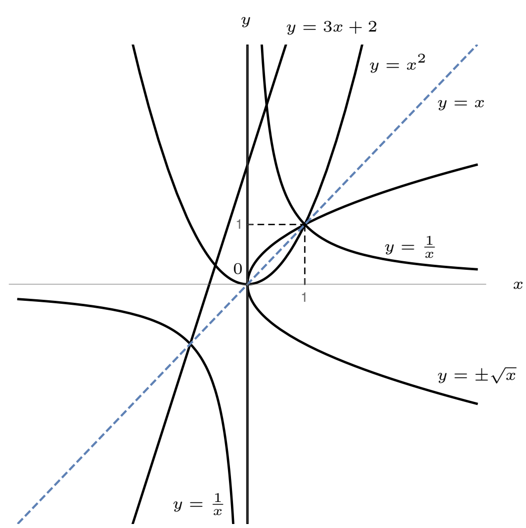


Figure 13 : Graphiques de quelques fonctions simples

8.2 Les limites

Une notion importante pour les variables est celle de *limite*. On dit qu'une variable x tend vers un nombre fini a ou qu'il a pour limite ce nombre a, lorsque la différence, en valeur absolue, entre x et a devient et reste inférieure à tout nombre positif ε arbitrairement petit, donc lorsqu'il existe une valeur de x telle que toutes les valeurs suivantes vérifient $|x-a|<\varepsilon$ quelque petit que soit ε ; on écrit alors $x \to a$ ou $\lim x = a$. Par exemple les inverses $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ des nombres naturels constituent une suite dont la valeur limite est 0 ; en effet, un nombre ε arbitrairement petit étant donné, à partir de $n > \frac{1}{\varepsilon}$, on aura $\frac{1}{n} < \varepsilon$, donc $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. C'est d'ailleurs le cas aussi des termes de la suite des opposés de ces inverses des nombres naturels $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$. Dans le premier cas, les termes tendent vers 0 par valeurs décroissantes, plus grandes que la limite 0 ; dans le second cas, ils tendent vers 0 par valeurs croissantes, inférieures à 0. Autre exemple : les rapports successifs de chaque nombre naturel au précédent $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots$ constituent une suite qui a pour limite 1 ; en effet, $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, donc $\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$, ce qui montre que $|\frac{n+1}{n} - 1| < \varepsilon$ dès que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, donc dès que $n > \frac{1}{\varepsilon}\cdot$ On peut voir que la suite des rapports successifs de chaque nombre naturel au suivant $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ a aussi pour limite 1, mais cette fois en croissant, par valeurs inférieures à 1, alors que dans le cas précédent c'était en décroissant, par valeurs supérieures à 1.

On dit qu'une variable x tend vers l'infini ou qu'elle a pour limite l'infini, qu'on représente par le signe ∞, et on écrit alors $x \to \infty$ ou $\lim x = \infty$, lorsqu'elle devient et reste supérieure à tout nombre N arbitrairement grand. C'est évidemment le cas par exemple si on donne pour valeurs à x les nombres naturels successifs. Semblablement, on écrit $x \to -\infty$ ou $\lim x = -\infty$ lorsque x devient et reste inférieur à tout nombre négatif $-N$ si grand soit-il en valeur absolue. C'est évidemment le cas en particulier pour une variable x qui prend pour valeurs successives les opposés des nombres naturels successifs.

On dit qu'une fonction $f(x)$ a pour limite ℓ quand $x \to a$, lorsqu'étant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, il existe un nombre positif δ tel qu'à condition qu'on prenne $|h| < \delta$, on ait toujours $|f(a+h) - \ell| < \varepsilon$; on écrit alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

En général, on a $\ell = f(a)$; mais il faut faire attention à certains cas exceptionnels, comme nous verrons ci-dessous, lorsque la fonction présente une discontinuité en $x = a$. Notons que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ par exemple n'est définie que pour $x \geq 0$ (en valeurs réelles) ; dans ce cas, pour la limite $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$, il faut, dans la définition que nous venons de donner, nécessairement prendre $h > 0$ et on dit alors que quand $x \to 0$, $\sqrt{x}$ admet 0 pour limite à droite de 0. Semblablement, $\sqrt{-x}$

n'étant défini que pour $x \leq 0$, $\sqrt{-x}$ admet 0 pour limite à gauche de 0, parce qu'il faut prendre $h < 0$ pour appliquer la définition. Une fonction est dite *continue* en x_0 si elle est définie au voisinage de x_0 (c'est-à-dire si elle a une valeur déterminée pour toute valeur de x comprise dans un certain intervalle comprenant x_0) et que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dans ce cas, lorsqu'on donne à x un accroissement h à partir de x_0, l'accroissement correspondant de la fonction, soit $f(x_0 + h) - f(x_0)$, tend vers 0 :

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0.$$

D'habitude, c'est le cas, mais il y a des exceptions. Souvenons-nous par exemple que le symbole $\sqrt{\ }$ désigne la racine carrée positive et que par conséquent, $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geq 0$, tandis que $\sqrt{x^2} = -x$ si $x \leq 0$; dès lors, $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = +1$ ou $= -1$ suivant que $x > 0$ ou $x < 0$ et que cette fonction admet pour $x \to 0$, la limite à droite $+1$ et la limite à gauche -1 : elle est discontinue en $x = 0$. Il en est de même pour la fonction

$$f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x},$$

qui coïncide avec la fonction $f(x) = x+1$ pour $x > 0$ et avec la fonction $f(x) = x-1$ pour $x < 0$: elle est aussi discontinue en $x = 0$. Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = x + E\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)$$

où la notation $E(\ )$ signifie “plus grand entier contenu dans” ; si $x = 0$,

$$\frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{et} \quad E(\frac{1}{1 + x^2}) = 1,$$

tandis que si $x \neq 0$, $1 + x^2 > 1$, donc $\frac{1}{1+x^2} < 1$ et

$$E(\frac{1}{1 + x^2}) = 0,$$

ce qui entraîne qu'alors la fonction se réduit à $f(x) = x$, avec $f(0 + h) = h$, qui est $\neq f(0)$, puisque $f(0) = 1$: la fonction est discontinue en $x = 0$ puisque $f(0+h)-f(0)$ ne tend pas vers 0, sa limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ est $= 0$ à droite et à gauche de $x = 0$, mais elle est dans ce cas différente de $f(0)$. Avec les notations ci-dessus, on a pour cette fonction $a = 0$ et $\ell = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$, d'où $\ell \neq f(0) = 1$. Une fonction peut aussi être discontinue pour une valeur x_0 de x parce qu'elle tend vers l'infini en x_0. On dit que la fonction $f(x)$ tend vers l'infini quand $x \to a$, lorsqu'étant donné un nombre N arbitrairement grand, il existe un nombre positif δ tel qu'à condition de prendre $|h| < \delta$ on ait toujours $f(a+h) > N$; on écrit alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

On définit de manière analogue

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

lorsque dans les mêmes conditions, on a toujours $f(a+h) < -N$ quelque grand que soit N. Notons que la fonction peut tendre respectivement vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ seulement à droite de a (lorsque $h > 0$) ou seulement à gauche de a (lorsque $h < 0$). La limite peut être différente à gauche et à droite. Par exemple, $\frac{1}{x}$ admet pour $x \to 0$ la limite $-\infty$ à gauche et la limite $+\infty$ à droite de $x = 0$. Enfin, on peut aussi définir la limite d'une fonction $f(x)$ pour $x \to +\infty$ ou pour $x \to -\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

si $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x supérieures à N quelque grand que soit ce nombre ; on peut aussi avoir par exemple $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

On démontre des théorèmes suivant lesquels la limite de la somme, de la différence, du produit ou du quotient de deux fonctions $u(x)$ et $v(x)$ est en général respectivement la somme, la différence, le produit, le quotient des limites de ces deux fonctions, par exemple

$$\lim[(u(x) + v(x)] = \lim u(x) + \lim v(x), \text{ etc.}$$

Il y a néanmoins des cas exceptionnels auxquels il faut prêter attention. Si par exemple $u(x) = x^2$ et $v(x) = x$, le théorème général indique que

$$\lim(x^2 - x) = \lim x^2 - \lim x;$$

or on a

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \infty} x = \infty,$$

si bien que $\lim_{x \to \infty}(x^2 - x)$ prend la forme $\infty - \infty$, ce qui est une forme indéterminée puisque quand on ajoute n'importe quoi à ∞, on obtient encore ∞. Mais quand $x \to \infty$, x^2 tend plus vite vers ∞ que x, de sorte que la différence $x^2 - x$ tend vers $+\infty$, comme on peut d'ailleurs s'en rendre compte à la figure 13 où on voit que l'écart entre la droite représentant $y = x$ et la parabole représentant $y = x^2$ croît indéfiniment quand $x \to \infty$; on peut donc écrire

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x) = +\infty.$$

Ceci peut d'ailleurs être démontré comme suit : on a $x^2 - x = x(x-1)$, ce qui tend vers $+\infty$ puisque x et $x-1$ tendent tous deux vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$. Une autre forme indéterminée est $\frac{0}{0}$: en regardant le dividende, on pense que le quotient doit être 0, tandis qu'en regardant le diviseur, on pense que le quotient est ∞ ; par définition, ce quotient q doit être tel que si on le multiplie par le diviseur, qui est 0, on doit obtenir le dividende, qui est aussi 0 ; or cela est vrai quel que soit q puisque pour toute valeur finie de q, on a $q \times 0 = 0$. Soit par exemple à trouver la valeur de $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$ pour $x = 2$. En faisant $x = 2$ dans $x^2 - 5x + 6$, on trouve 0 et il en est de même pour $x^2 - 6x + 8$, de sorte que $f(2)$ prend la forme $\frac{0}{0}$. Mais on peut voir que $\lim_{x \to 2} f(x) = 0{,}5$. En effet, avec un écart de 0,1 par rapport à $x = 2$, on a $f(1{,}9) \simeq 0{,}523\,8$ et $f(2{,}1) \simeq 0{,}473\,7$; si on réduit l'écart à 0,01, on obtient $f(1{,}99) \simeq 0{,}502\,5$ et $f(2{,}01) \simeq 0{,}497\,5$; plus près encore de $x = 2$, il vient $f(1{,}999) \simeq 0{,}500\,25$ et $f(2,001) \simeq 0{,}499\,75$, etc. En fait, on peut lever l'indétermination comme suit. On a $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ comme on peut le vérifier en faisant le produit terme à terme des deux facteurs du second membre et ce qu'on obtient en cherchant, par la formule donnée au chapitre 6, les racines de l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$, qui sont 2 et 3 ; comme on peut semblablement le voir, on a aussi $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Par conséquent, $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$, ce qu'on peut simplifier pas $x - 2$ (qui est $\neq 0$ si $x \neq 2$) et on obtient $f(x) = \frac{x-3}{x-4}$ tant que $x \neq 2$ et $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{2-3}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Un autre exemple de limite conduisant à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ est la limite de $\frac{\sin x}{x}$ pour $x \to 0$. On peut démontrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

comme on le voit d'ailleurs en se reportant à la figure 11 : si on fait tendre le point P vers A, la longueur de l'arc AP, soit x (que nous avions appelé α), et celle du segment P_xP qui définit $\sin x$, tendent à devenir des infiniment petits égaux, à la limite. Ce résultat est aussi en accord avec le fait que la courbe représentant graphiquement la fonction $y = \sin x$ (figure 12) a pour tangente en $x = 0$ une droite qui a pour pente 1, soit la même que celle de la droite représentant la fonction $y = x$, avec laquelle cette tangente coïncide.

A côté des formes indéterminées $\infty - \infty$ et $\frac{0}{0}$, pour chacune desquelles nous venons de voir un exemple avec le moyen de lever l'indétermination, il y en a d'autres, notamment $\frac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$, pour lesquelles on peut aussi donner des exemples, avec éventuellement le moyen de lever l'indétermination.

8.3 Les nombres transcendants

Comme forme indéterminée, on a aussi 1^∞. En effet, autant de fois qu'on multiplie 1 par lui-même, on reste toujours à la valeur 1, mais la fonction exponentielle a^x, à laquelle nous avons fait allusion plus haut comme exemple de fonction transcendante ainsi que $\sin x$ et $\cos x$, est telle qu'elle tend vers ∞ lorsque $x \to \infty$ si a est tant soit peu supérieur à 1 (et tend au contraire vers 0 pour $x \to \infty$ lorsque $0 < a < 1$). Quand on a à la fois $a \to 1$ par valeurs > 1 et $x \to \infty$, dans a^x, on a une indétermination à examiner dans chaque cas. En particulier, considérons $(1 + \frac{1}{m})^m$ et faisons $m \to \infty$, ce qui entraîne $1 + \frac{1}{m} \to 1$. D'après la formule du binôme de Newton vue au chapitre 7, dans laquelle on fait $a = 1$ et $b = \frac{1}{m}$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i \frac{1}{m^i}$$

ou si on introduit pour C_m^i une expression donnée aussi au chapitre 7

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= \sum_{i=0}^{m} \frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{i!} \frac{1}{m^i} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \frac{m}{m} \frac{m-1}{m} \dots \frac{m-i+1}{m} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} 1 \left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{i-1}{m}\right).
\end{aligned}$$

En passant à la limite pour $m \to \infty$, on peut vérifier que

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

et cela d'ailleurs que m soit entier ou non. Cette somme des inverses des factorielles des nombres entiers de 0 à l'∞ (rappelons que $0! = 1$) est un nombre qu'on désigne par la lettre e (prononcée é) :

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Sa valeur approchée est $e \simeq 2{,}718\,281\,828\,459$. C'est un *nombre transcendant*, c'est-à-dire un nombre qui n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers (ni à coefficients fractionnaires, comme nous avons vu au chapitre 6, puisqu'une telle équation peut être ramenée à une équation à coefficients entiers si on multiplie tous ses coefficients par le p.p.c.m. des dénominateurs de ces coefficients fractionnaires). Cette nature transcendante du nombre e a été démontrée en 1872 par Hermite (Ch. Hermite, mathématicien français, 1822-1901). C'est en s'en inspirant que Lindemann (F. von Lindemann, mathématicien allemand, 1852-1939) a pu enfin démontrer en 1882 que le nombre π, connu dès l'Antiquité, comme nous avons vu au chapitre 6, est également un nombre transcendant. Grâce à cela, il était définitivement démontré que le trop fameux problème géométrique de la quadrature du cercle est insoluble, car il est impossible avec des instruments tels que la règle et le compas de résoudre un problème à la base duquel se trouve un nombre transcendant. Ce nombre π était lui aussi défini à partir d'un passage à la limite : la circonférence était considérée comme la limite du périmètre d'un polygone régulier inscrit au cercle, c'est-à-dire dont les sommets sont sur le cercle, ou la limite du périmètre d'un polygone régulier circonscrit au cercle, c'est-à-dire dont les côtés sont tangents au cercle, lorsqu'on fait tendre vers l'infini le nombre de côtés. Comme nous l'avons fait au chapitre 6 pour π, donnons le développement de e en fraction continue : $e = (2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8 ,1, \ldots)$. Cette fraction continue est nécessairement non périodique puisque e est transcendant, mais en généralisant la notation que nous avons utilisée pour les fractions continues périodiques, on peut écrire $e = (2\,;\, 1,\, 2i,\, 1\,;)$ avec $i = 1, 2, 3, \ldots$. Les premières réduites sont : 2, 3, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{87}{32}$, $\frac{106}{39}$, $\frac{193}{71}$ [1], $\frac{1\,264}{465}$, $\frac{1\,457}{536}$, $\frac{2\,721}{1\,001}$ [2], $\frac{23\,225}{8\,544}$, $\frac{25\,946}{9\,545}$, $\frac{49\,171}{18\,089}$ [3], $\frac{517\,656}{190\,435}$, $\frac{566\,827}{208\,524}$, $\frac{1\,084\,483}{398\,959}$ [4], ... En généralisant la notion de fraction continue et en introduisant la notation $\frac{\;|}{|\;}$ pour représenter les barres de fractions successives et ainsi éviter les échafaudages dans l'écriture, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
e &= 1 + \frac{1|}{|1-}\frac{1|}{|2+}\frac{1|}{|3-}\frac{1|}{|2+}\frac{1|}{|5-}\frac{1|}{|2+}\cdots\frac{1|}{|2n-1-}\frac{1|}{|2+}\cdots,\\
e &= 2 + \frac{2|}{|2+}\frac{3|}{|3+}\frac{4|}{|4+}\frac{5|}{|5+}\frac{6|}{|6+}\cdots\frac{n|}{|n+}\cdots,\\
e &= 2 + \frac{1|}{|1+}\frac{1|}{|2+}\frac{2|}{|3+}\frac{3|}{|4+}\cdots\frac{n-1|}{|n+}\cdots.
\end{aligned}$$

En raison de l'importance de ce nombre e, indiquons encore quelques valeurs numériques approchées qui y sont relatives : $e^2 \simeq 7{,}389\,056$ [on a $e^2 = (7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, 6, 1, 16, \ldots)$], $e^3 \simeq 20{,}085\,537$, $\frac{1}{e} \simeq 0{,}367\,879$, $\frac{1}{e^2} \simeq$

1. (ce qui donne déjà une bonne approximation puisque $\frac{193}{71} - e < 3 \times 10^{-5}$)
2. (et on a déjà $e - \frac{2\,721}{1\,001} \simeq 10^{-7}$)
3. (avec $\frac{49\,171}{18\,089} - e < 3 \times 10^{-10}$)
4. (avec $e - \frac{1\,084\,483}{398\,959} < 5 \times 10^{-13}$)

0,135 335, $\sqrt{e} \simeq 1{,}648\,721$, $\sqrt[3]{e} \simeq 1{,}395\,612$ [on a avec la notation ci-dessus analogue à celle des fractions continues périodiques, $\sqrt{e} = (;1,\ 4i+1,\ 1;)$ avec $i = 0$, 1, 2, ..., donc $\sqrt{e} = (1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13, 1, \ldots)$, $\sqrt[3]{e} = (;1,\ 6i+2,\ 1;)$ avec $i = 0, 1, 2, \ldots$ et plus généralement pour tout entier $n > 1$, $\sqrt[n]{e} = (;1,\ 2ni+n-1,\ 1;)$ avec $i = 0, 1, 2, \ldots$]; $e^e \simeq 15{,}154\,262$, $e^\pi \simeq 23{,}140\,693$ [on a $e^\pi = (23, 7, 9, 3, 1, 1, \ldots)$ avec pour réduites 23, $\frac{162}{7}$ (avec $\frac{162}{7} - e^\pi < 3 \cdot 10^{-3}$), ..., $\frac{10\,691}{462}$ (avec $\frac{10\,691}{462} - e^\pi < 8 \cdot 10^{-9}$)], $e^{2\pi} \simeq 535{,}491\,656$, $e^{\frac{\pi}{2}} \simeq 4{,}810\,477$, $e^{\frac{\pi}{3}} \simeq 2{,}849\,654$, $e^{\frac{\pi}{4}} \simeq 2{,}193\,280$, $e^{\frac{\pi}{5}} \simeq 1{,}874\,456$; enfin, bien que la notion de logarithme ne soit donnée qu'au chapitre suivant, donnons encore les valeurs suivantes pour des logarithmes décimaux (base 10) et népériens (base e) : $\log_{10} e \simeq 0{,}434\,294\,482$ (et $\log_e e = 1$ par définition), $\log_{10}(e+1) \simeq 0{,}570\,342$, $\log_e(e+1) \simeq 1{,}313\,262$, $\log_{10}(e-1) \simeq 0{,}235\,094$, $\log_e(e-1) \simeq 0{,}541\,325$. Notons aussi que $\frac{e+1}{e-1} \simeq 2{,}163\,953$ est égal à une fraction continue dont les quotients incomplets sont les doubles des nombres impairs successifs : $\frac{e+1}{e-1} = (2, 6, 10, 14, \ldots) = (;2(2i+1);)$ avec $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$. A propos de la limite

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

par laquelle nous avons été conduits au nombre e, signalons qu'on peut en déduire

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^m = \frac{1}{e},$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{k}{m}\right)^m &= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{km} = e^k,\\ \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{k}{m}\right)^m &= \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{km} = \frac{1}{e^k}\end{aligned}$$

et

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^m = \frac{1}{e^2},$$

entre autres.

8.4 La proportionnalité

A la fin du chapitre 4, nous avons introduit les notions de rapports et de proportions. Comme nous avons dit, ces notions s'appliquent à toutes les catégories de nombres ; nous aurions donc sans doute dû plus logiquement ne les introduire qu'ici, maintenant que nous avons introduit les autres catégories de nombres, jusqu'aux nombres transcendants, alors qu'au chapitre 4 nous ne l'avions encore fait que pour les nombres naturels et les nombres fractionnaires. Nous allons ici reprendre la notion de proportion pour définir celle de proportionnalité. Soient des nombres x et y pouvant prendre des valeurs dépendant d'un indice discret i : x_i, y_i, ou d'un paramètre t : $x(t)$, $y(t)$, celui-ci pouvant d'ailleurs être l'un de ces nombres, par exemple x si y est fonction de x : x, $y(x)$. Ces nombres x et y (ou éventuellement des grandeurs dont ces nombres sont les mesures) sont dits être *directement proportionnels*, où on sous-entend souvent "directement", si on a respectivement

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{y_i}{y_j}, \quad \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{y(t_1)}{y(t_2)}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y(x_1)}{y(x_2)}$$

quelles que soient respectivement les valeurs i et j de l'indice, les valeurs t_1 et t_2 du paramètre ou les valeurs x_1 et x_2 de la variable. Le rapport de ces deux nombres est alors constant, indépendant de i, de t ou de x : $\frac{y_i}{x_i} = q$ quelle que soit la valeur de i, $\frac{y(t)}{x(t)} = q$ quelle que soit la valeur de t, $\frac{y(x)}{x} = q$ quelle que soit la valeur de x ; cette constante q est appelée *coefficient de proportionnalité* de y par rapport à x (s'il s'agit de grandeurs physiques, dont x et y sont les mesures respectives, q dépend des unités de mesures adoptées, sauf s'il s'agit de grandeurs de même nature telles que deux forces par exemple, alors mesurées avec une même unité). La loi générale de la proportionnalité directe entre x et y s'écrit $y = q \cdot x$. Au contraire, les nombres x et y (ou les grandeurs physiques dont ils sont les mesures) sont dits *inversement proportionnels* si on a

$$\frac{x_i}{x_j} = \frac{y_j}{y_i}, \quad \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{y(t_2)}{y(t_1)} \quad \text{ou} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y(x_2)}{y(x_1)}$$

quelles que soient respectivement les deux valeurs de l'indice, du paramètre ou de la variable. Ce qui est cette fois constant, c'est le produit de x et y :

$$x_i \cdot y_i = p, \quad x(t) \cdot y(t) = p, \quad x \cdot y(x) = p$$

quelle que soit respectivement la valeur de i, de t ou de x. La loi générale de la proportionnalité inverse entre x et y peut s'écrire $y = \frac{p}{x}\cdot$ Si y est inversement proportionnel à x, il est directement proportionnel à son inverse $\frac{1}{x}$, avec p pour coefficient de proportionnalité.

