MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE

CINQUIÈME SÉRIE
TOME X
FASCICULE 1

RECHERCHES SUR LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE DES V_3 DE S_5

PAR

J. VANGELDERE
Docteur en Sciences

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE DE BELGIQUE,
DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA CULTURE
ET DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ :
UNIVERSITÉ
7 PLACE DU XX AOÛT
LIÈGE. BELGIQUE

RECHERCHES SUR LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE DES V_3 DE S_5

PAR

J. VANGELDERE
Docteur en Sciences

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous avons étudié les V_3 de S_5 du type général. Elles possèdent donc quatre systèmes distincts de courbes asymptotiques. O. Rozet a déjà considéré le sous-cas des systèmes points de Guichard [4 et 5]. Par ailleurs, E. G. Togliatti a analysé les différents types de V_3 de S_5 possédant au plus trois systèmes distincts d'asymptotiques [10]. Par contre, le cas général n'a jamais été traité.

Pour atteindre notre but, nous avons utilisé une méthode classique en géométrie projective différentielle : caractériser la variété considérée par un système d'équations aux dérivées partielles. Toutefois, contrairement à ce qui se passe dans le cas de l'étude des surfaces, on ne peut généralement plus, dans un problème à plus de deux paramètres essentiels, choisir comme lignes de référence des courbes définies géométriquement. Nous avons donc dû contourner cet écueil et c'est pourquoi nous avons préféré utiliser la notion de différentielle, à laquelle nous pouvions conserver une interprétation géométrique, plutôt que celle de dérivée partielle, qui n'en avait plus.

Dans la première partie de ce travail, nous définissons tout d'abord nos notations et rappelons quelques définitions classiques. Ensuite, nous spécifions la manière dont nous allons exploiter la notion de différentielle.

Dans la seconde partie, nous caractérisons projectivement une V_3 de S_5 du type général par un système (S) d'équations aux dérivées partielles. Après avoir montré que les éléments de ce système déterminent bien n'importe quelle différentielle du point générateur de la variété considérée, nous en recherchons les principales conditions d'intégrabilité. Ensuite, nous caractérisons, à partir du système (S), quelques propriétés géométriques importantes des V_3 étudiées. Nous recherchons notamment les conditions pour que la variété soit réglée, soit un système point de Guichard, ait des courbes planes pour lignes principales, ait un hyperplan bitangent dépendant de deux paramètres essentiels seulement, ait certains systèmes de courbes définis géométriquement appartenant deux à deux à un même système de surfaces ; nous donnons également quelques théorèmes généraux qui lient ces différentes propriétés.

A ce stade, il était naturel d'envisager pour ces V_3 la notion classique de transformé de Laplace. En effet, ce concept est toujours très riche en renseignements sur les structures des variétés étudiées et O. Rozet en avait déjà déduit des propriétés très intéressantes pour les systèmes points de Guichard. Malheureusement, une V_3 de S_5 du type général ne se laisse pas traiter de la même manière que ces systèmes points de Guichard. Nous avons alors dû introduire la notion de transformé de la variété par l'intermédiaire d'un double système conjugué de première espèce. Cette nouvelle notion a le grand avantage d'être très proche de la notion classique et d'admettre notamment celle-ci comme cas particulier, sans toutefois avoir son désavantage : la transformation classique n'existe que pour quelques cas particuliers, tandis que celle que nous avons introduite a toujours lieu.

Dans la troisième et dernière partie de ce travail, nous définissons les doubles systèmes conjugués de première espèce et les transformés de la variété que l'on en déduit. Après avoir étudié quelques propriétés générales de ces doubles systèmes conjugués de première espèce, nous sommes amené à considérer principalement ceux dont le premier système de courbes est formé de lignes principales. Cette étude nous conduit à distinguer, pour chaque système de lignes principales, trois cas fondamentaux. Avant de détailler ces trois cas, nous donnons quelques considérations générales sur les hyperplans bitangents de la V_3 considérée et nous montrons notamment que l'étude de la variété décrite par le dual d'un hyperplan bitangent a des connexions très étroites avec l'étude des doubles systèmes conjugués de première espèce dont le premier système de courbes est le système de lignes principales correspondant à l'hyperplan bitangent considéré. Nous terminons cette troisième partie par l'étude systématique des trois cas fondamentaux signalés ci-dessus, en menant de front l'étude des doubles systèmes qui y interviennent et celle de la variété décrite par le dual de l'hyperplan bitangent correspondant.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur Rozet qui nous a proposé ce beau sujet de recherche et qui nous a éclairé de ses conseils. Nos remerciements vont également à Monsieur le Professeur Jongmans pour ses encouragements.

Première Partie

PRÉLIMINAIRES

Chapitre I

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

1. Points, hyperplans et V_3 de S_5.

Dans un espace projectif S_5, nous désignerons par $x, y, z, \ldots, \xi, \eta, \psi, \ldots$ les points et les hyperplans de coordonnées homogènes $x^i, y^i, z^i, \ldots, \xi^i, \eta^i, \psi^i, \ldots$ $(i = 0, 1, \ldots, 5)$ et nous représenterons par (ξ, x) l'expression $\sum_{i=0}^{5} \xi^i x^i$. La condition nécessaire et suffisante d'appartenance d'un point x à un hyperplan ξ est donc traduite par $(\xi, x) = 0$.

Par définition, une V_3 de S_5 est une variété de S_5 engendrée par un point x dont les coordonnées sont des fonctions de trois paramètres essentiels u, v, w. Dans la suite, nous supposerons que les coordonnées homogènes x^i du point générateur x de la variété (x) sont des fonctions différentiables autant de fois qu'il le faudra pour rendre licites les opérations que nous serons amené à effectuer et nous représenterons par $x_u, x_v, \ldots, x_{uu}, x_{uv}, \ldots, x_{uuu}, \ldots$ les points de S_5 dont les coordonnées sont respectivement $\frac{\partial x^i}{\partial u}, \frac{dx^i}{dv}, \ldots, \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x^i}{\partial u \partial v}, \ldots, \frac{d^3 x^i}{\partial u^3}, \ldots$.

Un point x de S_5 dont les coordonnées sont des fonctions de trois variables u, v, w décrira donc une V_3 de S_5 sous la condition nécessaire et suffisante que les points x, x_u, x_v, x_w soient linéairement indépendants pour des valeurs arbitraires de u, v, w.

Notons encore que deux points de la variété qui proviennent de deux ternes différents de u, v, w doivent toujours être considérés comme distincts même s'ils coïncident géométriquement.

2. Systèmes de courbes de la V_3 et plan projectif π correspondant.

Les équations

$$1\text{-}1 \quad \begin{cases} f_1(uvw) = k_1, \\ f_2(uvw) = k_2, \end{cases}$$

où k_1 et k_2 désignent deux paramètres et où f_1 et f_2 sont deux fonctions de u, v, w telles que la matrice des dérivées partielles du premier ordre soit de rang 2, représentent un *système* (C) *de courbes de la* V_3. A chaque couple de valeurs de k_1 et k_2 correspond une courbe de ce système, engendrée par les points de la V_3 qui sont les images des u, v, w vérifiant les équations (1-1) envisagées.

Un système de courbes de la V_3 *est donc formé par* ∞^2 *courbes de manière que par chaque point de la* V_3 *passe en général une et une seule courbe du système.*

En particulier, les courbes u données par $v = k_1$ et $w = k_2$ forment un système de courbes de la V_3. Il en est de même des courbes v et w.

Notons encore que les équations

$$\begin{cases} \Phi_1(f_1f_2) = k'_1, \\ \Phi_2(f_1f_2) = k'_2, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(f_1, f_2)} \neq 0$$

représentent le même système de courbes de la V_3 que les équations (1-1).

Par ailleurs, il est connu qu'*il existe une correspondance biunivoque entre les systèmes* (C) *de courbes de la* V_3 *et les ternes* (du_C, dv_C, dw_C) *où* du_C, dv_C, dw_C *sont des fonctions de* u, v, w *définies à un facteur non nul de proportionnalité près.* Cette correspondance s'établit comme suit. A un système (C) de courbes, donné par (1-1) par exemple, correspond le terne du_C, dv_C, dw_C solution de

$$1\text{-}2 \quad \begin{cases} f_{1u}du + f_{1v}dv + f_{1w}dw = 0, \\ f_{2u}du + f_{2v}dv + f_{2w}dw = 0. \end{cases}$$

A un terne (du_C, dv_C, dw_C) correspond le système (C) de courbes de la V_3 caractérisé par deux intégrales premières distinctes du système d'équations différentielles

$$\frac{du}{du_{\mathrm{C}}} = \frac{dv}{dv_{\mathrm{C}}} = \frac{dw}{dw_{\mathrm{C}}}.$$

On peut évidemment interpréter du_{C}, dv_{C}, dw_{C} comme les coordonnées homogènes d'un point d_{C} situé dans *un plan projectif* que nous appellerons *plan* π. En conséquence, *il existe une correspondance biunivoque entre les systèmes de courbes de la* V_3 *et les points du plan projectif* π.

Dans la suite, nous utiliserons souvent le langage suivant : si $\mathrm{P}(uvw)$ est un point quelconque de S_5 dépendant des trois variables u, v, w auxquelles est référée la $\mathrm{V}_3(x)$, si $f(uvw)$ est une fonction quelconque de ces variables et si $d_{\mathrm{C}} = (du_{\mathrm{C}}, dv_{\mathrm{C}}, dw_{\mathrm{C}})$ est le point du plan π homologue d'un système (C) de courbes de la $\mathrm{V}_3(x)$,

$$d_{\mathrm{C}}(f) = d_{\mathrm{C}}f = f_u du_{\mathrm{C}} + f_v dv_{\mathrm{C}} + f_w dw_{\mathrm{C}},$$

$$d_{\mathrm{C}}(\mathrm{P}) = d_{\mathrm{C}}\mathrm{P} = \mathrm{P}_u du_{\mathrm{C}} + \mathrm{P}_v dv_{\mathrm{C}} + \mathrm{P}_w dw_{\mathrm{C}}$$

représenteront respectivement ce que nous appellerons les différentielles de la fonction f et du point P dans la direction d_{C} ou le long de la courbe C.

3. Systèmes de surfaces de la V_3.

L'équation

1-3 $f(uvw) = k,$

où k désigne un paramètre et f une fonction de u, v, w telle qu'au moins une de ses dérivées partielles du premier ordre ne soit pas identiquement nulle, représente *un système* (S) *de surfaces de la* V_3. Ce système (S) peut évidemment être considéré de différentes manières comme engendré par ∞^1 systèmes de courbes de la V_3. Le lieu des homologues dans π de ces systèmes de courbes est la droite

1-4 $f_u du + f_v dv + f_w dw = 0.$

En conséquence, la correspondance entre les systèmes de courbes de la V_3 et les points du plan π associe à un système de surfaces de la V_3 une droite du plan π.

Toutefois, remarquons qu'une droite quelconque $n_1du + n_2dv + n_3dw = 0$ du plan π n'est l'homologue d'un système de surfaces de la V_3 que sous la condition nécessaire et suffisante que cette droite représente une différentielle totale exacte (c'est-à-dire que $n_1du + n_2dv + n_3dw$ soit une différentielle totale exacte à un facteur non nul de proportionnalité près).

De ceci, on déduit donc que *la correspondance entre les systèmes de courbes de la V_3 et les points du plan π induit une correspondance biunivoque entre les systèmes de surfaces de la V_3 et les droites du plan π qui représentent des différentielles totales exactes.*

4. Condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes distincts (C) et (C′) de courbes de la V_3 appartiennent à un même système de surfaces.

Soient respectivement $d_C = (du_C, dv_C, dw_C)$ et $d_{C'} = (du_{C'}, dv_{C'}, dw_{C'})$ les homologues dans π de (C) et (C′).

La droite de π qui joint ces deux points a pour équation $n_1du + n_2dv + n_3dw = 0$ où n_i est le déterminant, affecté d'un signe convenable, déduit de la matrice formée par les coordonnées de d_C et $d_{C'}$ en y supprimant la i-ème colonne.

La condition cherchée est évidemment que cette droite représente une différentielle totale exacte et est donnée par

1-5 $$n_1(n_{2w} - n_{3v}) + n_2(n_{3u} - n_{1w}) + n_3(n_{1v} - n_{2u}) = 0.$$

Cette condition s'exprime ainsi par l'intermédiaire des coordonnées tangentielles de la droite. On peut lui donner une forme qui fait intervenir plus directement les coordonnées de d_C et $d_{C'}$. En effet, *on vérifie* assez facilement *que* (1-5) *est équivalent à*

1-6 $$\left\{\begin{vmatrix} d_{C'}(du_C) - d_C(du_{C'})\,; & du_C\,; & du_{C'} \\ d_{C'}(dv_C) - d_C(dv_{C'})\,; & dv_C\,; & dv_{C'} \\ d_{C'}(dw_C) - d_C(dw_{C'})\,; & dw_C\,; & dw_{C'} \end{vmatrix} = 0.\right.$$

Remarquons immédiatement que si cette condition est vérifiée pour deux points quelconques et distincts du plan π, elle l'est également pour deux autres points quelconques de la droite qui joint les deux premiers et inversement.

5. Le faisceau (ξ) d'hyperplans tangents et le faisceau correspondant (Γ_ξ) de coniques.

L'espace 1-tangent [9] à la $V_3(x)$ en son point générateur est l'S_3 déterminé par les points x, x_u, x_v, x_w et est l'axe d'un faisceau linéaire d'hyperplans ξ qui sont dits *tangents à la* V_3 *en son point générateur*.

Ces hyperplans sont déterminés par

1-7 $$(\xi, x) = (\xi, x_u) = (\xi, x_v) = (\xi, x_w) = 0.$$

Un ξ quelconque rencontre la V_3 suivant une surface qui a un point double en x. *Le cône quadratique tangent correspondant est caractérisé par*

1-8 $$(\xi, ddx) = (\xi, x_{uu})du^2 + (\xi, x_{vv})dv^2 + (\xi, x_{ww})dw^2 + 2(\xi, x_{uv})dudv + 2(\xi, x_{uw})dudw + 2(\xi, x_{vw})dvdw = 0$$

et est engendré par les ∞^1 tangentes à la V_3 qui joignent x aux points $x_u du + x_v dv + x_w dw$ dont du, dv, dw vérifient (1-8).

Dans le plan π, (1-8) représente une conique qui, dans la suite sera désignée par Γ_ξ. *A chaque* ξ *correspond donc une conique* Γ_ξ *et lorsque* ξ *décrit le faisceau* (ξ), Γ_ξ *engendre généralement un faisceau* (Γ_ξ) *de coniques.*

Notons cependant qu'il peut arriver que toutes ces coniques coïncident ou s'évanouissent. Toutefois, en dehors de ces deux cas vraiment très particuliers (le premier a été considéré par E. G. Togliatti [10] et le second a lieu si et seulement si la V_3 est entièrement dans un S_3 fixe), le faisceau (Γ_ξ) contient effectivement ∞^1 coniques. Il est alors très aisé de vérifier qu'il existe une correspondance biunivoque entre les hyperplans tangents ξ et les coniques Γ_ξ du plan π.

6. Courbes et tangentes asymptotiques, courbes et tangentes principales, hyperplans bitangents.

Une droite-base du faisceau linéaire de cônes quadratiques caractérisés par (1-8) est une tangente particulière à la V_3 en son point générateur, appelée *tangente asymptotique à le* V_3 *en* x [4]

(E. G. Togliatti [10] appelle toutefois cette droite tangente principale en réservant cependant le nom de courbe asymtotique aux courbes de la V_3 qui admettent en chacun de leurs points une telle tangente).

Une V_3 de S_5 admet donc généralement, en son point générateur, quatre tangentes asymptotiques distinctes. Toutefois, dans certains cas, il peut y en avoir moins.

Les courbes tangentes en chacun de leurs points à une tangente asymptotique de la V_3 sont appelées les *asymptotiques ou courbes asymptotiques de la* V_3. A chaque tangente asymptotique à la V_3 en son point générateur correspond donc un système de courbes asymptotiques de la V_3.

De même, une droite qui est double pour un des cônes dégénérés du faisceau de cônes caractérisés par (1-8) est une tangente particulière à la V_3 en son point générateur, appelée *tangente principale à la* V_3 *en* x [4]. Les courbes tangentes en chacun de leurs points à une tangente principale de la V_3 sont appelées *les courbes principales* (on dit plus souvent *les lignes principales*) *de la* V_3. A chaque tangente principale à la V_3 en son point générateur correspond donc un système de lignes principales de la V_3.

Les équations différentielles des asymptotiques de la V_3 *s'obtiennent évidemment en considérant le système formé par les équations de deux coniques quelconques mais distinctes de* (Γ_ξ).

Les équations différentielles des lignes principales s'obtiennent un peu moins directement : en effet, on doit au préalable déterminer les coniques dégénérées du faisceau (Γ_ξ).

Si ξ_1 et ξ_2 sont deux ξ particuliers et distincts, si Γ_{ξ_1} et Γ_{ξ_2} sont les Γ_ξ respectivement correspondantes, alors ξ et Γ_ξ sont du type.

1-9 $\xi = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2,$

1-10 $\Gamma_\xi = \alpha\Gamma_{\xi_1} + \beta\Gamma_{\xi_2}.$

Pour trouver les coniques dégénérées de (Γ_ξ) et les hyperplans dont elles proviennent, il suffit de remplacer, dans (1-9) et (1-10), α et β par les solutions de l'équation du troisième degré donnée par

$$
\text{1-11} \left\{ \begin{vmatrix} (\xi, x_{uu}) \,; & (\xi, x_{uv}) \,; & (\xi, x_{uw}) \\ (\xi, x_{uv}) \,; & (\xi, x_{vv}) \,; & (\xi, x_{vw}) \\ (\xi, x_{uw}) \,; & (\xi, x_{vw}) \,; & (\xi, x_{ww}) \end{vmatrix} = 0 \right.
$$

où l'on doit exprimer ξ sous la forme (1-9).

Si η est un ξ particulier tel que Γ_η dégénère, *les équations différentielles du (ou des) système(s) de lignes principales correspondant(s) à cet hyperplan peuvent s'écrire*

$$
\text{1-12} \left\{ \begin{array}{l} (\eta, x_{uu})du + (\eta, x_{uv})dv + (\eta, x_{uw})dw = 0, \\ (\eta, x_{uv})du + (\eta, x_{vv})dv + (\eta, x_{vw})dw = 0, \\ (\eta, x_{uw})du + (\eta, x_{vw})dv + (\eta, x_{ww})dw = 0. \end{array} \right.
$$

De plus, un hyperplan tel que η est appelé *hyperplan bitangent à la* V_3 *en son point générateur* (M. M. Fubini et Cech [2] appellent semblablement, dans le Ch. 11 du tome 2, complexe linéaire bitangent ce qui correspond à cette notion d'hyperplan bitangent dans la correpondance qui existe entre les complexes de droites de S_3 et les V_3 d'une hyperquadrique de S_5).

D'après ce qui précède, *ces hyperplans sont donnés sous la forme* (1-9) *par l'intermédiaire des racines de* (1-11) *et sont donc généralement au nombre de trois.*

7. Correspondance Ω.

Soient (C) et (C′) deux systèmes de courbes de la V_3 et soient respectivement d_C et $d_{C'}$ leurs images dans π. Si les polaires de d_C par rapport aux Γ_ξ passent toutes par $d_{C'}$, les polaires de $d_{C'}$ par rapport aux Γ_ξ passent alors par d_C. En effet, il est connu que la polaire d'un point d'une droite par rapport à une conique passe par le pôle de cette droite.

Lorsque les polaires de d_C *par rapport aux* Γ_ξ *passent toutes par* $d_{C'}$*, nous dirons, dans la suite, que les systèmes de courbes* (C) *et* (C′) *ainsi que leurs images dans* π *sont homologues dans la correspondance* Ω.

Notons qu'à un point quelconque du plan π correspond toujours par Ω au moins un autre point du plan π et généralement un seul. Toutefois, les homologues par Ω de certains points particuliers du plan π forment parfois une droite. Ce cas arrive notamment lorsque l'on cherche les homologues par Ω d'un point double pour une conique de (Γ_ξ) : les polaires sont alors confondues.

De plus, on vérifie très facilement que *la condition nécessaire et suffisante pour que deux points d_C et $d_{C'}$ de π soient homologues dans Ω est que les coordonnées de ces points vérifient, quel que soit ξ, l'équation*

$$\text{1-13}\left\{\begin{array}{l}(\xi,\, x_{uu})du_C du_{C'} + (\xi,\, x_{vv})dv_C dv_{C'} + (\xi,\, x_{ww})dw_C dw_{C'} +\\ (\xi,\, x_{uv})(du_C dv_{C'} + du_{C'} dv_C) + (\xi,\, x_{uw})(du_C dw_{C'} + du_{C'} dw_C) +\\ (\xi,\, x_{vw})(dv_C dw_{C'} + dv_{C'} dw_C) = 0.\end{array}\right.$$

8. Première classification des V_3 de S_5.

Les différentes possibililités que l'on peut rencontrer pour le faisceau (Γ_ξ) permettent déjà de donner la classification suivante des V_3 de S_5.

A. Toutes les Γ_ξ coïncident avec une même conique ;

B. le faisceau (Γ_ξ) contient effectivement ∞^1 coniques, mais elles sont toutes dégénérées ;

C. le faisceau (Γ_ξ) possède un seul point-base propre qui compte pour quatre (les coniques se coupent en quatre points successifs), il ne contient donc qu'une seule conique dégénérée qui est composée ici de deux droites confondues ;

D. le faisceau (Γ_ξ) possède deux points-base propres dont un compte pour trois (les coniques se coupent en trois points successifs) tandis que l'autre ne compte que pour un, il ne contient donc qu'une seule conique dégénérée qui est composée ici de deux droites distinctes ;

E. le faisceau (Γ_ξ) possède deux points-base propres qui comptent chacun pour deux (les coniques ont même tangente en ces points), il contient donc deux coniques dégénérées : une en deux droites distinctes, l'autre en deux droites confondues ;

F. le faisceau (Γ_ξ) possède trois points-base propres dont un compte pour deux (les coniques ont même tangente en ce point) tandis que les deux autres comptent chacun pour un, il contient donc deux coniques dégénérées qui sont composées chacune de deux droites distinctes ;

G. le faisceau (Γ_ξ) possède quatre points-base propres qui comptent chacun pour un, il contient donc trois coniques dégénérées qui sont composées chacune de deux droites distinctes.

Comme E. G. Togliatti [10], nous appellerons les V_3 de S_5 du type C, D, E, F respectivement des V_3 du type (4), (3,1), (2,2), (2,1,1). Par analogie, une V_3 du type G sera dite du type (1,1,1,1).

Les cas A, B, C, D, E et F ont déjà été considéré par E. G. Togliatti [10]. Cet auteur a donc laissé de côté le cas G qui est le cas général. Par ailleurs, O. Rozet [4] a étudié, en plus de certaines V_3 du type F, les systèmes points de Guichard qui sont des V_3 particulières du type G.

Dans la suite de ce travail, nous étudierons, en toute généralité, les V_3 du type G.

Chapitre II

COORDONNÉES ABSOLUES ET RELATIVES DANS Π ; DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES

1. Bases du plan π et de la V_3, base primaire, bases de référence.

Soient (R_1), (R_2) et (R_3) trois systèmes quelconques de courbes de la V_3, soumis toutefois à la condition que leurs images d_{R_1}, d_{R_2}, d_{R_3} dans π soient linéairement indépendantes. Dans la suite, nous dirons qu'un tel ensemble de trois systèmes de courbes forme *une base de la* V_3 et que l'ensemble de leurs images dans π forme *la base correspondante du plan* π.

Il existe évidemment de très nombreuses bases sur une V_3 de S_5. En particulier, les systèmes de courbes constitués par les courbes u, v et w en forment une, dont la base correspondante dans le plan π est donnée par les sommets (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) du triangle de référence de π. Dans la suite, nous l'appellerons *la base primaire.*

De plus, on appellera *base de référence* une base quelconque de la V_3 ou du plan π susceptible de devenir la base primaire après un changement de variables du type.

$$\left\{\begin{array}{l} u' = u'(uvw), \\ v' = v'(uvw), \text{ avec } \dfrac{\partial(u', v', w')}{\partial(u\,, v\,, w\,)} \neq 0. \\ w' = w'(uvw) \end{array}\right.$$

1-14 Notons que l'on vérifie très facilement que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une base quelconque de la* V_3 *soit de référence est que les systèmes de courbes qui la constituent appartiennent deux à deux à des systèmes de surfaces de la* V_3.

Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, une base d'une surface est toujours une base de référence dans le sens de la terminologie introduite ci-dessus. Le théorème (1-14) montre que cela n'est plus vrai pour une V_3. Dans la suite, nous contournerons les difficultés introduites par cette situation en utilisant la notion de différentielle et celle de coordonnées relatives qui en découle.

2. Coordonnées absolues et relatives.

Désignons par (R_i) $(i = 1,2,3)$ les systèmes de courbes d'une base quelconque de la V_3 et par $d_i = (du_i, dv_i, dw_i)$ leurs images dans π. Si $P(uvw)$ est un point quelconque de S_5 (ou une fonction arbitraire) dépendant des trois variables auxquelles est référée la $V_3(x)$, on a par définition

1-15 $d_iP = P_u du_i + P_v dv_i + P_w dw_i \ (i = 1,2,3).$

On en déduit les formules inverses

1-16

$$\left\{\begin{array}{l} P_u = \alpha_1 d_1P + \alpha_2 d_2P + \alpha_3 d_3P, \\ P_v = \beta_1 d_1P + \beta_2 d_2P + \beta_3 d_3P, \\ P_w = \varepsilon_1 d_1P + \varepsilon_2 d_2P + \varepsilon_3 d_3P, \end{array}\right.$$

où α_i, β_i et ε_i $(i = 1,2,3)$ sont respectivement obtenus en divisant les cofacteurs de du_i, dv_i et dw_i dans

$$A = \begin{vmatrix} du_1 \,;\, dv_1 \,;\, dw_1 \\ du_2 \,;\, dv_2 \,;\, dw_2 \\ du_3 \,;\, dv_3 \,;\, dw_3 \end{vmatrix}$$ par la valeur de ce déterminant.

Considérons maintenant un système quelconque (C) de courbes de la V_3. Désignons par $d_C = (du_C, dv_C, dw_C)$ son image dans π et posons

1-17 $t_{iC} = \alpha_i du_C + \beta_i dv_C + \varepsilon_i dw_C \ (i = 1,2,3).$

Nous avons évidemment les formules inverses

1-18

$$\left\{\begin{array}{l} du_C = t_{1C} du_1 + t_{2C} du_2 + t_{3C} du_3, \\ dv_C = t_{1C} dv_1 + t_{2C} dv_2 + t_{3C} dv_3, \\ dw_C = t_{1C} dw_1 + t_{2C} dw_2 + t_{3C} dw_3. \end{array}\right.$$

Les équations (1-15), (1-16) et (1-17) donnent directement

1-19 $d_CP = P_u du_C + P_v dv_C + P_w dw_C = t_{1C} d_1P + t_{2C} d_2P + t_{3C} d_3P.$

Dans la suite, du_C, dv_C, dw_C *seront appelées les coordonnées absolues du point* d_C *de* π *et du système* (C) *de la* V_3 *tandis que* t_{1C}, t_{2C}, t_{3C} *en seront appelées les coordonnées relatives à la base* d_1, d_2, d_3, *ou plus simplement les coordonnées relatives lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.*

Les formules (1-17) et (1-18) permettent de passer d'un système de coordonnées à l'autre. Les coordonnées relatives et la seconde forme de (1-19) permettent de décomposer la différentielle dans la direction d_C en une combinaison linéaire des différentielles dans trois directions arbitrairement choisies.

3. Différentielles successives.

En plus des notations introduites au numéro précédent, considérons n systèmes quelconques, (C_1), (C_2), ... (C_n), de courbes de la $V_3(x)$. Nous représenterons respectivement par du_{C_i}, dv_{C_i}, dw_{C_i} et t_{1C_i}, t_{2C_i}, t_{3C_i} les coordonnées absolues et relatives de d_{C_i}, image de (C_i) dans π $(i = 1,2...n)$.

D'après ce qui précède, $d_{C_i}P$ est un nouveau point de S_5 (ou une nouvelle fonction) dépendant de u, v, w. On peut donc différentier $d_{C_i}P$ dans la direction d_{C_k}, k égal ou non à i. On obtient ainsi $d_{C_k}(d_{C_i}P)$, qu'on représentera généralement par $d_{C_k}d_{C_i}P$.

On définit semblablement $d_{C_i}d_{C_k}P$, qui est généralement distinct du précédent.

De (1-16) et de ces définitions, on déduit facilement que

1-20 $$d_{C_k}d_{C_i}P = d_{C_k} * d_{C_i}P + (1;C_k, C_i)d_1P + (2;C_k, C_i)d_2P + (3;C_k, C_i)d_3P,$$

où l'on a posé

1-21 $$\begin{cases} (j;C_k, C_i) = \alpha_j d_{C_k}(du_{C_i}) + \beta_j d_{C_k}(dv_{C_i}) + \varepsilon_j d_{C_k}(dw_{C_i}) \ (j = 1,2,3), \\ d_{C_k} * d_{C_i}P = du_{C_i}d_{C_k}(P_u) + dv_{C_i}d_{C_k}(P_v) + dw_{C_i}d_{C_k}(P_w). \end{cases}$$

Si l'on remarque que

1-22 $$d_{C_k} * d_{C_i}P = d_{C_i} * d_{C_k}P = du_{C_k}d_{C_i}(P_u) + dv_{C_k}d_{C_i}(P_v) + dw_{C_k}d_{C_i}(P_w),$$

on déduit immédiatement de (1-20) que

1-23 $$d_{C_k}d_{C_i}P - d_{C_i}d_{C_k}P = \sum_{j=1}^{3} d_jP[(j;C_k, C_i) - (j;C_i, C_k)].$$

Évidemment, les systèmes (R_1), (R_2), (R_3) peuvent se trouver parmi les n systèmes de courbes (C_1), (C_2),...(C_n). Dans la suite, chaque fois que (C_i) coïncidera avec (R_m), on n'écrira pas le R dans les expressions ci-dessus, tandis que l'indice m sera conservé. C'est ainsi que l'on rencontrera fréquemment les symboles $d_i * d_k P$, $d_i d_{C_k} P$, $(j;i, k)$, $(j;C_i, k)$ etc.

En plus des différentielles secondes, on peut considérer les différentielles troisièmes $d_{C_m} d_{C_k} d_{C_i} P$ et $d_{C_m}(d_{C_k} * d_{C_i} P)$ qui sont respectivement les différentielles premières de $d_{C_k} d_{C_i} P$ et $d_{C_k} * d_{C_i} P$ dans la direction d_{C_m}. De même, on peut également introduire des différentielles quatrièmes, cinquièmes, etc.

Puisque la relation (1-23) est valable quel que soit P, elle est également valable pour une différentielle quelconque de P. On obtient notamment ainsi

1-24 $$d_{C_k} d_{C_i} d_{C_m} P - d_{C_i} d_{C_k} d_{C_m} P = \sum_{j=1}^{3} d_j d_{C_m} P[(j;C_k,C_i) - (j;C_i,C_k)].$$

Les équations (1-23) et celles du type de (1-24) sont très importantes. En effet, elles joueront, pour ce calcul différentiel, exactement le même rôle que le théorème d'interversion des dérivations dans le cas des dérivées partielles successives.

4. Quelques formules utiles pour la suite.

Avec les notations et les relations introduites dans les numéros précédents, on vérifie assez facilement que l'on a

1-25 $$\left\{\begin{array}{ll} d_{C_i}(du_j) = \sum_{k=1}^{3} (k;C_i,j) du_k \,; & d_{C_i}(\alpha_j) + \sum_{k=1}^{3} \alpha_k (j;C_i,k) = 0 \,; \\ d_{C_i}(dv_j) = \sum_{k=1}^{3} (k;C_i,j) dv_k \,; & d_{C_i}(\beta_j) + \sum_{k=1}^{3} \beta_k (j;C_i,k) = 0 \,; \\ d_{C_i}(dw_j) = \sum_{k=1}^{3} (k;C_i,j) dw_k \,; & d_{C_i}(\varepsilon_j) + \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_k (j;C_i,k) = 0 \,; \\ \multicolumn{2}{l}{(n;C_i,j) + du_j d_{C_i}(\alpha_n) + dv_j d_{C_i}(\beta_n) + dw_j d_{C_i}(\varepsilon_n) = 0, \quad n,j = 1,2,3 \,;} \\ \multicolumn{2}{l}{d_{C_i} \text{ quelconque.}} \end{array}\right.$$

De ces équations, on déduit

$$\left.\begin{aligned}&d_{C_i}(\alpha_j)d_{C_k}(du_n) + d_{C_i}(\beta_j)d_{C_k}(dv_n) + d_{C_i}(\varepsilon_j)d_{C_k}(dw_n) + \\ &\qquad \sum_{m=1}^{3}(j;C_i,m)(m;C_k,n) = 0,\\ &d_{C_i}[(j;C_k,n)] - d_{C_k}[(j;C_i,n)] = \sum_{m=1}^{3}\{(j;m,n)[(m;C_i,C_k)-(m;C_k,C_i)]\\ &\qquad + (j;C_k,m)\,(m;C_i,n) - (j;C_i,m)\,(m;C_k,n)\},\end{aligned}\right\} \tag{1-26}$$

$n,j = 1,2,3$; d_{C_i}, d_{C_k} quelconques.

Par ailleurs, (1-18), (1-20) et (1-21) entraînent

$$\left.\begin{aligned}&d_{C_i}d_{C_k}P = \sum_{m,n=1}^{3} t_{nC_i}t_{mC_k}d_nd_mP + d_mP\, t_{nC_i}d_n(t_{mC_k}),\\ &d_{C_i} * d_{C_k}P = \sum_{m,n=1}^{3} t_{mC_i}t_{nC_k}d_m * d_nP,\\ &(j;C_i,C_k) = d_{C_i}(t_{jC_k}) + \sum_{m,n=1}^{3} t_{mC_i}t_{nC_k}(j;m,n).\end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

Les formules (1-27) seront très utiles dans la suite, car elles font directement intervenir les coordonnées relatives.

De plus, on démontre facilement que la condition (1-6) est équivalente à

$$\left|\,(i;C',C) - (i;C,C')\ ;\ t_{iC}\ ;\ t_{iC'}\,\right| = 0, \tag{1-28}$$

où le premier membre est un déterminant dont on n'a écrit que la i-ème ligne ($i = 1,2,3$) et où t_{1C}, t_{2C}, t_{3C} et $t_{1C'}$, $t_{2C'}$, $t_{3C'}$ sont respectivement les coordonnées relatives de (C) et (C').

Finalement, (1-27) et (1-7) montrent que l'équation de la conique Γ_ξ peut se mettre sous la forme

$$(\xi,ddx) = \sum_{i,k=1}^{3} t_it_k(\xi,d_id_kx) = 0, \tag{1-29}$$

où t_1, t_2, t_3 sont les coordonnées courantes relatives à d_1, d_2, d_3.

5. Les expressions $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$.

Par l'intermédiaire de la première équation de (1-21), nous avons introduit les 29 expressions $(i;j,k)$ qui dépendent uniquement de la base d_1, d_2, d_3 considérée.

Les trois combinaisons linéaires

$$\text{1-30}\quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{J}_1 = (1;3,2) - (1;2,3), & \mathcal{J}_2 = (2;1,3) - (2;3,1), \\ \mathcal{J}_3 = (3;2,1) - (3;1,2), & \end{array} \right.$$

joueront un rôle privilégié. En effet, compte tenu de (1-28), on voit que

1-31 $\left\{\right.$ $\mathcal{J}_i = 0$ *est la condition nécessaire et suffisante pour que la droite* $(d_j\text{-}d_k)$ *de* π *représente une différentielle totale exacte* (k,i,j = 1,2,3, mais $i \neq k \neq j$).

De ce théorème découle immédiatement le corollaire

1-32 $\left\{\right.$ $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_3 = 0$ *est la condition nécessaire et suffisante pour que la base* d_1, d_2, d_3 *soit de référence.*

Notons encore que si, dans les équations (1-26), on remplace C par R, on obtient une série d'équations desquelles on déduit notamment (i = 1,2,3 ; lorsque $i = 1$, $k = 2$ et $j = 3$; lorsque $i = 2$, $k = 3$ et $j = 1$; lorsque $i = 3$, $k = 1$ et $j = 2$)

$$\text{1-33}\quad \left\{ \begin{array}{l} d_i(\mathcal{J}_i) + d_k[(i;i,j) - (i;j,i)] + d_j[(i;k,i) - (i;i,k)] + \\ \mathcal{J}_i[(k;k,i) - (k;i,k) + (j;j,i) - (j;i,j)] + \\ [(i;i,j) - (i;j,i)]\,[(j;j,k) - (j;k,j)] + \\ [(i;k,i) - (i;i,k)]\,[(k;k,j) - (k;j,k)] = 0. \end{array} \right.$$

Deuxième Partie

QUELQUES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES V_3 DE S_5 DU TYPE (1,1,1,1)

Chapitre I

SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ASSOCIÉ A UNE V_3 DE S_5 DU TYPE (1,1,1,1)

1. Recherche du système.

Nous avons déjà signalé qu'une V_3 de S_5 du type (1,1,1,1) possède quatre systèmes distincts d'asymptotiques, trois systèmes distincts de lignes principales et trois hyperplans bitangents distincts.

Comme dans la première partie, nous désignerons par $x(uvw)$ le point générateur de la V_3 et par ξ un hyperplan quelconque du faisceau (ξ) d'hyperplans tangents à la V_3 en ce point. En outre, nous pourrons évidemment choisir les systèmes de lignes principales de la V_3 pour jouer les rôles des systèmes (R_1), (R_2), (R_3) introduits dans le second chapitre de la première partie. Le point $d_i (i = 1,2,3)$, image dans π du système de lignes principales (R_i), sera donc le point double d'une conique Γ_ξ provenant d'un ξ particulier qui sera désigné par η_i et qui est donc l'hyperplan bitangent correspondant à (R_i).

Les équations (1-12) et (1-21) donnent immédiatement

2-1 $(\eta_i, d_k * d_i x) = 0 \ (k,i = 1,2,3).$

Par ailleurs, (1-7) et (1-20) entraînent

2-2 $(\xi, d_i d_k x) = (\xi, d_k d_i x) = (\xi, d_i * d_k x) \ (i,k = 1,2,3).$

En conséquence, (1-9) et (1-22) montrent que les équations (2-1) sont équivalentes à

2-3 $$\begin{cases} (\xi, d_i * d_k x) = 0 \ (i,k = 1,2,3, \text{ mais } i \neq k), \\ (\eta_i, d_i d_i x) = 0 \ (i = 1,2,3). \end{cases}$$

De plus, puisque d_i, qui est le point double de Γ_{η_i}, ne peut pas être un point-base de (Γ_ξ), on a

2-4 $(\xi, d_i d_i x) \neq 0$ sauf lorsque ξ coïncide avec η_i $(i = 1,2,3)$.

Ces équations (2-3) et (2-4) permettent de démontrer que les points $x, d_1x, d_2x, d_3x, d_id_ix, d_kd_kx (i,k = 1,2,3$, mais $i \neq k)$ sont linéairement indépendants et qu'il existe toujours des fonctions a_i, b_i, e_i, f_i, k_i $(i = 1,2,3)$, a, b, e, f de u, v, w telles que l'on ait

2-5
$$\left\{\begin{aligned} d_1 * d_2x &= a_3x + b_3d_1x + e_3d_2x + f_3d_3x, \\ d_1 * d_3x &= a_2x + b_2d_1x + e_2d_2x + f_2d_3x, \\ d_2 * d_3x &= a_1x + b_1d_1x + e_1d_2x + f_1d_3x, \\ k_1d_1d_1x + k_2d_2d_2x + k_3d_3d_3x &= ax + bd_1x + ed_2x + fd_3x, \end{aligned}\right.$$

2-6 avec $k_1k_2k_3 \neq 0$.

Le système (2-5) et la condition (2-6) constituent le système (S) signalé dans l'introduction. Avant de l'exploiter pour étudier les V_3 considérées, nous rechercherons ses principales conditions d'intégrabilité et nous donnerons la méthode pour trouver toutes les différentielles troisièmes de x (ce qui est suffisant pour déterminer toutes les différentielles) que l'on peut former à partir des directions d_1, d_2, d_3.

2. Méthode pour obtenir ces différentielles troisièmes.

On déduit directement de (1-20) et des trois premières de (2-5) les différentielles secondes d_id_kx $(i, k = 1,2,3$, mais $i \neq k)$.

En différentiant ces expressions dans les directions d_1, d_2, d_3 et en tenant compte de leurs valeurs, on obtient finalement les différentielles troisièmes du type $d_jd_id_kx$ $(i, j, k = 1,2,3$, mais $i \neq k)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des points x, d_1x, d_2x, d_3x, d_1d_1x, d_2d_2x, d_3d_3x. Il suffit maintenant de considérer la dernière de (2-5) pour pouvoir donner ces différentielles troisièmes sous la forme d'une combinaison linéaire des points d'une base de S_5.

Remarquons toutefois que cette dernière étape détruit la symétrie entre les indices i, k, j et qu'en conséquence, nous ne l'envisagerons que lorsqu'elle sera vraiment nécessaire.

Pour déterminer toutes les différentielles cherchées, il ne reste plus qu'à rechercher celles du type $d_k d_i d_i x$ $(i, k = 1,2,3)$.

Si, dans (1-24), on remplace C_k par R_k, C_i et C_m par R_i, P par x, on obtient six équations qui déterminent les six différentielles $d_k d_i d_i x$ $(i, k = 1,2,3$, mais $i \neq k)$ en fonction d'éléments déjà trouvés. Pour obtenir les trois dernières différentielles $d_i d_i d_i x$, il suffit maintenant de différentier la dernière équation de (2-5) en ayant égard aux expressions déjà connues.

Nous avons ainsi donné la méthode pour trouver, à partir du système (2-5), toutes les différentielles troisièmes cherchées. Nous ne recopierons cependant pas les valeurs ainsi trouvées, car les calculs pour les obtenir sont très simples bien qu'un peu fastidieux.

Notons toutefois que nous ferons une exception pour les différentielles $d_i d_i d_i x$ qui sont les plus fastidieuses à obtenir. Nous avons ainsi

$$k_i d_i d_i d_i x = S_{i11} d_1 d_1 x + S_{i22} d_2 d_2 x + S_{i33} d_3 d_3 x + S_i x + S_{i1} d_1 x + S_{i2} d_2 x + S_{i3} d_3 x \quad (i = 1,2,3),$$

où nous avons posé

$$\text{2-7}\left\{\begin{array}{l} S_{111} = -d_1(k_1) + b,\ S_{222} = -d_2(k_2) + e,\ S_{333} = -d_3(k_3) + f, \\ S_{122} = -d_1(k_2) - k_2[e_3 + 2(2;1,2) - (2;2,1)], \\ S_{133} = -d_1(k_3) - k_3[f_2 + 2(3;1,3) - (3;3,1)], \\ S_{211} = -d_2(k_1) - k_1[b_3 + 2(1;2,1) - (1;1,2)], \\ S_{233} = -d_2(k_3) - k_3[f_1 + 2(3;2,3) - (3;3,2)], \\ S_{311} = -d_3(k_1) - k_1[b_2 + 2(1;3,1) - (1;1,3)], \\ S_{322} = -d_3(k_2) - k_2[e_1 + 2(2;3,2) - (2;2,3)], \end{array}\right.$$

et des valeurs que nous ne transcrirons pas pour les autres coefficients.

3. Remarques sur la symétrie entre les indices 1,2,3.

Au début de ce chapitre, nous avons donné arbitrairement un numéro d'ordre à chaque système de lignes principales de la V_3. Or, puisqu il y a six permutations de trois objets, il y a six manières possibles de faire cette numérotation. Nous avons choisi au départ une de ces manières, mais il est toutefois bon de tenir compte des autres. En effet, les systèmes de lignes principales de la V_3 jouent des rôles symétriques sur celle-ci et, tant que l'on ne fait pas d'hypothèses qui détruisent cette symétrie, chaque équation ou propriété obtenue dans une numérotation doit, en conséquence, avoir une équation ou propriété analogue dans les autres numérotations. Cette remarque est très utile, car elle permet de dissocier des problèmes fondamentalement distincts et elle permet aussi, soit de vérifier les calculs, soit de trouver directement de nouveaux résultats à partir de ceux que l'on connaît déjà.