On peut partager une somme S en parties y_1, y_2, …, y_n respectivement proportionnelles à a_1, a_2, …, a_n en appliquant la formule

$$y_i = \frac{a_i \cdot S}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n.$$

On peut la partager en parties inversement proportionnelles à a_1, a_2, …, a_n grâce à la formule

$$y_i = \frac{S}{a_i\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)} \quad \text{avec } i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

8.5 Les séries

8.5.1 Exemples de séries

Nous allons maintenant voir des séries, comme nous en avons vu une lors de la définition du nombre e, celle des inverses des factorielles. On appelle *série* la somme (somme algébrique, c'est-à-dire avec éventuellement des signes $-$ aussi bien que des signes $+$) de l'infinité de termes constituant une suite illimitée et pour qu'on ait l'éventuelle possibilité d'obtenir une somme finie, il est entendu que les termes successifs tendent vers 0. Ceci est effectivement le cas pour la suite des inverses des factorielles des nombres entiers successifs à partir de $0! = 1$: c'est la série

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

par laquelle nous avons défini le nombre e. Comme nous venons de l'évoquer, le fait que les termes successifs tendent vers 0 est évidemment une condition nécessaire pour que la somme soit finie, mais ce n'est pas une condition suffisante. Ainsi, la somme des inverses des nombres naturels, qu'on appelle la *série harmonique*,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

est une somme infinie, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \infty,$$

bien que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{i} = 0.$$

Par contre, la somme des inverses des carrés des nombres naturels

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

est finie : on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Lorsque la série a, comme celle-ci, une valeur finie, elle est dite être *convergente* ; dans le cas contraire, comme la série harmonique, elle est dite être *divergente*. La série dont les termes sont les inverses des nombres pairs

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots.$$

est évidemment divergente, puisque chacun de ses termes est simplement la moitié de ceux de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\cdot$ On voit facilement qu'il en est de même de celle dont les termes sont les inverses des nombres impairs

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots.$$

D'après ce que nous verrons au chapitre 9, la série harmonique tend vers l'infini comme le logarithme népérien (= logarithme de base e : voir chapitre 9), c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{\log_e n} = 1;$$

en effet la différence entre les deux tend vers une valeur finie, la constante γ , appelée la *constante d'Euler* :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log_e n \right) = \gamma \simeq 0{,}577\,215\,665.$$

La série harmonique alternée est au contraire convergente : on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log_e 2 \simeq 0{,}693\,147.$$

Il en est de même pour la série alternée construite avec les inverses des nombres impairs :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\cdot$$

Toutes les séries $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$ pour lesquelles n est un entier > 1 sont convergentes, comme nous avons vu ci-dessus pour $n = 2$, qui donnait $\frac{\pi^2}{6}\cdot$ On pose

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots = \zeta(n),$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^n} &= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\,\zeta(n),\\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n} &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots = \frac{1}{2^n}\,\zeta(n)\end{aligned}$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^n} = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots = \frac{2^n - 1}{2^n}\,\zeta(n).$$

Cette fonction désignée par la lettre grecque ζ, qui se prononce dzêta, est appelée *fonction de Riemann* (R. Riemann, mathématicien allemand, 1826-1866). Signalons que cette fonction est liée aux nombres premiers ; elle est égale à un produit d'une infinité de fractions portant sur les nombres premiers successifs :

$$\zeta(n) = \prod_{\substack{p=2\\ \text{premier}}}^{\infty} \frac{p^n}{p^n - 1} = \frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{3^n}{3^n-1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdots.$$

En plus des séries données ci-dessus, notamment

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

citons aussi les suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^2} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12},\\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\end{aligned}$$

et plus généralement

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{2n}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots = \zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_n \pi^{2n}}{(2n)!}$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli cités vers la fin du chapitre 7,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^4} &= 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{7\pi^4}{720}, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^2} &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{24}, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^2} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} &= 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots \\
&= \text{une constante qu'on appelle } \textit{constante de Catalan} \\
& \text{(Eug. Catalan, mathématicien franco-belge, 1814-1894)} \\
&\simeq 0{,}915\,965\,594
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^3} &= 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^4} &= 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}
\end{aligned}$$

et on a plus généralement

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2n}} = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \cdots = \frac{B_n(4^n-1)\pi^{2n}}{2(2n)!}$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^{2n+1}} = 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \cdots = \frac{E_n\pi^{2n-1}}{4^{n+1}(2n)!}$$

où les B_n et les E_n sont les nombres de Bernoulli et les nombres d'Euler donnés vers la fin du chapitre 7. Parmi les séries que nous venons de voir, il y en a où figurent les puissances des inverses des nombres impairs ; celles où figurent les inverses des puissances des nombres pairs se déduisent évidemment des séries où figurent les inverses des puissances de tous les nombres naturels par des formules telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}.$$

Notons aussi que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1,$$

alors que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)2i} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots = \log_e 2,$$

on a de plus

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2},$$

alors que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4i-3)(4i-1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \cdots = \frac{\pi}{8};$$

on a encore

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots = \frac{1}{4}.$$

Avec les notations des factorielles doubles, considérées vers la fin du chapitre 5, et en se souvenant, pour le premier terme, que nous avions $(-1)!! = 1$, on peut encore écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} &= 1 - \frac{1!!}{2!!} + \frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!} + \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i-i)!!}{2^i (2i)!!} &= 1 + \frac{1!!}{2 \cdot 2!!} + \frac{3!!}{2^2 \cdot 4!!} + \frac{5!!}{2^3 \cdot 6!!} + \cdots = \sqrt{2}, \\
\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{(2i+2)!!} &= \frac{1}{2!!} - \frac{1!!}{4!!} + \frac{3!!}{6!!} - \frac{5!!}{8!!} + \cdots = \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

On peut aussi considérer des cas plus compliqués où par exemple on change de signe d'un terme au suivant seulement une fois sur deux :

$$1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \cdots = \frac{\sqrt{2}\pi^2}{16}.$$

Anticipons un peu sur le prochain chapitre où nous verrons qu'on appelle *progressions géométriques* des suites de nombres telles que chacun des termes est égal au précédent multiplié par un nombre constant q appelé *raison.* Ces suites peuvent être prolongées jusqu'à avoir un nombre infini de termes ; si dans ce cas on a $0 < q < 1$, les termes tendent vers 0 et on obtient une série en faisant la somme des termes d'une telle suite illimitée. Nous verrons que si a_1 et a_n sont le premier et le $n^{\text{ème}}$ termes d'une telle suite, la somme de tous les termes vaut $\frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q}$; donc puisque $a_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ dans le cas présent où $0 < q < 1$, la série sera égale à $\frac{a_1}{1-q}\cdot$ En particulier, si $a_1 = 1$ (d'où $a_i = q^{i-1}$, car $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$), on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

(pour le premier terme, ne pas oublier que $q^0 = 1$ quel que soit q). Par exemple, avec $q = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{3}$, on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{3}{2};$$

plus généralement, avec $q = \frac{1}{n}$, on trouve

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^i} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \cdots = \frac{n}{n-1}\cdot$$

A ces résultats, se rattachent encore les suivants :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{2^i} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{2}{3}, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots = 2, \\
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{3^i} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots = \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{i}{2^i} &= \frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\cdots=\frac{2}{9}, \\
\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{i}{3^i} &= \frac{1}{3}-\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}-\frac{4}{3^4}+\cdots=\frac{3}{16}, \\
\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i-1}{2^i} &= \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots=3, \\
\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i-1}{3^i} &= \frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\frac{7}{3^4}+\cdots=1, \\
\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{2i-1}{2^i} &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\frac{7}{2^4}+\cdots=\frac{1}{9}, \\
\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{2i-1}{3^i} &= \frac{1}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}-\frac{7}{3^4}+\cdots=\frac{1}{8};
\end{aligned}$$

plus généralement, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{a^i} &= \frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\frac{4}{a^4}+\cdots=\frac{a}{(a-1)^2}, \\
\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{i}{a^i} &= \frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\cdots=\frac{a}{(a+1)^2}, \\
\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i-1}{a^i} &= \frac{1}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{5}{a^3}+\frac{7}{a^4}+\cdots=\frac{a+1}{(a-1)^2}, \\
\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{2i-1}{a^i} &= \frac{1}{a}-\frac{3}{a^2}+\frac{5}{a^3}-\frac{7}{a^4}+\cdots=\frac{a-1}{(a+1)^2},
\end{aligned}$$

chaque fois à condition que $a > 1$. Ajoutons qu'on a aussi

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^2}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\frac{16}{16}+\frac{25}{32}+\cdots=6$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i-1)^2}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{9}{4}+\frac{25}{8}+\frac{49}{16}+\frac{81}{32}+\cdots=17;$$

il est à noter que dans ces séries-ci, les termes commencent par augmenter avant de diminuer ensuite pour tendre vers 0.

Revenons à la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

par laquelle nous avons défini le nombre e. Nous pouvons lui associer les séries suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!} &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \frac{1}{e}, \\
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} &= 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots = e^2, \\
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i! 2^i} &= 1 + \frac{1}{1!2} + \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{3!2^3} + \cdots = \sqrt{e}
\end{aligned}$$

et en utilisant la notation des factorielles doubles introduites vers la fin du chapitre 5, pour lesquelles on a $(2n)!! = n! \cdot 2^n$, on peut écrire ceci comme suit :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!!} = 1 + \frac{1}{2!!} + \frac{1}{4!!} + \frac{1}{6!!} + \cdots = \sqrt{e},$$

et on a aussi, avec cette notation,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!!} &= 1 - \frac{1}{2!!} + \frac{1}{4!!} - \frac{1}{6!!} + \cdots = \frac{1}{\sqrt{e}}; \\
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} &= 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots = \frac{e^2+1}{2e}, \\
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \cdots = \frac{e^2-1}{2e}, \\
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots = \cos 1 \simeq 0{,}540\,302, \\
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7} + \cdots = \sin 1 \simeq 0{,}841\,471;
\end{aligned}$$

concernant les valeurs de ces deux dernières séries, signalons, ce que nous n'avons pas fait plus haut lorsque nous avons défini le sinus et le cosinus, que l'arc d'1 radian ou de l'angle correspondant est approximativement donné en degrés, minutes et secondes par 1 radian $\simeq 57^\circ\ 17'\ 45''$. Enfin, notons encore que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} + \cdots = 1.$$

On voit que la valeur d'une série peut être un nombre rationnel, parfois même un nombre entier, ou un nombre irrationnel, soit un nombre irrationnel algébrique comme $\sqrt{2}$, soit un nombre irrationnel transcendant dans l'expression duquel peut figurer par exemple le nombre π ou le nombre e.

8.5.2 Les développements des fonctions en séries de puissances

Une fonction d'une variable x peut être développée en série, particulièrement en une série de puissances, c'est-à-dire être égalée à une série dans les termes de laquelle figurent les puissances entières successives de x. Commençons par la fonction exponentielle a^x considérée dans le cas particulier où $a = e$; quand on parle de fonction exponentielle, sans préciser, on sous-entend d'ailleurs généralement que c'est la fonction e^x : on peut dire que e^x est la fonction exponentielle au sens étroit de cette expression. On démontre que son développement en série est donné par

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}\cdot$$

Quand on y fait $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$, on retrouve d'ailleurs des séries données ci-dessus, dont les valeurs sont respectivement e^2 et $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$. Si on remplace x par $-x$, il vient

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!}\cdot$$

En faisant $x = 1$ dans ce développement de e^{-x}, on retrouve aussi une série donnée ci-dessus, dont la valeur est $\frac{1}{e} = e^{-1}$. En faisant la demi-somme et la demi-différence des développements que nous venons d'écrire, on trouve les développements des fonctions $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ qui sont appelées respectivement *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* ; on les désigne par $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$. Elles présentent des propriétés rappelant celles de $\cos x$ et $\sin x$, par exemple $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, qui rappelle $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Leurs développements en série sont

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

et

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

On peut citer ici le développement suivant :

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{B_2}{2!}\, x^2 + \frac{B_3}{3!}\, x^3 + \cdots + \frac{B_n}{n!}\, x^n + \cdots$$

où les B_i sont les nombres de Bernoulli évoqués vers la fin du chapitre 7, ainsi que

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta_i x^i}{i!}$$

avec l'autre définition des nombres de Bernoulli. Passons aux fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$ qu'on appelle aussi *fonctions goniométriques*, du grec gônia qui signifie angle, ou *fonctions trigonométriques*, car elles sont à la base de la trigonométrie. Leurs développements en série sont les suivants :

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}.$$

Il est normal qu'on n'ait que des puissances impaires pour $\sin x$, puisque ce sont, comme $\sin x$, des fonctions impaires, c'est-à-dire

$$(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1},$$

et que des puissances paires pour $\cos x$, puisque ce sont, comme $\cos x$, des fonctions paires, c'est-à-dire

$$(-x)^{2n} = +x^{2n},$$

y compris la puissance 0, qui donne $x^0 = 1$. Quand on prend $x = 1$, on trouve des résultats donnés ci-avant. Notons que si on divise membre à membre par x la formule donnant le développement en série de $\sin x$, on obtient

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots;$$

ceci est en parfait accord avec le résultat donné plus haut suivant lequel

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nous venons de voir les développements en séries de fonctions transcendantes telles que e^x, $\sin x$ et $\cos x$; mais on peut bien sûr aussi développer en séries des fonctions algébriques, sauf évidemment un simple polynôme (chapitre 6) $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_nx + a_{n+1}$ puisqu'alors la somme est limitée à la $n^{\text{ème}}$ puissance de x si n est le degré du polynôme et ne se met donc pas sous forme d'une série, c'est-à-dire d'une somme illimitée des puissances de x. On peut par exemple chercher le développement en série de la fonction algébrique $(1+x)^a$ avec une valeur quelconque de l'exposant a. On trouve

$$\begin{aligned}(1+x)^a &= 1 + \frac{a}{1!}\,x + \frac{a(a-1)}{2!}\,x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}\,x^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{a(a-1)\ldots(a-i+1)}{i!}\,x^i + \cdots\end{aligned}$$

à condition que $-1 < x \leq +1$. Notons que si a est égal à un nombre entier n, tous les termes au-delà du $(n+1)^{\text{ème}}$, c'est-à-dire au-delà du terme en x^n, sont nuls ; on est alors ramené au cas d'un simple polynôme et on retrouve en fait la formule du “binôme de Newton”, vue au chapitre 7, dans le cas où les termes a et b du binôme sont 1 et x :

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i.$$

(se souvenir que, suivant une formule du chapitre 7, on a $C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$). Si on prend $a = \frac{1}{2}$ dans le développement en série de $(1+x)^a$, on obtient celui de $\sqrt{1+x}$, toujours sous la condition que $-1 < x \leq 1$; mais le calcul des coefficients est dans ce cas plus compliqué et si vous avez la patience de le faire, vous trouverez, après simplifications, le résultat suivant pour les premiers termes de ce développement :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots,$$

le terme général étant, avant simplifications, $\frac{(-1)^{i-1}(2i-3)!!}{(2i)!!}\,x^i$. On peut en déduire la différence entre les racines carrées de deux nombres > 1 différant l'un de l'autre d'1 unité, comme celles de deux nombres naturels successifs ; on fait pour cela $x = \frac{1}{n}$ où $n > 1$, on soustrait 1 membre à membre , puis on multiplie membre à membre par $\sqrt{n}$, il vient :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{8n^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{16n^{\frac{5}{2}}} - \frac{5}{128n^{\frac{7}{2}}} + \cdots,$$

ce qui entraîne $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ (ceci pouvant se déduire plus facilement, il est vrai, de la relation $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ qui découle de l'identité $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ quand on y fait $a=\sqrt{n+1}$ et $b=\sqrt{n}$).

8.5.3 Les développements en séries trigonométriques

Nous avons donné ci-avant les développements de $\sin x$ et de $\cos x$ en séries de puissances de x ; inversement, on peut trouver ce qu'on appelle des développements en séries trigonométriques pour des fonctions telles que des puissances de x entre autres. Une *série trigonométrique* est une somme illimitée de la forme $b_0+a_1\sin x+b_1\cos x+a_2\sin 2x+b_2\cos 2x+\cdots+a_i\sin ix+b_i\cos ix+\cdots$, dont les termes contiennent les sinus et les cosinus des multiples de la variable, mais où le terme $a_o\sin(0\cdot x)$ est nul puisque $\sin 0=0$ et où le terme $b_0\cos(0\cdot x)$ se réduit à la constante b_0 puisque $\cos 0=1$. Une série trigonométrique est évidemment périodique de période 2π, alors que la fonction $f(x)$ qu'on choisit de développer en série trigonométrique ne l'est généralement pas ; aussi, son développement en série trigonométrique n'est-il alors valable que dans un intervalle de 2π et pour cela on prend en général $-\pi<x<+\pi$. On trouve par exemple

$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots,$$

pour $-\pi<x<+\pi$, uniquement avec des termes en sin (tous les b_i sont $=0$) puisque $\frac{x}{2}$ est une fonction impaire, comme les sin, tandis qu'on trouve

$$\frac{x^2}{4}=\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots$$

pour $-\pi<x<+\pi$, avec seulement le terme constant et les termes en cos (tous les a_i sont $=0$) puisque $\frac{x^2}{4}$ est une fonction paire, comme les cos.

8.6 Les produits infinis

De même qu'il existe d'innombrables séries, c'est-à-dire de sommes d'infinités de termes qui peuvent éventuellement avoir une valeur finie si les termes tendent vers 0, il existe aussi d'innombrables produits d'infinités de facteurs qui peuvent éventuellement avoir une valeur finie lorsque ces facteurs tendent vers 1. Le signe $\prod$ sera alors utilisé au lieu du signe $\sum$. La condition de convergence, condition nécessaire mais pas toujours suffisante, qui était pour les séries que les termes tendent vers 0, est ici remplacée par la condition que les facteurs tendent vers 1. L'exemple sans doute le plus célèbre de ces produits infinis convergents est donné par la *formule de Wallis* (J. Wallis, mathématicien anglais, 1616-1703) qui peut s'écrire :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(2i)^2}{(2i-1)(2i+1)}\cdot$$

Nous en verrons d'autres exemples à l'extrême fin du chapitre 10. On en connaît toutefois beaucoup moins que des séries, car ils ont été beaucoup moins étudiés. On peut aussi obtenir des développements de fonctions en produits infinis, mais évidemment pas des développements en produits de puissances, comme on avait des développements en séries de puissances, puisque les produits de puissances sont simplement des puissances d'indices supérieurs. On peut avoir par exemple des développements en produits de cosinus, à condition que l'argument du cosinus tende vers 0 puisque $\cos 0 = 1$. Citons notamment la formule

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{i=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^i},$$

qui s'obtient en faisant $n \to \infty$ dans la formule

$$\prod_{i=1}^{n} \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^n \sin \dfrac{x}{2^n}}\cdot$$

Cette dernière peut être démontrée par récurrence, c'est-à-dire de proche en proche : ceci consiste, comme nous avons déjà vu dans d'autres cas, à constater qu'elle est vraie pour $n = 1$ et que si elle est vraie pour $n - 1$, elle l'est aussi pour n. On utilise la formule $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$, obtenue en faisant $b = a$ dans celle donnant $\sin(a + b)$, que nous avons citée après avoir défini les fonctions sin et cos. Si nous partons de la formule écrite pour $n - 1$, soit

$$\prod_{i=1}^{n-1} \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{2^{n-1} \sin \dfrac{x}{2^{n-1}}}$$

et que nous multiplions membre à membre par $\cos \frac{x}{2^n}$, qui d'après la formule que nous venons d'écrire où on prend $a = \frac{x}{2^n}$, vaut $\frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}}$, le premier membre devient bien $\prod_{i=1}^{n} \cos \frac{x}{2^i}$, tandis que le second donne bien, après simplification par $\sin \frac{x}{2^{n-1}}$, $\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}\cdot$ Or la formule est vraie pour $n = 1$, car elle devient alors

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2 \sin \dfrac{x}{2}},$$

ce qui résulte de la formule ci-dessus donnant $\sin 2a$ quand on y fait $a = \frac{x}{2}\cdot$ Quant au fait que $\frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ devient $\frac{\sin x}{x}$ quand on passe à la limite pour $n \to \infty$, c'est une conséquence de ce que, comme il a été vu plus haut, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

ceci entraîne en effet

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin \dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}} = 1.$$

Si on multiplie membre à membre par

$$\cos \frac{x}{2^0} = \cos x$$

la formule ainsi démontrée

$$\prod_{i=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin x}{x}$$

et qu'on utilise encore la formule donnant $\sin 2a$, on obtient

$$\prod_{i=0}^{\infty} \cos \frac{x}{2^i} = \frac{\sin 2x}{2x}\cdot$$

Si on y fait $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$\prod_{i=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{i+1}} = \frac{2}{\pi}$$

puisque $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; ceci peut être écrit

$$\prod_{i=2}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^i} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdots = \frac{2}{\pi}.$$

8.7 Retour aux nombres complexes

Reprenons maintenant les développements en séries vus un peu plus haut pour

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et remplaçons-y x par ix où i est l'unité imaginaire (et ne représente plus des nombres entiers successifs comme dans la notation $\sum_{i=0}^{\infty}$; pour éviter toute confusion due à ces deux usages différents de la lettre i, j'avais pris l'habitude, comme je l'ai signalé à la fin du chapitre 6, de désigner l'unité imaginaire par la lettre grecque ι, iota, mais dans cet exposé, je suis revenu à la notation i pour me conformer à l'usage habituel) ; si on tient compte des valeurs de i^n données vers la fin du chapitre 6, à savoir $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc., on obtient

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i\,\frac{x}{1!} - i\,\frac{x^3}{3!} + i\,\frac{x^5}{5!} - i\,\frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{et} \quad \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Dans le premier de ces développements en séries, on peut mettre i en évidence dans le second membre puisqu'il apparaît en facteur dans tous les termes, puis diviser membre à membre par i, ce qui donne

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Si nous comparons ceci et l'autre développement en série à ceux que nous avions pour $\sin x$ et pour $\cos x$, nous voyons que nous avons des seconds membres identiques ; on a donc

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

En additionnant et en soustrayant membre à membre ces deux égalités, après avoir multiplié la première par i, on obtient

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} \quad \text{et} \quad \cos x - i \sin x = e^{-ix}.$$

On peut d'ailleurs déduire la seconde de ces formules de la première en y remplaçant x par $-x$, puisque

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Ces formules montrent que la fonction exponentielle est périodique de période imaginaire $2i\pi$, c'est-à-dire qu'on a $e^{x+2ki\pi} = e^x$ où k est un entier quelconque, puisque $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$. Si on prend $x = \pi$ dans la première de ces deux formules et qu'on tient compte de $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$, on trouve

$$e^{i\pi} = -1,$$

célèbre formule attribuée au mathématicien suisse Euler, que nous avons déjà cité, formule remarquable en ce qu'elle réunit très brièvement l'unité réelle 1, ou plus exactement son opposé, l'unité imaginaire i et les deux principaux nombres transcendants e et π.

Si on élève la première des deux formules ci-dessus à la $n^{\text{ème}}$ puissance membre à membre, il vient

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx};$$

or en remplaçant dans cette même formule x par nx, on voit que

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx,$$

d'où

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

ce qui constitue la formule énoncée par de Moivre en 1730 (A. de Moivre, mathématicien anglais d'origine française, 1667-1754).

Quand nous avons vu les nombres complexes au chapitre 6, nous avons dit qu'on appelle module du nombre complexe $a + ib$ le nombre réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$. Pour le nombre complexe $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, ce module est donc

$$\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{1} = 1.$$

Un nombre complexe quelconque peut s'écrire $\rho(\cos\omega + i \sin\omega)$ ou $\rho e^{i\omega}$ où ρ (lettre grecque rho) est un nombre réel > 0, qui est son *module*, et où l'angle ω (lettre grecque oméga) est appelé l'*argument* de ce nombre. La partie réelle est $a = \rho \cos\omega$ et le coefficient de i dans la partie imaginaire est $b = \rho \sin\omega$. Comme nous avons vu, le module est $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. L'argument ω est l'angle tel que

$$\sin\omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \cos\omega = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

il n'est déterminé qu'à $2k\pi$ près où k est un entier quelconque. Considérons encore, comme nous l'avons évoqué au chapitre 6, le point image P du nombre complexe dans le plan déterminé par un axe horizontal Ox comme axe réel et un axe vertical Oy comme axe imaginaire. Comme nous avons dit alors, le module $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ est la distance de O à l'image P dont ce nombre est l'affixe. Quant à l'angle ω, mesuré en radians, c'est l'angle fait par OP avec l'axe Ox. Pour un nombre réel $(b = 0)$, P est sur Ox ; pour un nombre imaginaire pur $(a = 0)$, P est sur Oy. Des nombres complexes conjugués $a + ib$ et $a - ib$ ont le même module et des arguments opposés.

Nous avons vu au chapitre 6 comment s'expriment le produit et le quotient de nombres complexes pris sous la forme $a + ib$; quand ils sont pris sous la forme $\rho_1(\cos\omega_1 + i \sin\omega_1)$ et $\rho_2(\cos\omega_2 + i \sin\omega_2)$, leur produit s'écrit $\rho_1\rho_2[\cos(\omega_1 + \omega_2) +$

$i\sin(\omega_1+\omega_2)]$: les modules se multiplient, tandis que les arguments s'additionnent ; semblablement, leur quotient est $\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\omega_1-\omega_2)+i\sin(\omega_1-\omega_2)]$. D'après ce que nous venons de voir pour le produit, la formule donnant la $n^{\text{ème}}$ puissance est

$$[\rho(\cos\omega+i\sin\omega]^n=\rho^n(\cos n\omega+i\sin n\omega)$$

(ou aussi bien $(\rho e^{i\omega})^n=\rho^n e^{in\omega}$). Tout nombre a n racines $n^{\text{èmes}}$ et pour le nombre complexe $\rho(\cos\omega+i\sin\omega)$, elles sont données par $\sqrt[n]{\rho}[\cos(\frac{\omega}{n}+\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{\omega}{n}+\frac{2k\pi}{n})]$ avec $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ (ou $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$, etc.) ; ceci peut aussi s'écrire $\sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\omega}{n}+i\sin\frac{\omega}{n})(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\,\frac{2k\pi}{n})$ (avec $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$ ou $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$, etc.) compte tenu des formules

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad \text{et} \quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

qu'on démontre en trigonométrie et que nous avons citées plus haut. Si le nombre complexe est pris sous la forme $a+ib$, ses deux racines carrées (indice $n=2$) sont

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

si $b>0$, tandis que si $b<0$, elles sont

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}};$$

pour un nombre réel positif ($b=0,a>0$), elles sont $+\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ et enfin pour un nombre réel négatif ($b=0,a<0$), elles sont $+i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Les racines de l'unité réelle positive $+1$ sont les suivantes pour les premiers indices. Pour l'indice 2 (racines carrées) : $+1$ et -1 ; pour l'indice 3 (racines cubiques) : $+1$, $-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; pour l'indice 4 : $+1$, $+i$, -1, $-i$; pour l'indice 5 : $+1$, $\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{4}-i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$; pour l'indice 6 : $+1$, $\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour les sept racines $7^{\text{èmes}}$, il n'y a pas d'expressions simples analogues à celles que nous venons d'écrire, ceci en accord avec le théorème de Gauss (chapitre 5, après les nombres de Fermat) suivant lequel les polygones réguliers de 3, 4, 5 et 6 côtés peuvent être construits avec la règle et le compas, mais pas celui à 7 côtés, l'heptagone. L'octogone régulier peut l'être et on peut effectivement exprimer les huit racines $8^{\text{èmes}}$ d'une manière simple comme ci-dessus : ±1, $\pm i$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, expressions dans lesquelles les signes $+$ et $-$ sont à prendre indépendamment l'un de l'autre. Les racines $9^{\text{èmes}}$ et $11^{\text{èmes}}$ ne peuvent pas, comme les $7^{\text{èmes}}$, s'écrire comme ci-dessus, en accord avec l'impossibilité de construire avec la règle et le compas les polygones réguliers à 9 ou à 11 côtés. Par contre, en accord avec la possibilité de construire le décagone et le dodécagone, on peut donner des expressions de ce genre pour les dix racines $10^{\text{èmes}}$ et pour les douze racines $12^{\text{èmes}}$. Nous ne les transcrivons toutefois pas ici, pour ne pas trop allonger. Des remarques semblables pourraient être faites ci-dessous pour les racines de -1, $+i$ et $-i$.

Les racines de l'unité réelle négative -1 sont les suivantes pour les six premiers indices. Pour l'indice 2 (racines carrées) : $+i$ et $-i$; pour l'indice 3 (racines cubiques) : $\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; pour l'indice 4 : $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$; pour l'indice 5 : $\frac{\sqrt{5}+1}{4}+i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, $-\frac{\sqrt{5}-1}{4}+i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, -1, $-\frac{\sqrt{5}-1}{4}-i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{4}-i\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$; pour l'indice 6 : $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$, $+i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2}$, $-i$, $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2}$.

Les racines de l'unité imaginaire positive $+i$ sont les suivantes pour les six premiers indices. Pour l'indice 2 (racines carrées) : $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$; pour l'indice 3 (racines cubiques) : $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$, $-i$; pour l'indice 4 : $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; pour l'indice 5 : $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+i\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $+i$, $-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+i\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}-i\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}-i\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}$; pour l'indice 6 : $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Enfin, les racines de l'unité imaginaire négative $-i$ sont les suivantes pour les premiers indices. Pour l'indice 2 (racines carrées) : $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$; pour l'indice 3 (racines cubiques) : i, $-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2}$; et ainsi de suite, toutes ces racines de $-i$ étant les mêmes, pour chaque indice, que celles de $+i$ au signe près de i : il suffit de changer $+i$ en $-i$ et $-i$ en $+i$ dans les expressions ci-dessus. On voit d'ailleurs dans tout ce qui précède, les rôles symétriques de $+i$ et $-i$; en particulier dans les racines de nombres réels tels que $+1$ et -1, quand il y a une expression avec $+i$, il y a aussi la même avec $-i$ et vice-versa.

8.8 Les variations des fonctions

Maintenant, revenons un peu aux fonctions et leurs variations. Une fonction $f(x)$ est croissante dans un intervalle (a,b) lorsque x_1 et x_2 étant deux valeurs quelconques de la variable x dans cet intervalle avec $x_2 > x_1$, on a $f(x_2) > f(x_1)$ systématiquement. Elle est décroissante dans cet intervalle si avec toujours $x_2 > x_1$, on a au contraire chaque fois $f(x_2) < f(x_1)$. En d'autres termes, x_1 et x_2 étant deux valeurs quelconques de x dans l'intervalle (a,b), la fonction $f(x)$ est respectivement croissante ou décroissante dans cet intervalle suivant que le rapport $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est > 0 ou < 0. Si la fonction $y = f(x)$ est représentée graphiquement comme à la figure 13 et qu'elle est croissante, la courbe qui la représente monte, c'est-à-dire va vers de plus grandes valeurs de y, lorsqu'on se déplace vers la droite, c'est-à-dire lorsque x croît. Au contraire, si la fonction $y = f(x)$ est décroissante, la courbe représentative descend, c'est-à-dire va vers de plus petites valeurs de y, lorsque x croît. En particulier, on voit que la fonction $y = 3x + 2$, qui est représentée sur cette figure 13, est croissante : la droite qui la représente monte de gauche à droite. Il en serait de même pour toute droite représentative d'une fonction linéaire $y = ax + b$ lorsque $a > 0$, tandis que pour $a < 0$, on a une droite qui descend de gauche à droite, donc une fonction décroissante. La pente de la droite est d'autant plus grande que a est grand ; elle est donnée par le rapport ci-dessus, donc par

$$\frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Pour une fonction quelconque, la pente moyenne dans l'intervalle (x_1, x_2) est donnée par $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$; son signe indique si elle croît ou si elle décroît et sa grandeur indique si elle le fait rapidement ou lentement. Dans le cas particulier de la fonction linéaire $y = ax + b$, si $a = 0$, elle se réduit à la constante b et une telle fonction est représentée graphiquement par une droite parallèle à Ox, c'est-à-dire dont la pente est nulle ($a = 0$).

Si on veut connaître la variation d'une fonction $f(x)$ dans le petit intervalle entre x et $x + h$ où h est un petit accroissement donné à la variable à partir de la valeur particulière x, on prendra le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, et si on veut avoir la variation de cette fonction en la valeur x de la variable, on prendra la limite de ce rapport pour $h \to 0$. Dans la représentation graphique, ceci donne, en l'abscisse x, la pente, qu'on appelle aussi *coefficient angulaire*, de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x)$. Par exemple, si la fonction considérée est la distance d parcourue par un mobile en fonction du temps t, variable indépendante dont d est fonction, la vitesse moyenne de ce mobile entre les instants t_1 et t_2 est par définition le rapport de la distance parcourue $d(t_2) - d(t_1)$ à l'intervalle $t_2 - t_1$, soit $\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}\cdot$. La vitesse instantanée au temps t_1 est $\lim_{t_2 \to t_1} \frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}\cdot$ Pour une fonction quelconque $y = f(x)$, on appelle *dérivée* de la fonction cette limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable indépendante et on la désigne par la notation y' ou $f'(x)$; on a donc par définition

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}\cdot$$

Comme nous venons de voir, elle est égale à la pente ou coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative de $y = f(x)$ au point d'abscisse x ; ceci résulte de la définition de la tangente en un point d'une courbe, que nous rappelons : on prend la droite passant par le point considéré de la courbe, ici celui qui est à l'abscisse x, et par un point voisin sur la courbe, puis on fait tendre ce point voisin vers le premier, cette sécante devient alors la tangente à la courbe au premier point.

Comme nous avons vu ci-dessus à propos de la fonction linéaire $y = ax + b$, la dérivée y' est $= 0$ dans le cas où $a = 0$, c'est-à-dire dans le cas où y se réduit à une constante. Pour d'autres fonctions $y = f(x)$, on peut avoir $y' = 0$ pour des valeurs particulières de la variable indépendante. C'est le cas lorsque la fonction passe par un maximum ou par un minimum. Dans le premier cas, celui de la figure 14, où la fonction présente un maximum en $x = x_m$, la pente de la tangente à la courbe, donc la dérivée de la fonction, est $= 0$ en $x = x_m$, tandis qu'elle est positive pour $x < x_m$ et négative pour $x > x_m$; ceci signifie que lorsque la fonction passe en son maximum, sa dérivée y' décroît puisqu'elle s'annule en passant de valeurs positives à des valeurs négatives.

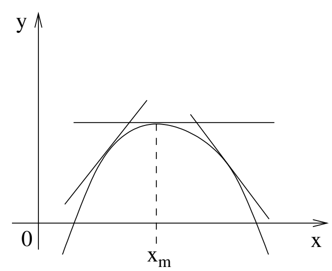


Figure 14 : Graphique d'une fonction présentant un maximum

Dans le cas d'un minimum, on voit par la figure 15, qu'au contraire la pente de la tangente à la courbe, c'est-à-dire la dérivée y' de la fonction, qui est $= 0$ en $x = x_m$ où la fonction passe par le minimum, est négative pour $x < x_m$ et positive pour $x > x_m$; la dérivée y' s'annule donc au minimum en passant de valeurs négatives à des valeurs positives, donc en croissant. Ainsi la recherche des maxima et des minima éventuels d'une fonction $y = f(x)$ se fait en repérant les valeurs de x telles que sa dérivée soit $= 0$ et la distinction entre les maxima et les minima se fait en examinant si pour chacune de ces valeurs de x, la dérivée $y' = f'(x)$ est décroissante ou croissante. Ceci peut évidemment se faire en déterminant le signe de la dérivée de cette dérivée y'. Cette dérivée de la dérivée est appelée *dérivée seconde* et est désignée par la notation y''. On a un maximum lorsque $y' = 0$ et $y'' < 0$ et un minimum lorsque $y' = 0$ et $y'' > 0$.

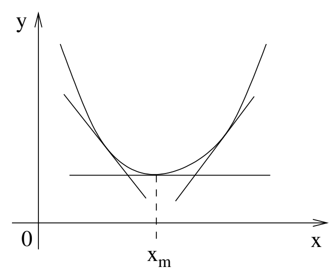


Figure 15 : Graphique d'une fonction présentant un minimum

Pour être complet concernant les cas où $y' = 0$, signalons l'éventualité où la courbe représentative de la fonction présente un *point d'inflexion* à tangente horizontale, un point d'inflexion étant un point où la courbure de la courbe change de sens et donc en lequel la tangente traverse la courbe ; dans le cas particulier où ceci se présente avec une tangente horizontale, on a à la fois $y' = 0$ et $y'' = 0$.

8.9 Le calcul des dérivées

A titre d'exemples de dérivées de fonctions courantes, citons les suivantes, où c désigne une *constante*, c'est-à-dire un nombre qui ne dépend pas de la variable par rapport à laquelle on dérive (le premier exemple a déjà été vu ci-dessus et le deuxième, pratiquement aussi évident, est généralisé par le troisième) :

fonction	dérivée	fonction	dérivée
$y = c$	$y' = 0$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = x^c$	$y' = cx^{c-1}$	$y = e^x$	$y' = e^x$

Le dernier exemple, celui de la fonction exponentielle au sens étroit, est remarquable : c'est la fonction dont la dérivée est identique à cette fonction elle-même. Si u et v sont deux fonctions de x, la dérivée de leur somme ou de leur différence est respectivement la somme ou la différence de leurs dérivées :

$$\text{si } y = u + v, \text{ on a } y' = u' + v' \quad \text{et} \quad \text{si } y = u - v, \text{ on a } y' = u' - v'.$$

En particulier, si on tient compte de ce que la dérivée d'une constante est $= 0$, on voit que si $y = u + c$, on a $y' = u'$, ce qui montre que quelle que soit la constante qu'on ajoute éventuellement à une fonction, sa dérivée reste identique : si on ajoute une constante à une fonction, on ne change pas sa dérivée. La dérivation pour un produit de fonctions et surtout pour un quotient est plus compliquée que pour une somme ou une différence :

$$\text{si } y = u \cdot v, \text{ on a } y' = u \cdot v' + v \cdot u' \quad \text{et} \quad \text{si } y = \frac{u}{v}, \text{ on a } y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}.$$

Si on applique la formule relative à un produit au cas d'une fonction simplement multipliée par une constante, c'est-à-dire $y = c \cdot u$, on voit que la dérivée est simplement multipliée elle aussi par la constante : $y' = c \cdot u'$, puisque la dérivée de la constante est nulle. Si on combine ceci avec le théorème qui vient d'être donné pour la dérivée d'une somme, on déduit que la dérivée de la fonction linéaire $y = ax + b$ est $y' = a$, en conformité avec ce qui a été vu plus haut.

Si deux fonctions f et g sont inverses l'une de l'autre, donc si d'après la définition donnée plus haut des fonctions inverses, on a à la fois $y = f(x)$ et $x = g(y)$, on peut voir que leurs dérivées sont inverses l'une de l'autre :

$$f'_x(x) = \frac{1}{g'_y(y)}.$$

Pour éviter toute confusion, nous avons mis en indice sous le signe $'$ l'indication de la variable par rapport à laquelle la dérivée est prise. C'est ce que nous allons faire aussi pour écrire la formule exprimant le théorème sur la dérivée d'une fonction de fonction. Si y est une fonction de u, c'est-à-dire $y = f(u)$, et que u est à son tour fonction de la variable indépendante x, comme ci-dessus, y est une *fonction de fonction* de x ; dans ce cas, sa dérivée par rapport à x est donnée par

$$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x.$$

Par exemple, si $y = \sin cx$, on aura en posant $u = cx$, dont la dérivée est $u' = c$ d'après ce qui est écrit plus haut,

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot c = c \cdot \cos u = c \cdot \cos cx.$$

Pour indiquer la variable par rapport à laquelle on dérive, plutôt que de la mettre en indice sous le signe $'$ comme nous venons de faire, on peut utiliser la notation des différentielles. La *différentielle de la variable indépendante* x, notée dx, est l'accroissement infiniment petit qu'elle prend dans le calcul de la dérivée, donc ce que devient h quand on passe à la limite dans la définition que nous avons donnée de la dérivée. La *différentielle de la variable fonction* y est l'accroissement infiniment petit correspondant $dy = y' \cdot dx$ pour y le long de la tangente à la courbe qui représente $y = f(x)$, ce qui est d'ailleurs un infiniment petit équivalent à celui que y prend le long de la courbe $y = f(x)$ elle-même (des *infiniment petits équivalents* sont des infiniment petits dont le rapport $= 1$ à la limite). On peut alors écrire

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

où on voit clairement que c'est par rapport à x que la dérivée de y est prise. La formule que nous venons de voir sur la dérivée des fonctions de fonctions peut alors s'écrire simplement

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\cdot$$

8.10 Le théorème de l'Hospital

Parmi les applications du calcul des dérivées, en plus de celle de l'étude des variations des fonctions, que nous avons évoquée à propos des maxima et minima, il y a celle qui consiste à appliquer le théorème de l'Hospital (marquis G. de l'Hospital, mathématicien français, 1661-1704) pour la levée de l'indétermination lorsque dans le calcul d'une limite (voir plus haut) on se trouve en présence d'une des formes indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}\cdot$ Ce théorème est le suivant. Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ telles que

$$f(a) = g(a) = 0 \quad \text{ou que} \quad f(a) = g(a) = \infty,$$

la vraie valeur, la limite, du rapport de ces deux fonctions pour $x = a$ est égale à la limite du rapport de leurs dérivées pour $x = a$, c'est-à-dire qu'on a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si $f(a) = g(a) = 0$ ou ∞. Prenons comme exemple le calcul de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

puisque $\sin 0 = 0$; étant donné que, comme il a été indiqué un peu plus haut,

$$(x)' = 1 \quad \text{et} \quad (\sin x)' = \cos x,$$

il vient

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

puisque $\cos 0 = 1$.

8.11 Les intégrales

Par rapport à la fonction dérivée $y' = f'(x)$, celle dont on a pris la dérivée, c'est-à-dire la fonction $y = f(x)$, s'appelle la *primitive*. En fait, on parle plus couramment d'*intégrale* ; toutefois en toute rigueur, l'intégration est l'inverse non pas de la dérivation, mais de la différentiation : $y = f(x)$ est la primitive de $y' = f'(x)$ et est l'intégrale de $dy = y'\,dx$. Le signe $\int$, qui désigne une intégrale, est le signe ayant le rôle opposé au signe d d'une différentielle. On peut donc écrire

$$\int dy = \int y'\,dx = y \quad \text{ou} \quad \int f'(x)\,dx = f(x).$$

Si une fonction $f(x)$ a pour primitive $F(x)$, on peut dire que $F(x)+c$, où c est une constante quelconque, est aussi une primitive de $f(x)$, puisque des fonctions qui ne diffèrent que par une constante additive ont la même dérivée. Nous avons en effet vu un peu plus haut que quand on ajoute une constante à une fonction, on ne change pas sa dérivée. Dans le calcul d'une *intégrale indéfinie*, c'est-à-dire telle que nous venons de définir, il faudra toujours ajouter une constante arbitraire au résultat, qui doit donc être écrit sous la forme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Un moyen d'éviter la constante arbitraire est d'utiliser la notion d'*intégrale définie*, c'est-à-dire prise entre deux valeurs choisies a et b de x, ce qu'on écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ici, la constante additive arbitraire disparaît dans la soustraction. Les limites d'intégration a et b d'une intégrale définie peuvent d'ailleurs l'une ou l'autre ou les deux être infinies. C'est par exemple le cas pour l'intégrale de Poisson (D. Poisson, mathématicien français, 1781-1840)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

d'où on déduit, en raison de ce que e^{-x^2} est une fonction paire,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Si nous considérons le graphique donnant le courbe $y = f(x)$ dans le plan Oxy, comme on l'a vu plus haut, ont peut donner l'interprétation géométrique suivante de l'intégrale. Appelons $\mathcal{A}$ l'aire de la surface comprise entre l'axe Ox et la courbe et qui est limitée latéralement par les droites parallèles à Oy $x = a$ et $x = b$. Entre les abscisses x et $x + dx$, la portion de cette surface est $d\mathcal{A} = y \cdot dx$, car elle est, à la limite pour $x \to 0$, assimilable au rectangle infiniment étroit de largeur dx et qui a pour hauteur y. La surface entière entre $x = a$ et $x = b$ est donnée par

$$\int_a^b d\mathcal{A} = \int_a^b y \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

On peut dire que l'*intégrale* est la somme de l'infinité des grandeurs infiniment petites $d\mathcal{A} = y \cdot dx$. Le substantif "intégrale" est d'ailleurs en réalité une manière abrégée de dire *somme intégrale*, avec ce mot utilisé comme adjectif, comme on devait le faire initialement en toute rigueur. Cette nature de somme intégrale est rappelée par le signe utilisé pour la désigner : un S très étiré, cette lettre étant l'initiale du mot "somme" en français ou "Summe" en allemand, langue de Leibniz (mathématicien allemand, 1646-1716) qui en a au départ étudié les propriétés.

Les notions de fonctions, de dérivées et d'intégrales sont à la base d'une grande et importante partie des sciences mathématiques, qu'on appelle l'*analyse*. Beaucoup de travaux et des gros volumes lui ont été consacrés (ce que j'ai jadis écrit moi-même dans ce domaine, sans être publié, représente aussi un fort grand nombre de pages). Mais il sortirait largement du cadre de cet ouvrage d'en parler davantage ici.

8.12 L'infinité des nombres rationnels comparée à l'infinité de tous les nombres réels

Nous allons seulement terminer ce chapitre par l'évocation de l'infinité des nombres rationnels comparée à l'infinité incomparablement plus grande, plus infinie peut-on dire, de tous les nombre réels, parmi lesquels figurent les nombres transcendants tels que π et e notamment.

La considération de nombres infinis comme le nombre de termes dans une suite illimitée telle que celle des nombres naturels ou plus généralement d'un ensemble de nombres qui en comporte une infinité, peut parfois conduire à des résultats d'apparence paradoxale. Considérons par exemple l'ensemble des nombres fractionnaires positifs, c'est-à-dire tous les nombres de la forme $\frac{m}{n}$ où m et n peuvent prendre, indépendamment l'un de l'autre, toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $+\infty$. Il y en a une infinité, même simplement entre deux nombres entiers positifs donnés, déjà entre 0 et 1. Dans cet intervalle, il y a toutes les fractions $\frac{m}{n}$ pour lesquelles $m < n$, comme $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, etc. Même si, après avoir donné à m et n toutes les valeurs entières possibles satisfaisant à $0 < m < n$, on exclut les fractions qui coïncident avec d'autres après simplification telles que $\frac{2}{4}$ qui est $= \frac{1}{2}$ ou $\frac{6}{8}$ qui est $= \frac{3}{4}$, etc., il en reste manifestement une énorme infinité. Il en est de même entre deux nombres entiers successifs quelconques, par exemple entre 3 et 4, où il y a

$3\,\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, $3\,\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$, etc., c'est-à-dire la multitude infinie des fractions qui sont entre 0 et 1 chacune augmentée de 3 unités dans ce cas. Et il y a une infinité de tels intervalles entre nombres naturels successifs, pour chacun desquels on peut dire la même chose. Tous ces nombres fractionnaires paraissent ainsi être d'une infinité incomparablement plus grande que le nombre infini de nombres naturels. Pourtant, comme nous allons voir, on peut montrer que paradoxalement ces deux infinités sont égales. Dans cette énorme infinité de fractions $\frac{m}{n}$, où nous ne prenons que les véritables nombres fractionnaires, qui ne se réduisent pas à des nombres entiers, mettons ensemble toutes celles pour lesquelles la somme $m + n$ est la même ; ensuite, rangeons les collections ainsi obtenues en commençant par les plus petites valeurs de cette somme $m + n$; enfin, dans chacune de ces collections, rangeons les fractions par ordre des valeurs croissantes du numérateur m. On obtient ainsi une suite illimitée comprenant tous les véritables nombres fractionnaires et qui commence par $\frac{1}{2}$ (seule véritable fraction pour laquelle $m + n = 3$, plus petite somme possible), $\frac{1}{3}$ (seule véritable fraction pour laquelle $m + n = 4$), $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ (les trois véritables fractions pour lesquelles $m + n = 5$, rangées par ordre croissant du numérateur), $\frac{1}{5}$, etc. Supprimons dans cette suite toutes les fractions qui se réduisent à une autre, ce qui ne fait que réduire leur nombre ; c'est le cas pour $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ qui suivrait la dernière fraction que nous venons d'écrire, pour laquelle on a aussi $m + n = 6$. En regard de cette suite de toutes les fractions positives existantes ainsi rangées, mettons la suite de tous les nombres naturels ; par cette mise en regard de ces deux suites, nous établissons une correspondance biunivoque entre toutes les fractions et les nombres naturels, un peu de la même manière que quand on comptait des pommes au début du chapitre 1, on établissait, durant le comptage, une correspondance entre ces pommes et les premiers nombres naturels, ou de la manière dont l'hôtelier établissait une correspondance, plus permanente, entre les chambres à numéroter dans son hôtel et des nombres naturels, sauf que maintenant on va jusqu'à l'infini. Mais comme on établit ainsi une correspondance entre tous les nombres fractionnaires et tous les nombres naturels, on peut dire qu'il y en a autant des uns que des autres ; en quelque sorte, il est possible de numéroter toutes les fractions à l'aide des nombres naturels. On dit que l'ensemble des fractions est un ensemble dénombrable.

On peut se livrer à un jeu analogue, plus compliqué toutefois, pour montrer qu'il en est de même pour l'ensemble des nombres algébriques, y compris les irrationnels algébriques, c'est-à-dire tous les nombres qui sont racines d'équations algébriques à coefficients entiers.

Incidemment, on peut facilement voir que c'est vrai aussi pour tous les nombres entiers, positifs ou négatifs ; il aurait même fallu commencer par cela, on pourrait alors éviter ci-dessus de se limiter aux nombres fractionnaires positifs. Il suffit de ranger ces nombres en commençant par 0, puis en faisant suivre les nombres alternativement positifs et négatifs ayant les mêmes valeurs absolues : 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, etc. Cette suite illimitée peut être mise en regard de la suite des nombres naturels pour les numéroter tous : leur ensemble est manifestement dénombrable. On voit alors plus aisément qu'il en est de même pour tous les nombres fractionnaires, qu'ils soient positifs ou négatifs.