Dans nos notations, on peut résumer les six permutations possibles par le tableau suivant

$$
\text{2-8}\left\{\begin{array}{llllllllllllllll}
1, & 2, & 3, & b, & e, & f, & k, & a, & \eta, & \mathscr{J}, & \mathscr{H}, & \mathrm{M}, & \mathscr{M}, & \mathrm{N}, & \rho, & \mathrm{S}, \ldots \\
2, & 3, & 1, & e, & f, & b, & k, & a, & \eta, & \mathscr{J}, & \mathscr{H}, & \mathrm{M}, & \mathscr{M}, & \mathrm{N}, & \rho, & \mathrm{S}, \ldots \\
3, & 1, & 2, & f, & b, & e, & k, & a, & \eta, & \mathscr{J}, & \mathscr{H}, & \mathrm{M}, & \mathscr{M}, & \mathrm{N}, & \rho, & \mathrm{S}, \ldots \\
2, & 1, & 3, & e, & b, & f, & k, & a, & \eta, & -\mathscr{J}, & -\mathscr{H}, & -\mathrm{M}, & -\mathscr{M}, & -\mathrm{N}, & -\rho, & \mathrm{S}, \ldots
\end{array}\right.
$$

Dans la suite, ce tableau sera utilisé de la manière suivante. Pour passer, par exemple, de la numérotation 1,2,3 à la numérotation 3,2,1, il suffit, dans le tableau, de passer de la deuxième ligne à la quatrième. On voit ainsi que e_3 devient e_1, f_2 devient b_2, $\mathscr{J}_1$ devient $-\mathscr{J}_3$, $\mathscr{H}_2$ devient $-\mathscr{H}_2$, (1;2,3) devient (3;2,1), S_{211} devient S_{233}, etc.

Remarquons que nous avons déjà introduit, dans ce tableau, des notations qui ne seront définies que dans la suite.

4. Les principales conditions d'intégrabilité du système (2-5).

Si l'on remplace, dans (1-24), (C_k) par (R_k), (C_i) par (R_i), (C_m) par (R_j), P par x et si l'on tient compte des valeurs des différentielles troisièmes et secondes trouvées au numéro deux de ce chapitre, on obtient 27 équations de liaison entre les points $x, d_1x, d_2x, d_3x, d_1d_1x, d_2d_2x, d_3d_3x$. Puisque les quatre premiers de ces points et deux quelconques des trois derniers forment une base de S_5, ces équations doivent se réduire, à un facteur de proportionnalité près, à la dernière de (2-5) à moins, évidemment, que l'équation considérée ait tous ses coefficients nuls. Nous obtenons ainsi, pour chaque équation qui ne s'évanouit pas, six conditions d'intégrabilité du système (2-5).

Puisque les équations (1-24) s'évanouissent dès que $i = k$, puisque changer i en k revient à multiplier (1-24) par —1 et puisque six de ces équations ont déjà été utilisées pour calculer les différentielles $d_k d_i d_i x$, on constate finalement que, parmi ces 27 équations du départ, il n'en reste plus que trois linéairement indépendantes.

Nous obtenons ainsi les 18 conditions d'intégrabilité suivantes

$$
\text{(2-9)}\quad \left\{
\begin{aligned}
& b_1 = k_1 \frac{\mathcal{J}_3}{k_3} - (1;2,3) = -k_1 \frac{\mathcal{J}_2}{k_2} - (1;3,2), \\
& e_2 = k_2 \frac{\mathcal{J}_1}{k_1} - (2;3,1) = -k_2 \frac{\mathcal{J}_3}{k_3} - (2;1,3), \\
& f_3 = k_3 \frac{\mathcal{J}_2}{k_2} - (3;1\ 2) = -k_3 \frac{\mathcal{J}_1}{k_1} - (3;2,1)\ ; \\
& d_2(a_2) - d_3(a_3) - a_1\mathcal{H}_1 + a_3[b_2+(1;3\ 1)+(2;3,2)-(2;2,3)] - \\
& \qquad a_2[b_3+(1;2,1)+(3;2,3)-(3;3,2)] = -\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\, a, \\
& d_2[b_2+(1;3,1)] - d_3[b_3+(1;2,1)] + [b_3+(1;2,1)]\,[(2;3,2)-(2;2,3)] + \\
& \qquad [b_2+(1;3,1)]\,[(3;3,2)-(3;2,3)] + \frac{k_1\mathcal{J}_3}{k_3}[f_2+(3;3,1)] + \\
& \qquad \frac{k_1\mathcal{J}_2}{k_2}[e_3+(2;2,1)] = -\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\, b, \\
& d_3[b_3+(1;1,2)] + d_1\left[\frac{k_1\mathcal{J}_2}{k_2}\right] - a_1 - [b_3+(1;1,2)]\,[e_1+(2;3,2)] - \\
& \qquad \mathcal{H}_2[b_2+(1;1,3)] - \frac{k_1\mathcal{J}_2}{k_2}[e_3+(2;1,2)+(3;1,3)-(3;3,1)] = -\frac{\mathcal{J}_2}{k_2}\, b, \\
& d_1\left[\frac{k_1\mathcal{J}_3}{k_3}\right] - d_2[b_2+(1;1,3)] + a_1 + [b_2+(1;1,3)]\,[f_1+(3;2,3)] - \\
& \qquad \mathcal{H}_3[b_3+(1;1,2)] - \frac{k_1\mathcal{J}_3}{k_3}[f_2+(3;1,3)+(2;1,2)-(2;2,1)] = -\frac{\mathcal{J}_3}{k_3}\, b;
\end{aligned}
\right.
$$

et 8 autres équations qui se déduisent des 4 précédentes en passant dans le tableau (2-8) de la première ligne à la seconde et de la première ligne à la troisième.

Dans ces équations, $\mathcal{J}_i$ a été défini par (1-30) et nous avons posé

$$\text{2-10}\quad \begin{cases} \mathcal{H}_1 = e_3+(2;2,1)-f_2-(3;3,1), \quad \mathcal{H}_2 = f_1+(3;3,2)-b_3-(1;1,2), \\ \mathcal{H}_3 = b_2+(1;1,3)-e_1-(2;2,3). \end{cases}$$

Les trois premières équations de (2-9) entraînent notamment

$$\text{2-11}\quad \frac{\mathcal{J}_1}{k_1}+\frac{\mathcal{J}_2}{k_2}+\frac{\mathcal{J}_3}{k_3}=0.$$

Ces équations (2-9) constituent toutes les conditions d'intégrabilité du système (2-5) qui proviennent des valeurs des différentielles troisièmes. On pourrait encore en déduire d'autres à l'aide des différentielles quatrièmes mais, très souvent, elles ne seront que des conséquences de celles déjà trouvées. Toutefois, si l'on remplace, dans (1-24), (C_k) par (R_k), (C_i) et (C_m) par (R_i) et P par $d_ix(i, k = 1,2,3$, mais $i \neq k)$, on obtient 6 équations dont on tire finalement 6 équations de liaison entre les points x, d_1x, d_2x, d_3x, d_1d_1x d_2d_2x, d_3d_3x. Chacune de ces équations va encore donner 6 conditions d'intégrabilité du système (2-5). Parmi celles-ci, nous ne retiendrons que celles qui proviennent des coefficients de d_1d_1x, d_2d_2x, d_3d_3x. Nous ne retenons donc que 12 de ces conditions d'intégrabilité. Par ailleurs, en tenant compte de (2-9), nous pouvons constater que ces équations en contiennent 6 qui sont des conséquences des 6 autres. Il reste ainsi les 6 conditions d'intégrabilité suivantes

$$\text{2-12}\quad \begin{cases} d_2(\mathcal{M}_1)-\mathcal{M}_1[\mathcal{M}_2+(1;2,1)-(1;1,2)]+\dfrac{S_{12}}{k_2}+e\dfrac{S_{122}}{(k_2)^2}=0, \\ d_3(\mathcal{M}_1)+\mathcal{M}_1[\mathcal{M}_3+(1;1,3)-(1;3,1)]-\dfrac{S_{13}}{k_3}-f\dfrac{S_{133}}{(k_3)^2}=0, \end{cases}$$

et 4 autres équations déduites des 2 précédentes en passant dans le tableau (2-8) de la première ligne à la seconde et de la première ligne à la troisième.

Dans ces équations, nous avons posé

$$\text{2-13}\quad \mathcal{M}_1=\frac{S_{122}}{k_2}-\frac{S_{133}}{k_3}, \mathcal{M}_2=\frac{S_{233}}{k_3}-\frac{S_{211}}{k_1}, \mathcal{M}_3=\frac{S_{311}}{k_1}-\frac{S_{322}}{k_2}.$$

CHAPITRE II

QUELQUES CONSIDÉRATIONS GÉOMÉTRIQUES FONDAMENTALES SUR LES V_3 DE S_5 DU TYPE (1,1,1,1)

1. Le faisceau (ξ) et le faisceau correspondant (Γ_ξ).

Un ξ quelconque vérifie toujours (1-7). En particulier, l'hyperplan bitangent η_i ($i = 1,2,3$) vérifie (1-7) et la dernière de (2-3) et est donc déterminé par

2-14 $$(\eta_i, x) = (\eta_i, d_k x) = (\eta_i, d_i d_i x) = 0 \quad (i, k = 1,2,3).$$

Ces équations et la dernière de (2-5) permettent de conclure qu'il existe des fonctions ρ_1, ρ_2, ρ_3 de u, v, w telles que l'on ait

2-15 $$\left\{\begin{array}{l} (\eta_1, d_2 d_2 x) = \rho_1 k_3, \quad (\eta_1, d_3 d_3 x) = -\rho_1 k_2\,; \\ (\eta_2, d_3 d_3 x) = \rho_2 k_1, \quad (\eta_2, d_1 d_1 x) = -\rho_2 k_3\,; \\ (\eta_3, d_1 d_1 x) = \rho_3 k_2, \quad (\eta_3, d_2 d_2 x) = -\rho_3 k_1\,; \\ \text{avec } \rho_1 \rho_2 \rho_3 \neq 0. \end{array}\right.$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que

2-16 $$\sum_{i=1}^{3} \frac{k_i}{\rho_i} \eta_i = 0.$$

Si l'on désigne par t_1, t_2, t_3 les coordonnées courantes relatives à d_1, d_2, d_3, on trouve, en tenant compte de (1-29) et (2-5), qu'une conique quelconque du faisceau (Γ_ξ) a une équation du type

2-17 $$\sum_{i=1}^{3} (\xi, d_i d_i x) t_i^2 = 0.$$

En particulier,

$$
2\text{-}18\left\{\begin{array}{l}
\Gamma_{\eta_1} \text{ a pour équation } k_3t_2^2 - k_2t_3^2 = 0,\\
\Gamma_{\eta_2} \text{ a pour équation } -k_3t_1^2 + k_1t_3^2 = 0,\\
\Gamma_{\eta_3} \text{ a pour équation } k_2t_1^2 - k_1t_2^2 = 0.
\end{array}\right.
$$

De ceci, on déduit immédiatement que les points-base du faisceau (Γ_ξ) coïncident géométriquement avec les points

$$
2\text{-}19\left\{\begin{array}{l}
P = (\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \sqrt{k_3}), \quad Q = (-\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \sqrt{k_3}),\\
R = (\sqrt{k_1}, -\sqrt{k_2}, \sqrt{k_3}), \quad S = (\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, -\sqrt{k_3}),\\
\text{où les coordonnées sont des coordonnées relatives à } d_1, d_2, d_3.
\end{array}\right.
$$

Remarquons encore qu'en utilisant ces mêmes coordonnées, les points d_1, d_2, d_3 coïncident respectivement avec les points (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

Avec ce qui précède, nous avons déterminé tous les éléments fondamentaux des faisceaux (ξ) et (Γ_ξ).

2. Quelques expressions associées géométriquement à la V_3.

Par l'intermédiaire du faisceau (Γ_ξ), nous trouvons directement 9 droites du plan π associées géométriquement à la V_3 : les 3 droites qui joignent d_1, d_2, d_3 et les 6 droites qui forment les coniques dégénérées. Il est donc intéressant de rechercher, pour chacune de ces droites, la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle représente une différentielle totale exacte. En tenant compte de (1-27), (1-28), (1-30), (1-31) et de la remarque située en dessous de (1-6), on trouve que les conditions cherchées sont

$$
2\text{-}20\left\{\begin{array}{ll}
\mathscr{I}_i = 0 \text{ pour la droite } (d_m\text{-}d_j) & (i, m, j = 1,2,3, \text{ mais } i \neq m \neq j),\\
\mathscr{R}_1 = 0 \text{ pour la droite } (d_1\text{-P}), & \mathscr{S}_1 = 0 \text{ pour la droite } (d_1\text{-R}),\\
\mathscr{R}_2 = 0 \text{ pour la droite } (d_2\text{-P}), & \mathscr{S}_2 = 0 \text{ pour la droite } (d_2\text{-Q}),\\
\mathscr{R}_3 = 0 \text{ pour la droite } (d_3\text{-P}), & \mathscr{S}_3 = 0 \text{ pour la droite } (d_3\text{-Q}),
\end{array}\right.
$$

où $\mathscr{I}_i$ a été défini par (1-30) et où l'on a posé

$$
2\text{-}21\left\{\begin{array}{l}
\mathscr{R}_i = \dfrac{\mathscr{I}_i}{k_i} + \dfrac{1}{2\sqrt{k_mk_j}}\mathrm{M}_i, \quad \mathscr{S}_i = \dfrac{\mathscr{I}_i}{k_i} - \dfrac{1}{2\sqrt{k_mk_j}}\mathrm{M}_i\\
(i, m, j = 1,2,3, \text{ mais } i \neq m \neq j)
\end{array}\right.
$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} M_1 &= d_1\left[\log\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\right] + 2(2;2,1) - 2(2;1,2) + 2(3;1,3) - 2(3;3,1), \\ M_2 &= d_2\left[\log\left(\frac{k_1}{k_3}\right)\right] + 2(3;3,2) - 2(3;2,3) + 2(1;2,1) - 2(1;1,2), \\ M_3 &= d_3\left[\log\left(\frac{k_2}{k_1}\right)\right] + 2(1;1,3) - 2(1;3,1) + 2(2;3,2) - 2(2;2,3). \end{aligned}\right. \tag{2-21 suite}$$

De ceci et des relations (2-6) et (2-11), on déduit notamment les théorèmes suivants.

2-22 a) *La condition nécessaire et suffisante pour que les trois droites* $(d_1\text{-}d_2)$, $(d_1\text{-}d_3)$, $(d_2\text{-}d_3)$ *représentent simultanément des différentielles totales exactes est que deux quelconques de ces droites représentent des différentielles totales exactes.*

b) *La condition nécessaire et suffisante pour que les trois droites déterminées par* Γ_{η_i} *et* $(d_k\text{-}d_j)$ $(i,k,j = 1,2,3,$ mais $i \neq k \neq j)$ *représentent simultanément des différentielles totales exactes est que deux quelconques de ces droites représentent des différentielles totales exactes.*

3. Systèmes points de Guichard.

C. Guichard [3] appelle système point d'un espace linéaire quelconque la variété engendrée par un point fonction de 3 variables essentielles de manière que ce point décrive un réseau dès qu'une quelconque de ces variables reste fixe.

De la seconde partie du travail de O. Rozet [4], on déduit facilement qu'une V_3 de S_5 du type (1,1,1,1) sera un système point de Guichard sous la condition nécessaire et suffisante que ses trois systèmes de lignes principales forment une base de référence.

En tenant compte de (1-32), (2-6) et (2-11), on trouve donc que

2-23 *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une* V_3 *de* S_5 *du type* (1,1,1,1) *soit un système point de Guichard est que deux des expressions* $\mathscr{J}_1, \mathscr{J}_2, \mathscr{J}_3$ *soient identiquement nulles, la troisième l'étant alors automatiquement.*

Si cette condition est vérifiée, on peut supposer en toute généralité que les lignes u, v, w de la V_3 coïncident respectivement, après un éventuel changement de variables, avec les lignes principales R_1, R_2, R_3. Cela entraîne que d_1x, d_2x, d_3x deviennent respectivement x_u, x_v, x_w, que d_1, d_2, d_3 ont respectivement comme coordonnées *absolues* (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) et qu'en conséquence $(i;j,k) = 0$ $(i,j,k = 1,2,3)$. Dans ces hypothèses et compte tenu des conditions d'intégrabilité (2-9), le système (2-5) devient exactement (aux notations près) le système (I') de O. Rozet [4].

4. Convention.

Soit ζ un hyperplan quelconque de S_5. Comme nous l'avons signalé au numéro 1 du chapitre 1 de la première partie, les coordonnées tangentielles de cet hyperplan sont désignées par $\zeta^i (i = 0,1...,5)$. En vertu du principe de dualité bien connu qui existe dans un espace projectif, nous pouvons également considérer les ζ^i comme les coordonnées projectives d'un point de S_5. Pour distinguer ce point de l'hyperplan ζ, nous le désignerons dans la suite par $\mathring{\zeta}$. De même, si P est un point quelconque de S_5, nous désignerons par $\mathring{P}$ l'hyperplan de S_5 qui a les mêmes coordonnées que le point P. Notons toutefois que nous n'indiquerons généralement pas le signe ° dans les équations, car il n'y change rien. C'est uniquement dans le texte que ce signe interviendra pour permettre de distinguer le point P de l'hyperplan $\mathring{P}$.

5. Quelques premières considérations géométriques relatives aux hyperplans bitangents.

Les équations (2-14) déterminent les coordonnées de η_i à un facteur non nul de proportionnalité près. Ces coordonnées sont donc des fonctions de u, v, w et, lorsque x décrit la V_3, η_i décrit généralement une famille d'hyperplans à trois paramètres essentiels.

Comme le langage des variétés de points est mieux connu que celui des variétés d'hyperplans, nous parlerons le plus souvent de la variété décrite par le point $\mathring{\eta}_i$, quitte à prendre l'interprétation duale des résultats si cela devient nécessaire.

Le point $\mathring{\eta}_i$ décrit donc généralement une V_3 de S_5. Toutefois, sous certaines conditions, ce point peut décrire une variété à moins de trois indéterminés.

En tenant compte de (2-5), (2-6), (2-7), (2-14), (2-15) et des équations que l'on déduit de (2-14) par différentiation, on trouve

2-25
$$\begin{cases}(d_k\eta_i, d_kx) = -(\eta_i, d_kk_kx) \neq 0 \ \ (i,k = 1,2,3, \text{ mais } i \neq k), \\ (d_j\eta_i, d_kx) = 0 \ (i,j,k = 1,2,3, \text{ mais } j \neq k \text{ et } i \text{ quelconque}), \\ (\eta_i, d_id_id_ix) = -(d_i\eta_i, d_id_ix) = \dfrac{\rho_ik_jk_n}{k_i}\mathscr{M}_i (i,j,n = 1,2,3, \text{ mais} \\ i \neq j \neq n).\end{cases}$$

A l'aide de ces équations, on démontre facilement que *la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathring{\eta}_i$ engendre, lorsque u, v, w varient, une variété à deux paramètres essentiels au plus est que $\mathscr{M}_i$ soit nul* ($i = 1,2,3$). Par ailleurs, *lorsque $\mathscr{M}_i = 0$, $(\mathring{\eta}_i)$ se réduit toujours à une surface sans jamais se réduire à une variété à moins de deux indéterminés* (courbe ou point).

6. Une seconde interprétation géométrique de $\mathscr{M}_i = 0$.

Comme on le sait, l'hyperplan bitangent η_i est lié géométriquement par sa définition au système (R_i) de lignes principales de la V_3. Il serait donc intéressant de connaître pour (R_i) les conséquences de l'hypothèse $\mathscr{M}_i = 0$.

Par l'intermédiaire de la dernière de (2-5) et des équations (2-7), (2-12) et (2-13), on voit immédiatement que $\mathscr{M}_i = 0$ entraîne que le point $d_id_id_ix$ peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des points x, d_ix, d_id_ix et inversement.

On a donc le théorème suivant

2-26 *la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les lignes principales R_i soient planes est que $\mathscr{M}_i$ soit nul ($i = 1,2,3$) ou, ce qui est équivalent, que le point $\mathring{\eta}_i$ engendre seulement une surface lorsque x décrit la V_3.*

7. Conditions pour que la V_3 soit réglée.

Si d_C est l'image dans π du système de courbes (C) de la V_3, il est connu que la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes C soient des droites est que le point $d_C d_C x$ s'évanouisse ou s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire des points x et $d_C x$. En conséquence, *toute droite d'une* V_3 *est nécessairement une asymptotique et une* V_3 *du type* $(1,1,1,1)$ *possède au plus 4 systèmes de droites.*

Supposons maintenant que (C) soit un système quelconque d'asymptotiques de la V_3 et désignons par t_{1C}, t_{2C}, t_{3C} les coordonnées relatives de d_C. Ce point coïncide donc avec un des 4 points définis par (2-19) et ses coordonnées relatives vérifient donc dans tous les cas

2-27 $(t_{iC})^2 = k_i (i = 1,2,3)$.

A l'aide de (1-20), (1-27), (2-5) et (2-27), on trouve que

$$d_C d_C x = q_0 x + q_1 d_1 x + q_2 d_2 x + q_3 d_3 x,$$

où $q_i (i = 0,1,2,3)$ est une notation (seulement valable pour ce numéro) dont on peut très facilement calculer la valeur.

Pour que les courbes C soient des droites, il faut et il suffit que l'on ait $\dfrac{q_1}{t_{1C}} = \dfrac{q_2}{t_{2C}} = \dfrac{q_3}{t_{3C}}$.

En développant ces conditions et en tenant compte de (2-9), on obtient finalement que *la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes* C *soient des droites est que l'on ait*

2-28 $$t_{1C} N_{i1} + t_{2C} N_{i2} + t_{3C} N_{i3} - \frac{3\mathcal{J}_i}{k_i} t_{1C} t_{2C} t_{3C} = 0 \ (i = 1,2,3),$$ où t_{1C}, t_{2C}, t_{3C} est une des 4 solutions de (2-27) et où l'on a posé

2-29 $$\begin{cases} N_{11} = \frac{1}{2} d_1 \left[\log\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\right] + 2f_2 - 2e_3 + (3;1,3) + (3;3,1) - (2;1,2) - (2;2,1), \\ N_{12} = \frac{1}{2} d_2 \left[\log\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\right] - \frac{e}{k_2} + 2f_1 + (3;2,3) + (3;3,2), \\ N_{13} = \frac{1}{2} d_3 \left[\log\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\right] + \frac{f}{k_3} - 2e_1 - (2;2,3) - (2;3,2), \end{cases}$$

2-29 suite et des valeurs pour N_{21}, N_{22}, N_{23}, N_{31}, N_{32}, N_{33} que l'on déduit facilement des trois précédentes en passant dans le tableau (2-8) de la première ligne à la seconde et de la première à la troisième.

Puisque la méthode employée pour trouver (2-28) est valable quel que soit le système d'asymptotiques considéré, on a que *la condition nécessaire et suffisante pour que la* V_3 *soit respectivement quadriréglée, triréglée, biréglée ou uniréglée est que les trois conditions de* (2-28) *soient identiquement vérifiées par les coordonnées de* 4,3,2 *ou* 1 *points distincts de* π *solutions de* (1-27).

De la méthode utilisée pour trouver (2-28), on déduit immédiatement que ces trois équations sont vérifiées dès que deux le sont. D'ailleurs, on vérifie facilement que l'on a identiquement

2-30 $N_{1i} + N_{2i} + N_{3i} = 0 \ (i = 1,2,3)$.