Par contre, il est impossible de trouver une manière de ranger semblablement tous les nombres transcendants en une suite qui puisse être mise en regard de celle des nombres naturels. Leur ensemble n'est donc pas dénombrable ; leur infinité est d'un ordre supérieur à celui de l'infinité des nombres naturels. Il en est de même de l'ensemble des nombres réels (chapitre 6) puisque l'ensemble des nombres transcendants en constitue une partie. Dans tout intervalle donné, il y a donc infiniment plus de nombres irrationnels, qui comprennent les nombres transcendants, que de nombres entiers ou de nombres fractionnaires, et quand on dit ici infiniment plus, c'est dans le sens d'une infinité supérieure à celle du dénombrable. Quand on considère, comme nous l'avons fait plus haut, les abscisses des points d'une droite à partir d'une origine donnée et avec une unité de longueur donnée, il y a correspondance biunivoque entre les nombres réels que sont ces abscisses et les points de la droite ; on peut dire qu'il y a la même continuité pour ces points et pour les nombres réels, une même infinité de points sur un segment de la droite et l'infinité de nombres dans l'intervalle numérique entre les abscisses des extrémités de ce segment. Si on pique au hasard un point sur la droite, il y a infiniment, au sens fort, plus de chance que son abscisse soit irrationnelle que rationnelle, comme nous avons déjà dit au chapitre 6, avant l'introduction des nombres imaginaires. D'après ce que nous venons de voir, la puissance du continu est aussi celle de l'ensemble des points d'une droite ; c'est aussi celle de l'ensemble des points d'un plan et plus généralement de l'ensemble des points d'un espace à un nombre quelconque de dimensions. C'est Cantor (1845-1918, mathématicien d'origine russe professeur à l'université de Halle) qui a établi en 1873 que l'ensemble de tous les nombres réels est non dénombrable et qui en jetant les bases de la théorie des ensembles a ainsi distingué la puissance du continu de la puissance du dénombrable, ce qui a prouvé l'existence, parmi les nombres irrationnels, de nombres transcendants.

Plus récemment, le mathématicien A. Gelfond (1906-1968) a démontré que a étant un nombre algébrique quelconque si ce n'est qu'il est différent de 0 et de 1, la puissance a^b est un nombre transcendant si l'exposant b est un nombre algébrique irrationnel ; c'est donc le cas par exemple de $2^{\sqrt{2}}$.

Chapitre 9

Les moyennes, les progressions et les logarithmes

9.1 Les moyennes

Quand on a un ensemble de n grandeurs caractérisées par leurs mesures données par les nombres respectifs a_1, a_2, …, a_n, il est parfois intéressant de caractériser cet ensemble par une seule mesure représentée par un nombre qui soit le moins éloigné possible de chacun des nombres a_1, a_2, …, a_n. Il sera notamment plus grand que le plus petit de ces nombres et plus petit que le plus grand d'entre eux ; il sera d'autant plus proche du plus petit ou du plus grand suivant que parmi les nombres a_1, a_2, …, a_n, la plupart seront respectivement proches du plus petit ou proches du plus grand, ou encore proche d'un nombre intermédiaire si beaucoup de ces nombres en sont proches. Evidemment, dans le cas particulier où ces nombres sont tels que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, il sera égal à chacun d'eux. Ce nombre sera appelé *moyenne* des nombres a_1, a_2, …, a_n. Mais il existe plusieurs sortes de moyennes. En plus des propriétés particulières que nous allons donner après leurs définitions respectives , elles jouissent toutes de celles que nous venons d'indiquer, ainsi que d'être chaque fois indépendante de l'ordre dans lequel les nombres a_1, a_2, …, a_n sont pris.

9.1.1 Les moyennes arithmétiques

Considérons d'abord la *moyenne arithmétique*, qui est la plus utilisée, au point que quand on dit simplement moyenne sans préciser, c'est de celle-là qu'il s'agit. Nous la désignerons par la notation $\mathcal{M}_1$ et elle est définie par

$$\mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Si on augmente d'une même quantité tous les a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, leur moyenne sera augmentée de cette même quantité : on a

$$\mathcal{M}_1(a_1 + b, a_2 + b, \ldots, a_n + b) = \mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) + b;$$

on a d'ailleurs

$$\mathcal{M}_1(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) = \mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \mathcal{M}_1(b_1, b_2, \ldots, b_n);$$

si on multiplie tous les a_i par un même nombre, la moyenne est multipliée par ce nombre :

$$\mathcal{M}_1(ca_1, ca_2, \ldots, ca_n) = c\mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

en particulier en prenant $c = -1$, on voit que la moyenne des opposés est l'opposé de la moyenne :

$$\mathcal{M}_1(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) = -\mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

on a aussi

$$\mathcal{M}_1(0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{n+1}\,\mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

enfin on a la relation de récurrence

$$\mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n-1}{n}\,\mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + \frac{a_n}{n}\cdot$$

En particulier, la moyenne arithmétique de deux nombres a et b est

$$\mathcal{M}_1(a, b) = \mathcal{M}_1(b, a) = \frac{a+b}{2}\cdot$$

L'écart entre a et $\mathcal{M}_1$ est le même qu'entre $\mathcal{M}_1$ et b :

$$\mathcal{M}_1(a, b) - a = b - \mathcal{M}_1(a, b).$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1(a, b) &= \mathcal{M}_1(a + b, 0) = \mathcal{M}_1(0, a + b);\\
\mathcal{M}_1(a + c, b - c) &= \mathcal{M}_1(a - c, b + c) = \mathcal{M}_1(a, b);\\
\mathcal{M}_1(a + c, b + c) &= \mathcal{M}_1(a, b) + c;\\
\mathcal{M}_1(a + c, b) &= \mathcal{M}_1(a, b + c) = \mathcal{M}_1(a, b) + \frac{c}{2};\\
\mathcal{M}_1(ca, cb) &= c\mathcal{M}_1(a, b);\\
\mathcal{M}_1(a + c, b + d) &= \mathcal{M}_1(a + d, b + c) = \mathcal{M}_1(a, b) + \mathcal{M}_1(c, d)\\
&= \mathcal{M}_1(a, c) + \mathcal{M}_1(b, d).
\end{aligned}$$

On est parfois amené à donner aux différents a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) des importances relatives plus ou moins grandes dans le calcul de $\mathcal{M}_1$. On le fait en leur attribuant des *poids* respectifs p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) ; on obtient ainsi une *moyenne pondérée*, définie par

$$\mathcal{M}_1^{p_1, p_2, \ldots, p_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Les propriétés sont analogues : on a encore

$$\mathcal{M}_1^{p_1, p_2, \ldots, p_n}(a_1 + b, a_2 + b, \ldots, a_n + b) = \mathcal{M}_1^{p_1, p_2, \ldots, p_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) + b$$

et

$$\mathcal{M}_1^{p_1, p_2, \ldots, p_n}(ca_1, ca_2, \ldots, ca_n) = c\mathcal{M}_1^{p_1, p_2, \ldots, p_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Si on multiplie ou divise tous les poids p_i par un même nombre, on ne change pas le résultat. Si les p_i sont entiers (s'ils sont fractionnaires, il suffit de réduire ces fractions au même dénominateur, soit leur p.p.c.m. comme il a été vu au chapitre 4, et de les multiplier tous par ce dénominateur commun pour être ramené à des nombres entiers), on a

$$\mathcal{M}_1^{p_1, p_2, \ldots, p_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathcal{M}_1(a_1, a_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_2, \ldots, a_n, a_n, \ldots, a_n)$$

où on doit mettre dans le $\mathcal{M}_1$ du second membre p_1 fois a_1, p_2 fois a_2,..., p_n fois a_n. On a aussi

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)\\ &\qquad = \mathcal{M}_1^{m, n}[\mathcal{M}_1(a_1, a_2, \ldots, a_m), \mathcal{M}_1(b_1, b_2, \ldots, b_n)].\end{aligned}$$

Dans certains problèmes, ce sont les carrés des nombres qui interviennent plutôt que les nombres eux-mêmes ; on est alors amené à considérer ce qu'on appelle la *moyenne quadratique* de ces nombres, à savoir le nombre tel que son carré soit la moyenne (arithmétique) des carrés de ces nombres. Nous la désignerons par la notation $\mathcal{M}_{1,2}$ et on a par définition

$$\mathcal{M}_{1,2}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{\mathcal{M}_1(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2)} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

soit dans le cas de deux nombres a et b :

$$\mathcal{M}_{1,2}(a, b) = \sqrt{\mathcal{M}_1(a^2, b^2)} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

C'est un nombre toujours positif (ou nul seulement si les $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ou a et b sont nuls) et qui ne dépend que de la valeur absolue des nombres donnés (supposés réels) ; notamment

$$\mathcal{M}_{1,2}(a, b) = \mathcal{M}_{1,2}(|a|, |b|).$$

Comme toutes les moyennes, celle-ci est évidemment aussi toujours indépendante de l'ordre des nombres donnés ; en particulier

$$\mathcal{M}_{1,2}(a, b) = \mathcal{M}_{1,2}(b, a).$$

Si les nombres donnés sont égaux en valeurs absolues, leur moyenne quadratique est égale à leur valeur absolue ; notamment si $|a| = |b|$, on a

$$\mathcal{M}_{1,2}(a, b) = |a| = |b|.$$

Si $|a| < |b|$, on a

$$|a| < \mathcal{M}_{1,2}(a, b) < |b|.$$

On peut aussi vérifier que

$$[\mathcal{M}_{1,2}(a+c, b+c)]^2 = [\mathcal{M}_{1,2}(a, b)]^2 + c(a+b+c)$$

et que

$$\mathcal{M}_{1,2}(ca, cb) = |c|\mathcal{M}_{1,2}(a, b).$$

(c est supposé réel). Enfin, on peut définir une moyenne quadratique pondérée avec pour formule générale de définition

$$\mathcal{M}_{1,2}^{p_1, p_2, \ldots, p_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{\mathcal{M}_1^{p_1, p_2, \ldots, p_n}(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2)}.$$

Rappelons ici que, comme cela a été signalé vers la fin du chapitre 4, la demi-somme des carrés de deux nombres a et b, soit $\frac{a^2+b^2}{2}$, qui est le carré de leur moyenne quadratique $\mathcal{M}_{1,2}(a, b)$, est toujours supérieure à leur produit $a \cdot b$, l'égalité n'ayant lieu que si $a = b$.

La notion de moyenne quadratique peut être généralisée par la notion de moyenne d'ordre ℓ, qui est définie pour deux nombres a et b ou pour n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivement par les formules

$$\mathcal{M}_{1,\ell}(a, b) = \sqrt[\ell]{\mathcal{M}_1(a^\ell, b^\ell)} = \sqrt[\ell]{\frac{a^\ell + b^\ell}{2}}$$

et

$$\mathcal{M}_{1,\ell}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[\ell]{\mathcal{M}_1(a_1^\ell, a_2^\ell, \ldots, a_n^\ell)} = \sqrt[\ell]{\frac{a_1^\ell + a_2^\ell + \cdots, a_n^\ell}{n}},$$

ce qui se ramène à la moyenne quadratique dans le cas où l'ordre ℓ est $= 2$.

9.1.2 Les moyennes géométriques

Quand on remplace, dans ce qui concerne les moyennes arithmétiques, les additions et soustractions respectivement par des multiplications et divisons, on passe à une autre espèce de moyenne, la *moyenne géométrique* ou moyenne proportionnelle. On dit plus souvent moyenne géométrique en arithmologie, c'est-à-dire en théorie des nombres, et plus volontiers moyenne proportionnelle quand il s'agit de grandeurs géométriques.

Commençons par le cas de deux nombres a et b, supposés tous deux positifs. Leur moyenne géométrique, que nous désignerons par la notation $\mathcal{M}_2$, se définit par

$$\mathcal{M}_2(a,\, b) = \mathcal{M}_2(b,\, a) = \sqrt{a \cdot b}.$$

Ceci revient à dire qu'on a

$$\frac{a}{\mathcal{M}_2(a,\, b)} = \frac{\mathcal{M}_2(a,\, b)}{b}$$

(ou si on prend les inverses des deux membres de cette égalité,

$$\frac{\mathcal{M}_2(a,\, b)}{a} = \frac{b}{\mathcal{M}_2(a,\, b)}\ :$$

le rapport de $\mathcal{M}_2(a,\, b)$ à a est le même que celui de b à $\mathcal{M}_2(a,\, b)$) ; la définition mise sous cette forme justifie l'appellation de *moyenne proportionnelle* (comme il a été vu à la fin du chapitre 4, trois nombres a, b, c sont dits former une proportion continue si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$). On a : $\mathcal{M}_2(a,\, b) = \mathcal{M}_2(ab,\, 1) = \mathcal{M}_2(1,\, ab)$; $\mathcal{M}_2(ac,\, \frac{b}{c}) = \mathcal{M}_2(a,\, b)$; $\mathcal{M}_2(ca,\, cb) = |c|\mathcal{M}_2(a,\, b)$; $\mathcal{M}_2(a,\, 0) = \mathcal{M}_2(0,\, a) = 0$; $\mathcal{M}_2(a^c,\, b^c) = [\mathcal{M}_2(a,\, b)]^c$; en particulier (prendre $c = -1$), $\mathcal{M}_2(\frac{1}{a},\, \frac{1}{b}) = \frac{1}{\mathcal{M}_2(a,\, b)}$; $\mathcal{M}_2(ca,\, b) = \mathcal{M}_2(a,\, cb) = \sqrt{c}\mathcal{M}_2(a,\, b)$ (où $c \geq 0$) ; $\mathcal{M}_2(ac,\, bd) = \mathcal{M}_2(ad,\, bc) = \mathcal{M}_2(a,\, bcd) = \mathcal{M}_2(a,\, c) \cdot \mathcal{M}_2(b,\, d) = \mathcal{M}_2(a,\, b) \cdot \mathcal{M}_2(c,\, d)$ (où $a,\, b,\, c,\, d \geq 0$).

La moyenne géométrique de $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ lorsque $n > 2$ se définit d'une manière analogue par

$$\mathcal{M}_2(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Elle est nulle si au moins un des a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est nul ; on a : $\mathcal{M}_2(ba_1,\, ba_2,\, \ldots,\, ba_n) = b\mathcal{M}_2(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)$ $(b \geq 0)$, $\mathcal{M}_2(a_1^c,\, a_2^c,\, \ldots,\, a_n^c) = [\mathcal{M}_2(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)]^c$; en particulier (si $c = -1$), $\mathcal{M}_2(\frac{1}{a_1},\, \frac{1}{a_2},\, \ldots,\, \frac{1}{a_n}) = \frac{1}{\mathcal{M}_2(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)}$; $\mathcal{M}_2(a_1b_1,\, a_2b_2,\, \ldots,\, a_nb_n) = \mathcal{M}_2(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n) \cdot \mathcal{M}_2(b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n)$ où les b_i sont ≥ 0 comme les a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; $\mathcal{M}_2(1,\, a_1,\, a_2,\, \ldots, a_n) = [\mathcal{M}_2(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n)]^{\frac{n}{n+1}}$; récurrence : $\mathcal{M}_2(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n-1}, a_n) = [\mathcal{M}_2(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n-1})]^{\frac{n-1}{n}} \cdot \sqrt[n]{a_n}$.

On peut d'ailleurs, comme pour les moyennes arithmétiques, définir aussi pour les moyennes géométriques, des moyennes pondérées en écrivant

$$\mathcal{M}_2^{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_n}(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n) = (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}$$

et on a d'une manière analogue à ce qu'on avait pour les moyennes arithmétiques lorsque les p_i sont entiers,

$$\mathcal{M}_2^{p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_n}(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n) = \mathcal{M}_2(a_1,\,\ldots,\,a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_2,\,\ldots,\,a_n,\,\ldots,\,a_n)$$

avec dans le second membre p_1 fois a_1, p_2 fois $a_2, \ldots$, p_n fois a_n. On a comme dans le cas des moyennes arithmétiques,

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_2(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_m,\,b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_n)\\ &\quad = \mathcal{M}_2^{m,\,n}[\mathcal{M}_2(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_m), \mathcal{M}_2(b_1,\,b_2,\,\ldots,\,b_n)].\end{aligned}$$

9.1.3 Les moyennes harmoniques

Il peut arriver que quand on étudie un phénomène physique, les grandeurs sur lesquelles on veut porter son attention soient inversement proportionnelles à celles dont on a des mesures, comme c'est par exemple le cas dans les phénomènes ondulatoires, où les fréquences sont inversement proportionnelles aux longueurs d'ondes. On peut ainsi être amené à prendre la moyenne non pas des nombres dont on dispose, mais bien de leurs inverses. L'inverse de la moyenne arithmétique des inverses des nombres donnés est appelée leur *moyenne harmonique.* Nous la désignerons par la notation $\mathcal{M}_h$. Dans le cas de deux nombres a et b, elle est définie par

$$\mathcal{M}_h(a,\,b) = \frac{1}{\mathcal{M}_1\left(\dfrac{1}{a},\,\dfrac{1}{b}\right)} = \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

De même, pour n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on a

$$\mathcal{M}_h(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n) = \frac{1}{\mathcal{M}_1\left(\dfrac{1}{a_1},\,\dfrac{1}{a_2},\,\ldots,\,\dfrac{1}{a_n}\right)} = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}.$$

La dénomination "harmonique" aurait été attribuée, paraît-il, par Archytas de Tarente en raison du fait que des cordes vibrantes également tendues ont des longueurs dans cette proportion x, y, z avec $y = \mathcal{M}_h(x,\,z)$ lorsqu'elles donnent l'accord parfait do mi sol. Né vers l'an -438, ce mathématicien et physicien appartenant à l'école et la tradition pythagoriciennes s'est particulièrement illustré en tant que général et homme d'état ; il est mort dans un naufrage vers -365. Trois nombres x, y, z tels que $x < y < z$ étaient dits être en progression ou former une proportion déjà dans deux cas : l'arithmétique lorsque $z-y = y-x$, c'est-à-dire $y = \mathcal{M}_1(x, z)$, et la géométrique lorsque $\frac{z}{y} = \frac{y}{x}$, c'est-à-dire $y = \mathcal{M}_2(x, z)$; Archytas a ajouté la proportion harmonique (on a aussi dit subcontraire) lorsque $\frac{z-y}{y-x} = \frac{z}{x}$ donc lorsque $y = \mathcal{M}_h(x, z)$ (en effet, lorsqu'on multiplie membre à membre $\frac{z-y}{y-x} = \frac{z}{x}$ par le produit des dénominateurs, il vient $xz-xy = yz-xz$, d'où $2xz = (x+z)y$ et $y = \frac{2xz}{x+z}$, ce qui est bien $\mathcal{M}_h(x, z)$ d'après la formule donnée ci-dessus avec a et b à la place de x et z). Ceci peut aussi être mis en relation avec le fait que quatre points A, B, C, D d'une droite sont dits *former une ponctuelle harmonique* lorsque le *birapport* $(ABCD)$, c'est-à-dire le quotient des rapports de section suivant lesquels C et D divisent le segment AB, est $= -1$; si nous désignons respectivement par x, y, z les abscisses de C, B, D par rapport à A pris pour origine, on a alors

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z},$$

c'est-à-dire $y = \mathcal{M}_h(x, z)$; l'abscisse de B par rapport à A est la moyenne harmonique de celles de C et D par rapport à A. Dans le cas de la moyenne harmonique de deux nombres a et b, on a

$$\frac{b - \mathcal{M}_h(a, b)}{\mathcal{M}_h(a, b) - a} = \frac{b}{a},$$

comme on peut le déduire en faisant en sens inverse le raisonnement qui nous a permis ci-dessus, dans le cas des trois nombres x, y, z d'écrire $y = \mathcal{M}_h(x, z)$ à partir de la relation $\frac{z-y}{y-x} = \frac{z}{x}\cdot$ On a de plus

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{M}_h(a, b)} - \frac{1}{b} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{\mathcal{M}_h(a, b)}, \\ \mathcal{M}_h(ca, cb) &= c\mathcal{M}_h(a, b). \end{aligned}$$

Plus généralement, on a

$$\mathcal{M}_h(ca_1, ca_2, \ldots, ca_n) = c\mathcal{M}_h(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

La formule de récurrence est un peu compliquée :

$$\mathcal{M}_h(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \frac{na_n\mathcal{M}_h(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})}{\mathcal{M}_h(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + (n-1)a_n}.$$

Entre les différentes moyennes de deux nombres a et b, supposés de même signe, on a la relation

$$|\mathcal{M}_h(a,\, b)| \le \mathcal{M}_2(a,\, b) \le |\mathcal{M}_1(a,\, b)|,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que si $a = b$; plus précisément, on a

$$\mathcal{M}_2(a,\, b) = \mathcal{M}_2[\mathcal{M}_h(a,\, b), \mathcal{M}_1(a,\, b)],$$

c'est-à-dire

$$[\mathcal{M}_2(a,\, b)]^2 = \mathcal{M}_h(a,\, b) \cdot \mathcal{M}_1(a,\, b)$$

et de toute façon, même si a et b n'ont pas le même signe,

$$\mathcal{M}_h(a,\, b) \cdot \mathcal{M}_1(a,\, b) = a \cdot b.$$

On a aussi

$$2\,\frac{\mathcal{M}_1(a,\, b)}{\mathcal{M}_h(a,\, b)} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 1.$$

9.2 Les progressions

9.2.1 Les progressions arithmétiques

Passons à l'examen des progressions.

On appelle *progression arithmétique* une suite ordonnée de nombres a_1, a_2, ..., a_n telle que chacun de ses termes est égal au précédent plus un nombre constant appelé *raison*, qu'on désigne par r :

$$a_i = a_{i-1} + r \quad (i = 2,\, 3,\, \ldots,\, n).$$

On en déduit directement

$$a_i - a_{i-1} = r,$$

c'est-à-dire que la différence entre deux termes consécutifs est constante, ce qui explique que ces progressions sont aussi appelées progressions par différence. Une autre conséquence est que chaque terme intermédiaire est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et de celui qui le suit :

$$a_i = \mathcal{M}_1(a_{i-1},\, a_{i+1}).$$

A titre d'exemple, prenons $a_1 = 3$ et $r = 5$ avec $n = 10$; nous avons alors la progression 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48. Comme autre exemple, donnons la progression de 10 termes aussi, qui a pour premier terme $a_1 = 5$ et pour raison $r = -3$: 5, 2, -1, -4, -7, -10, -13, -16, -19, -22. Lorsque la raison est positive ($r > 0$), la progression est croissante ; lorsqu'elle est négative ($r < 0$), la progression est décroissante. On a $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$, et plus généralement

$$a_i = a_1 + (i-1)r,$$

jusque $a_n = a_1 + (n-1)r$. On voit que a_i est une fonction linéaire (chapitre 8) de l'indice i : on a $a_i = ai + b$ où a et b sont deux nombre liés à a_1 et r par $a = r$ et $b = a_1 - r$. On peut éventuellement prolonger la progression indéfiniment, donc faire $n \to \infty$, et ainsi avoir une progression illimitée ; on peut même la prolonger indéfiniment dans l'autre sens aussi, en faisant $i = 0, -1, -2, \ldots$ dans l'expression de a_i. En revenant à une progression d'un nombre fini de termes, on peut dire que la somme de deux termes équidistants des extrêmes est constante :

$$a_{1+i} + a_{n-i} = a_1 + a_n.$$

Cette propriété peut être utilisée pour calculer la somme des termes de la progression, ce qui donne

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

ou si on introduit l'expression ci-dessus de a_n,

$$S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r].$$

Si pour la somme des $p^{\text{èmes}}$ puissances des termes, on pose

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} a_i^p$$

(donc $S_1 = S$ ci-dessus), on peut démontrer que

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = na_1a_n + \frac{n}{6}(n-1)(2n-1)r^2 = \frac{n}{6}[6a_1^2 + 6a_1(n-1)r + (n-1)(2n-1)r^2]$$

et

$$S_3 = \frac{n}{4}\left[4a_1^3 + 6a_1^2(n-1)r + 2a_1(n-1)(2n-1)r^2 + n(n-1)^2r^3\right].$$

De la formule du binôme de Newton (chapitre 7), on peut déduire la formule suivante, qui permet de calculer les S_p de proche en proche :

$$S_p = \frac{1}{(p+1)r}\left[(a_1 + nr)^{p+1} - a_1^{p+1} - \sum_{j=1}^{p} C_{p+1}^{j+1} r^{j+1} S_{p-j}\right]$$

ou

$$S_p = na_1^p + \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p} C_{p+1}^{j+1} r^j \left(n^{j+1}a_1^{p-j} - S_{p-j}\right)$$

avec

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i^0 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Un cas particulier intéressant de progression arithmétique illimitée est la suite des nombres naturels ; elle correspond à $a_1 = 1$ et $r = 1$. Les formules ci-dessus donnent dans ce cas

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

ce qui est bien l'expression du nombre triangulaire T_n du chapitre 5,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = T_n\,\frac{2n+1}{3}$$

(ceci montre que si $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ n'est pas multiple de 3, il faut que $2n+1$ le soit, ce qui peut d'ailleurs aussi être démontré comme suit : si $\frac{n(n+1)}{2}$ n'est pas multiple de 3, donc que ni n, ni $n+1$ ne le sont, le nombre précédent $n-1$ doit l'être et par suite aussi son double $2n-2$, ainsi que $(2n-2)+3 = 2n+1$),

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1 + 8 + 27 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = T_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

(ceci montre que la somme des cubes des n premiers nombres naturels $\sum_{i=1}^{n} i^3$ est toujours un carré parfait ; c'est le carré de la simple somme de ces nombres ; par exemple $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = 1+8+27+64+125 = 225 = 15^2 = (1+2+3+4+5)^2$). On a ensuite

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^4 &= \frac{1}{30}\,n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = \frac{1}{5}(3n^2+3n-1)\sum_{i=1}^{n} i^2, \\
\sum_{i=1}^{n} i^5 &= \frac{1}{12}\,n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) = \frac{1}{3}(2n^2+2n-1)\sum_{i=1}^{n} i^3.
\end{aligned}$$

Ces résultats sont en accord avec les expressions de ces sommes données vers la fin du chapitre 7 à propos des nombres de Bernoulli, sous une forme un peu différente, qu'on obtient à partir de celle-ci en effectuant les produits des expressions entre parenthèses comme le permet la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, puis en groupant les termes suivant les puissances de n. Par exemple, pour la somme des $5^{\text{èmes}}$ puissances des 8 premiers nombres naturels, la formule que nous venons d'écrire donne $\sum_{i=1}^{8} i^5 = \frac{1}{12} \times 8^2 \times (8+1)^2 \times (2 \times 8^2 + 2 \times 8 - 1) = \frac{1}{12} \times 64 \times 81 \times 143 = 61\,776$; ceci coïncide bien avec ce que donne l'expression du chapitre 7 : $\sum_{i=1}^{8} i^5 = \frac{8^6}{6} + \frac{8^5}{2} + \frac{5\times 8^4}{12} - \frac{8^2}{12} = \frac{262\,144}{6} + \frac{32\,768}{2} + \frac{5\times 4\,096}{12} - \frac{64}{12} = 61\,776$. Les expressions données ci-avant pour calculer les S_p de proche en proche deviennent dans le cas particulier des nombres naturels, si on pose

$$s_p = \sum_{i=1}^{n} i^p$$

(d'où $s_0 = n$ comme S_0),

$$s_p = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=1}^{p} C_{p+1}^{j+1} s_{p-j} \right] = n + \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^{p} C_{p+1}^{j+1} \left(n^{j+1} - s_{p-j} \right).$$

En fait, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} s_p \quad = \quad & \frac{1}{p+1}\, n^{p+1} + \frac{1}{2}\, n^p + \frac{p}{12}\, n^{p-1} - \frac{(p-1)(p-2)}{720}\, n^{p-3} \\ & + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{30\,240}\, n^{p-5} \\ & - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)(p-6)}{1\,209\,600}\, n^{p-7} + \cdots , \end{aligned}$$

le dernier terme étant en n ou n^2 suivant que p est pair ou impair (> 1). Deux autres cas simples de progressions arithmétiques illimitées sont constitués par la suite des nombres pairs et la suite des nombres impairs, avec $a_1 = 2$ ou $a_1 = 1$ respectivement et $r = 2$ dans les deux cas. Les sommes des n premiers nombres de ces suites, à savoir $n(n+1)$ et n^2, ont déjà été données à la fin du chapitre 2. Pour calculer les sommes des $p^{\text{èmes}}$ puissances des n premiers nombres pairs, plutôt que d'appliquer les formules générales, il est plus simple de remarquer que chaque terme est 2^p fois le terme correspondant de la suite avec les nombres naturels et qu'il en est donc de même de leur somme, puisqu'on peut alors mettre 2^p en évidence ; on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i) &= 2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n = n(n+1),\\
\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 &= 4+16+36+\cdots+(2n-2)^2+(2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3},\\
\sum_{i=1}^{n}(2i)^3 &= 8+64+216+\cdots+(2n-2)^3+(2n)^3 = 2n^2(n+1)^2,
\end{aligned}$$

plus généralement :

$$\sum_{i=1}^{n}(2i)^p = 2^p s_p(n)$$

avec la notation

$$s_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p = 1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p \quad (s_p \text{ ci-dessus}).$$

Pour la suite des n premiers nombres impairs, on peut simplement remarquer que c'est la suite des $2n$ premiers nombres naturels moins celle des n premiers nombres pairs ; on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= 1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1) = n^2,\\
\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 &= 1+9+25+\cdots+(2n-3)^2+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3},\\
\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 &= 1+27+125+\cdots+(2n-3)^3+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1),
\end{aligned}$$

plus généralement :

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^p = s_p(2n) - 2^p s_p(n)$$

avec la notation ci-dessus.

Il est évident que les sommes d'un nombre fini de nombres naturels, de nombres pairs ou de nombres impairs consécutifs quand on ne commence pas au premier peuvent facilement être obtenues par différence ; par exemple, si $m < n$, on a

$$\sum_{i=m}^{n} i = m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(n-1)+n = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2}\cdot$$

D'autre part, on peut se proposer de calculer les sommes alternées, c'est-à-dire avec des signes + et − alternés, des termes d'une progression arithmétique ou des mêmes puissances de ces termes ; mais les résultats sont alors différents suivant qu'on prend un nombre pair ou un nombre impair de termes : dans le premier cas, c'est-à-dire si n est pair, le dernier terme de la somme alternée est $-a_n$, tandis que si le nombre n de termes est impair, le dernier terme est $+a_n$. Désignons par S_{p-} la somme alternée des $p^{\text{èmes}}$ puissances, on trouve si n est pair :

$$\begin{aligned}
S_{1-} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-1} - a_n = -\frac{nr}{2}, \\
S_{2-} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i^2 = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \cdots + a_{n-1}^2 - a_n^2 \\
&= -\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]r = -rS, \\
S_{3-} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i^3 = a_1^3 - a_2^3 + a_3^3 - a_4^3 + \cdots + a_{n-1}^3 - a_n^3 \\
&= -\frac{n}{4}\left[6a_1^2 + 6a_1(n-1)r + n(2n-3)r^2\right] r,
\end{aligned}$$

on a

$$S_{p-} = S_p - 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{2i}^p$$

et pour le calcul de proche en proche :

$$S_{p-} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} C_p^j r^j \left(a_1^{p-j} n^j + S_{(p-j)-}\right) \quad \text{avec } S_{0-} = 0.$$

Si au contraire n est impair, on trouve

$$\begin{aligned}
S_{1-} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{n-1} + a_n \\
&= a_1 + \frac{(n-1)r}{2} = \frac{S}{n}, \\
S_{2-} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i^2 = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \cdots - a_{n-1}^2 + a_n^2 \\
&= a_1^2 + \frac{n-1}{2}(2a_1 + nr),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{3-} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i^3 = a_1^3 - a_2^3 + a_3^3 - a_4^3 + \cdots - a_{n-1}^3 + a_n^3 \\ &= a_1^3 + \frac{n-1}{4}\left[6a_1^2 + 6a_1nr + (n-1)(2n+1)r^2\right]r, \end{aligned}$$

on a

$$S_{p-} = S_p - 2\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} a_{2i}^p$$

et pour le calcul de proche en proche :

$$S_{p-} = a_1^p + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} C_p^j r^j \left(a^{p-j}n^j - S_{p-j}\right) \quad \text{avec } S_{0-} = 1.$$

En particulier, pour les sommes alternées des mêmes puissances des n premiers nombres naturels, on a si n est pair :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i &= 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (n-1) - n = -\frac{n}{2}, \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^2 &= 1 - 4 + 9 - 16 + \cdots + (n-1)^2 - n^2 = -\frac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^3 &= 1 - 8 + 27 - 64 + \cdots + (n-1)^3 - n^3 = -\frac{n^2(2n+3)}{4}; \end{aligned}$$

si n est impair :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i &= 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - (n-1) + n = \frac{n+1}{2}, \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^2 &= 1 - 4 + 9 - 16 + \cdots - (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^3 &= 1 - 8 + 27 - 64 + \cdots - (n-1)^3 + n^3 = \frac{(n+1)^2(2n-1)}{4} \end{aligned}$$

et pour le calcul de proche en proche, si on pose

$$s_{p-} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^p,$$

respectivement pour n pair et n impair :

$$s_{p-} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} C_p^j(n_j + s_{(p-j)-}) \qquad \text{avec } s_{0-} = 0,$$

$$s_{p-} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} C_p^j(n_j - s_{(p-j)-}) \quad \text{avec } s_{0-} = 1;$$

en fonction de sommes non alternées, avec la notation

$$s_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p,$$

respectivement :

$$\begin{aligned} s_{p-} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^p = 1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \cdots + (n-1)^p - n^p \\ &= s_p(n) - 2^{p+1}s_p\left(\frac{n}{2}\right), \\ s_{p-} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^p = 1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \cdots - (n-1)^p + n^p \\ &= s_p(n) - 2^{p+1}s_p\left(\frac{n-1}{2}\right). \end{aligned}$$

Pour les sommes alternées des puissances des n premiers nombres pairs, on trouve si n est pair :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i) &= 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (2n-2) - 2n = -n \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i)^2 &= 4 - 16 + 36 - 64 + \cdots + (2n-2)^2 - (2n)^2 = -2n(n+1), \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i)^3 &= 8 - 64 + 216 - 512 + \cdots + (2n-2)^3 - (2n)^3 \\ &= -2n^2(2n+3), \end{aligned}$$

si n est impair :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i) &= 2-4+6-8+\cdots-(2n-2)+2n = n+1,\\
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i)^2 &= 4-16+36-64+\cdots-(2n-2)^2+(2n)^2 = 2n(n+1),\\
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i)^3 &= 8-64+216-512+\cdots-(2n-2)^3+(2n)^3\\
&= 2(n+1)^2(2n-1)
\end{aligned}$$

et plus généralement,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i)^p = 2^p s_{p-}$$

avec la notation ci-dessus.
Pour les sommes alternées des mêmes puissances des n premiers nombres impairs, on a si n est pair :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i-1) &= 1-3+5-7+\cdots+(2n-3)-(2n-1) = -n,\\
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i-1)^2 &= 1-9+25-49+\cdots+(2n-3)^2-(2n-1)^2 = -2n^2,\\
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i-1)^3 &= 1-27+125-343+\cdots+(2n-3)^3-(2n-1)^3\\
&= -n(4n^2-3),
\end{aligned}$$

si n est impair :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i-1) &= 1-3+5-7+\cdots-(2n-3)+(2n-1) = n,\\
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i-1)^2 &= 1-9+25-49+\cdots-(2n-3)^2+(2n-1)^2 = 2n^2-1,\\
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i-1)^3 &= 1-27+125-343+\cdots-(2n-3)^3+(2n-1)^3\\
&= n(4n^2-3)
\end{aligned}$$

et plus généralement,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(2i-1)^p = \sum_{j=0}^{p}(-1)^{p-j}2^jC_p^js_{j-}$$

toujours avec la même notation (et notamment avec $s_0 = 0$ si n est pair et $= 1$ si n est impair).

Enfin, on peut aussi calculer les sommes de produits de termes consécutifs de la suite des nombres naturels :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(i+1) &= 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},\\ \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) &= 1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\end{aligned}$$

et plus généralement

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\dots(i+k-1) &= 1\cdot 2\cdot 3\dots k+2\cdot 3\cdot 4\dots(k+1)\\ &\quad +\cdots+n(n+1)\dots(n+k-1)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{k+1}.\end{aligned}$$

Etant donné que les nombres triangulaires $T_n = \sum_{i=1}^{n} i$ ont pour valeur $\frac{n(n+1)}{2}$, comme indiqué au chapitre 5 et comme on l'a retrouvé ici un peu plus haut, la somme $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$ considérée ci-dessus est celle dont les termes sont les T_i à un facteur 2 près, qu'on peut mettre en évidence :

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} 2T_i = 2\sum_{i=1}^{n} T_i;$$

or cette dernière somme définit les nombres pyramidaux $P_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$, pour lesquels nous avons trouvé au chapitre 5, $P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, dont le double est bien ce qui est donné ci-dessus. On a de même pour le nombre hyperpyramidal

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} P_i = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

d'après ce qui vient d'être écrit ; ceci est bien la valeur donnée au chapitre 5. Quant à la formule générale, on peut vérifier qu'elle est en accord avec l'expression de H_n^p du chapitre 5.

Dans le cas d'une progression arithmétique quelconque, de premier terme a_1 et de raison r, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} &= \frac{n}{3}\left[3a_1^2 + 3a_1 nr + (n^2-1)r^2\right], \\ \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} a_{i+2} &= \frac{n}{4}\left[4a_1^3 + 6a_1^2(n+1)r + 2a_1(2n^2+3n-1)r^2 \right. \\ &\quad \left. +(n^2-1)(n+2)r^3\right].\end{aligned}$$

Pour des sommes alternées, on a si n est pair :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} a_i a_{i+1} &= -\frac{n}{2}(2a_1 + nr)r, \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2} &= -\frac{n}{4}\left[6a_1^2 + 6a_1(n+1)r + (n+2)(2n-1)r^2\right] r,\end{aligned}$$

si n est impair :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} a_i a_{i+1} &= a_1(a_1+r) + \frac{n-1}{2}\left[2a_1 + (n+1)r\right] r, \\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2} &= a_1(a_1+r)(a_1+2r) + \frac{n-1}{4}\left[6a_1^2 + 6a_1(n+2)r \right. \\ &\quad \left. +(n+1)(2n+3)r^2\right] r;\end{aligned}$$

en particulier pour la suite des nombres naturels ($a_i = i$, $a_1 = 1$, $r = 1$), ceci donne si n est pair :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} i(i+1) &= 1\cdot 2 - 2\cdot 3 + 3\cdot 4 - 4\cdot 5 + \cdots - n(n+1) \\ &= -\frac{n(n+2)}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i(i+1)(i+2) &= 1\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3\cdot 4+\cdots-n(n+1)(n+2)\\ &= -\frac{n(n+2)(2n+5)}{4},\end{aligned}$$

si n est impair :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i(i+1) &= 1\cdot 2-2\cdot 3+3\cdot 4-4\cdot 5+\cdots+n(n+1)\\ &= \frac{(n+1)^2}{2},\\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i(i+1)(i+2) &= 1\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)\\ &= \frac{(n+1)(n+3)(2n+1)}{4},\end{aligned}$$

à quoi nous pouvons ajouter si n est pair :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i(i+1)(i+2)(i+3) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4-2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\\ &\quad +\cdots-n(n+1)(n+2)(n+3)\\ &= -\frac{n(n+2)^2(n+4)}{2},\end{aligned}$$

si n est impair :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i(i+1)(i+2)(i+3) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4-2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\\ &\quad +\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)\\ &= \frac{(n+1)(n+3)(n^2+4n+1)}{2}.\end{aligned}$$

On peut encore noter les résultats suivants :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2^{n-i+1}} &= \frac{2}{2^n} + \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{4}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{n}{2^2} + \frac{n+1}{2} = n, \\
\sum_{i=1}^{n} i(i+2) &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}, \\
\sum_{i=1}^{n} (2i-1)(2i+1) &= 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) \\
&= \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}, \\
\sum_{i=1}^{n} 2i(2i+2) &= 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + \cdots + 2n(2n+2) \\
&= \frac{4n(n+1)(n+2)}{3}, \\
\sum_{i=1}^{n} (2i-1)2i &= 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n-1)2n \\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}, \\
\sum_{i=1}^{n} 2i(2i+1) &= 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \cdots + 2n(2n+1) \\
&= \frac{n(n+1)(4n+5)}{3}, \\
\sum_{i=1}^{n} 2i(2i+1)(2i+2) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 \cdot 8 \\
&\quad + \cdots + 2n(2n+1)(2n+2) \\
&= 2n(n+1)^2(n+2), \\
\sum_{i=1}^{n} (2i-1)2i(2i+1) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot 7 \\
&\quad + \cdots + (2n-1)2n(2n+1) \\
&= n(n+1)(2n^2+2n-1).
\end{aligned}
$$

Bien sûr, les nombres considérés deviennent vite très grands. En vérité, la plupart de toutes ces formules n'ont guère d'utilité. Je me sens même un peu honteux d'avoir consacré pas mal de temps à les chercher, ainsi que bien d'autres encore d'ailleurs. Pourtant, je suis persuadé de n'être pas le seul à l'avoir fait !

Nous avons donné ci-avant l'expression de la somme des termes d'une progression arithmétique et les expressions de diverses sommes qu'on pouvait y associer, telles que les sommes des mêmes puissances de ces termes, mais par contre il n'y a pas d'expression algébrique donnant le produit des termes d'une progression arithmétique. En particulier, le produit des n premiers termes de la suite des nombres naturels n'est égal à aucune expression simple, de même que le produit des n premiers nombres pairs et celui des n premiers nombres impairs. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, le premier de ces produits est appelé *factorielle* (simple) de n et les deux autres, *factorielles doubles* de $2n$ et de $2n-1$, qu'on note comme suit :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} i &= 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n = n!,\\ \prod_{i=1}^{n}(2i) &= 2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)\cdot 2n = (2n)!!,\\ \prod_{i=1}^{n}(2i-1) &= 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)\cdot(2n-1) = (2n-1)!!\end{aligned}$$

et on a

$$(2n)!! = 2^n\cdot n! \quad \text{et} \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!2^{n-1}}.$$

Pour le produit des nombres naturels consécutifs du $m^{\text{ème}}$ au $n^{\text{ème}}$ (avec $m < n$), on a évidemment

$$\prod_{i=m}^{n} i = \frac{n!}{(m-1)!}$$

et des formules analogues pour les factorielles doubles. Le produit des termes d'une progression arithmétique a_1, a_2, …, a_n peut s'exprimer respectivement à l'aide de factorielles simples ou de factorielles doubles lorsque a_1 est multiple de r ou de $\frac{r}{2}$: m étant un nombre naturel, si $a_1 = mr$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}\, r^n$$

et en particulier si $a_1 = r$ (d'où $a_i = ir$),

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = r \cdot 2r \cdot 3r \ldots nr = n! r^n;$$

si $a_1 = \frac{m}{2}\, r$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{(m+2n-2)!!}{(m-2)!!} \left(\frac{r}{2}\right)^n$$

et en particulier si $a_1 = \frac{r}{2}$ (d'où $a_i = (2i-1)\frac{r}{2}$),

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{r}{2} \cdot \frac{3r}{2} \cdot \frac{5r}{2} \cdots \frac{2n-1}{2}\, r = (2n-1)!! \left(\frac{r}{2}\right)^n .$$

Lorsque n n'est pas un nombre entier, cette notion de factorielle de n peut être généralisée par l'usage d'une fonction transcendante, la fonction $\Gamma(x)$ (gamma majuscule) d'Euler, qui lorsque la variable x a une valeur entière, se ramène à la factorielle de celle-ci à une unité près, suivant la formule

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

En utilisant cette fonction, on peut alors donner une expression du produit des termes d'une progression arithmétique dans le cas général où $a_i = \alpha r$, α n'étant ni entier ni demi-entier, suivant la formule

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\, r^n.$$

Cette fonction d'Euler est telle que

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

que x soit entier ou non. Lorsque la variable est demi-entière, on a

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\, \sqrt{\pi};$$

en particulier, si $n = 0$ (se souvenir que, comme vu à la fin du chapitre 5, $(-1)!! = 1$),

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Le produit des premiers nombres triangulaires T_n, évoqués un peu plus haut et que nous avions définis au chapitre 5, où nous les avions aussi appelés *termiennes* par analogie avec les factorielles, est donné en fonction de la factorielle par la formule suivante :

$$\prod_{i=1}^{n} T_i = \frac{n!(n+1)!}{2^n} = \frac{(n+1)(n!)^2}{2^n}.$$

Mais pour le produit des premières factorielles $\prod_{i=1}^{n} i!$, il n'existe pas d'expression algébrique simple ; on peut seulement écrire :

$$\prod_{i=1}^{n} i! = G(n+2)$$

où G est une fonction transcendante qui intervient dans l'expression de la primitive du logarithme de la fonction Γ. On peut en déduire que

$$\prod_{i=1}^{n} i^i = \frac{(n!)^n}{G(n+1)}.$$

Pour en revenir à la théorie générale des progressions arithmétiques, on peut donner les deux énoncés suivants, assez évidents :

1) si on ajoute un même nombre à tous les termes d'une progression arithmétique, les nombres obtenus constituent une progression arithmétique, dont la raison est d'ailleurs la même ;
2) si on multiplie tous les termes d'une progression arithmétique par un même nombre, les nombres obtenus constituent une progression arithmétique, dont la raison est aussi multipliée par ce nombre.

Plus généralement, si les nombres a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ constituent une progression arithmétique de premier terme a_1 et de raison r, les nombres ba_i+c $(i = 1, 2, \ldots, n)$ constituent une progression arithmétique dont le premier terme est $ba_1 + c$ et dont la raison est bc ; en prenant $b = 0$ ou $c = 0$, on retrouve chacun des deux énoncés qui viennent d'être donnés. Utilisons cette propriété pour obtenir une progression arithmétique quelconque, de premier terme a_1 et de raison r, à partir de celle que forment les nombres naturels 1, 2, 3, ... : il suffit de prendre $b = r$ et $c = a_1 - r$, puisqu'en faisant $i = 1, 2, 3, \ldots$ dans $ri+(a_1-r)$, on obtient $a_1 = r+(a_1-r) = a_1$, $a_2 = 2r + (a_1 - r) = a_1 + r$, $a_3 = 3r + (a_1 - r) = a_2 + r$, etc. D'autre part, on voit facilement qu'entre les termes a_j et a_i d'une progression arithmétique de raison r, on a la relation générale

$$a_i = a_j + (i-j)r.$$

Concernant les progressions arithmétiques pour lesquelles à la fois le premier terme et la raison sont des nombres entiers, ce qui entraîne que ce soit le cas de tous les termes, il est bon de citer un théorème obtenu en 1837 par Dirichlet (G. Dirichlet, mathématicien allemand, 1805-1859), auquel on a donné le nom de "théorème de la progression arithmétique" dans la théorie des nombres premiers (dont nous avons vu, rappelons-le, qu'ils constituent une suite illimitée dans la suite des nombres naturels). Ce théorème peut s'énoncer comme suit : étant donnés deux nombres naturels m et n premiers entre eux, il y a une infinité de nombres premiers de la forme $n+im$; en d'autres termes, comme dans la suite des nombres naturels, on en trouvera une infinité parmi les termes de la progression arithmétique constituée par les nombres obtenus quand on donne à i toutes les valeurs entières successives dans une telle expression.