8. Quelques théorèmes.

Du numéro précédent, on déduit que

2-31 *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une* V_3 *du type* (1,1,1,1) *soit quadriréglée est que* $N_{ik} = \mathcal{J}_i = 0 \ (i, k = 1,2,3)$

(notons que (2-11) et (2-30) entraînent notamment que, parmi ces 12 équations, il y en a au plus 8 linéairement indépendantes).

De ce théorème découle le corollaire suivant :

2-32 *toute* V_3 *de* S_5 *quadriréglée est nécessairement un système point de Guichard.*

Par ailleurs, on démontre aussi que

2-33 *tout système point de Guichard triréglé est quadriréglé.*

On démontre également les identités suivantes

2-34
$$\mathcal{M}_i = M_i - \mathcal{H}_i \ (i = 1,2,3),$$
$$N_{ii} = \frac{1}{2} M_i - 2\mathcal{H}_i = \frac{1}{2}[\mathcal{M}_i - 3\mathcal{H}_i] \quad (i = 1,2,3).$$

En tenant compte de (2-20), (2-21), (2-26), (2-28) et (2-34), on trouve le théorème suivant :

si deux systèmes distincts d'asymptotiques de la V_3 *sont des systèmes de droites, la condition nécessaire et suffisante pour qu'ils appartiennent à un même système de surfaces est que le système de lignes principales, dont l'image dans* π *est alignée sur les images des systèmes d'asymptotiques en question, soit composé de courbes planes.*

Troisième Partie

ÉTUDE DES DOUBLES SYSTÈMES CONJUGUÉS DE PREMIÈRE ESPÈCE ET DES HYPERPLANS BITANGENTS

Chapitre I

GÉNÉRALITÉS SUR LES DOUBLES SYSTÈMES CONJUGUÉS DE PREMIÈRE ESPÈCE

1. Préliminaires.

La théorie des systèmes conjugués d'une surface de S_3 est très bien connue et est à l'origine de résultats très intéressants pour l'étude de ces surfaces.

Ces notions se généralisent directement pour certaines surfaces particulières de S_n ($n > 3$) qui sont les surfaces Φ de Segre non paraboliques [8 et 9]. Dans ces conditions, il est naturel de considérer le lieu des ∞^1 suites de Laplace que l'on peut déduire d'une V_3 lieu de ∞^1 surfaces Φ non paraboliques et d'appeler cette suite de V_3 une suite de Laplace de V_3. O. Rozet [4 et 5] et E. G. Togliatti [10] ont déjà considéré les principales V_3 de S_5 qui admettent ces suites de V_3.

Malheureusement, une V_3 quelconque ne peut généralement pas être considérée comme étant le lieu de ∞^1 surfaces Φ non paraboliques. Évidemment, on peut toutefois considérer cette V_3 comme étant le lieu de ∞^1 surfaces qui ne sont donc généralement plus des surfaces Φ. Cela n'est cependant pas très utile, car il n'existe pas de systèmes conjugués sur de telles surfaces. Conscients de cette lacune des surfaces quelconques, E. Bompiani [1] et par la suite B. Segre [6 et 7] ont introduit les systèmes conjugués d'espèce ν d'une surface quelconque d'un $S_{2\nu+1}$. Il semblerait donc intéressant de considérer également, pour les V_3 de S_5, les systèmes conjugués de seconde espèce et les suites de V_3 que l'on peut en déduire. Cependant, bien que cette étude doive normalement apporter des résultats assez importants, elle a certains désavantages qui ont fait que nous avons préféré adopter un autre point de vue.

C'est ainsi que nous introduirons ce que nous appellerons les doubles systèmes conjugués de première espèce (désignation qui se justifie en remarquant que leur définition fait intervenir des éléments du même ordre que dans le cas des systèmes conjugués d'une surface Φ non parabolique). Un des avantages de cette notion de double système est qu'elle existe sur n'importe quelle V_3 de S_5 tout en étant très proche de la notion classique des systèmes conjugués. Un second avantage de cette notion (et cela n'aurait pas eu lieu avec les systèmes conjugués d'espèce 2) est qu'elle admet comme cas particulier cette notion classique chaque fois que cette dernière existe sur la V_3 considérée.

Cette richesse supplémentaire des doubles systèmes conjugués de première espèce réside principalement dans le fait que les deux systèmes de courbes, qui déterminent un double système, ne doivent pas nécessairement appartenir à un même système de surfaces tandis que les deux systèmes de courbes conjugués doivent nécessairement vérifier cette condition.

Dans la suite, nous allons donc donner la définition des doubles systèmes conjugués de première espèce et nous utiliserons ce concept pour étudier les V_3 de S_5 du type (1,1,1,1). Toutefois, comme cette notion est valable pour n'importe quelle V_3 de S_5, nous allons d'abord la considérer pour une telle V_3 et en donner quelques propriétés générales avant de considérer le cas un peu plus particulier des V_3 du type (1,1,1,1).

2. Définitions.

Soient (C) et ($\mathscr{C}$) deux systèmes de courbes d'une V_3 quelconque de S_5. Nous dirons que ces deux systèmes de courbes forment sur la V_3 *un double système conjugué de première espèce* (C, $\mathscr{C}$) ((C) sera alors dit le premier système tandis que ($\mathscr{C}$) sera dit le second système) s'ils sont distincts géométriquement et si les tangentes aux courbes C aux différents points d'une même courbe $\mathscr{C}$ forment une surface réglée développable. L'arête de rebroussement de cette surface engendre, lorsque $\mathscr{C}$ décrit $(\mathscr{C})$, une variété de S_5 qui sera généralement une V_3 et qui sera appelée *la transformée de la* V_3 *par l'intermédiaire du double système* $(C, \mathscr{C})$ *conjugué de première espèce* (parfois, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous dirons la transformée de la V_3 dans le sens C).

Bien que ces définitions soient très proches de celle de courbes conjugées d'une surface Φ non parabolique et celle de transformé de Laplace de cette surface, nous verrons plus loin que les rôles joués par les systèmes (C) et $(\mathscr{C})$ ne sont généralement plus inversibles. En conséquence, l'existence sur une V_3 de S_5 d'un double système $(C, \mathscr{C})$ conjugué de première espèce n'entraîne généralement plus celle du double système $(\mathscr{C}, C)$ conjugué de première espèce. Toutefois, ce cas peut arriver et nous dirons alors que *les doubles systèmes* $(C, \mathscr{C})$ *et* $(\mathscr{C}, C)$ *sont en involution.*

3. Traduction analytique des définitions précédentes.

Désignons respectivement par d_C et $d_{\mathscr{C}}$ les images dans π de deux systèmes (C) et $(\mathscr{C})$ de courbes d'une $V_3(x)$. De la définition précédente, on déduit facilement que *la condition nécessaire et suffisante pour que* (C) *et* $(\mathscr{C})$ *forment sur* (x) *un double système* $(C, \mathscr{C})$ *conjugué de première espèce est*

a) que les points d_C et $D_{\mathscr{C}}$ soient distincts géométriquement ;

3-1 b) qu'il existe des fonctions θ_C, σ_C et λ_C de u, v, w telles que l'on ait $d_{\mathscr{C}}[d_C x + \theta_C x] = \sigma_C x + \lambda_C d_C x$.

Lorsque ces hypothèses sont vérifiées, *la transformée de la* $V_3(x)$ *par l'intermédiaire du double système* $(C, \mathscr{C})$ *conjugué de première espèce est engendrée par le point* y_C *qui vérifie*

3-2 $d_{\mathscr{C}}(y_C) = \sigma_C x + \lambda_C d_C x$ où $y_C = d_C x + \theta_C x$.

4. Deux premières propriétés des doubles systèmes conjugués de première espèce.

Supposons que les systèmes de courbes (C) et $(\mathscr{C})$ forment sur la $V_3(x)$ un double système conjugué de première espéce $(C, \mathscr{C})$.

Si ξ est un hyperplan quelconque du faisceau (ξ) d'hyperplans tangents à la V_3 en son point générateur, la condition b) de (3-1) entraîne notamment que $(\xi, d_{\mathscr{C}} d_C x) = 0$.

Cette équation et (1-13) démontrent le théorème suivant :

3-3 *si* (C) *et* ($\mathscr{C}$) *forment sur la* $V_3(x)$ *un double système conjugué de première espèce* (C, $\mathscr{C}$), *ces deux systèmes de courbes sont nécessairement holologues dans la correspondance* Ω *associée à la* V_3.

La réciproque de ce théorème est fausse ainsi qu'on le verra dans la suite. On peut d'ailleurs concevoir facilement ce fait en tenant compte de la démonstration du théorème direct.

La seconde propriété s'obtient de la manière suivante.

Si $\sigma_C - \lambda_C\theta_C \neq 0$, ce qui a nécessairement lieu lorsque y_C décrit effectivement une V_3, on déduit des équations (3-2)

$$x[\sigma_C - \lambda_C\theta_C] = d_{\mathscr{C}} y_C - \lambda_C y_C,$$

$$d_C x = \frac{1}{\sigma_C - \lambda_C\theta_C}[\sigma_C y_C - \theta_C d_{\mathscr{C}} y_C].$$

On a donc le théorème suivant :

3-4 *si* (C, $\mathscr{C}$) *est un double système conjugué de première espèce sur la* $V_3(x)$ *et si* (y_C) (transformée de (x) par l'intermédiaire de (C, $\mathscr{C}$)) *est effectivement une* V_3, ($\mathscr{C}$, C) *est un double système conjugué de première espèce sur la* $V_3(y_C)$ *et la variété transformée de* (y_C) *par l'intermédiaire de ce double système est précisément la* $V_3(x)$.

5. Quelques considérations sur les doubles systèmes conjugués de première espèce et en involution.

Soit, sur une $V_3(x)$, (C, $\mathscr{C}$) un double système conjugué de première espèce et en involution. L'équation de (3-1) et celle que l'on en déduit en permutant les indices C et $\mathscr{C}$ sont donc vérifiées. Elles entraînent

3-5 $$d_{\mathscr{C}} d_C x - d_C d_{\mathscr{C}} x = x[\sigma_C - \sigma_{\mathscr{C}} + d_C(\theta_{\mathscr{C}}) - d_{\mathscr{C}}(\theta_C)] + d_C x[\lambda_C + \theta_{\mathscr{C}}] - d_{\mathscr{C}} x[\theta_C + \lambda_{\mathscr{C}}].$$

Puisque les points d_C et $d_{\mathscr{C}}$ sont distincts dans π, il y a toujours moyen de prendre un troisième point D tel que ces trois points forment une base de π. Il existe alors toujours j_1, j_2, j_3 (notations seulement valables pour ce numéro) tels que l'on ait

$d_{\mathscr{C}}d_{C}x - d_{C}d_{\mathscr{C}}x = j_1 Dx + j_2 d_{\mathscr{C}}x + j_3 d_{C}x.$

En comparant cette équation avec (3-5), on déduit notamment que le coefficient de x est nul dans (3-5) et que $j_1 = 0$. Or, (1-23) et (1-31) démontrent que $j_1 = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les sytèmes de courbes (C) et ($\mathscr{C}$) appartiennent à un même système de surfaces de la V_3.

Inversement, si les systèmes de courbes (C) et ($\mathscr{C}$) appartiennent à un même système de surfaces et s'ils forment sur la V_3 un double système conjugué de première espèce (soit (C, $\mathscr{C}$) par exemple), on peut écrire

$y_C = d_C x + \theta_C x,$

$d_{\mathscr{C}} y_C = \sigma_C x + \lambda_C d_C x,$

$d_{\mathscr{C}} d_C x - d_C d_{\mathscr{C}} x = j_2 d_{\mathscr{C}} x + j_3 d_C x.$

Si l'on pose

$\theta_{\mathscr{C}} = j_3 - \lambda_C, \ \lambda_{\mathscr{C}} = -j_2 - \theta_C$ et

$\sigma_{\mathscr{C}} = \sigma_C + d_C(\theta_{\mathscr{C}}) - d_{\mathscr{C}}(\theta_C),$

on déduit immédiatement de ces équations que

$y_{\mathscr{C}} = d_{\mathscr{C}} x + \theta_{\mathscr{C}} x$ est tel que l'on ait

$d_C y_{\mathscr{C}} = \sigma_{\mathscr{C}} x + \lambda_{\mathscr{C}} d_{\mathscr{C}} x.$

En conséquence, le double système (C, $\mathscr{C}$) est involutif.

Nous avons donc démontré le théorème suivant :

3-6 *si deux systèmes de courbes,* (C) *et* ($\mathscr{C}$), *forment sur la* $V_3(x)$ *un double système conjugué de première espèce, la condition nécessaire et suffisante pour que ce double système soit involutif est que* (C) *et* ($\mathscr{C}$) *appartiennent à un même système de surfaces de la* V_3.

Remarquons encore que, si (C) et ($\mathscr{C}$) forment sur la $V_3(x)$ un double système conjugué de première espèce et en involution, les systèmes correspondants de courbes des variétés (y_C) (transformée de (x) par l'intermédiaire de (C, $\mathscr{C}$)) et ($y_{\mathscr{C}}$) (transformée de (x) par l'intermédiaire de ($\mathscr{C}$, C)) forment également sur ces V_3 des doubles systèmes conjugués de première espèce et en involution du moins lorsque y_C et $y_{\mathscr{C}}$ décrivent effectivement des V_3 (cela se justifie très facilement en tenant compte de (3-4), (3-6) et du fait que si deux systèmes de courbes de la $V_3(x)$ appartiennent à un même système de surfaces, les systèmes de courbes correspondants des variétés (y_C) et $(y_{\mathscr{C}})$ appartiennent au système de surfaces correspondant).

En conséquence, de la $V_3(x)$, on déduit par $(C, \mathscr{C})$ la variété (y_C) qui généralement redonnera (x) par $(\mathscr{C}, C)$ et donnera une nouvelle variété par $(C, \mathscr{C})$ et ainsi de suite. De même, dans l'autre sens, la $V_3(x)$ donne par $(\mathscr{C}, C)$ la variété $(y_{\mathscr{C}})$ qui généralement redonnera (x) par $(C, \mathscr{C})$ et donnera une nouvelle variété par $(\mathscr{C}, C)$ et ainsi de suite. On obtient donc, dans ces conditions, une suite de V_3 qui sera généralement illimitée dans les deux sens et qui est en fait une suite de Laplace de V_3. En effet, les systèmes de courbes (C) et $(\mathscr{C})$ appartiennent à un même système (S) de surfaces de la V_3. On vérifie alors très facilement que ces surfaces S sont des surfaces Φ de Segre non paraboliques et que (y_C), par exemple, coïncide avec le lieu des ∞^1 transformées de Laplace dans le sens de C des ∞^1 surfaces S.

En conséquence, *la notion de double système conjugué de première espèce admet bien comme cas particulier* (lorsque le double système est involutif) *la notion de système conjugué au sens traditionnellement envisagé.*

Chapitre II

GÉNÉRALITÉS SUR LES DOUBLES SYSTÈMES CONJUGUÉS DE PREMIÈRE ESPÈCE D'UNE V_3 DE S_5 DU TYPE (1,1,1,1)

1. Équations différentielles de ces doubles systèmes.

Nous conserverons dans ce chapitre et les suivants toutes les notations introduites dans les deux premières parties. Soient donc d_C et $d_{\mathscr{C}}$ les images dans π des systèmes de courbes (C) et ($\mathscr{C}$) d'une $V_3(x)$ du type (1,1,1,1). Nous désignerons respectivement par $du_C, dv_C,$ dw_C et $du_{\mathscr{C}}, dv_{\mathscr{C}}, dw_{\mathscr{C}}$ les coordonnées absolues des points d_C et $d_{\mathscr{C}}$ tandis que t_{1C}, t_{2C}, t_{3C} et $t_{1\mathscr{C}}, t_{2\mathscr{C}}, t_{3\mathscr{C}}$ représenteront les coordonnées relatives à d_1, d_2, d_3 de ces mêmes points.

Si $y_C = d_C x + \theta_C x$, on trouve, en tenant comte de (2-9) et des valeurs des différentielles secondes déduites de (2-5), que

$$y_C = t_{1C}d_1x + t_{2C}d_2x + t_{3C}d_3x + \theta_C x,$$

$$d_1y_C = [q_{10C}+d_1(\theta_C)]x + [q_{11C}+\theta_C]d_1x + q_{12C}d_2x + q_{13C}d_3x + t_{1C}d_1d_1x,$$

$$d_2y_C = [q_{20C}+d_2(\theta_C)]x + q_{21C}d_1x + [q_{22C}+\theta_C]d_2x + q_{23C}d_3x + t_{2C}d_2d_2x,$$

3-7

$$d_3y_C = [q_{30C}+d_3(\theta_C)]x + q_{31C}d_1x + q_{32C}d_2x + [q_{33C}+\theta_C]d_3x + t_{3C}d_3d_3x,$$

où l'on a posé

$$q_{10C} = t_{2C}a_3 + t_{3C}a_2,$$

$$q_{11C} = t_{2C}[b_3+(1;1,2)] + t_{3C}[b_2+(1;1,3)] + d_1(t_{1C}),$$

$$q_{12C} = t_{2C}[e_3+(2;1,2)] - t_{3C}\frac{k_2\mathscr{J}_3}{k_3} + d_1(t_{2C}),$$

3-7 suite
$$q_{13C} = t_{2C}\,\frac{k_3\mathscr{J}_2}{k_2} + t_{3C}[f_2+(3;1,3)] + d_1(t_{3C}),$$
et des valeurs analogues que l'on trouve très facilement pour les autres q_{ikC}.

De (3-7) et (3-1), on déduit donc que *la condition nécessaire et suffisante pour que* (C) *et* ($\mathscr{C}$) *forment sur la* $V_3(x)$ *un double système* (C, $\mathscr{C}$) *conjugué de première espèce est*

a) que d_C et $d_{\mathscr{C}}$ soient distincts géométriquement ;

b) qu'il existe θ_C, σ_C et λ_C tels que l'on ait

3-8
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{t_{1C}t_{1\mathscr{C}}}{k_1} = \frac{t_{2C}t_{2\mathscr{C}}}{k_2} = \frac{t_{3C}t_{3\mathscr{C}}}{k_3} = \mu,\\
&t_{1\mathscr{C}}q_{10C} + t_{2\mathscr{C}}q_{20C} + t_{3\mathscr{C}}q_{30C} + d_{\mathscr{C}}(\theta_C) + \mu a = \sigma_C,\\
&t_{1\mathscr{C}}q_{11C} + t_{2\mathscr{C}}q_{21C} + t_{3\mathscr{C}}q_{31C} + \mu b = \lambda_C t_{1C} - \theta_C t_{1\mathscr{C}},\\
&t_{1\mathscr{C}}q_{12C} + t_{2\mathscr{C}}q_{22C} + t_{3\mathscr{C}}q_{32C} + \mu e = \lambda_C t_{2C} - \theta_C t_{2\mathscr{C}},\\
&t_{1\mathscr{C}}q_{13C} + t_{2\mathscr{C}}q_{23C} + t_{3\mathscr{C}}q_{33C} + \mu f = \lambda_C t_{3C} - \theta_C t_{3\mathscr{C}}.
\end{aligned}\right.$$

On vérifie alors très facilement que (3-8) équivaut à dire

3-9

a) que d_C et $d_{\mathscr{C}}$ soient distincts géométriquement ;

b) que soient identiquement vérifiées les équations

$$\frac{t_{1C}t_{1\mathscr{C}}}{k_1} = \frac{t_{2C}t_{2\mathscr{C}}}{k_2} = \frac{t_{3C}t_{3\mathscr{C}}}{k_3} = \mu,\ (*)$$

$$\begin{vmatrix}
t_{1\mathscr{C}}q_{11C} + t_{2\mathscr{C}}q_{21C} + t_{3\mathscr{C}}q_{31C} + \mu b \ ; & t_{1\mathscr{C}} \ ; & t_{1C}\\
t_{1\mathscr{C}}q_{12C} + t_{2\mathscr{C}}q_{22C} + t_{3\mathscr{C}}q_{32C} + \mu e \ ; & t_{2\mathscr{C}} \ ; & t_{2C}\\
t_{1\mathscr{C}}q_{13C} + t_{2\mathscr{C}}q_{23C} + t_{3\mathscr{C}}q_{33C} + \mu f \ ; & t_{3\mathscr{C}} \ ; & t_{3C}
\end{vmatrix} = 0\ (**).$$

Les équations différentielles des doubles systèmes conjugués de première espèce sont donc données par les équations (*) *et* (**) *de* (3-9) *où les inconnues sont* t_{iC} et $t_{i\mathscr{C}}$ (i = 1,2,3) *et où la condition* (3-9) *a*) *doit être vérifiée.*

2. Quelques remarques sur les équations (3-9).

En tenant compte de (1-7), (1-13), (1-27) et (2-5), on vérifie que l'équation (*) de (3-9) traduit analytiquement la condition nécessaire et suffisante pour que les systèmes de courbes (C) et ($\mathscr{C}$) soient homologues dans la correspondance Ω de la V_3 considérée.

On retrouve ainsi le théorème (3-3) et on constate maintenant très bien que la réciproque de ce théorème est généralement fausse. De plus, cette équation (*) de (3-9) permet de trouver très facilement les résultats suivants (qui ne sont donc valables que pour une V_3 du type (1,1,1,1)) :

un point-base du faisceau (Γ_ξ) est toujours son propre homologue dans la correspondance Ω et n'admet que lui-même comme homologue ;

un point double pour une conique de (Γ_ξ), soit d_i par exemple, admet comme homologues dans la correspondance Ω tous les points situés sur la droite qui joint d_k à d_j $(k \neq j \neq i)$ et n'admet que ces points comme homologues ;

un point quelconque du plan π, qui n'est toutefois ni un point double pour une conique de (Γ_ξ) ni un point-base de ce faisceau, admet toujours un et un seul point qui lui est homologue dans Ω et ces deux points sont toujours distincts géométriquement.

Ce qui précède donne donc une interprétation géométrique de l'équation (*) de (3-9) et entraîne les remarques suivantes.

a) Il n'existe jamais de système de courbes qui forme un double système conjugué de première espèce avec un des systèmes d'asymptotiques de la V_3 (les conditions (3-9) a) et (3-9) (*) sont incompatibles).

b) Il n'existe généralement pas de système de courbes qui forme un double système conjugué de première espèce avec un système quelconque de courbes de la V_3 distinct cependant d'un système de lignes principales. En effet, l'équation (*) de (3-9) détermine déjà complètement le système de courbes susceptible de répondre à la question et l'équation (**) de (3-9) n'est généralement plus vérifiée.

c) Il existe toujours au moins un système de courbes qui forme un double système conjugué de première espèce avec un quelconque des trois systèmes de lignes principales de la V_3. En effet, dans ce cas-ci, l'équation (*) de (3-9) laisse un paramètre de liberté aux systèmes de courbes susceptibles de répondre à la question et l'équation (**) de (3-9) détermine généralement un nombre fini de solutions.

Dans la suite, nous nous limiterons à la considération des doubles systèmes conjugués de première espèce dont le premier système de courbes est un des trois systèmes de lignes principales de la V_3. En effet, ces doubles systèmes sont certainement les plus intéressants et, en plus, on est assuré de leur existence sur n'importe quelle V_3 de S_5 du type (1,1,1,1).

3. Cas où le système (C) coïncide avec l'un des trois systèmes de lignes principales de la $V_3(x)$.

Pour fixer les idées, nous considérerons le cas où le système de courbes (C) coïncide avec le système de *lignes* principales (R_1). Cela ne nuira en rien à la généralité de la question, car les trois systèmes de lignes principales jouent exactement des rôles symétriques sur la V_3 et les résultats que nous obtiendrons pour (R_1) pourront immédiatement être transformés, par l'intermédiaire du tableau (2-8), en résultats valables pour (R_2) et (R_3).

Nous allons donc supposer que $t_{1C} = 1$, $t_{2C} = t_{3C} = 0$. Compte tenu des deux numéros précédents, nous obtenons :
le ou les systèmes de courbes ($\mathscr{C}$) *de la* $V_3(x)$ *tels que le ou les doubles systèmes* (R_1, $\mathscr{C}$) *sont conjugués de première espèce sur cette* V_3, *sont donnés par les solutions de*

$$\text{3-10}\quad\begin{cases} t_{1\mathscr{C}} = 0, \\ t_{2\mathscr{C}}^2 \dfrac{k_3\mathscr{J}_1}{k_1} + t_{3\mathscr{C}}^2 \dfrac{k_2\mathscr{J}_1}{k_1} + t_{2\mathscr{C}}t_{3\mathscr{C}}\mathscr{H}_1 = 0. \end{cases}$$

De plus, *le point générateur de la variété* (y), *transformée de* (x) *par l'intermédiaire du double système* (R_1, $\mathscr{C}$) *conjugué de première espèce, est donné par*

$y = d_1x + \theta\, x$ où θ est solution de

$$\text{3-11}\quad\begin{cases} t_{2\mathscr{C}}[e_3+(2;2,1)] + t_{3\mathscr{C}}\left[\dfrac{k_2\mathscr{J}_1}{k_1}\right] = -t_{2\mathscr{C}}\theta, \\ t_{2\mathscr{C}}\left[-\dfrac{k_3\mathscr{J}_1}{k_1}\right] + t_{3\mathscr{C}}[f_2+(3;3,1)] = -t_{3\mathscr{C}}\theta. \end{cases}$$

Notons que les deux équations de (3-11) qui déterminent θ sont toujours compatibles puisque le fait que $t_{2\mathscr{C}}$ et $t_{3\mathscr{C}}$ vérifient (3-10) est précisément équivalent à cette compatibilité.

De plus, on a ici

$$d_1 y = x\, d_1(\theta) + \theta d_1 x + d_1 d_1 x,$$

3-12
$$\left\{\begin{aligned} d_2 y &= x[a_3+d_2(\theta)] + d_1 x[b_3+(1;2,1)] \\ &\quad + d_2 x[e_3+(2;2,1)+\theta] - \frac{k_3\mathscr{J}_1}{k_1} d_3 x, \\ d_3 y &= x[a_2+d_3(\theta)] + d_1 x[b_2+(1;3,1)] \\ &\quad + \frac{k_2\mathscr{J}_1}{k_1} d_2 x + d_3 x[f_2+(3;3,1)+\theta], \\ d_{\mathscr{C}} y &= \sigma x + \lambda d_1 x \end{aligned}\right.$$

où σ et λ sont donnés par

$$t_{2\mathscr{C}}[a_3+d_2(\theta)] + t_{3\mathscr{C}}[a_2+d_3(\theta)] = \sigma,$$
$$t_{2\mathscr{C}}[b_3+(1;2,1)] + t_{3\mathscr{C}}[b_2+(1;3,1)] = \lambda.$$

Si l'on désigne par $\mathscr{K}_1$ le discriminant de la seconde équation de (3-10), on déduit de ce qui précède les trois cas suivants.

3-13

a) *Lorsque* $\mathscr{K}_1 \neq 0$, *il existe sur la* $V_3(x)$ *deux systèmes distincts de courbes* que nous désignerons par $(\mathscr{C}_{12})$ et $(\mathscr{C}_{13})$ et *qui sont tels que les doubles systèmes* $(R_1, \mathscr{C}_{12})$ *et* $(R_1, \mathscr{C}_{13})$ *sont conjugués de première espèce* ; dans la suite, nous désignerons respectivement par (y_{12}) et (y_{13}) les variétés transformées de (x) par l'intermédiaire de ces doubles systèmes.

b) *Lorsque* $\mathscr{K}_1 = 0$, *mais* $\mathscr{J}_1\mathscr{H}_1 \neq 0$, *il existe sur la* $V_3(x)$ *un et un seul système de courbes* que nous désignerons par $(\mathscr{C}_1)$ et *qui est tel que le double système* $(R_1, \mathscr{C}_1)$ *est conjugué de première espèce* ; dans la suite, nous désignerons par (y_1) la variété transformée de (x) par l'intermédiaire de ce double système.

c) *Lorsque* $\mathscr{J}_1 = \mathscr{K}_1 = 0$, *il existe sur la* $V_3(x)$ *une simple infinité de systèmes de courbes* $(\mathscr{C})$ *qui sont tels que les doubles systèmes* $(R_1, \mathscr{C})$ *sont conjugués de première espèce* ; dans la suite, nous désignerons encore par (y_1) la variété transformée de (x) par l'intermédiaire d'un quelconque de ces doubles systèmes (en effet, quel que soit le double système considéré, on obtient la même variété transformée).

Les notations que nous venons d'introduire se transforment directement en notations analogues dès que l'on considère les systèmes de lignes principales (R_2) et (R_3) au lieu de (R_1).

Nous avons notamment

$$\text{3-14} \quad \mathcal{K}_i = \mathcal{H}_i^2 - 4k_nk_j\left(\frac{\mathcal{J}_i}{k_i}\right)^2 \quad (i = 1,2,3, \text{ mais } n \neq j \neq i).$$

4. Condition nécessaire et suffisante pour que la transformée de (x) par l'intermédiaire de $(R_1, \mathcal{C})$ se réduise à une variété à moins de trois indéterminés.

Soit $(\mathcal{C})$ un système de courbes de la $V_3(x)$ tel que le double système $(R_1, \mathcal{C})$ soit conjugué de première espèce sur (x). Comme au numéro précédent, désignons par (y) la variété transformée de (x) par l'intermédiaire de ce double système (nous n'ajouterons donc des indices à $\mathcal{C}$ et y que lorsque nous considérerons d'une manière précise un des trois cas du théorème (3-13)).

Il est connu que la condition nécessaire et suffisante pour que (y) se réduise à une variété à moins de trois indéterminés est qu'il existe j_0, j_1, j_2, j_3 (notations seulement valables pour ce numéro) non tous nuls et tels que l'on ait

$$j_0y + j_1d_1y + j_2d_2y + j_3d_3y = 0.$$

En tenant compte de (3-11), (3-12) et du fait que les points $x, d_1x, d_2x, d_3x, d_1d_1x$ sont linéairement indépendants, on constate que cette condition est équivalente à l'existence de j_0, j_1, j_2, j_3 non tous nuls et tels que l'on ait

$$\text{3-15} \quad \begin{cases} j_1 = 0, \\ j_0\theta + j_2[a_3+d_2(\theta)] + j_3[a_2+d_3(\theta)] = 0, \\ j_0 + j_2[b_3+(1;2,1)] + j_3[b_2+(1;3,1)] = 0, \\ j_2[e_3+(2;2,1)+\theta] + j_3\dfrac{k_2\mathcal{J}_1}{k_1} = 0, \\ -j_2\dfrac{k_3\mathcal{J}_1}{k_1} + j_3[f_2+(3;3,1)+\theta] = 0. \end{cases}$$

Lorsque $\mathcal{J}_1 = \mathcal{H}_1 = 0$, on a $\theta = -[e_3+(2;2,1)] =$

$-[f_2+(3;3,1)]$. Dans ce cas, les conditions d'intégrabilité (2-9) montrent que les deux dernières de (3-15) s'évanouissent et que la seconde est proportionnelle à la troisième. En conséquence, lorsque $\mathcal{J}_1 = \mathcal{H}_1 = 0$, le système (3-15) est vérifié quels que soient j_2 et j_3 tandis que j_0 et j_1 sont déterminés par les trois premières qui sont compatibles.

Si $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{H}_1$ ne sont pas simultanément nuls, (3-15) est incompatible lorsque $Q = \sigma - \lambda\theta$ est différent de zéro tandis que (3-15) admet une et une seule solution (donnée par $j_2 = t_{2\mathscr{C}}$, $j_3 = t_{3\mathscr{C}}$, $j_1 = 0$ et $j_0 = -\lambda$) lorsque Q est nul.

Si l'on remarque encore que les conditions d'intégrabilité (2-9) entraînent toujours $Q = 0$ lorsque $\mathcal{J}_1 = \mathcal{H}_1 = 0$, on arrive au théorème suivant :

3-16 *la condition nécessaire et suffisante pour que y décrive une variété à moins de trois indéterminés est que $Q = \sigma - \lambda\theta$ soit nul.*

Plus précisément, on peut dire :

3-17 *si $\mathcal{J}_1 = \mathcal{H}_1 = 0$, Q est toujours nul et y décrit toujours une courbe* ($j_2d_2y + j_3d_3y$ coïncide géométriquement avec y quels que soient j_2 et j_3) ;
si $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{H}_1$ ne sont pas simultanément nuls, y décrit une V_3 lorsque Q est différent de zéro tandis que y décrit une surface lorsque Q est nul ($d_{\mathscr{C}}y$ coïncide géométriquement avec y).

5. Une première propriété de la variété (y).

Le théorème (3-4) est applicable à (y) et le fait que (R_1) est un système de lignes principales de (x) va nous permettre de rendre ce théorème encore plus intéressant en démontrant que $(\mathscr{C})$ est un système de lignes principales de (y).

En effet, si l'on différentie dans les directions d_1, d_2, d_3 la valeur de $d_{\mathscr{C}}y$ donnée par (3-12) et si l'on tient compte de (2-5), (2-14), (3-11) et (3-12), on obtient

3-18 $$(\eta_1, y) = (\eta_1, d_k y) = (\eta_1, d_k d_{\mathscr{C}} y) = 0 \quad (k = 1,2,3).$$

De ces équations, on déduit le théorème suivant :

lorsque y décrit effectivement une V_3, *le système de courbes* $(\mathscr{C})$ *est sur*
cette V_3 *un système de lignes principales et l'hyperplan bitangent à* (y)
3-19 *en son point générateur et correspondant à ce système de lignes princi-*
pales coïncide avec η_1 (qui est l'hyperplan bitangent à (x) en x et
correspondant au système de lignes principales (R_1)).

Ce théorème laisse déjà entrevoir que la notion de variété transformée de la $V_3(x)$ par l'intermédiaire d'un double système $(R_1, \mathscr{C})$ conjugué de première espèce sur cette V_3 et la notion d'hyperplan bitangent à (x) en x et correspondant à (R_1) sont étroitement liées. C'est pour cette raison que nous allons rechercher quelques propriétés générales de la variété décrite par le point $\mathring{\eta}_1$ (convention du numéro 4 du ch. 2 de la seconde partie) avant de faire une étude systématique de la variété (y).

CHAPITRE III

GÉNÉRALITÉS SUR LA VARIÉTÉ DÉCRITE PAR $\mathring{\eta}_1$.

1. Quelques calculs préliminaires.

En tenant compte des équations (2-3), (2-5), (2-7), (2-14), (2-15), (2-25) et des équations déduites des précédentes par différentiation, on trouve facilement que

$$
(3\text{-}20)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(x,\eta_1) = (x,d_i\eta_1) = (x,d_id_1\eta_1) = (x,\, d_3d_2\eta_1) = 0 \quad (i = 1,2,3),\\
&(x,d_2d_2\eta_1) = \rho_1k_3, \qquad (x,\, d_3d_3\eta_1) = -\,\rho_1k_2\,;\\
&(d_1x,\eta_1) = (d_1x,d_i\eta_1) = 0 \quad (i = 1,2,3),\\
&(d_1x,d_kd_1\eta_1) = 0 \ (k = 2,3),\\
&(d_1x,d_1d_1\eta_1) = \frac{\rho_1k_2k_3\mathscr{M}_1}{k_1}, \qquad (d_1x,d_3d_2\eta_1) = \rho_1k_2k_3\frac{\mathscr{J}_1}{k_1},\\
&(d_1x,d_2d_2\eta_1) = \rho_1k_3[e_3+(2;2,1)],\\
&(d_1x,d_3d_3\eta_1) = -\,\rho_1k_2[f_2+(3;3,1)]\,;\\
&(d_jx,\eta_1) = (d_jx,d_i\eta_1) = (d_jx,d_id_1\eta_1) = 0 \ (i{=}1,2,3,\ j{=}2,3 \text{ et } i\neq j),\\
&(d_2x,d_2\eta_1) = -\rho_1k_3, \qquad (d_3x,\, d_3\eta_1) = \rho_1k_2,\\
&(d_2x,d_2d_1\eta_1) = \rho_1k_3\{-d_1[\log(\rho_1k_3)]+e_3+2(2;1,2)-(2;2,1)\},\\
&(d_2x,d_3d_2\eta_1) = \rho_1k_3\{-d_3[\log(\rho_1k_3)]+e_1+(2;3,2)\},\\
&(d_2x,d_2d_2\eta_1) = \rho_1k_3\{-d_2[\log(\rho_1^2k_2k_3)] + \frac{e}{k_2}+f_1+2(3;2,3)-(3;3,2)\},\\
&(d_2x,d_3d_3\eta_1) = -\rho_1k_2[f_1+(3;3,2)],\\
&(d_3x,d_3d_1\eta_1) = \rho_1k_2\{d_1[\log(\rho_1k_2)]-f_2-2(3;1,3)+(3;3,1)\},\\
&(d_3x,d_3d_2\eta_1) = \rho_1k_2\{d_2[\log(\rho_1k_2)]-f_1-2(3;2,3)+(3;3,2)\},\\
&(d_3x,d_2d_2\eta_1) = \rho_1k_2[e_1+(2;2,3)],\\
&(d_3x,d_3d_3\eta_1) = \rho_1k_2\{d_3[\log(\rho_1^2k_2k_3)]-\frac{f}{k_3}-e_1-2(2;3,2)+(2;2,3)\}\,;\\
&(d_1d_1x,\eta_1) = (d_1d_1x,d_2\eta_1) = (d_1d_1x,d_3\eta_1) = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$(d_1d_1x, d_1\eta_1) = -\frac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1},$$

$$(d_1d_1x, d_1d_1\eta_1) = \frac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\Big\{-d_1[\log(\rho_1^2 k_2 k_3 \mathscr{M}_1)] + \frac{b}{k_1} + e_3 + 2(2;1,2)$$

$$-(2;2,1) + f_2 + 2(3;1,3) - (3;3,1)\Big\},$$

$$(d_1d_1x, d_2d_1\eta_1) = \frac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\Big\{-d_2\Big[\log\Big(\frac{\rho_1^2 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\Big)\Big] + b_3 +$$

$$2(1;2,1) - (1;1,2)\Big\},$$

$$(d_1d_1x, d_3d_1\eta_1) = \frac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\Big\{-d_3\Big[\log\Big(\frac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\Big)\Big] + b_2 +$$

$$2(1;3,1) - (1;1,3)\Big\},$$

$$(d_1d_1x, d_3d_2\eta_1) = \rho_1 k_3 \Big\{d_1\Big[\frac{k_2 \mathscr{J}_1}{k_1}\Big] + \frac{k_2 \mathscr{J}_1}{k_1}[e_3 + (2;1,2) + (3;3,1) - (3;1,3)]$$

$$-\frac{k_2 \mathscr{J}_3}{k_3}[f_2 + (3;3,1)] - \mathscr{J}_2[e_3 + (2;2,1)]\Big\},$$

$$(d_1d_1x, d_2d_2\eta_1) = \rho_1 k_3\{d_1[e_3 + (2;2,1)] + [e_3 + (2;2,1)]^2 + 2\frac{k_2}{k_1}\mathscr{J}_1\mathscr{J}_3\},$$

3-20 suite

$$(d_1d_1x, d_3d_3\eta_1) = -\rho_1 k_2\{d_1[f_2 + (3;3,1)] + [f_2 + (3;3,1)]^2 + 2\frac{k_3}{k_1}\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2\};$$

$$(d_2d_2x, \eta_1) = \rho_1 k_3,$$

$$(d_2d_2x, d_1\eta_1) = \rho_1 k_3\{d_1[\log(\rho_1 k_3)] - e_3 - 2(2;1,2) + (2;2,1)\},$$

$$(d_2d_2x, d_2\eta_1) = \rho_1 k_3\{d_2[\log(\rho_1 k_2)] - \frac{e}{k_2} - f_1 - 2(3;2,3) + (3;3,2)\},$$

$$(d_2d_2x, d_3\eta_1) = \rho_1 k_3\{d_3[\log(\rho_1 k_3)] - e_1 - 2(2;3,2) + (2;2,3)\},$$

$$(d_2d_2x, d_2d_1\eta_1) =$$

$$\rho_1 k_3\Big\{d_2d_1[\log(\rho_1 k_3)] + d_2[\log(\rho_1 k_3)]d_1[\log(\rho_1 k_3)] -$$

$$d_2[e_3 + 2(2;1,2) - (2;2,1)] - d_2[\log(\rho_1 k_3)][e_3 + 2(2;1,2) - (2;2,1)]$$

$$-\mathscr{M}_1[d_2(\log(k_1)) + b_3 + 2(1;2,1) - (1;1,2)] +$$

$$[d_2(\log(k_2)) - \frac{e}{k_2}][d_1(\log(\rho_1 k_3)) - e_3 - 2(2;1,2) + (2;2,1)] +$$

$$[d_2(\log(k_3)) + f_1 + 2(3;2,3) - (3;3,2)][-d_1(\log(\rho_1 k_2)) + f_2 +$$

$$2(3;1,3) - (3;3,1)]\Big\},$$

$$(d_2d_2x, d_3d_1\eta_1) =$$

$$\rho_1 k_3\Big\{d_3d_1[\log(\rho_1 k_3)] + d_3[\log(\rho_1 k_3)]d_1[\log(\rho_1 k_3)] -$$

$$d_3[e_3 + 2(2;1,2) - (2;2,1)] - d_3[\log(\rho_1 k_3)][e_3 + 2(2;1,2) - (2;2,1)]$$

$$-d_1[\log(\rho_1 k_3)][e_1 + 2(2;3,2) - (2;2,3)] +$$

$$[e_1 + 2(2;3,2) - (2;2,3)][e_3 + 2(2;1,2) - (2;2,1)]\Big\}.$$

2. Système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les coordonnées de η_1 dans le cas $\mathscr{M}_1 \neq 0$.

Dans ce cas ($\mathscr{M}_1 \neq 0$), on sait déjà que le point $\mathring{\eta}_1$ décrit effectivement une V_3 et les équations (3-20) montrent que les hyperplans $\mathring{x}$ et $d_1\mathring{x}$ sont tangents à cette V_3 en son point générateur. On vérifie aussi très facilement que les points $\mathring{\eta}_1$, $d_1\mathring{\eta}_1$, $d_2\mathring{\eta}_1$, $d_3\mathring{\eta}_1$, $d_1d_1\mathring{\eta}_1$ et $d_kd_k\mathring{\eta}_1$ ($k = 2$ ou 3) sont toujours linéairement indépendants.

De ces remarques et des équations (3-20) et (1-20), on déduit que *les coordonnées de η_1 vérifient toujours, dans le cas $\mathscr{M}_1 \neq 0$, le système d'équations aux dérivées partielles suivant*

$$
\text{3-21}\left\{\begin{array}{l}
d_2 * d_1\eta_1 = A_3\eta_1 + B_3 d_1\eta_1 + E_3 d_2\eta_1 + F_3 d_3\eta_1,\\
d_3 * d_1\eta_1 = A_2\eta_1 + B_2 d_1\eta_1 + E_2 d_2\eta_1 + F_2 d_3\eta_1,\\
d_2 * d_3\eta_1 = A_1\eta_1 + B_1 d_1\eta_1 + E_1 d_2\eta_1 + F_1 d_3\eta_1 + G_1 d_1 d_1\eta_1,\\
K_1 d_1 d_1\eta_1 + K_2 d_2 d_2\eta_1 + K_3 d_3 d_3\eta_1 = A\eta_1 + B d_1\eta_1 + E d_2\eta_1 + F d_3\eta_1.
\end{array}\right.
$$

où l'on a posé

$$
\text{3-22}\left\{\begin{array}{l}
F_3 = -(3;2,1),\\
E_3 = d_1[\log(\rho_1 k_3)] - e_3 - 2(2;1,2),\\
B_3 = d_2\left[\log\left(\dfrac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\right)\right] - b_3 - 3(1;2,1) + (1;1,2),\\
F_2 = d_1[\log(\rho_1 k_2)] - f_2 - 2(3;1,3),\\
E_2 = -(2;3,1),\\
B_2 = d_3\left[\log\left(\dfrac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\right)\right] - b_2 - 3(1;3,1) + (1;1,3).\\
A_3 = d_2[F_2 + (3;3,1)] - [F_2 + (3;3,1)]\,[B_3 + (1;2,1)] +\\
\qquad \mathscr{M}_1\{-d_2[\log(\rho_1 k_2)] + f_1 + 2(3;2,3) - (3;3,2)\},\\
A_2 = d_3[E_3 + (2;2,1)] - [E_3 + (2;2,1)]\,[B_2 + (1;3,1)] +\\
\qquad \mathscr{M}_1\{d_3[\log(\rho_1 k_3)] - e_1 - 2(2;3,2) + (2;2,3)\},\\
G_1 = \dfrac{\mathscr{J}_1}{\mathscr{M}_1}.\\
F_1 = d_2[\log(\rho_1 k_2)] - f_1 - 2(3;2,3),\\
E_1 = d_3[\log(\rho_1 k_3)] - e_1 - 2(2;3,2),
\end{array}\right.
$$

3-22 suite

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \mathrm{B}_1 = -(1;3,2) + \frac{\mathscr{I}_1}{\mathscr{M}_1}\left\{-d_1\left[\log\left(\frac{\rho_1^2 k_2^2 k_3 \mathscr{M}_1 \mathscr{I}_1}{k_1}\right)\right] + \frac{b}{k_1}\right\} + \\
& \qquad \frac{\mathscr{I}_1}{\mathscr{M}_1}\{(2;1,2)-(2;2,1)+3(3;1,3)-3(3;3,1)\}+\frac{k_1\mathscr{I}_2}{k_2\mathscr{M}_1}\mathscr{H}_1, \\
& \mathrm{K}_2 = k_2,\ \mathrm{K}_3 = k_3,\ \mathrm{K}_1 = -\frac{k_1\mathscr{H}_1}{\mathscr{M}_1}, \\
& \mathrm{F} = k_3\{d_3[\log(\rho_1^2 k_2 k_3)] - \frac{f}{k_3} + 2(2;2,3) - 2(2;3,2)\}, \\
& \mathrm{E} = k_2\{d_2[\log(\rho_1^2 k_2 k_3)] - \frac{e}{k_2} + 2(3;3,2) - 2(3;2,3)\}, \\
& \mathrm{B} = \frac{k_1\mathscr{H}_1}{\mathscr{M}_1}\{-d_1[\log(\rho_1^2 k_2 k_3 \mathscr{M}_1 \mathscr{H}_1)] + \frac{b}{k_1} + 2(2;1,2) - 2(2;2,1)\} + \\
& \qquad \frac{k_1\mathscr{H}_1}{\mathscr{M}_1}\{2(3;1,3) - 2(3;3,1)\} + 2\frac{k_2 k_3 \mathscr{I}_1}{\mathscr{M}_1}\left\{\frac{\mathscr{I}_2}{k_2} - \frac{\mathscr{I}_3}{k_3}\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Notons que nous n'avons pas déterminé les valeurs de A et A_1 parce qu'elles sont très lourdes et que dans la suite nous ne les utiliserons pas.