Insérer k moyens arithmétiques, où k est un nombre naturel quelconque, entre deux nombres quelconques a et b (avec $a < b$) est l'opération consistant à former une progression arithmétique de $k+2$ termes dont le premier et le dernier sont respectivement a et b, ayant donc k termes intermédiaires entre a et b. On peut voir que la raison de cette progression est donnée par $\frac{b-a}{k+1}\cdot$ Si on insère un même nombre k de moyens entre les termes successifs d'une progression arithmétique donnée a_1, a_2, …, a_n de raison r, on obtient une progression arithmétique unique dont la raison est $\frac{r}{k+1}\cdot$

A propos des progressions arithmétiques, il est amusant de noter qu'il existe des formules relativement simples donnant les sommes des sinus ou des cosinus dont les arguments sont les termes d'une progression arithmétique (dont nous désignons le premier terme par le lettre grecque alpha) :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \sin(\alpha+ir) &= \sin\alpha + \sin(\alpha+r) + \sin(\alpha+2r) + \cdots + \sin(\alpha+nr) \\
&= \frac{\sin\left(\alpha+\dfrac{nr}{2}\right)\cdot\sin\dfrac{(n+1)r}{2}}{\sin\dfrac{r}{2}}, \\
\sum_{i=0}^{n} \cos(\alpha+ir) &= \cos\alpha + \cos(\alpha+r) + \cos(\alpha+2r) + \cdots + \cos(\alpha+nr) \\
&= \frac{\cos\left(\alpha+\dfrac{nr}{2}\right)\cdot\sin\dfrac{(n+1)r}{2}}{\sin\dfrac{r}{2}}.
\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \sin i\alpha &= \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha \\ &= \frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \cos i\alpha &= \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha \\ &= \frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

9.2.2 Les progressions géométriques

Passons maintenant aux progressions géométriques. Leur théorie est assez analogue à celle des progressions arithmétiques à condition de se souvenir que les rôles que jouaient l'addition et la soustraction dans ces dernières vont y être joués par la multiplication et la division. Une *progression géométrique* est une suite de nombres a_1, a_2, …, a_n telle que chacun de ses termes est égal au précédent multiplié par un nombre constant appelé *raison*, qu'on désigne par q :

$$a_i = a_{i-1}\cdot q \quad (i = 2,\, 3,\, \ldots,\, n).$$

Ces progressions sont parfois appelées progressions par quotient pour rappeler que le rapport, c'est-à-dire le quotient exact, de deux termes consécutifs est constant :

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = q.$$

Par exemple, la progression de 5 termes avec $a_1 = 10$ et $q = 2$ est 10, 20, 40, 80, 160. Avec le même premier terme $a_1 = 10$ et le même nombre de termes, mais avec pour raison $q = 0{,}2 = \frac{1}{5}$, on a la progression 10, 2, 0,4, 0,08, 0,016. On ne considère généralement que des progressions géométriques pour lesquelles $q > 0$; si q était négatif, la règles des signes (chapitre 6) entraînerait que les termes seraient alternativement positifs et négatifs. Dans l'hypothèse où $a_1 > 0$, la progression est croissante si $q > 1$, tandis qu'elle est décroissante si $0 < q < 1$. Ce serait le contraire dans l'hypothèse où $a_1 < 0$. Dans l'hypothèse où q serait négatif, cela reste vrai pour les valeurs absolues des termes, à condition de prendre la valeur absolue de q pour distinguer les deux cas suivant que $|q| > 1$ et $|q| < 1$. Trois termes consécutifs forment une proportion continue :

$$\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{a_i}{a_{i+1}}$$

et chaque terme intermédiaire est la moyenne géométrique du terme qui le précède et de celui qui le suit :

$$a_i = \mathcal{M}_2(a_{i-1}, a_{i+1})$$

si on suppose tous les termes positifs, donc $q > 0$. A partir de la définition, on obtient de proche en proche $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, ..., $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$, ..., $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (ce qui reste vrai même si $q < 0$). On peut éventuellement considérer une progression illimitée en faisant $n \to \infty$ et on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

suivant que $q > 1$ ou $0 < q < 1$ respectivement ; on peut même prolonger la progression indéfiniment aussi dans l'autre sens en faisant $i = 0, -1, -2, \ldots \to -\infty$ et alors c'est lorsque $q > 1$ qu'on a $\lim_{n\to-\infty} a_n = 0$. Dans le cas d'un nombre fini de termes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, le produit de deux termes équidistants des extrêmes est constant :

$$a_{1+i} \cdot a_{n-i} = a_1 \cdot a_n.$$

On en déduit que le produit des termes

$$P = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

est donné par

$$P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = a_1 \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Etant donné que quand on élève des nombres à une puissance p, leur produit est élevé à cette puissance p (distributivité de l'élévation à une puissance p par rapport à la multiplication : chapitre 1), le produit des $p^{\text{èmes}}$ puissances des a_i est égal à P^p. Quand à la somme S des termes de la progression géométrique a_1, a_2, ..., a_n, on l'obtient facilement en soustrayant S de $S \cdot q$ et en remarquant que dans la différence, a_2 s'annule avec $a_1 \cdot q$, a_3 avec $a_2 \cdot q$, etc. jusque a_n avec $a_{n-1} \cdot q$; il reste

$$Sq - S = a_n \cdot q - a_1,$$

d'où

$$S = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

(ce qu'on écrit $S = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q}$ lorsque $0 < q < 1$) et si on reprend l'expression ci-dessus de a_n, ceci peut aussi s'écrire

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \left(= a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}\right).$$

Lorsque $0 < q < 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} S = \frac{a_1}{1 - q}\cdot$$

Pour avoir la somme alternée $a_1 - a_2 + \cdots$ jusque $-a_n$ si n est pair et $+a_n$ si n est impair, il suffit de remplacer q par $-q$ dans les formules ci-dessus. Pour obtenir la somme des $p^{\text{èmes}}$ puissances des termes, il faut remplacer dans les formules ci-dessus, a_n par a_n^p, a_1 par a_1^p et q par q^p. Par exemple, pour la progression de 5 termes donnée plus haut avec $a_1 = 10$ et $q = 2$, on a $S = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} = 10\,\frac{2^5 - 1}{2-1} = 10\,\frac{32-1}{1} = 310$; la somme alternée $10 - 20 + 40 - 80 + 160$ est $= 10\,\frac{1+2^5}{1+2} = 10 \cdot \frac{33}{3} = 110$; enfin, la somme par exemple des cubes des termes $10^3 + 20^3 + 40^3 + 80^3 + 160^3$ est $= 10^3\,\frac{2^{3\times 5}-1}{2^3-1} = 1\,000\,\frac{32\,768-1}{8-1} = 1\,000\,\frac{32\,767}{7} = 4\,681\,000$. En fait, si les nombres a_1, a_2, …, a_n sont en progression géométrique de raison q, les nombres a_i^p ($i = 1$, 2, …, n) sont en progression géométrique de premier terme a_1^p et de raison q^p ; en particulier (faire $p = -1$), les nombres $\frac{1}{a_i}$ forment une progression géométrique de premier terme $\frac{1}{a_1}$ et de raison $\frac{1}{q}\cdot$ Quant aux nombres ba_i où b est un nombre quelconque, ils constituent une progression géométrique de premier terme ba_1 et dont la raison reste q ; en particulier (faire $b = -1$), les nombres $-a_i$ ($i = 1$, 2, …, n) constituent une progression géométrique de premier terme $-a_1$ avec toujours la même raison q. Avec les nombres ba_i^p, on obtient une progression géométrique de premier terme ba_1^p et de raison q^p. On peut dire aussi que les nombres $(-1)^{i-1}a_i$ forment une progression géométrique de premier terme a_1, mais dont la raison est $-q$. Enfin, si on a deux progressions géométriques l'une a_1, a_2, …, a_n de raison q_a et l'autre b_1, b_2, …, b_n de raison q_b, on obtient en faisant les produits terme à terme, une progression géométrique a_1b_1, a_2b_2, …, a_nb_n de raison q_aq_b, et en faisant les quotients terme à terme, une progression géométrique $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$,…, $\frac{a_n}{b_n}$ de raison $\frac{q_a}{q_b}\cdot$ Il est d'autre part évident que les puissances entières successives d'un même nombre donnent une progression géométrique illimitée dont le premier terme et la raison sont égaux à ce nombre, par exemple, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, …, soit 2, 4, 8, 16, 32, 64, …, ou aussi 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, …, soit 3, 9, 27, 81, 243, 729, … ; elles sont de la forme a, a^2, a^3, …, a^i, …. Plus généralement, une progression géométrique est formée par les nombres obtenus en élevant un nombre quelconque a aux puissances égales aux valeurs données par une fonction linéaire $bi + c$ de l'indice i, soit $a_i = a^{bi+c}$; le premier terme est a^{b+c} et la raison est a^b. Enfin, il est facile de voir qu'entre les termes quelconques a_j et a_i d'une progression géométrique de raison q, on a la relation

$$a_i = a_j \cdot q^{i-j}.$$

Semblablement à ce que nous avons vu pour les progressions arithmétiques, on peut insérer des moyens (géométriques) entre les termes successifs d'une progression géométrique et ainsi obtenir une progression géométrique unique dont les termes sont plus proches les uns des autres. Si k est le nombre de moyens insérés entre les termes successifs de la progression donnée, de raison q, la progression géométrique obtenue a pour raison $\sqrt[k+1]{q}$ (on suppose $q > 0$).

9.3 Les logarithmes

Maintenant, mettons en parallèle, en regard, une progression géométrique dont le premier terme soit 1 et la raison un nombre $a > 1$, et une progression arithmétique dont le premier terme soit 0 et la raison 1, ces progressions étant prolongées indéfiniment dans les deux sens :

$$\ldots, \quad \frac{1}{a^n}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{a^2}, \quad \frac{1}{a}, \quad 1, \quad a, \quad a^2, \quad \ldots, \quad a^n, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad -n, \quad \ldots, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n, \quad \ldots.$$

On appelle *logarithme* d'un terme de la progression géométrique le terme correspondant de la progression arithmétique. Le nombre a est appelé la *base* de ce système de logarithmes et on écrit

$$\log_a a^n = n;$$

la base est donc le nombre dont le logarithme est 1 :

$$\log_a a = 1.$$

En insérant un même nombre de moyens entre les termes des deux progressions, on peut obtenir le logarithme de a^x quand x n'est pas entier (tout au moins quand x est rationnel, mais par passage à la limite, on peut passer à un x quelconque), mais le nombre dont on prend le logarithme doit être > 0 et son logarithme est > 0 ou < 0 suivant qu'il est respectivement > 1 ou < 1. On a

$$\log \frac{1}{x} = -\log x$$

(on appelle parfois *cologarithme* de x l'opposé de son logarithme ; on a alors $\log \frac{1}{x} = -\log x = \operatorname{colog} x$) et

$$\log 1 = 0.$$

Si un nombre est compris entre a^n et a^{n+1}, son logarithme est compris entre n et $n+1$.

On peut voir que quels que soient les nombres positifs A et B, on a

$$\log(A \cdot B) = \log A + \log B \quad \text{et} \quad \log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

et quel que soit le nombre (réel) p,

$$\log A^p = p \cdot \log A \quad \text{et} \quad \log \sqrt[p]{A} = \log A^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \log A.$$

Ainsi, pour trouver le produit ou le quotient de deux nombres, on est ramené à faire la somme ou la différence de leurs logarithmes ; pour obtenir la $p^{\text{ème}}$ puissance ou la racine $p^{\text{ème}}$ d'un nombre, on est ramené à multiplier ou diviser son logarithme par p. Chaque opération est donc ramenée à une opération moins compliquée, plus facile. C'est le grand intérêt (à une époque où les calculatrices électroniques n'existaient pas !) de l'introduction des logarithmes par le mathématicien écossais J. Neper (1550-1617, en général appelé Napier en France). Sa trouvaille a beaucoup intéressé H. Briggs (1561-1631), qui enseignait à Oxford et à qui il a présenté ses travaux ; ce professeur de mathématique anglais a suggéré de prendre pour base le nombre 10 : c'est le *système des logarithmes vulgaires ou décimaux* ou encore *système de Briggs*, pour lequel on sous-entend en général l'indice 10 dans $\log_{10}$ pour l'indication de la base (comme nous avons sous-entendu ci-dessus cette indication de la base, qui pouvait être quelconque, dans les énoncés des théorèmes généraux). L'avantage de ce système de base 10 est non seulement que le logarithme d'une puissance entière de 10 est un nombre entier puisqu'alors $\log 10^n = n$, mais surtout que tous les nombres qui sont représentés par une même suite de chiffres dans le système décimal, avec éventuellement des 0 à leur droite, ont des logarithmes qui ne diffèrent que par leur partie entière, appelée *caractéristique*, tandis que la partie fractionnaire (illimitée), appelée *mantisse*, est la même : on a par exemple en se limitant à la cinquième décimale pour la mantisse, $\log 1{,}958 = 0{,}291\,81$, $\log 19{,}58 = 1{,}291\,81$, $\log 195{,}8 = 2{,}291\,81$, $\log 1\,958 = 3{,}291\,81$, $\log 19\,580 = 4{,}291\,81$, etc. Il arrive même que pour le logarithme d'un nombre inférieur à 1, on mette un signe $-$ au dessus de la caractéristique, en écrivant par exemple $\log 0{,}195\,8 = \bar{1}{,}291\,81$ plutôt que $-0{,}708\,19$ et $\log 0{,}019\,58 = \bar{2}{,}291\,81$ plutôt que $-1{,}708\,19$. Si on déplace la virgule d'un nombre décimal de n rangs vers la droite ou qu'on ajoute n zéros à la droite d'un nombre entier écrit dans le système de numération décimale, son logarithme augmente de n unités et inversement. Cela résulte de ce que d'après les formules écrites ci-avant, on a

$$\log(x \cdot 10^n) = \log x + n.$$

Bien sûr, pour profiter du remplacement d'une opération sur des nombres par une opération plus simple à faire sur leurs logarithmes, il faut disposer d'une table des logarithmes. La propriété que nous venons de voir en facilite l'usage dans le cas des logarithmes de base 10. Briggs et Neper ont déjà établi de telles tables, avec de nombreuses décimales. Si par exemple on cherche le produit des nombres A et B, on va voir dans une table quelles sont les valeurs de leurs logarithmes, on les additionne, puis on retourne voir dans la table, en l'utilisant en sens inverse, quel est le nombre qui a ce logarithme : c'est le produit cherché. Avant l'apparition de machines à calculer électroniques, beaucoup d'éditeurs ont publié des tables de logarithmes, le plus souvent à cinq décimales, pour les nombres entiers de 1 à 10 000 et on pouvait même détailler davantage par interpolation en admettant qu'entre deux nombres voisins, le logarithme varie linéairement, c'est-à-dire que l'accroissement du logarithme est proportionnel à l'accroissement du nombre.

On a appelé *bâtons de Neper* ou *réglettes de Neper* un dispositif qui permettait de voir très facilement quel est le produit ou le quotient de deux nombres si on se contente d'une précision moyenne. Quand on fait glisser des réglettes l'une contre l'autre, les longueurs des portions graduées de l'une et l'autre s'additionnent ; si la graduation est faite en échelle logarithmique, ce sont les logarithmes qui s'additionnent et on peut ainsi voir directement le produit. Ce dispositif est l'ancêtre des "règles à calculer", dont étaient munis, jusqu'à ce qu'on dispose de calculatrices électroniques, tous ceux qui devaient professionnellement faire beaucoup d'évaluations numériques, notamment les ingénieurs. Une réglette centrale glisse dans une partie fixe ; l'une et l'autre sont graduées de 1 à 10 en échelle logarithmique. Dès lors, si on place l'origine 1 de la réglette par exemple en face du 2 de la partie extérieure, on voit 4 en face de 2, 6 en face de 3, etc. ; bien sûr, c'est pour multiplier ou diviser des nombres moins simples qu'on s'en sert. Toutefois, depuis qu'on dispose de machines à calculer électroniques, on a pratiquement abandonné l'usage des règles à calculer, aussi bien que celui des tables de logarithmes.

Si nous posons $y = a^x$, on a

$$x = \log_a y.$$

Ceci montre que a^x et $\log_a x$ sont des fonctions inverses l'une de l'autre (chapitre 8).

Comme nous l'avons évoqué un peu plus haut, pour définir le $\log_a$ d'un nombre qui n'est pas de la forme a^n avec n entier (positif ou négatif), il faut insérer un même nombre k de moyens entre les termes des deux progressions. On doit même, en principe, faire $k \to \infty$ pour avoir les logarithmes de tous les nombres, les irrationnels compris. D'après ce que nous avons vu plus haut au sujet de l'insertion de moyens dans les progressions, la raison de la progression arithmétique, qui était 1, devient $\frac{1}{k+1}$ et celle de la progression géométrique, qui était a, devient $\sqrt[k+1]{a}$. Désignons $\sqrt[k+1]{a}$ par $1+\alpha$, en posant $\alpha = \sqrt[k+1]{a} - 1$, et désignons $\frac{1}{k+1}$ par β. Les progressions en regard l'une de l'autre deviennent

$$\begin{array}{cccccccc} \ldots, & 1, & 1+\alpha, & (1+\alpha)^2, & \ldots, & (1+\alpha)^{k+1} = a, & \ldots \\ \ldots, & 0, & \beta, & 2\beta, & \ldots, & (k+1)\beta = 1, & \ldots, \end{array}$$

ce qui donne notamment

$$\beta = \log_a(1+\alpha).$$

On appelle *module absolu* M_a du système de logarithmes de base a la limite du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ lorsqu'on fait tendre k vers l'infini :

$$M_a = \lim_{k\to\infty} \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha} \log_a(1+\alpha) = \lim_{k\to\infty} \log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

d'après la propriété

$$p \log A = \log A^p.$$

Or faire tendre k vers l'infini revient à faire tendre α vers zéro et nous avons vu au chapitre précédent que

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Il vient donc

$$M_a = \log_a e$$

Si en particulier on prend pour base a le nombre e, on obtient $M_e = 1$; ces logarithmes qui ont pour base e sont appelés *logarithmes naturels* ou *logarithmes népériens*. Au lieu de $\log_e x$, on écrit d'ailleurs le plus souvent $\ln x$ ou même parfois simplement ℓx, mais cette dernière notation est à éviter, car elle peut faire croire qu'il s'agit du produit d'un nombre ℓ par x ; la notation $\mathrm{Log}\, x$ est parfois aussi utilisée pour $\log_e x$.

Pour passer d'un système de logarithmes à un autre, on utilise la formule, assez facile à démontrer,

$$\log_b x = \log_a x \cdot \frac{1}{\log_a b},$$

qu'on peut écrire

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a,$$

car

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b},$$

comme le montre cette formule si on y fait $x = a$. On peut en déduire d'une part que le rapport des logarithmes de deux nombres dans un même système est indépendant de ce système et d'autre part que le rapport des logarithmes d'un même nombre dans deux systèmes différents est indépendant du nombre. Le nombre $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ par lequel il faut multiplier le $\log_a$ d'un nombre pour obtenir son $\log_b$ est appelé le *module* (relatif) du système de base b par rapport au système de base a. En particulier, si on prend pour a le nombre 10 et pour b le nombre transcendant e, on obtient la relation suivante entre les logarithmes décimaux log et les logarithmes népériens ln :

$$\ln x = \log x \cdot \frac{1}{\log e} \simeq \log x \times 2{,}302\,585 \quad \text{et} \quad \log x = \ln x \cdot \frac{1}{\ln 10} \simeq \ln x \times 0{,}434\,294.$$

Etant donné que le module absolu M_a du système de base a est tel que $M_a = \log_a e$, avons-nous vu ci-dessus, ce module absolu est le module relatif de ce système par rapport au système népérien. Ce dernier est important non seulement parce qu'il s'introduit naturellement comme nous l'avons vu ci-avant, mais surtout parce que la dérivée de la fonction $y = \ln x$ est $y' = \frac{1}{x}$; autrement dit, la fonction primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$. La primitive de x^n (que n soit entier ou non) est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (on augmente l'exposant d'une unité et on divise par le nouvel exposant), et cela quel que soit n (qui peut même être $= 0$, puisque si $y = x$, on a $y' = 1$ et qu'effectivement $x^0 = 1$) sauf pour $n = -1$, valeur pour laquelle l'expression que nous venons de donner pour la primitive de x^n donnerait $\frac{1}{0}$; ce cas spécial est résolu par ce qui vient d'être dit : la primitive de $x^{-1} = \frac{1}{x}$ est $\ln x$. Ce qui caractérise spécialement aussi cette fonction $\ln x$, c'est que sa fonction inverse est l'exponentielle au sens étroit e^x, qui est la fonction telle que $y' = y$, comme il a été indiqué au chapitre 8.

Puisque x doit être positif pour qu'on puisse en prendre le logarithme, sa dérivée, qui est $\frac{1}{x}$, est positive et le logarithme est donc une fonction croissante ; mais étant donné que $\frac{1}{x}$ tend vers zéro lorsque $x \to \infty$, le logarithme croît de moins en moins vite pour les grandes valeurs de x. Au contraire, sa fonction inverse, l'exponentielle, croît de plus en plus rapidement quand x grandit, d'où l'expression "croître exponentiellement" pour caractériser cette croissance qui devient de plus en plus rapide quand la variable grandit. Ceci est illustré par la figure ci-dessous et le serait même encore mieux si on la prolongeait davantage vers la droite. Les courbes représentant les fonctions $y = \ln x$ et $y = e^x$, qui sont des fonctions inverses l'une de l'autre, sont symétriques par rapport à la bissectrice des axes, c'est-à-dire la droite $y = x$, conformément à ce qui a été vu au chapitre 8.

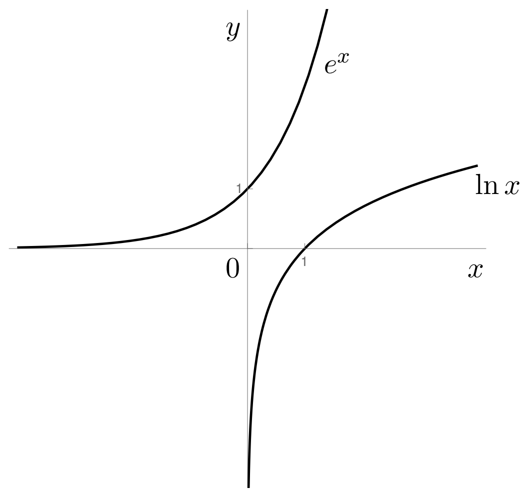


Figure 16 : Variations de l'exponentielle et du logarithme

Puisque la fonction logarithme n'était pas encore vue lorsque nous avons donné, au chapitre 8, les développements en séries des fonctions dont nous avions parlé, ce qui concerne à ce sujet la fonction $\ln x = \log_e x$ n'y a pas été donné. Voici ce qu'on peut démontrer pour cette fonction, comme l'ont trouvé indépendamment l'un de l'autre Mercator (mathématicien allemand, 1620-1687, N. Kaufmann dit Mercator, qu'il ne faut pas confondre avec le cartographe G. Mercator) et Newton :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i}$$

à condition que $-1 < x \leq +1$. Si on y fait $x = 1$, on obtient la série harmonique alternée $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, qui vaut donc $\ln 2 = \log_e 2$, comme cela a été indiqué quand nous avons introduit la notion de série au chapitre 8. Si on remplace dans cette formule x par $-x$, il vient

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$$

$$\left(\text{ou} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = \ln \frac{1}{1-x}\right)$$

sous la condition que $-1 \leq x < +1$. En soustrayant l'un de l'autre les développements en séries de $\ln(1+x)$ et de $\ln(1-x)$, en appliquant la formule $\log A - \log B =$

$\log \frac{A}{B}$, on trouve

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$

valable pour $|x| < 1$; quand x varie dans l'intervalle $(-1, +1)$, $\frac{1+x}{1-x}$ varie dans tout l'intervalle $(0, +\infty)$, or cette série est plus rapidement convergente que le développement de $\ln(1+x)$, ce qui peut être avantageux pour des calculs.

9.4 Les proportions de nombres premiers

Revenons à la variation de la proportion de nombres premiers dans la suite des nombres naturels, ce dont nous avons parlé vers la fin du chapitre 3. Nous avons donné le nombre $P(n)$ de nombres premiers $\leq n$ pour quelques valeurs de n. Au-delà de $n = 10$, une assez bonne approximation pour $P(n)$ est fournie par

$$P(n) \simeq \frac{n}{\ln n - 1}.$$

Evidemment, $P(n)$ montre des fluctuations dans ses variations, que ne reproduit pas cette expression. De plus, celle-ci donne presque systématiquement des valeurs un peu trop grandes tant qu'on reste en-dessous d'environ 450 ; l'écart devient même très grand pour les très petites valeurs de n, étant donné que cette expression $\to \infty$ pour $n \to e$ puisque le dénominateur s'annule pour $n = e \simeq 2{,}718$. Pour les grandes valeurs de n, elle donne au contraire des résultats trop petits. C'est pour des valeurs de n de quelques centaines ou de l'ordre de 1 000 qu'elle convient le mieux. Notamment si nous reprenons les valeurs de $P(n)$ données au chapitre 3 de 100 à 3 000 et que nous mettons en regard sur une troisième ligne les valeurs de $\frac{n}{\ln n - 1}$ à 0,1 près, nous obtenons

n	100	200	300	400	500	600	800	1 000	2 000	3 000
$P(n)$	26	47	63	79	96	110	140	169	304	431
	27,7	46,5	63,8	80,1	95,9	111,2	140,7	169,3	303,0	428,2.