3. Recherche des asymptotiques de la V_3 $(\mathring{\eta}_1)$ dans le cas $\mathscr{M}_1 \neq 0$.

Dans la suite, nous représenterons une conique du faisceau de coniques associé à la $V_3(\mathring{\eta}_1)$ par le symbole γ avec en indice le dual de l'hyperplan auquel cette conique correspond. γ_x et γ_{d_1x} sont donc deux coniques distinctes de ce faisceau ; elles sont déterminées par les équations

3-23

$$
\left\{
\begin{aligned}
& k_3 t_2^2 - k_2 t_3^2 = 0 \text{ pour } \gamma_x, \\
& k_3[e_3 + (2;2,1)]t_2^2 - k_2[f_2 + (3;3,1)]t_3^2 + 2k_2k_3\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}t_2t_3 + \\
& \qquad \frac{k_2k_3\mathscr{M}_1}{k_1}t_1^2 = 0 \text{ pour } \gamma_{d_1x},
\end{aligned}
\right.
$$

où t_1, t_2, t_3 sont les coordonnées courantes relatives à d_1, d_2, d_3.

3-24 En tenant compte de (3-23) et (2-18), on voit déjà que *la conique* γ_x *associée à la* $V_3(\mathring{\eta}_1)$ *coïncide géométriquement avec la conique* Γ_{η_1} *associée à la* $V_3(x)$.

Puisque les asymptotiques d'une V_3 sont caractérisées par les points-base du faisceau de coniques associé à la V_3, on a que *les asymptotiques de la* $V_3(\mathring{\eta}_1)$, *dont les images dans* π *sont situées sur la droite* (P-Q) *de* Γ_{η_1}, *ont pour équations*

3-25

$$\begin{cases} \sqrt{k_2}t_3 - \sqrt{k_3}t_2 = 0, \\ \dfrac{k_2\mathscr{M}_1}{k_1}t_1^2 + \left\{\mathscr{H}_1 + 2\dfrac{\sqrt{k_2k_3}\mathscr{I}_1}{k_1}\right\}t_2^2 = 0, \end{cases}$$

tandis que *les asymptotiques de* $(\mathring{\eta}_1)$, *dont les images dans* π *sont situées sur l'autre droite de* Γ_{η_1}, *ont pour équations*

$$\begin{cases} \sqrt{k_2}t_3 + \sqrt{k_3}t_2 = 0, \\ \dfrac{k_2\mathscr{M}_1}{k_1}t_1^2 + \left\{\mathscr{H}_1 - 2\dfrac{\sqrt{k_2k_3}\mathscr{I}_1}{k_1}\right\}t_2^2 = 0. \end{cases}$$

Remarquons que (2-14) entraîne

3-26 $$\mathscr{K}_1 = \left\{\mathscr{H}_1 + 2\frac{\sqrt{k_2k_3}\mathscr{I}_1}{k_1}\right\}\left\{\mathscr{H}_1 - 2\frac{\sqrt{k_2k_3}\mathscr{I}_1}{k_1}\right\}.$$

4. Quelques théorèmes valables lorsque $\mathscr{M}_1 \neq 0$.

Du numéro précédent et du numéro 8 du ch. 1 de la première partie, on déduit immédiatement le théorème suivant

3-27 *la* $V_3(\mathring{\eta}_1)$ *sera du type* (2,2) *sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{I}_1 = \mathscr{H}_1 = 0$;
elle sera du type (2,1,1) *sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{K}_1 = 0$ *avec* $\mathscr{I}_1\mathscr{H}_1 \neq 0$;
elle sera du type (1,1,1,1) *sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{K}_1 \neq 0$;
et il n'y a pas d'autres cas possibles.

Le théorème (3-24) donne déjà un lien important entre les faisceaux de coniques associés aux V_3 $(\mathring{\eta}_1)$ et (x). Ce lien est encore renforcé par le théorème suivant :

3-28 *le point* d_1 *et le point de rencontre de* $(d_2\text{-}d_3)$ *avec une quelconque des deux droites de* Γ_{η_1} *sont homologues dans les deux involutions déterminées*, sur la droite considérée de Γ_{η_1}, *respectivement par le faisceau de coniques associé à la* $V_3(x)$ *et celui associé à la* V_3 $(\mathring{\eta}_1)$.

Puisque les points unis de ces involutions sont respectivement des points-base des faisceaux de coniques considérés, on déduit de ce théorème :

3-29 *si un point du plan π est simultanément l'image d'un système d'asymptotiques de $(\mathring{\eta}_1)$ et d'un système d'asymptotiques de (x), il existe toujours au moins un second point de π qui jouit de la même propriété et qui est tel que la droite déterminée par ces deux points passe par d_1.*

Par ailleurs, en ayant égard à (2-19), (2-20), (2-21), (3-25) et (3-29), on trouve le théorème :

3-30 *si les images dans π de deux systèmes d'asymptotiques de $(\mathring{\eta}_1)$ sont alignées sur d_1, elles seront également les images de deux systèmes d'asymptotiques de (x) sous la condition nécessaire et suffisante que ces deux systèmes d'asymptotiques appartiennent à un même système de surfaces de la V_3.*

En particulier, les asymptotiques de $(\mathring{\eta}_1)$ et celles de (x) seront représentées dans le plan π par les mêmes points sous la condition nécessaire et suffisante que les deux droites de Γ_{η_1} représentent des différentielles totales exactes (ceci a donc lieu si et seulement si $M_1 = \mathscr{I}_1 = 0$ et $\mathscr{M}_1 \neq 0$).

Dans ce dernier cas, les faisceaux de coniques associés aux V_3 $(\mathring{\eta}_1)$ et (x) ont mêmes points-base et coïncident donc.

5. Lignes principales et hyperplans bitangents de la V_3 $(\mathring{\eta}_1)$ dans le cas $\mathscr{M}_1 \neq 0$.

Compte tenu de (3-20), on trouve déjà que $\mathring{x}$ *est un hyperplan bitangent à $(\mathring{\eta}_1)$ en son point générateur et que le système de lignes principales correspondant est représenté dans π par d_1.*

Les autres hyperplans bitangents de $(\mathring{\eta}_1)$ sont donnés par $d_1\mathring{x} + \theta\mathring{x}$ avec θ solution de $\left|(d_1x, d_id_k\eta_1) + \theta(x, d_id_k\eta_1)\right| = 0$ où le premier membre de cette équation est un déterminant à 9 éléments caractérisé ici par l'élément de sa i-ième ligne et de sa k-ième colonne.

En développant ce déterminant, on trouve que *les hyperplans*

($\mathring{x}$ excepté) *bitangents à la* V_3 $(\mathring{\eta}_1)$ *en son point générateur sont donnés par*

$$
\text{3-31}\quad\begin{cases} d_1\mathring{x} + \theta\mathring{x} \text{ avec } \theta \text{ solution de} \\ \theta^2 + \theta[e_3+(2;2,1)+f_2+(3;3,1)] + [e_3+(2;2,1)][f_2+(3;3,1)] + \\ \qquad \dfrac{k_2k_3\mathscr{I}_1^2}{k_1^2} = 0. \end{cases}
$$

A chaque hyperplan bitangent donné par (3-31) (il y en a 1 ou 2 suivant que $\mathscr{H}_1$ est nul ou différent de zéro) correspond un et parfois une infinité de systèmes de lignes principales de $(\mathring{\eta}_1)$ qui ont pour équations

$$
\text{3-32}\quad\begin{cases} t_1 = 0, \\ [e_3+(2;2,1)+\theta]t_2 + \dfrac{k_2\mathscr{I}_1}{k_1}\, t_3 = 0, \\ \dfrac{k_3\mathscr{I}_1}{k_1}\, t_2 - [f_2+(3;3,1)+\theta]t_3 = 0, \\ \text{où } \theta \text{ est la solution de (3-31) qui correspond à l'hyperplan considéré.} \end{cases}
$$

Les systèmes de lignes principales de la $V_3(\eta_1)$ (celui représenté dans π par d_1 excepté) *sont donc donnés par*

$$
\text{3-33}\quad\begin{cases} t_1 = 0, \\ \dfrac{k_2\mathscr{I}_1}{k_1}\, t_3^2 + \dfrac{k_3\mathscr{I}_1}{k_1}\, t_2^2 + \mathscr{H}_1 t_2 t_3 = 0. \end{cases}
$$

A chaque solution θ de (3-31) correspond donc par (3-32) les systèmes de lignes principales associés à l'hyperplan considéré et, inversement, à chaque solution de (3-33) correspond par (3-32) la valeur de θ qui donne l'hyperplan bitangent associé à ce système de lignes principales.

6. Quelques nouvelles propriétés valables lorsque $\mathscr{M}_1 \neq 0$.

En comparant les résultats du numéro précédent et ceux du numéro 3 du chapitre précédent, on obtient le théorème suivant.

Lorsque $\mathscr{M}_1 \neq 0$, *les images dans le plan* π *des systèmes de courbes* $(\mathscr{C})$ *de la* $V_3(x)$, *tels que les doubles systèmes* $(R_1, \mathscr{C})$ *forment sur cette* V_3 *des doubles systèmes conjugués de première espèce, coïn-*

cident avec les images (d_1 excepté) *des systèmes de lignes principales de la* $V_3(\mathring{\eta}_1)$. *De plus, si y est le point générateur de la variété trans-*
3-34 *formée de la* $V_3(x)$ *par l'intermédiaire d'un double système* $(R_1, \mathscr{C})$ *conjugué de première espèce sur cette* V_3, *y coïncide géométriquement avec le dual de l'hyperplan bitangent à la* V_3 $(\mathring{\eta}_1)$ *en son point générateur et correspondant au système de lignes principales de cette dernière* V_3 *dont l'image dans le plan* π *coïncide avec l'image de* $(\mathscr{C})$.

Ce théorème donne une nouvelle interprétation géométrique de la variété transformée de la $V_3(x)$ par l'intermédiaire d'un double système conjugué de première espèce dont le premier système de courbes est un système de lignes principales pour la V_3. Cette interprétation n'est cependant valable que lorsque $\mathscr{M}_1 \neq 0$. Toutefois, même lorsque $\mathscr{M}_1 = 0$, nous verrons plus loin qu'il existe encore des liens très étroits entre ces variétés transformées de la $V_3(x)$ et la variété décrite par $\mathring{\eta}_1$.

7. Quelques premières considérations géométriques sur la surface $(\mathring{\eta}_1)$ dans le cas $\mathscr{M}_1 = 0$.

On sait déjà que dans ce cas le point $\mathring{\eta}_1$ décrit toujours une surface ($d_1\mathring{\eta}_1$ coïncide géométriquement avec $\mathring{\eta}_1$). Le plan tangent à cette surface en son point générateur est déterminé par les points $\mathring{\eta}_1$, $d_2\mathring{\eta}_1$, $d_3\mathring{\eta}_1$ et coïncide, ainsi que le montrent les équations (3-20), avec l'intersection complète des trois hyperplans $\mathring{x}$, $d_1\mathring{x}$, $d_1d_1\mathring{x}$.

Compte tenu de (3-20), on vérifie facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que le point $j_{22}d_2d_2\mathring{\eta}_1 + j_{32}d_3d_2\mathring{\eta}_1 + j_{33}d_3d_3\mathring{\eta}_1$ (j_{ik} notation seulement valable pour ce numéro) appartienne au plan tangent à $(\mathring{\eta}_1)$ en son point générateur est que l'on ait

3-35
$$\begin{cases} k_3 j_{22} - k_2 j_{33} = 0, \\ k_1 \mathscr{H}_1 j_{22} + k_2 \mathscr{J}_1 j_{32} = 0, \\ j_{22}\Big\{ d_1(\mathscr{H}_1) + \mathscr{H}_1[e_3 + (2;2,1) + f_2 + (3;3,1)] + 2\dfrac{k_2k_3\mathscr{J}_1}{k_1}\Big[\dfrac{\mathscr{J}_3}{k_3} - \dfrac{\mathscr{J}_2}{k_2}\Big]\Big\} + \end{cases}$$

3-35 suite

$$k_2 j_{32}\left\{d_1\left(\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\right)-\mathscr{H}_1\frac{\mathscr{I}_2}{k_2}+\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\{d_1[\log(k_2)]+e_3+f_2+2(3;3,1)+(2;1,2)\}\right.$$
$$\left.-\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}(3;1,3)\right\},$$

où l'on a tenu compte de la première pour obtenir les deux suivantes sous la forme donnée ci-dessus.

Si l'on pose

3-36
$$\mathscr{F}_1=\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}d_1(\mathscr{H}_1)-\mathscr{H}_1 d_1\left(\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\right)+\frac{\mathscr{I}_2}{k_2}\mathscr{H}_1^2+\frac{2k_2k_3\mathscr{I}_1^2}{k_1^2}\left[\frac{\mathscr{I}_3}{k_3}-\frac{\mathscr{I}_2}{k_2}\right]$$
$$-\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\mathscr{H}_1\{d_1[\log(\mathrm{k}_2)]-(3;1,3)+(3;3,1)-(2;2,1)+(2;1,2)\},$$

on a donc le théorème suivant.

3-37 *L'espace osculateur* (on dit aussi l'espace 2-tangent) *à la surface* $(\mathring{\eta}_1)$ *en son point générateur se réduit à un* S_3 *sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{I}_1=\mathscr{H}_1=0$;
cet espace se réduit à un S_4 *sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{F}_1=0$ *avec* $\mathscr{I}_1$ *et* $\mathscr{H}_1$ *non simultanément nuls* ; *cet espace coïncide avec l'*S_5 *dans lequel se trouve* $(\mathring{\eta}_1)$ *sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{F}_1\neq 0$;
il n'y a pas d'autres cas possibles pour cet espace.

Plus précisément, dans le cas $\mathscr{I}_1=\mathscr{H}_1=0$ (avec évidemment $\mathscr{M}_1=0$), les points $d_2d_3\mathring{\eta}_1$ et $k_2d_2d_2\mathring{\eta}_1+k_3d_3d_3\mathring{\eta}_1$ appartiennent au plan tangent à $(\mathring{\eta}_1)$ en son point générateur. En conséquence, l'espace osculateur à $(\mathring{\eta}_1)$ en son point générateur est un S_3 fixe et $(\mathring{\eta}_1)$ est située entièrement dans cet S_3. De plus, cette surface possède toujours deux systèmes distincts d'asymptotiques (représentés dans π par les points de rencontre de Γ_{η_1} avec la droite $(d_2\text{-}d_3)$) et ne sera donc jamais une surface développable.

Dans le cas $\mathscr{F}_1=0$ avec $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{H}_1$ non simultanément nuls, le point $k_2\mathscr{I}_1d_2d_2\mathring{\eta}_1+k_3\mathscr{I}_1d_3d_3\mathring{\eta}_1-k_1\mathscr{H}_1d_3d_2\mathring{\eta}_1$ appartient toujours au plan tangent à $(\mathring{\eta}_1)$ en son point générateur. En conséquence, $(\mathring{\eta}_1)$ est une surface Φ de Segre dont les courbes caractéristiques sont données par

3-38 $k_3\mathscr{J}_1 t_2^2 + k_2\mathscr{J}_1 t_3^2 + k_1\mathscr{H}_1 t_2 t_3 = 0$ et $t_1 = 0$.

Lorsque $\mathscr{K}_1 = 0$, $(\mathring{\eta}_1)$ ne possédera donc qu'un système de caractéristiques ; lorsque $\mathscr{K}_1 \neq 0$, $(\mathring{\eta}_1)$ possédera deux systèmes distincts de caractéristiques.

Si l'on remarque encore que $\mathscr{K}_1 = \mathscr{M}_1 = 0$ entraîne nécessairement $\mathscr{F}_1 = 0$, on arrive aux conclusions suivantes (valables seulement lorsque $\mathscr{M}_1 = 0$) :

$(\mathring{\eta}_1)$ *sera une surface non développable d'un* S_3 *fixe sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{J}_1 = \mathscr{H}_1 = 0$ *et ses asymptotiques seront représentées dans* π *par les points de rencontre de* Γ_{η_1} *avec* $(d_2\text{-}d_3)$ ·

3-39

$(\mathring{\eta}_1)$ *sera une surface* Φ *de Segre parabolique sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{K}_1 = 0$ *avec* $\mathscr{J}_1\mathscr{H}_1 \neq 0$ *et son unique système de caractéristiques sera donné par la racine double de* (3-38) ;

$(\mathring{\eta}_1)$ *sera une surface* Φ *de Segre non parabolique sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{F}_1 = 0$ *avec* $\mathscr{K}_1 \neq 0$ *et ses deux systèmes de caractéristiques seront donnés par* (3-38) ;

$(\mathring{\eta}_1)$ *aura son espace osculateur en son point générateur qui coïncide avec l'*S_5 *ambiant sous la condition nécessaire et suffisante que* $\mathscr{F}_1 \neq 0$;

il n'y a que ces quatre cas possibles pou· la surface $(\mathring{\eta}_1)$.

8. Remarque.

Soit P un point de S_5 qui dépend de u, v, w et supposons que ce point ne décrive qu'une surface lorsque u, v, w varient. Il existe donc un point D du plan π tel que DP coïncide géométriquement avec P ou s'évanouit.

Considérons maintenant un point quelconque d_C du plan π distinct toutefois de D. De d_C, on déduit encore, comme pour les V_3, un système de courbes (C) de la surface (P). Par contre, il n'existe plus de correspondance biunivoque entre les points du plan π et les systèmes de courbes de la surface (P). En effet, si le point d_CP est bien sur la tangente à la courbe C issue de P, il en est de même des points $\alpha DP + \beta d_C P$ (α et β fonctions quelconques de u, v, w). En fait, on peut démontrer qu'il *existe une correspondance biunivoque entre les systèmes de courbes de la surface* (P) *et les droites de* π *qui passent par* D.

En conséquence, dire que le point d_C est l'image dans π d'un système de courbes (C) de la surface (P) est un léger abus de langage, qui ne crée toutefois aucune difficulté pour autant qu'on s'en souvienne. Dans la suite, nous conserverons donc ce langage comme nous l'avons d'ailleurs déjà conservé dans le numéro précédent.

Chapitre IV

UNE BASE INTERMÉDIAIRE DU PLAN Π

1. Introduction de la base d'_1, d'_2, d'_3.

Le théorème (3-28) et le fait que les solutions des équations (3-38), (3-33) et (3-10) divisent harmoniquement les deux points de rencontre de Γ_{η_1} avec $(d_2\text{-}d_3)$ permettent d'entrevoir que la base du plan π formée par le point d_1 et les deux points de rencontre de Γ_{η_1} avec la droite $(d_2\text{-}d_3)$ joue un rôle intéressant dans ce travail.

Désignons donc par d'_2 et d'_3 les points de rencontre de Γ_{η_1} avec la droite $(d_2\text{-}d_3)$ et désignons aussi par d'_1 le point d_1 qui va donc avoir deux désignations possibles.

Sans nuire à la généralité de la question, on peut supposer que ces points sont donnés par

3-40 $d'_1 = (1,0,0)$, $d'_2 = (0, -\sqrt{k_2}, \sqrt{k_3})$, $d'_3 = (0, \sqrt{k_2}, \sqrt{k_3})$,

où les coordonnées de d'_i sont des coordonnées relatives à la base d_1, d_2, d_3.

De ceci, on déduit immédiatement que

3-41
$$\left\{\begin{array}{l} d'_1 = d_1, \qquad d'_2 = -\sqrt{k_2}d_2 + \sqrt{k_3}d_3, \qquad d'_3 = \sqrt{k_2}d_2 + \sqrt{k_3}d_3, \\ \text{et les formules inverses} \\ d_1 = d'_1, \qquad d_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{k_2}}[d'_2 - d'_3], \qquad d_3 = +\dfrac{1}{2\sqrt{k_3}}[d'_2 + d'_3]. \end{array}\right.$$

Si t_1, t_2, t_3 sont les coordonnées courantes relatives à d_1, d_2, d_3 et si t'_1, t'_2, t'_3 sont celles relatives à d'_1, d'_2, d'_3, on a donc les formules de changement de base

$$
\text{3-42}\quad\begin{cases}
t'_1 = t_1, \qquad t'_2 = -\dfrac{t_2}{2\sqrt{k_2}} + \dfrac{t_3}{2\sqrt{k_3}}, \qquad t'_3 = \dfrac{t_2}{2\sqrt{k_2}} + \dfrac{t_3}{2\sqrt{k_3}},\\[2ex]
t_1 = t'_1, \qquad t_2 = -\sqrt{k_2}[t'_2 - t'_3], \qquad t_3 = \sqrt{k_3}[t'_2 + t'_3].
\end{cases}
$$

2. Calcul des $(m;i,j)'$.

Si l'on affecte d'un prime les expressions déduites de la base d_1, d_2, d_3 pour désigner celles de la base d'_1, d'_2, d'_3 qui sont définies d'une manière analogue, on trouve en tenant compte de (1-16) et (1-21)

$$
\text{3-43}\quad\begin{cases}
(1;i,j)' = (1;i',j'),\\[1ex]
(2;i,j)' = -\dfrac{1}{2\sqrt{k_2}}(2;i',j') + \dfrac{1}{2\sqrt{k_3}}(3;i',j'),\\[2ex]
(3\,;i,j)' = +\dfrac{1}{2\sqrt{k_2}}(2;i',j') + \dfrac{1}{2\sqrt{k_3}}(3;i',j'),\\[1ex]
i,j = 1,2,3 \text{ et où l'on a posé}\\
(m;i',j') = \alpha_m d'_i(du'_j) + \beta_m d'_i(dv'_j) + \varepsilon_m d'_i(dw'_j).
\end{cases}
$$

Compte tenu de (3-40), (3-43) et de la dernière de (1-27), on obtient finalement

$$
\text{3-44}\quad\begin{cases}
(1;i,j)' = \displaystyle\sum_{m,n=1}^{3} t_{mi}t_{nj}(1;m,n),\\[2ex]
(2;i,j)' = \dfrac{1}{2\sqrt{k_2k_3}}\{\sqrt{k_2}d'_i(t_{3j}) - \sqrt{k_3}d'_i(t_{2j}) +\\
\qquad\qquad \displaystyle\sum_{m,n=1}^{3} t_{mi}t_{nj}[\sqrt{k_2}(3;m,n) - \sqrt{k_3}(2;m,n)]\},\\[2ex]
(3;i,j)' = \dfrac{1}{2\sqrt{k_2k_3}}\{\sqrt{k_2}d'_i(t_{3j}) + \sqrt{k_3}d'_i(t_{2j}) +\\
\qquad\qquad \displaystyle\sum_{m,n=1}^{3} t_{mi}t_{nj}[\sqrt{k_2}(3;m,n) + \sqrt{k_3}(2;m,n)]\},
\end{cases}
$$

où t_{1i}, t_{2i}, t_{3i} sont les coordonnées relatives à d_1, d_2, d_3 du point d'_i.