Si nous désignons par E l'écart, en posant

$$\frac{n}{\ln n - 1} - P(n) = E,$$

on peut écrire que

pour	$11 \leq n \leq 100$	$100 \leq n \leq 250$	$250 \leq n \leq 500$,
on a	$0 < E < +2{,}1$	$-0{,}7 < E < +2{,}5$	$-1{,}3 < E < +2{,}4$;
pour	$500 \leq n \leq 1\,000$	$1\,000 \leq n \leq 1\,500$	$1\,500 \leq n \leq 2\,700$,
on a	$-1{,}75 < E < +2{,}5$	$-3{,}7 < E < +3{,}2$	$-4{,}6 < E < +1{,}8$.

Pour $n \geq 2\,700$, E est < 0 sauf pour les valeurs suivantes de n : de 3 155 à 3 166, pour 3 179 et 3 180, de 3 245 à 3 250, de 3 287 à 3 300 de 3 303 à 3 306, pour 3 311 et 3 312, de 3 444 à 3 448 et de 3 452 à 3 456, la valeur la plus grande dans le sens positif au-delà de 2 700 étant 1,437 pour $n = 3\,298$. Mais dans le sens $E < 0$, cet écart est souvent nettement plus grand en valeur absolue, même parfois déjà pour $n < 2\,700$, en raison des fluctuations de $P(n)$, notamment vers 1 310 et 1 330, aux alentours de 1 630 et de 2 150, de 2 380 à 2 500 environ. Au-delà des valeurs ci-dessus pour n, l'expression approximative donne systématiquement des valeurs trop petites, en général de plusieurs unités. L'écart grandit en valeur absolue pour les plus grandes valeurs de n. Pour $n = 10\,000$, $100\,000$ et $1\,000\,000$, on a respectivement $E = -12$, -81 et -469 ; en valeur relative, ceci fait respectivement près de -1 %, $-0{,}84$ % et $-0{,}6$ %. Pour les deux dernières valeurs de n considérées dans la table du chapitre 3, soit dix millions et un milliard, on trouve respectivement $-0{,}47$ % et $-0{,}287$ % correspondant à $E = -3\,121$ et $E = -145\,937$. L'écart continue à diminuer en valeur relative, mais grandit toujours en valeur absolue, tendant même vers $-\infty$ quand $n \to \infty$. Pour les très grandes valeurs de n, une meilleure approximation est fournie par la fonction logarithme intégral, $\mathrm{Li}(x)$, qui est la fonction primitive de $\frac{1}{\ln x}\cdot$ Pour les deux dernières valeurs de n que nous venons de considérer, dix millions et un milliard, on trouve des écarts avec $\mathrm{Li}(n)$ qui ne sont plus que 338,4 et 1 756, soit 0,05 % et 0,003 5 %, cette fois dans le sens $\mathrm{Li}(n) - P(n) > 0$. Au chapitre 3, nous avons déjà montré que la proportion des nombres premiers diminue au fur et à mesure qu'on avance dans la suite des nombres naturels : parmi les nombres naturels de 1 à n, la proportion de ceux qui sont premiers décroît quand n grandit. Cette proportion, $\frac{P(n)}{n}$, est plus ou moins donnée par

$$\frac{P(n)}{n} \simeq \frac{1}{\ln n - 1}$$

selon l'approximation donnée ci-avant. Ceci montre que $P(n)$, qui tend évidemment vers l'infini lorsque c'est le cas pour n, ne grandit pas aussi vite que n ; le rapport tend vers zéro pour $n \to \infty$, puisqu'il est approximativement égal à l'inverse de $\ln n - 1$, qui tend vers l'infini. Mais il ne faut pas se leurrer ; le rapport de $P(n)$ à n décroît de plus en plus lentement, car $\ln n$ croît de plus en plus lentement étant donné que, comme nous avons noté un peu plus haut, la dérivée de $\ln x$, qui est $\frac{1}{x}$, tend vers 0 quand $x \to \infty$.

Considérons à présent la somme des inverses de tous les nombres premiers, à partir de 2, avec un exposant x, soit $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{11^x} + \cdots$, qu'on peut noter en abrégé par la notation $\sum_{\substack{p=2 \\ \text{premier}}}^{\infty} \frac{1}{p^x}$ en notant que la somme n'est appliquée qu'aux nombres p qui sont premiers. Lorsque $x = 1$, cette somme est infinie, tout comme la série harmonique $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$, constituée de la somme des inverses de tous les nombres naturels (chapitre 8) ; on peut démontrer que lorsque x tend vers 1 par valeurs > 1, cette somme tend vers l'infini comme $\ln \frac{1}{x-1}$, c'est-à-dire qu'on a

$$\sum_{\substack{p=2 \\ \text{premier}}}^{\infty} \frac{1}{p^x} \to \ln \frac{1}{x-1} \quad \text{quand } x \to 1.$$

Rappelons enfin que la fonction de Riemann $\zeta(x)$, fonction transcendante introduite au chapitre 8 et définie par

$$\zeta(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n} \quad \text{où } n \geq 1,$$

est liée à la théorie des nombres premiers, comme nous l'avons alors signalé ; nous avons en effet écrit qu'avec la notation $\prod_{\substack{p=2 \\ \text{premier}}}^{\infty}$ pour un produit portant uniquement sur les nombres p qui sont premiers, de 2 à l'infini, comme nous venons de faire pour la somme $\sum_{\substack{p=2 \\ \text{premier}}}^{\infty}$, on a

$$\zeta(x) = \prod_{\substack{p=2 \\ \text{premier}}}^{\infty} \frac{p^x}{p^x - 1},$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$\zeta(x) = \prod_{\substack{p=2 \\ \text{premier}}}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1}.$$

9.5 Sommes de quelques suites d'inverses

Nous allons terminer ce chapitre, dont une large part est occupée par l'étude des progressions, par la considération de suites se rattachant aux progressions et plus spécialement celle dont les termes sont les inverses des nombres naturels successifs. Pour désigner la somme des inverses des nombres naturels de 1 à n, nous utiliserons la lettre grecque ômêga majuscule en posant

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \Omega(n).$$

Les valeurs de $\Omega(n)$ pour les premiers nombres naturels n sont données dans le tableau suivant :

n	$\Omega(n)$	n	$\Omega(n)$	n	$\Omega(n)$
1	1	5	$\frac{137}{60} \simeq 2{,}283\,333\,333$	9	$\frac{7\,129}{2\,520} \simeq 2{,}828\,968\,254$
2	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	6	$\frac{49}{20} = 2{,}45$	10	$\frac{7\,381}{2\,520} \simeq 2{,}928\,968\,254$
3	$\frac{11}{6} \simeq 1{,}833\,333\,333$	7	$\frac{363}{140} \simeq 2{,}592\,857\,143$	11	$\frac{83\,711}{27\,720} \simeq 3{,}019\,877\,345$
4	$\frac{25}{12} \simeq 2{,}083\,333\,333$	8	$\frac{761}{280} \simeq 2{,}717\,857\,143$	12	$\frac{86\,021}{27\,720} \simeq 3{,}103\,210\,678$.

Je vous invite à continuer, si vous voulez, jusque par exemple $\Omega(25) \simeq 3{,}815\,958\,177\,753\,5\ldots$ et encore au-delà si cela vous amuse. Maintenant qu'on dispose de machines électroniques pour calculer, c'est certainement plus facile qu'à l'époque où je l'ai fait. On doit y ajouter $\Omega(0) = 0$, qu'on obtient en faisant $n = 1$ dans la relation de récurrence

$$\Omega(n) = \Omega(n-1) + \frac{1}{n}$$

écrite sous la forme

$$\Omega(n-1) = \Omega(n) - \frac{1}{n}\cdot$$

Si $\Omega(n) = \frac{p}{q}$, cette fraction étant réduite à sa plus simple expression (p et q premiers entre eux, voir vers le début du chapitre 4) et que n est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier, le dénominateur est multiple de n, c'est-à-dire $q = \mathfrak{M}n$. D'autre part, signalons qu'on a

$$\Omega(n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{C_n^i}{i}\cdot$$

Si on veut la somme des inverses de nombres naturels successifs sans commencer à 1, mais de m à $m+n$, on procède par différence :

$$\sum_{i=m}^{m+n} \frac{1}{i} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+n-1} + \frac{1}{m+n} = \Omega(m+n) - \Omega(m-1).$$

La somme des inverses des n premiers nombres pairs est obtenue en divisant membre à membre par 2 la relation qui définit $\Omega(n)$; il vient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,\Omega(n).$$

En soustrayant ceci de $\Omega(2n)$, on obtient la somme des inverses des n premiers nombres impairs :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1} = \Omega(2n) - \frac{1}{2}\,\Omega(n).$$

Si dans une progression arithmétique, on a $a_1 = kr$, d'où

$$a_i = kr + (i-1)r = (k-1+i)r,$$

on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k-1+i} = \frac{1}{r}[(\Omega(n+k-1) - \Omega(k-1)];$$

si en particulier $k = 1$, on trouve

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{ri} = \frac{1}{r}\,\Omega(n)$$

puisque $\Omega(0) = 0$ et comme on le voit directement en divisant membre à membre par r la formule définissant $\Omega(n)$ (si $r = 2$, ce résultat ramène à la formule ci-dessus donnant la somme des inverses des n premiers nombres pairs). Plus généralement, la somme des inverses des n premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est a_1 et la raison r, donc telle que $a_i = a_1 + (i-1)r$, est donnée par

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{r}\left[\Omega\left(\frac{a_1}{r} + n - 1\right) - \Omega\left(\frac{a_1}{r} - 1\right)\right].$$

Pour les sommes alternées des inverses des nombres naturels de 1 à n, on a les formules suivantes, facilement obtenues à partir de celles données ci-dessus pour les sommes des inverses des nombres pairs et des nombres impairs ; si n est pair :

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\,\frac{1}{i} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \Omega(n) - \Omega\left(\frac{n}{2}\right),$$

si n est impair :

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\,\frac{1}{i} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \Omega(n) - \Omega\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

On peut aussi noter les formules

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

et à la limite,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1,$$

comme indiqué au chapitre 8,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

et à la limite,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{4}$$

comme indiqué aussi au chapitre 8, ainsi que

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega(i) = (n+1)\Omega(n) - n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\Omega(i)}{i!(n-i)!} = \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Si pour $\Omega(n)$ on ne limite pas à un nombre fini n la suite des nombres naturels dont on fait la somme des inverses, mais qu'on la prolonge indéfiniment, on obtient la série harmonique $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, qui est divergente :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \lim_{n \to \infty} \Omega(n) = \infty.$$

Cette somme tend vers l'infini au même rythme que $\ln n$, c'est-à-dire que quand $n \to \infty$, ces deux quantités tendent vers l'infini toutes les deux, mais le rapport entre elles tend vers 1, car la différence entre les deux reste finie. Nous avons vu que $\ln n$ croît de plus en plus lentement au fur et à mesure que n grandit, parce que la dérivée de $\ln x$ tend vers zéro quand $n \to \infty$; $\Omega(n)$ croît aussi de plus en plus lentement, parce que les termes $\frac{1}{n}$ qu'on ajoute sont de plus en plus petits quand n grandit. La différence $\Omega(n) - \ln n$ entre ces deux fonctions est $= 1$ pour $n = 1$ puisque $\Omega(1) = 1$ et que $\ln 1 = 0$; elle est environ 0,8 pour $n = 2$, à peine 0,7 pour $n = 4$ et elle est de moins de 0,6 à partir de $n = 22$. Comme nous venons de dire, elle reste finie quand n grandit indéfiniment, le nombre fini vers lequel tend cette différence entre $\ln n$ et $\Omega(n)$ est désigné par la lettre grecque gamma et est appelé *constante d'Euler* : on a

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n \right) = \gamma \simeq 0{,}577\,215\,665.$$

Dans ce qui est exposé ci-avant, la fonction $\Omega(x)$ n'est définie que pour les valeurs de x égales à un nombre naturel n (si ce n'est éventuellement pour la formule donnant $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ où les a_i sont les termes d'une progression arithmétique, si a_1 n'est pas $\mathfrak{M}r$). La généralisation de cette fonction $\Omega(x)$ aux valeurs non entières de x peut se faire par la relation

$$\Omega(x) = \Psi(x) + \gamma$$

où γ est la constante d'Euler que nous venons de citer et où la fonction représentée par un psi majuscule est la dérivée du logarithme népérien de la fonction Γ d'Euler dont nous avons parlé plus haut dans ce chapitre à propos des factorielles, à un changement près d'une unité pour la variable, suivant la formule (voir dérivée d'une fonction de fonction vers la fin du chapitre 8)

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}.$$

Notons que $\Psi(0) = -\gamma$ et que $\Psi(x)$ satisfait à la relation

$$\Psi(x) = \frac{1}{x} + \Psi(x-1),$$

qu'on obtient en prenant membre à membre le logarithme de

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

puis en dérivant membre à membre en tenant compte de

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\cdot$$

Si nous écrivons cette relation avec pour variable successivement x, $x+1$, ..., $x+n-1$ et que nous additionnons membre à membre, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x+i-1} = \Psi(x+n-1) - \Psi(x-1);$$

si nous y faisons $x = \frac{a_1}{r}$ et que nous tenons compte de $a_i = a_1 + (i-1)r$ dans une progression arithmétique, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{r}\left[\Psi\left(\frac{a_1}{r} + n - 1\right) - \Psi\left(\frac{a_1}{r} - 1\right)\right],$$

ce qui est bien la relation écrite plus haut avec Ω puisque $\Psi(x) = \Omega(x) - \gamma$. En dérivant $p-1$ fois la relation avant-précédente, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x+i-1)^p} = \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \left[\Psi^{(p-1)}(x-1) - \Psi^{(p-1)}(x+n-1)\right]$$

où $\Psi^{(p-1)}(x)$ désigne la $(p-1)^{\text{ème}}$ dérivée de $\Psi(x)$. En particulier, si on prend $x = 1$, on obtient la somme des inverses des $p^{\text{èmes}}$ puissances des nombres naturels de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^p} + \frac{1}{n^p} = \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \left[\Psi^{(p-1)}(0) - \Psi^{(p-1)}(n)\right].$$

Pour $p > 1$, on a

$$\frac{(-1)^p}{(p-1)!} \Psi^{(p-1)}(0) = \zeta(p)$$

où ζ est la fonction de Riemann définie par

$$\zeta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x}$$

(chapitre 8 et ci-avant) ; on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p} = \zeta(p) - \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \Psi^{(p-1)}(n).$$

Lorsque p est pair, on a

$$\zeta(p) = \frac{2^{p-1}\pi^p B_{\frac{p}{2}}}{p!}$$

où les B sont les nombres de Bernoulli $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ... (fin du chapitre 7). En particulier, pour $p = 2$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \Psi'(n) = \frac{\pi^2}{6} - \Omega'(n)$$

(car $\Psi^{(p)}(x) = \Omega^{(p)}(x)$ lorsque $p \geq 1$).

Chapitre 10

Deux nombres remarquables

10.1 Le nombre 2

Nous allons consacrer ce dernier chapitre à deux nombres dont les propriétés sont remarquables pour l'un comme pour l'autre. Contrairement à ce que nous avons fait au chapitre 5, où nous avons étudié des nombres qui sont remarquables par les propriétés des ensembles qu'ils forment, il s'agit ici de deux nombres qui sont remarquables par eux-mêmes. Ils n'ont d'ailleurs rien à voir l'un avec l'autre et nous les examinerons donc séparément, successivement. L'un des deux est un nombre que nous connaissons tous très bien, qui est très courant, qui est manié tous les jours ; l'autre est moins connu, bien qu'il ait été étudié dès l'Antiquité.

On trouve le premier presque tout au début de la suite des nombres naturels ; c'est le nombre $2 = 1 + 1$. Il a la particularité remarquable de donner le même résultat quand on le multiplie par lui-même que quand on l'additionne à lui-même :

$$2 + 2 = 2 \times 2.$$

On trouve 4 dans les deux cas. Cette particularité est propre à ce nombre 2, mis à part 0, pour lequel on a aussi

$$0 + 0 = 0 \times 0,$$

mais pour lequel on reste à la valeur 0. Pour un autre nombre, le résultat est différent : on a par exemple $3 + 3 = 6$, tandis que $3 \times 3 = 9$, ou aussi $1 + 1 = 2$ et $1 \times 1 = 1$. Pour tout nombre a tel que $0 < a < 2$, on a $a + a > a \times a$, c'est-à-dire $2a > a^2$; pour tout nombre a tel que $a > 2$, on a $a + a < a \times a$, c'est-à-dire $2a < a^2$.

On a même

$$2 + 2 = 2 \times 2 = 2^2,$$

c'est-à-dire qu'on obtient le même résultat, 4, quand 2 est combiné à lui-même par chacune des trois opérations fondamentales : addition, multiplication, puissance.

L'addition et la multiplication étant des opérations associatives, on a

$$(n+n) = n + (n+n) \quad \text{et} \quad (n \times n) \times n = n \times (n \times n);$$

mais l'élévation à une puissance n'est pas associative, on a donc normalement

$$(n^n)^n \neq n^{(n^n)} \quad \text{pour un } n \text{ quelconque.}$$

Par exemple, on a

$$(3^3)^3 = 27^3 = 19\,683 \quad \text{et} \quad 3^{(3^3)} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987,$$

ce qui est très différent. Mais on constate que

$$(2^2)^2 = 4^2 = 16 \quad \text{et} \quad 2^{(2^2)} = 2^4 = 16$$

et donc que

$$(2^2)^2 = 2^{(2^2)}.$$

Cette sorte d'associativité occasionnelle de l'élévation à une puissance est elle aussi propre au nombre 2, mis à part le nombre 1 avec lequel on reste à la valeur 1 :

$$(1^1)^1 = 1^{(1^1)} = 1.$$

On voit qu'on peut écrire

$$4^2 = 2^4$$

puisque

$$4^2 = 16 \quad \text{et} \quad 2^4 = 16,$$

alors que l'élévation à une puissance n'est normalement pas une opération commutative, c'est-à-dire qu'en général $a \neq b$ entraîne $a^b \neq b^a$. Notons à ce propos que le seul cas où on a $a^b - b^a = 1$ en nombres entiers > 1 (au lieu de $a^b - b^a = 0$, avec $a = 4$ et $b = 2$ ou $a = 2$ et $b = 4$) est celui où $a = 3$ et $b = 2$, qui donne

$$3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1,$$

cela en conformité avec la proposition, qu'on a appelée *conjecture de Catalan*, suivant laquelle l'équation

$$x^m - y^n = 1$$

n'admet pas d'autre solution en nombres entiers pour x, y, m et n, que celle que nous venons de citer $3^2 - 2^3 = 1$. Etant donné un nombre a, que nous supposons > 1, demandons-nous quel est le nombre x qui satisfait à l'équation

$$a^x = x^a.$$

Il y a normalement deux solutions, d'abord la solution triviale $x = a$, qui donne $a^a = a^a$, plus une autre. Par exemple pour $a = 3$, l'équation est satisfaite non seulement par $x = 3$, mais aussi par une valeur $x \simeq 2{,}478\,05\ldots$; pour $a = 10$, en plus de la solution $x = 10$, on a une solution $x \simeq 1{,}371\,3$. Habituellement, quand a est entier, la valeur trouvée pour x ne l'est pas ; les seuls cas où on a $a^b = b^a$ avec $a \neq b$ en valeurs entières sont $a = 2$ avec $b = 4$ et par conséquent $a = 4$ avec $b = 2$. Ici encore, 2 joue un rôle remarquable. On peut d'autre part démontrer que la valeur de x qui satisfait à l'équation $a^x = x^a$, en plus de $x = a$, est $< e$ lorsque $a > e$ et est $> e$ lorsque $a < e$ où e est le nombre $\simeq 2{,}718\,28$, base des logarithmes népériens, nombre qui a été introduit au chapitre 8 ; à la limite, lorsque $a = e$, on a la seule solution $x = e$.

Les premières puissances entières de 2 sont données dans le tableau suivant :

n	2^n	n	2^n	n	2^n	n	2^n	n	2^n
1	2	9	512	17	131 072	25	33 554 432	33	8 589 934 592
2	4	10	1 024	18	262 144	26	67 108 864	34	17 179 869 184
3	8	11	2 048	19	524 288	27	134 217 728	35	34 359 738 368
4	16	12	4 096	20	1 048 576	28	268 435 456	36	68 719 476 736
5	32	13	8 192	21	2 097 152	29	586 870 912	37	137 438 953 472
6	64	14	16 384	22	4 194 304	30	1 073 741 824	38	274 877 906 944
7	128	15	32 768	23	8 388 608	31	2 147 483 648	39	549 755 813 888
8	256	16	65 536	24	16 777 216	32	4 294 967 296	40	1 099 511 627 776

Le nombre de chiffres de 2^n dans le système décimal est

$$1 + E(n \log 2) \simeq 1 + E(0{,}301\,03\,n)$$

où $E =$ "plus grand entier contenu dans" ; il est donc de l'ordre de $\frac{n}{3}$ ou plus exactement de l'ordre de $0,3\,n$ pour n grand. Le chiffre des unités se reproduit périodiquement suivant la séquence 2, 4, 8, 6, respectivement pour $n = \mathfrak{M}4 + 1$, $n = \mathfrak{M}4 + 2$, $n = \mathfrak{M}4 + 3$, $n = \mathfrak{M}4$. Les deux derniers chiffres se reproduisent périodiquement à partir de $n = 2$ suivant la séquence 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52 respectivement pour $n = \mathfrak{M}20 + 2$, $\mathfrak{M}20 + 3, \ldots, \mathfrak{M}20 + 19$, $\mathfrak{M}20$, $\mathfrak{M}20 + 1$. On a évidemment toujours $2^n = \mathfrak{M}2$ et on a respectivement pour

n pair	n impair	$n = \mathfrak{M}3$	$n = \mathfrak{M}4$	$n = \mathfrak{M}4 + 1$	$n = \mathfrak{M}4 + 2$	$n = \mathfrak{M}4 + 3$
$2^n = \mathfrak{M}3 + 1$	$2^n = \mathfrak{M}3 - 1$	$2^n = \mathfrak{M}7 + 1$	$2^n = \mathfrak{M}5 + 1$	$2^n = \mathfrak{M}5 + 2$	$2^n = \mathfrak{M}5 - 1$	$2^n = \mathfrak{M}5 - 2.$

Pour les puissances négatives, 2^{-n}, on peut utiliser la formule

$$2^{-n} = \frac{1}{2^n} = 5^n \times 10^{-n},$$

qui les ramène aux puissances entières positives de 5. Les premières valeurs sont

$-n$	2^{-n}	$-n$	2^{-n}	$-n$	2^{-n}	$-n$	2^{-n}
-1	0,5	-4	0,062 5	-7	0,007 812 5	-10	0,000 976 562 5
-2	0,25	-5	0,031 25	-8	0,003 906 25	-11	0,000 488 281 25
-3	0,125	-6	0,015 625	-9	0,001 953 125	-12	0,000 244 140 625.

Nous pouvons nous amuser à écrire les formules assez évidentes

$$2^{n+1} - 2^n = 2^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}},$$

qui donnent les différences entre nombres consécutifs des tableaux ci-dessus.

D'autre part, on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

Une progression géométrique illimitée (au moins à gauche, vers les petites valeurs) de raison 2 comme $\ldots, \frac{1}{2^i}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots, 2^i, \ldots$ est telle que chaque terme est égal à la somme de l'infinité de ceux qui le précèdent. En appliquant ceci au terme 2 de la progression que nous venons d'écrire, on trouve la formule ci-dessus. L'énoncé reste évidemment vrai si au lieu de partir de 1 (pour obtenir tous les termes de droite en multipliant chacun par 2 pour obtenir le suivant et obtenir les termes de gauche en multipliant chaque terme par $\frac{1}{2}$ pour obtenir le précédent), on partait d'un nombre quelconque a, car ceci reviendrait à multiplier tous les termes de la progression par a. Mais cela n'est vrai que pour les progressions géométriques de raison 2, nombre qui ici encore joue donc un rôle particulier.