En particulier, on a

$$\text{3-45}\quad \left\{\begin{aligned} \mathscr{J}'_1 &= (1;3,2)' - (1;2,3)' = -2\sqrt{k_2k_3}\mathscr{J}_1, \\ \mathscr{J}'_2 &= (2;1,3)' - (2;3,1)' = \frac{\sqrt{k_2k_3}}{2}\mathscr{R}_1, \\ \mathscr{J}'_3 &= (3;2,1)' - (3;1,2)' = \frac{\sqrt{k_2k_3}}{2}\mathscr{S}_1, \end{aligned}\right.$$

où $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{S}_1$ ont été définis par (2-21).

On a donc

$$\text{3-46}\quad \mathscr{J}'_2 + \mathscr{J}'_3 + \frac{\mathscr{J}'_1}{2k_1} = 0.$$

3. Ce que devient le système (2-5).

En tenant compte des équations (1-27) et (3-41), on trouve facilement

3-47

a) que les points x, d'_1x, d'_2x, d'_3x, $d'_1d'_1x$ et $d'_2 * d'_3x$ sont linéairement indépendants ;

b) qu'en utilisant la base d'_1, d'_2, d'_3 du plan π, le système (2-5) devient

$$\left\{\begin{aligned} d'_1 * d'_2x &= a'_3x + b'_3d_1x + e'_3d'_2x + f'_3d'_3x, \\ d'_1 * d'_3x &= a'_2x + b'_2d_1x + e'_2d'_2x + f'_2d'_3x, \\ d'_2d'_2x + k_1d_1d_1x &= g'_2x + g'_{21}d_1x + g'_{22}d'_2x + g'_{23}d'_3x, \\ d'_3d'_3x + k_1d_1d_1x &= g'_3x + g'_{31}d_1x + g'_{32}d'_2x + g'_{33}d'_3x, \end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$a'_3 = -\sqrt{k_2}a_3 + \sqrt{k_3}a_2,$$

$$b'_3 = -\sqrt{k_2}b_3 + \sqrt{k_3}b_2,$$

$$e'_3 = \frac{1}{2}[e_3+f_2] - \frac{1}{2\sqrt{k_2k_3}}[k_3e_2+k_2f_3],$$

$$f'_3 = \frac{1}{2}[f_2-e_3] + \frac{1}{2\sqrt{k_2k_3}}[k_3e_2-k_2f_3],$$

$$g'_2 = a - 2\sqrt{k_2k_3}a_1,$$

$$g'_{21} = b - k_1\sqrt{k_2k_3}\left[\frac{\mathscr{J}_3}{k_3} - \frac{\mathscr{J}_2}{k_2}\right],$$

$$g'_{22} = \frac{\sqrt{k_3}}{2}\left\{\frac{1}{2}d_3[\log(k_2k_3)] + \frac{f}{k_3} + 2e_1 + (2;2,3) + (2;3,2)\right\} -$$

$$\frac{\sqrt{k_2}}{2}\left\{\frac{1}{2}d_2[\log(k_2k_3)] + \frac{e}{k_2} + 2f_1 + (3;3,2) + (3;2,3)\right\},$$

$$g'_{23} = \frac{\sqrt{k_3}}{2}N_{13} - \frac{\sqrt{k_2}}{2}N_{12} \text{ (}N_{12}\text{ et }N_{13}\text{ définis par (2-29)),}$$

3-47 suite et où les autres coefficients s'obtiennent des précédents par le tableau suivant

$a'_3,\ b'_3,\ e'_3,\ f'_3,\ g'_2,\ g'_{21},\ g'_{22},\ g'_{23}$

$a'_2,\ b'_2,\ f'_2,\ e'_2,\ g'_3,\ g'_{31},\ g'_{33},\ g'_{32}$

dans lequel il suffit de remplacer $\sqrt{k_2}$ par $-\sqrt{k_2}$ dans la valeur d'une expression de la première ligne pour obtenir la valeur de l'expression correspondante de la seconde ligne.

4. Ce que devient le système (3-21).

Comme au numéro précédent, on trouve facilement que le système (3-21) devient

$$d'_1 * d'_2\eta_1 = A'_3\eta_1 + B'_3d_1\eta_1 + E'_3d'_2\eta_1 + F'_3d'_3\eta_1,$$

$$d'_1 * d'_3\eta_1 = A'_2\eta_1 + B'_2d_1\eta_1 + E'_2d'_2\eta_1 + F'_2d'_3\eta_1,$$

$$d'_2d'_2\eta_1 - \frac{k_1}{\mathcal{M}_1}K'_{12}d_1d_1\eta_1 = G'_2\eta_1 + G'_{21}d_1\eta_1 + G'_{22}d'_2\eta_1 + G'_{23}d'_3\eta_1,$$

$$d'_3d'_3\eta_1 - \frac{k_1}{\mathcal{M}_1}K'_{13}d_1d_1\eta_1 = G'_3\eta_1 + G'_{31}d_1\eta_1 + G'_{32}d'_2\eta_1 + G'_{33}d'_3\eta_1,$$

3-48 où l'on a posé

$$A'_3 = -\sqrt{k_2}A_3 + \sqrt{k_3}A_2,$$

$$B'_3 = -\sqrt{k_2}B_3 + \sqrt{k_3}B_2,$$

$$E'_3 = \frac{1}{2}\{d_1[\log(\rho_1^2k_2k_3)] - e_3 - 2(2;1,2) - f_2 - 2(3;1,3)\} +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{k_2k_3}}\{k_2(3;2,1) + k_3(2;3,1)\},$$

$$\mathrm{F}'_3 = \frac{1}{2}\left\{d_1\left[\log\left(\frac{k_2}{k_3}\right)\right] + e_3 + 2(2;1,2) - f_2 - 2(3;1,3)\right\} +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{k_2k_3}}\{k_2(3;2,1) - k_3(2;3,1)\},$$

$$\mathrm{K}'_{12} = \mathscr{H}_1 - \frac{2\sqrt{k_2k_3}\mathscr{I}_1}{k_1},$$

$$\mathrm{G}'_2 = \mathrm{A} - 2\sqrt{k_2k_3}\mathrm{A}_1,$$

$$\mathrm{G}'_{21} = -\frac{k_1}{\mathscr{M}_1}d_1(\mathrm{K}'_{12}) - \frac{k_1\mathrm{K}'_{12}}{\mathscr{M}_1}\left\{d_1[\log(\rho_1^2k_2k_3\mathscr{M}_1)] + \sqrt{k_2k_3}\left[\frac{\mathscr{I}_2}{k_2} - \frac{\mathscr{I}_3}{k_3}\right]\right\}$$

$$+ \frac{k_1\mathrm{K}'_{12}}{\mathscr{M}_1}\left\{\frac{b}{k_1} + 2(2;1,2) - 2(2;2,1) + 2(3;1,3) - 2(3;3,1)\right\},$$

3-48 suite

$$\mathrm{G}'_{22} = -\frac{\sqrt{k_2}}{2}\left\{\frac{1}{2}d_2[\log(\rho_1^8k_2^7k_3^3)] - \frac{e}{k_2} - 2f_1 - 5(3;2,3) + 3(3;3,2)\right\}$$

$$+ \frac{\sqrt{k_3}}{2}\left\{\frac{1}{2}d_3[\log(\rho_1^8k_2^3k_3^7)] - \frac{f}{k_3} - 2e_1 - 5(2;3,2) + 3(2;2,3)\right\},$$

$$\mathrm{G}'_{23} = -g'_{23},$$

et où les autres coefficients s'obtiennent des précédents par le tableau suivant

A'_3, B'_3, E'_3, F'_3, K'_{12}, G'_2, G'_{21}, G'_{22}, G'_{23}

A'_2, B'_2, F'_2, E'_2, K'_{13}, G'_3, G'_{31}, G'_{33}, G'_{32}

dans lequel il suffit de remplacer $\sqrt{k_2}$ par $-\sqrt{k_2}$ dans la valeur d'une expression de la première ligne pour obtenir la valeur de l'expression correspondante de la seconde ligne (notons que pour obtenir G'_{31} et G'_{32} on doit se souvenir que K'_{12} et g'_{23} deviennent respectivement K'_{13} et g'_{32}).

Chapitre V

CAS $\mathscr{J}_1 = \mathscr{H}_1 = 0$.

1. Préliminaires.

Notons tout d'abord que $\mathscr{J}_1 = 0$ entraîne l'existence sur la $V_3(x)$ d'un système de surfaces qui contient les systèmes de courbes (R_2) et (R_3) et qui sera désigné, dans ce chapitre, par (Σ).

Moyennant (3-11), (3-12), (3-44) et (3-47), on obtient

$y_1 = d_1x + \theta_1 x$ avec $\theta_1 = -[e_3+(2;2,1)] = -[f_2+(3;3,1)]$,

$$\text{3-49}\quad \left\{\begin{array}{l} d_iy_1 = [b_j+(1;i,1)]y_1 \quad i,j=2,3 \text{ et } i\neq j,\\ d'_iy_1 = [b'_j+(1;i,1)']y_1 \quad i,j=2,3 \text{ et } i\neq j,\\ d_1y_1 = d_1d_1x + \theta_1 d_1x + xd_1(\theta_1), \end{array}\right.$$

où y_1 désigne, comme convenu en (3-13), le point générateur de la variété transformée de (x) par l'intermédiaire d'un quelconque des ∞^1 doubles systèmes $(R_1, \mathscr{C})$ conjugués de première espèce sur (x).

De (3-49), on déduit déjà les remarques suivantes :

a) la variété (y_1) se réduit toujours à une courbe (résultat déjà donné par (3-17)) ;

b) l'espace $(n+1)$-tangent à la courbe R_1 issue de x contient toujours l'espace n-tangent à (y_1) en y_1 et contient donc ainsi un sous-espace qui est fixe lorsque x décrit Σ ;

c) lorsque y_1 décrit une courbe située entièrement dans un espace à n dimensions ($n=1,2,\ldots,5$), les courbes R_1 sont situées au plus dans des espaces à $n+1$ dimensions.

Remarquons ici que, si la propriété c) est en fait immédiate, sa réciproque l'est beaucoup moins bien que nous démontrerons bientôt qu'elle a lieu pour certaines valeurs de n.

Les équations (3-49) donnent directement

3-50
$$\begin{cases} d'_i d_1 y_1 = [b'_j + 2(1;i,1)' - (1;1,i)'] d_1 y_1 + \ldots y_1, \\ d'_i d_1 d_1 y_1 = [b'_j + 3(1;i,1)' - 2(1;1,i)'] d_1 d_1 y_1 + \ldots d_1 y_1 + \ldots y_1, \\ \text{etc.} \\ \text{où } i,j = 2,3 \text{ et } i \neq j \text{ et où les } \ldots \text{ représentent des coefficients dont on} \\ \text{n'a pas calculé les valeurs.} \end{cases}$$

Par ailleurs, (3-48), (3-47), (3-44) et (3-22) entraînent

3-51
$$\begin{cases} d'_i\left[\log\left(\dfrac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\right)\right] - b'_j - 3(1;i,1)' + 2(1;1,i)' = \mathrm{B}'_j + (1;1,i)', \\ i,j = 2,3 \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

De (3-51), (3-50), (3-49) et (3-20), on déduit finalement

$$(\eta_1, y_1) = (d_1\eta_1, y_1) = (d'_2\eta_1, y_1) = (d'_3\eta_1, y_1) = (d'_2 d'_3 \eta_1, y_1) = 0,$$
$$(\eta_1, d_1 y_1) = (d'_2\eta_1, d_1 y_1) = (d'_3\eta_1, d_1 y_1) = (d'_2 d'_3 \eta_1, d_1 y_1) = 0,$$

3-52
$$\begin{cases} (\eta_1, d_1 d_1 y_1) = -(d_1\eta_1, d_1 y_1) = \dfrac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}, \\ (d'_2\eta_1, d_1 d_1 y_1) = \dfrac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}[\mathrm{B}'_3 + (1;1,2)'], \\ (d'_3\eta_1, d_1 d_1 y_1) = \dfrac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}[\mathrm{B}'_2 + (1;1,3)'], \\ (d'_2 d'_3 \eta_1, d_1 d_1 y_1) = \dfrac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\{d'_2[\mathrm{B}'_2 + (1;1,3)'] + \\ \qquad [\mathrm{B}'_2 + (1;1,3)'][\mathrm{B}'_3 + (1;1,2)']\}. \end{cases}$$

2. La tangente à la courbe (y_1) en y_1.

Puisque la tangente à (y_1) en y_1 est déterminée par les points y_1 et $d_1 y_1$ et puisque les hyperplans η_1, $d'_2\eta_1$, $d'_3\eta_1$, $d'_2 d'_3 \eta_1$ sont toujours linéairement indépendants, on déduit de (3-52) que la tangente à (y_1) en y_1 coïncide avec l'intersection complète des quatre hyperplans η_1, $d'_2\eta_1$, $d'_3\eta_1$, $d'_2 d'_3 \eta_1$.

De (3-52), on déduit encore que la courbe (y_1) sera une droite sous la condition nécessaire et suffisante que $\mathscr{M}_1 = 0$.

En conséquence, on a bien que *la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe* (y_1) *soit une droite est que les courbes* R_1 *de la* $V_3(x)$ *soient des courbes planes.*

De plus, lorsque $\mathscr{M}_1 = 0$, nous avons vu en (3-39) que la surface $(\mathring{\eta}_1)$ appartient à une S_3 fixe. Maintenant, on peut compléter ce résultat en remarquant que cet S_3 coïncide avec l'intersection complète des deux hyperplans $\mathring{y}_1$ et $d_1\mathring{y}_1$.

Donnons encore l'interprétation duale de cette propriété : lorsque $\mathscr{M}_1 = 0$ avec évidemment $\mathscr{J}_1 = \mathscr{H}_1 = 0$, les ∞^2 hyperplans η_1 passent tous par une droite fixe qui coïncide avec la droite décrite par y_1.

3. Quelques conditions d'intégrabilité du système (3-48) valables lorsque $\mathscr{J}_1 = \mathscr{H}_1 = 0$ avec $\mathscr{M}_1 \neq 0$.

Dans ces hypothèses, le système (3-48) prend une forme assez simple (on a notamment $K'_{12} = K'_{13} = G'_{21} = G'_{31} = 0$, $F'_3 + (3;1,2)' = E'_2 + (2;1,3)' = -\frac{1}{4} M_1$, $F'_3 + (3;2,1)' = E'_2 + (2;3,1)' = -\frac{1}{2} M_1$) et permet de trouver assez facilement quelques conditions d'intégrabilité utiles pour la suite. Ces conditions d'intégrabilité devront évidemment être des conséquences des conditions d'intégrabilité du système (2-5), mais, en les déduisant directement de (3-48), elles seront sous une forme directement applicable.

De la première de (3-48), on tire facilement la valeur de $d'_2 d_1 d'_2 \eta_1$ tandis que la troisième donne la valeur de $d_1 d'_2 d'_2 \eta_1$. Si l'on compare ces deux expressions et si l'on fait la même chose avec les valeurs de $d'_3 d_1 d'_3 \eta_1$ et $d_1 d'_3 d'_3 \eta_1$, de $d'_3 d'_2 d_1 \eta_1$ et $d'_2 d'_3 d_1 \eta_1$, on obtient des conditions d'intégrabilité (valables seulement lorsque $\mathscr{J}_1 = \mathscr{H}_1 = 0$ avec $\mathscr{M}_1 \neq 0$) parmi lesquelles nous retenons

$$
\text{3-53}\quad \left\{
\begin{aligned}
& d'_2[B'_3 + (1;1,2)'] - [B'_3 + (1;1,2)']\,[G'_{22} - B'_3 - (1;1,2)'] - \\
& \qquad G'_{23}[B'_2 + (1;1,3)'] - G'_2 = 0, \\
& d'_3[B'_2 + (1;1,3)'] - [B'_2 + (1;1,3)']\,[G'_{33} - B'_2 - (1;1,3)'] - \\
& \qquad G'_{32}[B'_3 + (1;1,2)'] - G'_3 = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\text{3-53 suite}\left\{\begin{aligned}
&d_3'[B_3'+(1;2,1)'] - d_2'[B_2'+(1;3,1)'] + [B_3'+(1;2,1)'][(2;2,3)'-(2;3,2)'] \\
&\qquad + [B_2'+(1;3,1)'][(3;2,3)'-(3;3,2)'] = 0, \\
&d_3'[B_3'+(1;1,2)'] - d_2'[B_2'+(1;1,3)'] + [B_3'+(1;1,2)'][(2;2,3)'-(2;3,2)'] \\
&\qquad + [B_2'+(1;1,3)'][(3;2,3)'-(3;3,2)'] = 0,
\end{aligned}\right.
$$

où la dernière s'obtient en tenant compte de l'avant dernière et des équations (1-33) relatives à la base d_1', d_2', d_3'.

4. Plan osculateur à la courbe (y_1) en y_1 lorsque $\mathscr{M}_1 \neq 0$.

Posons

$$
\text{3-54}\left\{\begin{aligned}
&\zeta_{12}' = d_2'\eta_1 - [B_3'+(1;1,2)']\eta_1, \\
&\zeta_{13}' = d_3'\eta_1 - [B_2'+(1;1,3)']\eta_1, \\
&\Pi_{13}' = d_1[B_3'+(1;1,2)'] - A_3' - [B_3'+(1;1,2)'][E_3'+(2;1,2)'] + \\
&\qquad \frac{1}{4} M_1 [B_2'+(1;1,3)'], \\
&\Pi_{12}' = d_1[B_2'+(1;1,3)'] - A_2' - [B_2'+(1;1,3)'][F_2'+(3;1,3)'] + \\
&\qquad \frac{1}{4} M_1[B_3'+(1;1,2)'].
\end{aligned}\right.
$$

En tenant compte de (3-53) et de ce que deviennent les (3-48) dans le cas considéré ici, on obtient

3-55

a) les hyperplans ζ_{12}', ζ_{13}', $d_2'\zeta_{13}'$ sont toujours linéairement indépendants ainsi que les hyperplans ζ_{12}', ζ_{13}', $d_3'\zeta_{12}'$;

b) $d_2'\zeta_{12}' = [G_{22}'-B_3'-(1;1,2)']\zeta_{12}' + G_{23}'\zeta_{13}'$,

$d_3'\zeta_{13}' = [G_{33}'-B_2'-(1;1,3)']\zeta_{13}' + G_{32}'\zeta_{12}'$,

$d_3'\zeta_{12}' - d_2'\zeta_{13}' + [B_3'+(1;1,2)'+(3;2,3)'-(3;3,2)']\zeta_{13}' -$
$[B_2'+(1;1,3)'+(2;3,2)'-(2;2,3)']\zeta_{12}' = 0$,

$d_1\zeta_{13}' = -\frac{1}{4}M_1\zeta_{12}' + [F_2'+(3;1,3)']\zeta_{13}' - \Pi_{12}'\eta_1$,

$d_1\zeta_{12}' = [E_3'+(2;1,2)']\zeta_{12}' - \frac{1}{4}M_1\zeta_{13}' - \Pi_{13}'\eta_1$.

Moyennant (3-49), (3-50), (3-51), (3-52), (3-54) et (3-55), on trouve

$$
\text{3-56}\left\{
\begin{aligned}
&(\zeta'_{12},y_1) = (\zeta'_{13},y_1) = (d'_2\zeta'_{13},y_1) = (d'_3\zeta'_{12},y_1) = 0,\\
&(\zeta'_{12},d_1y_1) = (\zeta'_{13},d_1y_1) = (d'_2\zeta'_{13},d_1y_1) = (d'_3\zeta'_{12},d_1y_1) = 0,\\
&(\zeta'_{12},d_1d_1y_1) = (\zeta'_{13},d_1d_1y_1) = (d'_2\zeta'_{13},d_1d_1y_1) = (d'_3\zeta'_{12},d_1d_1y_1) = 0,\\
&(\zeta'_{1i},d_1d_1d_1y_1) = \frac{\rho_1k_2k_3\mathcal{M}_1}{k_1}\,\Pi'_{1j}(i,j=2,3 \text{ et } i\neq j),\\
&(d'_i\zeta'_{1j},d_1d_1d_1y_1) = \frac{\rho_1k_2k_3\mathcal{M}_1}{k_1}\,\{d'_i(\Pi'_{1i}) + \Pi'_{1i}[\mathrm{B}'_j+2(1;1,i)'-(1;i,1)']\}\\
&(i,j = 2,3 \text{ et } i\neq j),\\
&(d'_3\zeta'_{12},x) = (d'_2\zeta'_{13},x) = (d'_2d'_3\eta_1,x) = -\,2\rho_1k_2k_3,\\
&(\zeta'_{1i},x) = (\zeta'_{1i},d_1x) = (\zeta'_{1i},d_1d_1x) = (\zeta'_{1i},d_1d_1d_1x) = 0\ (i=2,3),\\
&(\zeta'_{1i},d_1d_1d_1d_1x) = (\zeta'_{1i},d_1d_1d_1y_1)\quad (i=2,3).
\end{aligned}\right.
$$

De ces équations, on déduit que le plan osculateur à (y_1) en y_1 coïncide avec l'intersection complète des trois hyperplans ζ'_{12}, ζ'_{13}, $d'_2\zeta'_{13}$ (intersection qui appartient aussi à l'hyperplan $d'_3\zeta'_{12}$). Ce plan restera fixe et en conséquence la courbe (y_1) sera une courbe plane sous la condition nécessaire et suffisante que $\Pi'_{12} = \Pi'_{13} = 0$. De plus, on voit également que l'S_3 3-tangent à R_1 en x coïncide avec l'intersection complète des deux hyperplans ζ'_{12} et ζ'_{13}. Cet S_3 restera fixe lorsque x décrit R_1 et en conséquence les courbes R_1 seront des courbes situées dans des S_3 sous la condition nécessaire et suffisante que $\Pi'_{12} = \Pi'_{13} = 0$.