Si nous soustrayons membre à membre les résultats donnés par cet énoncé appliqué au terme 2^{n+1} et au terme 2 ou appliqué au terme 2^{n+1} et au terme 1, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} 2^i &= 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1), \\ \sum_{i=0}^{n} 2^i &= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1, \end{aligned}$$

ce qu'on peut aussi déduire de la formule donnant la somme des termes d'une progression géométrique (chapitre 9) ; on trouve d'une manière analogue

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n},\\ \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}\cdot\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i 2^{2n-i} &= 2^{2n}-2^{2n-1}+2^{2n-2}-2^{2n-3}+\cdots+2^2-2+1\\ &= \frac{1}{3}(2^{2n+1}+1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i 2^{2n-1-i} &= 2^{2n-1}-2^{2n-2}+2^{2n-3}-2^{2n-4}+\cdots+2^3-2^2+2-1\\ &= \frac{1}{3}(2^{2n}-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2n-1}\frac{(-1)^i}{2^i} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-2}}-\frac{1}{2^{2n-1}}=\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{2^{2n-1}}\right),\\ \sum_{i=0}^{2n}\frac{(-1)^i}{2^i} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{2^{2n}}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{2^i} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right),\\ \sum_{i=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{i+1}}{2^i} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\cdots-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{2n+1}}\right).\end{aligned}$$

En plus de

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}=2$$

écrit plus haut, on a aussi

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots=2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2i+1}{3^i}=\frac{3}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\cdots=2.$$

Une autre particularité du nombre 2 est que sa racine carrée $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ ($\simeq$ 1,414 213 624 ...) s'exprime sous forme de fraction continue avec une infinité de 2. On a en effet

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}},$$

ce qui s'écrit avec les notations indiquées plus haut

$$\sqrt{2} = (1; 2;),$$

comme cela a été cité au chapitre 6 avec les développements en fractions continues des autres premières racines carrées irrationnelles de nombres naturels. On a par conséquent

$$(; 2;) = 1 + \sqrt{2}.$$

A propos de $\sqrt{2}$, on peut encore écrire les formules suivantes, où est utilisée la notation des factorielles doubles introduites vers la fin du chapitre 5 :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{2^i \cdot (2i)!!} &= 1 + \frac{1!!}{2 \cdot 2!!} + \frac{3!!}{2^2 \cdot 4!!} + \frac{5!!}{2^3 \cdot 6!!} + \cdots = \sqrt{2}, \\
\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} &= 1 - \frac{1!!}{2!!} + \frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!} + \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i-1)!!}{(2i+2)!!} &= \frac{1}{2!!} - \frac{1!!}{4!!} + \frac{3!!}{6!!} - \frac{5!!}{8!!} + \cdots = \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}$$

Enfin, demandons-nous ce qu'on obtient lorsqu'on prend la racine carrée de 2 et qu'on y ajoute 2, puis qu'on prend la racine carrée du résultat et qu'on répète ce processus indéfiniment : $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$. Tout simplement et bien remarquablement, à la limite, on obtient 2 :

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} = 2.$$

Tout ce que nous venons de voir montre à quel point ce nombre si élémentaire a de nombreuses propriétés spécifiques bien remarquables, d'ailleurs souvent ignorées pour certaines d'entre elles.

10.2 Le nombre Φ

Maintenant, on peut se demander ce qu'on obtiendrait en mettant des 1 au lieu de 2 pour ce que nous venons de faire avec des radicaux successifs, c'est-à-dire ce que vaut à la limite l'expression $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$. On peut voir qu'on a

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}} = \Phi$$

où Φ est un nombre irrationnel dont la valeur est

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618\,033\,989$$

(ce qu'on peut aussi écrire $0{,}5 + \sqrt{1{,}25}$) et qui a, lui aussi, des propriétés très remarquables. C'est l'autre nombre que nous examinons dans ce dernier chapitre. Notons que quelques auteurs utilisent plutôt cette notation de la lettre grecque phi majuscule pour désigner l'inverse du nombre dont nous venons de donner la valeur ; nous utiliserons l'usage le plus courant, attribué déjà à l'artiste grec Phidias, de prendre la lettre phi majuscule Φ ou minuscule φ pour le nombre que nous venons de considérer.

En particulier, ce nombre répond à la question suivante : quel doit-être le rapport de deux grandeurs a et b pour que le rapport de leur somme à la plus grande des deux soit égal au rapport de la plus grande à la plus petite, c'est-à-dire soit tel qu'on ait, si a est la plus grande,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}\ ?$$

Il faut et il suffit pour cela que le rapport de ces grandeurs soit Φ, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{a}{b} = \Phi.$$

Si deux grandeurs a et b sont telles que le rapport de la plus petite, soit b, à leur différence est égal au rapport de la plus grande à la plus petite, c'est-à-dire si

$$\frac{b}{a-b} = \frac{a}{b},$$

on a aussi $\frac{a}{b} = \Phi$. En fait, la première proposition entraîne la seconde et réciproquement.

Ce qu'on appelle dans les manuels élémentaires de géométrie diviser un segment de droite en moyenne et extrême raison consiste à le diviser en deux parties de longueurs a et b telles que leur rapport soit égal à Φ, comme l'écrivait déjà Euclide. D'après ce que nous venons de voir, cela revient à dire que le rapport de la longueur de tout le segment à celle du plus grand des deux morceaux est égal aussi à Φ, puisqu'alors

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi.$$

Cela équivaut de plus à dire que la longueur a du grand morceau est la moyenne proportionnelle entre celle de tout le segment et la longueur du petit morceau, ce qui s'écrit

$$a = \sqrt{(a+b)b} \quad \text{ou} \quad a^2 = (a+b)b,$$

ce qui est bien ce que donne la proportion $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ lorsqu'on écrit que le produit des moyens égale le produit des extrêmes (voir à la fin du chapitre 4). C'est en fait la définition que donnent habituellement les manuels de géométrie pour la division d'un segment en moyenne et extrême raison.

Ce nombre Φ défini par la propriété exposée ci-dessus était connu dès l'Antiquité. Depuis longtemps, on l'appelle *nombre d'or* ou *section dorée*. Il était reconnu que deux longueurs ayant ce rapport, par exemple prises pour longueur et largeur d'un rectangle, alors qualifié de *rectangle d'or*, donnent une figure ayant une valeur esthétique supérieure à ce qu'on aurait avec deux longueurs ayant un rapport différent. C'est pourquoi on trouve des longueurs ayant ce rapport notamment dans des temples grecs, tels que le Parthénon.

Dans l'art de la Renaissance, comme d'ailleurs un peu dans l'art moderne, on constate aussi un large usage de ce rapport, particulièrement dans les peintures des grands artistes de cette époque. Il est toutefois souvent difficile de savoir dans quelle mesure des artistes construisent d'instinct leurs tableaux en conformité avec la section dorée où s'ils ont délibérément tracé les grandes lignes de leurs oeuvres sur la base du nombre Φ. Léonard de Vinci au moins l'a fait sciemment, car il a dessiné les figures de l'ouvrage “De divina proportione” que le moine franciscain Luca Pacioli di Borgo a consacré à Φ vers 1500, probablement en 1509. Il paraîtrait que même pour la construction des violons, certains luthiers aient utilisé la section dorée.

On peut construire comme suit un rectangle dont les côtés sont dans le rapport Φ. Sur un des côtés d'un angle droit, à partir de son sommet A (figure 17 ci-dessous), portons une longueur donnée AB et sur l'autre côté, la moitié de cette longueur, soit AC. Avec la pointe du compas en C et une ouverture égale à CB, traçons un arc de cercle pour reporter dans le prolongement de AC, une longueur égale à CB, soit CD. Le rectangle construit sur AD et AB a ses côtés dans le rapport Φ.

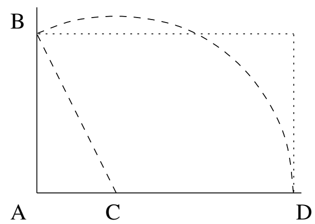


Figure 17 : Construction d'un rectangle ayant des côtés dont le rapport $= \Phi$

Notons que si sur le plus grand côté du rectangle, on construit un carré de même côté, le grand rectangle obtenu par la réunion de ce carré avec le rectangle de départ a aussi ses côtés dans le rapport Φ. On peut évidemment continuer à partir du rectangle obtenu et ainsi de suite. Semblablement, si on retranche du rectangle de départ un carré de côté égal à son petit côté, le rectangle restant a aussi ses côtés dans le rapport Φ, et ainsi de suite aussi.

On s'amuse volontiers à construire une spirale formée d'une suite de quarts de cercles, comme on voit sur la figure 18, en mettant chaque fois la pointe du compas à une extrémité du côté commun au rectangle et au carré ajouté comme décrit ci-dessus et en prenant pour ouverture du compas la longueur de ce côté.

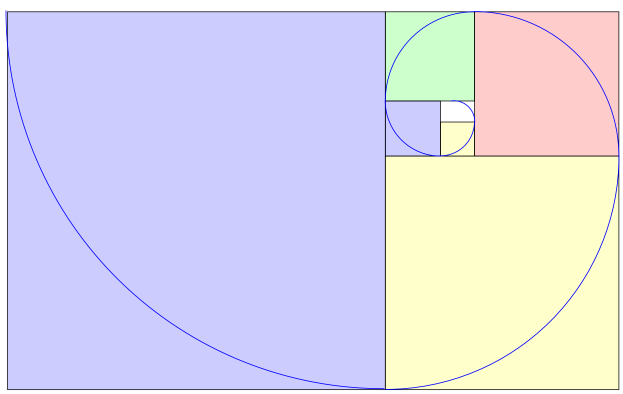


Figure 18 : Spirale construite à partir d'une suite de rectangles d'or

Mais une propriété importante au point de vue de la théorie des nombres, à côté de ce que nous avons dit au début, c'est que Φ est égal à la fraction continue illimitée dont tous les quotients incomplets sont 1 :

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}},$$

soit avec la notation utilisée au chapitre 6,

$$\Phi = (;1;).$$

Les réduites successives de cette fraction continue sont les fractions obtenues en prenant pour numérateur et pour dénominateur deux nombres successifs de la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... dont nous avons parlé au chapitre 7 et dont nous avons désigné le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme par $\mathcal{F}_n$ avec

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1 = 1$$

et tous les termes suivants étant chacun la somme des deux précédents. Les valeurs de ces réduites $\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n}$ constituent donc des approximations de plus en plus exactes de Φ, alternativement plus petites et plus grandes

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{1}{1} = 1, & \dfrac{8}{5} = 1,6, & \dfrac{55}{34} = 1{,}617\,647\,1\ldots, \\[2ex]
\dfrac{2}{1} = 2, & \dfrac{13}{8} = 1{,}625, & \dfrac{89}{55} = 1{,}618\,181\,8\ldots, \\[2ex]
\dfrac{3}{2} = 1{,}5, & \dfrac{21}{13} = 1{,}615\,384\,6\ldots, & \ldots \\[2ex]
\dfrac{5}{3} = 1{,}666\,66\ldots, & \dfrac{34}{21} = 1{,}619\,047\,6\ldots, &
\end{array}$$

avec

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} = \Phi.$$

La propriété de cette suite d'avoir Φ pour limite du rapport de deux termes successifs est d'ailleurs commune à toutes les suites dont les termes sont construits suivant la règle d'être la somme des deux termes précédents. Par exemple, si au lieu de partir, pour les deux premiers termes, de 1 et 1 ou de 1 et 2, ce qui donne la suite de Fibonnacci, nous partons de 1 et 3, ce qui donne 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ..., nous obtenons pour les rapports des termes successifs

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{3}{1} = 3, & \dfrac{7}{4} = 1{,}75, & \dfrac{18}{11} \simeq 1{,}636\,363\,6, & \\[2ex]
\dfrac{4}{3} = 1{,}333\,333\,3\ldots, & \dfrac{11}{7} \simeq 1{,}571\,428\,6, & \dfrac{29}{18} \simeq 1{,}611\,111\,1, & \ldots
\end{array}$$

et à la limite aussi Φ. Il est relativement facile d'en donner une démonstration générale. Il est amusant de noter que si on choisit 1 et Φ pour les deux premiers nombres, le rapport de deux termes consécutifs de la suite est alors égal à Φ dès le début ; en effet, cette suite est alors 1, Φ, $\Phi+1$, $2\Phi+1$, $3\Phi+2$, $5\Phi+3$, $\ldots$, soit d'après ce qui sera vu un peu plus loin, 1, Φ, Φ^2, Φ^3, Φ^4, Φ^5, $\ldots$.

Les rapports de deux termes successifs quelconques de la suite de Fibonnacci comme $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\ldots$ sont eux-mêmes considérés comme intéressants sur le plan esthétique. Les nombres de cette suite apparaissent aussi dans la nature, notamment dans le monde végétal, comme le nombre Φ lui-même d'ailleurs. C'est ainsi que les nombres de spirales, dans un sens ou dans l'autre, que dessine la disposition des étamines au coeur des fleurs sont parmi les nombres de Fibonacci, de même que les nombres d'hélices, dans un sens ou dans l'autre aussi, suivant lesquelles sont disposées les écailles sur les pommes de pins. D'autre part, une constatation remarquable en phyllotaxie est que dans les plantes où les feuilles poussent isolément autour d'une tige, l'angle autour de la tige entre une feuille et la suivante est d'environ 137,5° ou si on tourne dans l'autre sens, 222,5° puisque

$$360^\circ = 137{,}5^\circ + 225{,}5^\circ;$$

or

$$\frac{222{,}5^\circ}{137{,}5^\circ} \simeq \Phi \quad \left(\text{et } \frac{360^\circ}{222{,}5^\circ} \simeq \Phi\right).$$

Pour obtenir l'inverse de Φ, il suffit de retrancher 1 ; on a en effet

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \simeq 0{,}618\,034 \quad \left(\text{et } \Phi + \frac{1}{\Phi} = \sqrt{5}\right).$$

Φ est le plus petit nombre positif dont l'inverse est égal à sa partie fractionnaire ; si plus généralement nous désignons par Φ_n le nombre tel que

$$\frac{1}{\Phi_n} = \Phi_n - n \quad \text{avec } n < \Phi_n < n+1,$$

on a

$$\Phi_n = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} \quad \left(\text{notamment } \Phi_1 = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi_2} &= \Phi_2 - 2 \qquad \text{pour } \Phi_2 = 1+\sqrt{2} \simeq 2{,}414\,214,\\
\frac{1}{\Phi_3} &= \Phi_3 - 3 \qquad \text{pour } \Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \simeq 3{,}302\,776,\\
\frac{1}{\Phi_4} &= \Phi_4 - 4 \qquad \text{pour } \Phi_4 = 2+\sqrt{5}\ (= 2\Phi+1) \simeq 4{,}236\,068,\\
\frac{1}{\Phi_5} &= \Phi_5 - 5 \qquad \text{pour } \Phi_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \simeq 5{,}192\,582,\\
\frac{1}{\Phi_6} &= \Phi_6 - 6 \qquad \text{pout } \Phi_6 = 3+\sqrt{10} \simeq 6{,}162\,278, \ldots;
\end{aligned}$$

à part $\Phi_0 = 1$, ils sont tous irrationnels et pour $n > 2$, on a

$$\Phi_n = n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^5} - \frac{5}{n^7} + \cdots.$$

En ajoutant 1 à Φ, on obtient son carré :

$$\Phi^2 = \Phi + 1.$$

Plus généralement, les puissances entières successives s'obtiennent simplement en multipliant Φ par un nombre entier et en y ajoutant un autre nombre entier à condition que ces nombres soient ceux de la suite de Fibonacci :

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= \Phi + 1,\\
\Phi^3 &= 2\Phi + 1,\\
\Phi^4 &= 3\Phi + 2,\\
\Phi^5 &= 5\Phi + 3,\\
\ldots,&\\
\Phi^n &= \mathcal{F}_{n-1}\Phi + \mathcal{F}_{n-2}.
\end{aligned}$$

On a aussi $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$ et donc $\Phi^n = \Phi^{n+1} - \Phi^{n-1}$.

On a des relations analogues pour les puissances négatives : après $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi^2} &= 2 - \Phi = 1 - \frac{1}{\Phi},\\
\frac{1}{\Phi^3} &= 2\Phi - 3 = \frac{2}{\Phi} - 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi^4} &= 5 - 3\Phi = 2 - \tfrac{3}{\Phi},\\
&\ldots,\\
\frac{1}{\Phi^n} &= (-1)^n(\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_{n-1}\Phi) = (-1)^{n-1}\left(\mathcal{F}_{n-1}\frac{1}{\Phi} - \mathcal{F}_{n-2}\right).
\end{aligned}$$

En combinant ce que ces formules donnent pour Φ^{n+1} et $\frac{1}{\Phi^{n+1}}$ et en tenant compte de $\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-1}$ et de l'expression $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ de Φ, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^{n+1} + \frac{(-1)^n}{\Phi^{n+1}}\right] = \mathcal{F}_n.$$

Comme le terme $\frac{(-1)^n}{\sqrt{5}\,\Phi^{n+1}}$ est inférieur à 1 en valeur absolue (et devient d'ailleurs rapidement très petit quand n est grand), on en déduit que $\mathcal{F}_n$ est l'entier le plus proche de $\frac{\Phi^{n+1}}{\sqrt{5}}$ (et on a $\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi^{n+1}}{\mathcal{F}_n} = \sqrt{5}$).

Demandons-nous maintenant si on peut avoir des progressions géométriques (voir chapitre 9) telles que chaque terme soit égal à la somme des deux précédents, c'est-à-dire telles que

$$a_i = a_{i-2} + a_{i-1} \quad (i = 3, 4, 5, \ldots).$$

Si q est la raison, en introduisant $a_{i-1} = a_{i-2}\cdot q$ et $a_i = a_{i-2}\cdot q^2$, puis en simplifiant par a_{i-2}, on trouve

$$q^2 = 1 + q.$$

Pour qu'une progression géométrique satisfasse à la condition souhaitée, il faut donc que sa raison soit un nombre dont le carré soit égal à ce nombre augmenté d'1 unité ; d'après ce qu'on a vu ci-avant, c'est le cas du nombre Φ. Ainsi, une progression géométrique telle que chaque terme soit la somme des deux précédents a pour raison

$$q = \Phi,$$

du moins si celle-ci est positive ; si c'est une progression géométrique de raison négative, ce qui entraîne que les termes soient alternativement positifs et négatifs, comme nous avons vu au chapitre 9, il faut prendre

$$q = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi},$$

ce qui est la racine négative de l'équation

$$q^2 - q - 1 = 0,$$

dont la racine positive est
$$q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Notons enfin qu'on a

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} + \cdots &= \Phi^2 = \Phi + 1, \\ 1 - \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} - \frac{1}{\Phi^3} + \cdots &= \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \end{aligned}$$

et
$$1 + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^4} + \frac{1}{\Phi^6} + \cdots = \Phi.$$

En géométrie, le nombre Φ se rencontre plusieurs fois quand on étudie les grandeurs qui interviennent dans le pentagone régulier ou dans le décagone régulier. Par exemple, dans le pentagone régulier, le rapport de l'apothème, c'est-à-dire la distance de son centre à chacun de ses côtés, qui est égale au rayon du cercle inscrit, à la distance du centre à chacun des sommets, c'est-à-dire le rayon du cercle circonscrit, est égal à $\frac{\Phi}{2}$; en d'autres termes, le rapport du diamètre du cercle inscrit au rayon du cercle circonscrit est égal à Φ. Dans le pentagone régulier étoilé tel que montré sur la figure 19 ci-dessous, un point d'intersection de deux côtés, tel que A, divise en moyenne et extrême raison chacun des côtés sur lesquels il se trouve, c'est-à-dire qu'on a notamment

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{AC} = \Phi.$$

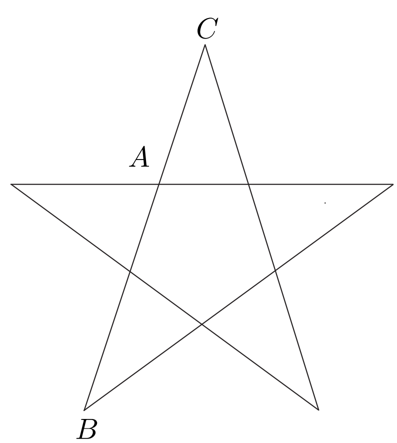


Figure 19 : Pentagone régulier étoilé

Dans le décagone régulier, si nous désignons par c son côté et par $\mathcal{R}$ le rayon du cercle circonscrit, c'est-à-dire la distance du centre à chacun des sommets, on a

$$\frac{\mathcal{R}}{c} = \Phi.$$

Le côté du décagone régulier étoilé est égal à $\Phi\mathcal{R}$ et donc à $\Phi^2 c = (\Phi + 1)c$ où c est comme ci-dessus le côté du décagone non étoilé.

Au sujet de ces propriétés géométriques, notons que

$$\Phi = 2\cos\frac{\pi}{5} \quad (= 2\cos 36^\circ).$$

A propos des suites de nombres, telles que la suite de Fibonacci, construites en prenant pour chaque terme la somme des deux précédents ($u_i = u_{i-1} + u_{i-2}$) et qui donnent Φ quand on prend la limite du rapport de deux termes consécutifs, comme montré plus haut, je me suis amusé à voir ce qu'on obtiendrait avec des suites dont chaque terme serait la somme de l'avant-précédent et deux fois le précédent ($u_i = 2u_{i-1} + u_{i-2}$). En partant de $u_0 = u_1 = 1$, on obtient la suite 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1 393, ... (dans le système décimal, les chiffres des unités se reproduisent périodiquement de douze en douze suivant la séquence 1, 1, 3, 7, 7, 1, 9, 9, 7, 3, 3, 9). En partant de $u_0 = 0$, et $u_1 = 1$, on obtient 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, ... (ici les chiffres des unités se reproduisent de douze en douze suivant la séquence 0, 1, 2, 5, 2, 9, 0, 9, 8, 5, 8, 1). Dans de telles suites, les rapports de deux termes consécutifs ont cette fois pour limite $1 + \sqrt{2}$; on retrouve le nombre 2, tout au moins sa racine, et même 2 lui-même si on écrit ce résultat sous la forme $(;2;)$ comme nous l'avons vu plus haut. Evidemment, les termes de ces deux suites croissent beaucoup plus rapidement que ceux de la suite de Fibonacci, pour laquelle on a $\mathcal{F}_{24} = 75\,025$, tandis que les $25^{\text{èmes}}$ termes (indice 24) de ces suites-ci valent respectivement $768\,398\,401$ et $543\,339\,720$.

En rapport avec les formules données plus haut pour les racines continues

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} = 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = \Phi,$$

on peut se demander quelle est la valeur de

$$X = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}}$$

pour un a quelconque. En élevant au carré, on obtient une équation du second degré, dont la racine positive est

$$X = \frac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

Lorsqu'on prend pour a un nombre naturel, ceci donne un nombre irrationnel pour valeur de X, sauf lorsque a est de la forme

$$a = n(n+1)$$

où n est un nombre entier, auquel cas on trouve

$$X = n + 1.$$

Nous avons déjà vu que pour $a = 1 \times 2 = 2$, on a $X = 2$; on trouve aussi avec $a = 2 \times 3 = 6$, $= 3 \times 4 = 12$, $= 4 \times 5 = 20$, $= 5 \times 6 = 30$, etc., respectivement les résultats suivants : $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots}}} = 3$, $\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \cdots}}} = 4$, $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots}}} = 5$, $\sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \cdots}}} = 6$, etc. Pour les autres valeurs entières de a, on obtient des résultats irrationnels, dont les premiers sont, après

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \quad \text{vu plus haut,}$$

$\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \cdots}}} = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \cdots}}} = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \cdots}}} = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$, $\ldots$.

Pour terminer, signalons que Φ peut s'écrire sous forme d'un produit infini comme suit :

$$\Phi = 2 \prod_{i=1}^{\infty} \frac{25(2i-1)^2 - 4}{25(2i-1)^2} = 2 \cdot \frac{21}{25} \cdot \frac{221}{225} \cdot \frac{621}{625} \cdot \frac{1\,221}{1\,225} \cdots$$

(comme on trouve en introduisant $x = \frac{\pi}{5}$ dans le développement de $\cos x$ en produit infini

$$\cos x = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)^2\pi^2 - 4x^2}{(2i-1)^2\pi^2},$$

puisque, comme indiqué un peu plus haut, $\Phi = 2\cos\frac{\pi}{5}$) et qu'on a la remarquable formule

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{(10i)^2}{(10i)^2 - 1} = \frac{100}{99} \cdot \frac{400}{399} \cdot \frac{900}{899} \cdot \frac{1\,600}{1\,599} \cdot \frac{2\,500}{2\,499} \cdots = \frac{\Phi\pi}{5},$$

qui aurait certainement comblé d'aise des héritiers des pythagoriciens, grands admirateurs du nombre 10, nombre de la tétraktys, et du nombre 5, nombre du pentagramme (pentagone régulier étoilé), et pour qui le “nombre d'or” Φ revêtait aussi une grande importance.

Table des matières