On a donc que *la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (y_1) soit plane est que les courbes R_1 de la $V_3(x)$ soient situées dans des S_3.*

5. S_3 3-tangent à (y_1) en y_1 lorsque Π'_{12} et Π'_{13} ne sont pas simultanément nuls.

Posons

$$
\text{3-57}\left\{
\begin{aligned}
&\zeta'_1 = \Pi'_{12}\zeta'_{12} - \Pi'_{13}\zeta'_{13},\\
&\mathcal{B}'_1 = \Pi'_{13}d_1(\Pi'_{12}) - \Pi'_{12}d_1(\Pi'_{13}) + \frac{1}{4}\,\mathrm{M}_1(\Pi'_{13})^2 - \frac{1}{4}\,\mathrm{M}_1(\Pi'_{12})^2\\
&\qquad + \Pi'_{12}\Pi'_{13}[\mathrm{E}'_3+(2;1,2)'-\mathrm{F}'_2-(3;1,3)'].
\end{aligned}\right.
$$

Compte tenu de (3-55), on trouve

$$
\text{3-58}\quad
\begin{cases}
d_2'\zeta_1' = \zeta_{12}'\{d_2'(\Pi_{12}') + \Pi_{12}'[G_{22}' - B_3' - (1;1,2)']\} - \\
\qquad \zeta_{13}'\{d_2'(\Pi_{13}') - \Pi_{12}'G_{23}'\} - \Pi_{13}'d_2'\zeta_{13}', \\
d_3'\zeta_1' = \zeta_{12}'\{d_3'(\Pi_{12}') - \Pi_{13}'G_{32}'\} - \\
\qquad \zeta_{13}'\{d_3'(\Pi_{13}') + \Pi_{13}'[G_{33}' - B_2' - (1;1,3)']\} + \Pi_{12}'d_3'\zeta_{12}', \\
d_1\zeta_1' = \zeta_{12}'\{d_1(\Pi_{12}') + \Pi_{12}'[E_3' + (2;1,2)'] + \frac{1}{4}M_1\Pi_{13}'\} - \\
\qquad \zeta_{13}'\{d_1(\Pi_{13}') + \frac{1}{4}M_1\Pi_{12}' + \Pi_{13}'[F_2' + (3;1,3)']\}.
\end{cases}
$$

En ayant égard à (3-50), (3-56), (3-57) et (3-58), on obtient

$$
\text{3-59}\quad
\begin{cases}
(\zeta_1',y_1) = (\zeta_1',d_1y_1) = (\zeta_1',d_1d_1y_1) = (\zeta_1',d_1d_1d_1y_1) = 0, \\
(d_i'\zeta_1',y_1) = (d_i'\zeta_1',d_1y_1) = (d_i'\zeta_1',d_1d_1y_1) = (d_i'\zeta_1',d_1d_1d_1y_1) = 0 \\
i = 2,3, \\
(\zeta_1',x) = (\zeta_1',d_1x) = (\zeta_1',d_1d_1x) = (\zeta_1',d_1d_1d_1x) = (\zeta_1',d_1d_1d_1d_1x) = 0, \\
(d_2'\zeta_1',x) = 2\rho_1k_2k_3\Pi_{13}', \qquad (d_3'\zeta_1',x) = -2\rho_1k_2k_3\Pi_{12}', \\
(\zeta_1',d_1d_1d_1d_1y_1) = -\dfrac{\rho_1k_2k_3\mathscr{M}_1}{k_1}\mathscr{B}_1', \\
(d_i'\zeta_1',d_1d_1d_1d_1y_1) = -\dfrac{\rho_1k_2k_3\mathscr{M}_1}{k_1}\{d_i'(\mathscr{B}_1') + \\
\qquad\qquad \mathscr{B}_1'[B_i' + 3(1;1,i)' - 2(1;i,1)']\} \\
i,j = 2,3 \text{ et } i \neq j.
\end{cases}
$$

Si l'on remarque que (3-59) et la première de (3-49) montrent que l'hyperplan $\Pi_{13}'d_3'\zeta_1' + \Pi_{12}'d_2'\zeta_1'$ coïncide géométriquement avec ζ_1' (en effet, ces deux hyperplans coïncident avec l'hyperplan 4-tangent à R_1 en x), on trouve facilement que parmi les hyperplans ζ_1', $d_2'\zeta_1'$, $d_3'\zeta_1'$ il y en a toujours au moins deux linéairement indépendants et qu'il n'y en a jamais plus de deux. De (3-59), on déduit alors que l'S_3 3-tangent à (y_1) en y_1 coïncide avec l'intersection complète de ces trois hyperplans. Cet S_3 restera fixe et en conséquence la courbe (y_1) sera située entièrement dans un S_3 sous la condition nécessaire et suffisante que $\mathscr{B}_1' = 0$. De plus, on vérifie également que l'hyperplan 4-tangent à R_1 en x coïncide avec l'hyperplan ζ_1'. Cet hyperplan restera fixe lorsque x décrit R_1 et en conséquence les courbes R_1 seront des courbes hyperplanes sous la condition nécessaire et suffisante que $\mathscr{B}'_1 = 0$.

On a donc que *la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe* (y_1) *soit située entèrement dans un* S_3 *est que les courbes* R_1 *de la* $V_3(x)$ *soient des courbes hyperplanes.*

6. Remarque.

Notons que nous pouvons à présent déterminer très facilement l'hyperplan 4-tangent à (y_1) en y_1 et en déduire la condition nécessaire et suffisante pour que (y_1) soit une courbe hyperplane (les calculs sont cependant assez lourds). Toutefois, ces considérations ont ici moins d'importance que précédemment, car, si le fait que (y_1) est une courbe hyperplane entraîne encore que les R_1 sont des courbes situées dans des S_5 (qui coïncident ici tout simplement avec l'S_5 dans lequel se trouve la $V_3(x)$), la réciproque de ce théorème n'est plus vraie contrairement à ce qui se passait dans les cas où la courbe (y_1) était située entièrement dans un espace à n dimensions ($n = 1,2$ ou 3). En effet, si cette réciproque était vraie, (y_1) serait toujours au plus une courbe hyperplane puisque les courbes R_1 sont au plus des courbes de l'S_5 dans lequel se trouve la $V_3(x)$. Or, cela n'est pas toujours vrai ainsi que le montrera l'exemple du numéro 8 de ce chapitre où (y_1) pourra être une courbe située dans S_5 sans appartenir à un hyperplan.

7. Résumé des principaux résultats obtenus dans le cas $\mathscr{J}_1 = \mathscr{H}_1 = 0$.

En faisant le résumé des propriétés obtenues jusqu'à présent pour une V_3 de S_5 du type (1,1,1,1) telle que $\mathscr{J}_1 = \mathscr{H}_1 = 0$, nous obtenons les propositions suivantes.

Il existe toujours sur une $V_3(x)$ *de ce type* ∞^1 *systèmes de courbes* $(\mathscr{C})$ *définis par le fait qu'ils appartiennent au système* (Σ) *de surfaces de* (x) *déterminé par les systèmes de lignes principales* (R_2) *et* (R_3). *Ces systèmes de courbes* $(\mathscr{C})$ *sont tels que les doubles systèmes* $(R_1, \mathscr{C})$ *sont conjugués de première espèce sur* (x) ; *la variété transformée de*

(x) par l'intermédiaire d'un quelconque de ces doubles systèmes est indépendante du double système considéré et son point générateur a été représenté par y_1. Ce point y_1 reste fixe lorsque x décrit la surface Σ et lorque x décrit toute la $V_3(x)$, y_1 décrit une courbe de S_5.

Cette courbe se réduira à une droite sous la condition nécessaire et suffisante que les lignes principales R_1 de (x) soient des courbes planes. Cela a lieu si et seulement si $\mathscr{M}_1 = 0$. Lorsque cette condition est vérifiée, le point $\mathring{\eta}_1$ décrit une surface non développable située entièrement dans un S_3 fixe, qui coïncide avec l'intersection complète des hyperplans $\mathring{y}_1$ et $d_1\mathring{y}_1$.

Si $\mathscr{M}_1 \neq 0$, la courbe (y_1) n'est jamais une droite et la variété $(\mathring{\eta}_1)$ est une V_3 de S_5 du type (2,2) dont les deux systèmes d'asymptotiques sont représentés dans le plan π par les points d'_2 et d'_3 et dont les systèmes de lignes principales sont donnés par le point d_1 et les points de la droite $(d'_2\text{-}d'_3)$. Les hyperplans bitangents à $(\mathring{\eta}_1)$ en son point générateur sont $\mathring{x}$ pour celui qui correspond au système de lignes principales représenté dans π par d_1 et $\mathring{y}_1$ pour celui qui correspond aux autres systèmes de lignes principales de la V_3. Les propriétés des V_3 du type (2,2) trouvées par E. G. Togliatti [10] et celles que nous avons également signalées [11] sont applicables ici à $(\mathring{\eta}_1)$. Notamment, nous pouvons dire que la $V_3(\mathring{\eta}_1)$ est le lieu de ∞^1 surfaces non développables situées dans les S_3 1-caractéristiques de la famille à un paramètre essentiel formée par les hyperplans $\mathring{y}_1$.

Plus particulièrement, (y_1) *sera une courbe plane sous la condition nécessaire et suffisante que les lignes principales R_1 de (x) soient des courbes situés dans des S_3. Cela a lieu si et seulement si $\Pi'_{12} = \Pi'_{13} = 0$. Lorsque cette condition est vérifiée, ces S_3 ont en commun un plan fixe, qui est le plan de (y_1), et $(\mathring{\eta}_1)$ est une V_3 du premier type cas (2,2) dans la classification de la référence* [11].

(y_1) sera située entièrement dans un S_3 sous la condition nécessaire et suffisante que les lignes principales R_1 de (x) soient situées dans des hyperplans. Cela a lieu si et seulement si $\mathscr{B}'_1 = 0$. Lorsque cette condition est vérifiée, ces hyperplans ont en commun un S_3 fixe, qui est l'S_3 déterminé par la courbe (y_1), et $(\mathring{\eta}_1)$ est une V_3 du second type cas (2,2) dans la classification de la référence [11].

8. Exemple.

Dans ce numéro, nous surmonterons les points de S_5 d'une flèche pour ne pas les confondre avec les fonctions. De plus, nous introduirons quelques nouvelles notations qui ne seront valables que pour cet exemple.

Considérons dans S_5 un point quelconque fixe $\vec{T}$, un point quelconque $\vec{z}$ fonction d'un paramètre essentiel que nous désignerons par u et un autre point quelconque $\vec{t}$ fonction d'un autre paramètre essentiel que nous désignerons par w. Supposons encore que $\vec{T}$ ne s'évanouisse pas, que les courbes décrites par $\vec{z}$ et $\vec{t}$ ne soient pas planes et que le plan osculateur à $(\vec{z})$ en $\vec{z}$ soit disjoint du plan osculateur à $(\vec{t})$ en $\vec{t}$.

De ces hypothèses, on déduit facilement que les points $\vec{z}$, $\vec{z}_u$, $\vec{z}_{uu}$, $\vec{t}$, $\vec{t}_w$, $\vec{t}_{ww}$ forment une base de S_5 et qu'il existe en conséquence des fonctions i_k, j_k, q_k $(k=0,1,\ldots,5)$ telles que l'on ait

$$\text{3-60}\quad\left\{\begin{aligned} \vec{T} &= i_0\vec{z} + i_1\vec{z}_u + i_2\vec{z}_{uu} + i_3\vec{t} + i_4\vec{t}_w + i_5\vec{t}_{ww}, \\ \vec{t}_{www} &= j_0\vec{z} + j_1\vec{z}_u + j_2\vec{z}_{uu} + j_3\vec{t} + j_4\vec{t}_w + j_5\vec{t}_{ww}, \\ \vec{z}_{uuu} &= q_0\vec{z} + q_1\vec{z}_u + q_2\vec{z}_{uu} + q_3\vec{t} + q_4\vec{t}_w + q_5\vec{t}_{ww}. \end{aligned}\right.$$

Des hypothèses faites sur $\vec{T}$, $\vec{z}$, $\vec{t}$, on déduit que

3-61 $\left\{\right.$ i_k, j_k, q_k $(k=0,1,\ldots 5)$ sont au plus des fonctions de u, w ; $i_2 i_5 \neq 0$, car, dans l'hypothèse contraire, il suffit de dériver la première de (3-60) par rapport à u et w pour arriver à une conclusion contraire à nos hypothèses.

Considérons maintenant le point

$\vec{x} = e^v\vec{z} + v\vec{t} + \vec{T}$ où v désigne un nouveau paramètre indépendant de u, w et où e représente la base des logarithmes népériens.

$\vec{x}$ est donc un point de S_5 dépendant des trois paramètres u, v, w. Lorsque ces paramètres varient, on vérifie facilement que $\vec{x}$ décrit toujours une V_3 effective telle que les points $\vec{x}$, $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$, $\vec{x}_w$ et deux quelconques des trois points $\vec{x}_{uu}$, $\vec{x}_{vv}$, $\vec{x}_{ww}$ soient linéairement indépendants. De plus, on trouve que les coordonnées de $\vec{x}$ vérifient le système d'équations aux dérivées partielles suivant

$$
3\text{-}63 \left\{ \begin{aligned} &\vec{x}_{uw} = 0, \qquad \vec{x}_{uv} = \vec{x}_u, \qquad \vec{x}_{vw} = \frac{1}{v}\vec{x}_w, \\ &k_1\vec{x}_{uu} + k_2\vec{x}_{vv} + k_3\vec{x}_{ww} = \vec{x} - \frac{i_1}{e^v}\vec{x}_u - (v+i_3)\vec{x}_v - \frac{i_4}{v}\vec{x}_w, \end{aligned} \right.
$$

où l'on a posé

$$
k_1 = \frac{i_2}{e^v}, \qquad k_2 = \frac{1}{e^v}[e^v - ve^v + i_0 - i_3e^v], \qquad k_3 = \frac{i_5}{v}.
$$

Ce qui précède démontre que $\vec{x}$ est le point générateur d'une V_3 de S_5 du type (1,1,1,1) telle que $\mathscr{J}_1 = \mathscr{H}_1 = 0$. Il s'agit même ici d'un système point de Guichard référé à ses lignes principales et tel que $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_3 = 0$; $\mathscr{H}_2 = \frac{1}{v} - 1$.

Le point générateur $\vec{y}_1$ de la variété transformée de $(\vec{x})$ par l'intermédiaire d'un double système conjugué de première espèce sur $(\vec{x})$, tel que son premier système de courbes coïncide avec le système de lignes principales u, est donné par $\vec{y}_1 = \vec{x}_u$ et coïncide donc géométriquement avec $\vec{z}_u$. En conséquence, puisque nous n'avons imposé à $(\vec{z})$ que de ne pas être une courbe plane, on conçoit facilement que la courbe $(\vec{y}_1)$ peut être une courbe de S_5 qui ne se réduit pas à une courbe hyperplane.

Chapitre VI

CAS $\mathscr{K}_1 = 0$ AVEC $\mathscr{J}_1\mathscr{H}_1 \neq 0$.

1. Préliminaires.

Moyennant (3-26), on voit que, dans le cas considéré ici, on a, ou bien $\mathscr{H}_1 + 2\sqrt{k_2k_3}\frac{\mathscr{J}_1}{k_1} = 0$, ou bien $\mathscr{H}_1 - 2\sqrt{k_2k_3}\frac{\mathscr{J}_1}{k_1} = 0$.

Toutefois, ces deux possibilités conduisent à des conclusions géométriques complètement analogues : il suffit en effet de permuter les rôles joués par les points d'_2 et d'_3 pour passer d'une à l'autre. En conséquence, nous pouvons supposer en toute généralité que

3-64 $$\mathscr{H}_1 = 2\sqrt{k_2k_3}\frac{\mathscr{J}_1}{k_1} \text{ avec } \mathscr{J}_1\mathscr{H}_1 \neq 0.$$

Dans ces conditions, les équations (3-10), (3-11), (3-12), (3-17), (3-44) et (3-47) donnent

$$t_{2\mathscr{C}} = -\sqrt{k_2}, \qquad t_{3\mathscr{C}} = \sqrt{k_3}, \qquad d_{\mathscr{C}} = d'_2,$$

3-65 $$\left\{\begin{array}{l} \theta_1 = -\frac{1}{2}[e_3+(2;2,1)+f_2+(3;3,1)], \\ \lambda_1 = b'_3 + (1;2,1)', \qquad \sigma_1 = a'_3 + d'_2(\theta_1), \\ Q_1 = \sigma_1 - \lambda_1\theta_1, \\ y_1 = d_1x + \theta_1 x, \\ d'_2y_1 = \lambda_1 y_1 + Q_1 x, \\ d'_3y_1 = [b'_2+(1;3,1)']y_1 - \mathscr{H}_1 d'_2x + \varepsilon x, \\ d_1y_1 = \theta_1 y_1 + d_1d_1x + x[d_1(\theta_1) - \theta_1^2], \\ \text{où } \varepsilon \text{ (notation seulement valable pour ce chapitre) est défini par} \\ \varepsilon = a'_2 + d'_3(\theta_1) - \theta_1[b'_2+(1;3,1)']. \end{array}\right.$$

A l'aide de (2-9), (2-21), (2-34) et (3-64), les équations (3-44), (3-45) et (3-47) donnent notamment

$$
\begin{cases}
e'_3 + (2;2,1)' = f'_2 + (3;3,1)' = -\theta_1, \\
f'_3 + (3;2,1)' = 0, \qquad f'_3 + (3;1,2)' = \dfrac{1}{4}\mathscr{M}_1, \\
e'_2 + (2;3,1)' = -\mathscr{H}_1, \qquad e'_2 + (2;1,3)' = \dfrac{1}{4}[\mathscr{M}_1 - 2\mathscr{H}_1], \\
\mathscr{J}'_1 = -k_1\mathscr{H}_1, \\
\mathscr{J}'_2 = \dfrac{1}{4}[\mathscr{M}_1 + 2\mathscr{H}_1], \\
\mathscr{J}'_3 = -\dfrac{1}{4}\mathscr{M}_1.
\end{cases}
\tag{3-66}
$$

Des deux premières équations du système d'équations aux dérivées partielles de (3-47), on déduit facilement les valeurs de $d'_3d'_2d_1x$ et $d'_2d'_3d_1x$. Si l'on compare ces deux expressions, on obtient des conditions d'intégrabilité parmi lesquelles nous retenons

$$
\begin{cases}
Q_1 = -\mathscr{H}_1 g'_{23}, \\
\varepsilon = d'_2(\mathscr{H}_1) - \mathscr{H}_1\lambda_1 + \mathscr{H}_1[(3;3,2)' - (3;2,3)'] + \mathscr{H}_1 g'_{22}.
\end{cases}
\tag{3-67}
$$

De plus, (3-20), (3-41), (3-47), (3-64), (3-65) et (3-66) entraînent

$$
\begin{cases}
(\eta_1,y_1) = (\eta_1,d'_iy_1) = (d'_i\eta_1,y_1) = (\eta_1,d'_id'_ky_1) = (d'_id'_k\eta_1,y_1) = 0 \\
(i,k = 1,2,3, \quad \text{mais} \quad k \neq i), \\
(\eta_1,d_1d_1y_1) = (d_1d_1\eta_1,y_1) = -(d_1\eta_1,d_1y_1) = \dfrac{\rho_1k_2k_3\mathscr{M}_1}{k_1}, \\
(\eta_1,d'_2d'_2y_1) = (d'_2d'_2\eta_1,y_1) = 0, \\
(\eta_1,d'_3d'_3y_1) = (d'_3d'_3\eta_1,y_1) = 2\rho_1k_2k_3\mathscr{H}_1, \\
(d'_2\eta_1,y_1) = (d'_2\eta_1,d'_iy_1) = 0 \quad (i=1,2,3), \\
(d'_2\eta_1,d_1d'_2y_1) = (d'_2\eta_1,d'_2d'_2y_1) = 0, \\
(d'_2\eta_1,d_1d_1y_1) = \dfrac{\rho_1k_2k_3\mathscr{M}_1}{k_1}\left\{d'_2\left[\log\left(\dfrac{\rho_1k_2k_3\mathscr{M}_1}{k_1}\right)\right] - \lambda_1 + 2(1;1,2)' \right. \\
\qquad\qquad \left. - 2(1;2,1)'\right\}, \\
(d'_2\eta_1,d_1d'_3y_1) = -\dfrac{1}{2}\rho_1k_2k_3\mathscr{H}_1\mathscr{M}_1, \\
(d'_2\eta_1,d'_3d'_2y_1) = 2\rho_1k_2k_3Q_1, \\
(d'_2\eta_1,d'_3d'_3y_1) = 2\rho_1k_2k_3\mathscr{H}_1\{d'_2[\log(\rho_1k_2k_3\mathscr{H}_1)] - \lambda_1 + 2(3;3,2)' \\
\qquad\qquad - 2(3;2,3)'\}.
\end{cases}
\tag{3-68}
$$

Rappelons que nous avons déjà démontré que, dans les hypothèses considérées ici, (y_1) est une V_3 lorsque Q_1 est différent de zéro tandis que (y_1) est une surface lorsque Q_1 est nul ; $(\mathring{\eta}_1)$ est une V_3 du type (2,1,1) lorsque $\mathscr{M}_1$ est différent de zéro tandis que $(\mathring{\eta}_1)$ est une surface Φ parabolique lorsque $\mathscr{M}_1$ est nul. En conséquence, ce chapitre nous conduira à envisager en plus de la condition (3-64) les cas suivants : ou bien $\mathscr{M}_1 = Q_1 = 0$, ou bien $\mathscr{M}_1 = 0$, $Q_1 \neq 0$, ou bien $\mathscr{M}_1 \neq 0$, $Q_1 = 0$, ou bien $\mathscr{M}_1 Q_1 \neq 0$.

2. Quelques calculs valables lorsqu'en plus de (3-64) on a $\mathscr{M}_1 = 0$.

Afin de ne pas effectuer deux fois des calculs semblables, nous allons chercher, dans ce numéro, quelques conséquences de l'hypothèse $\mathscr{M}_1 = 0$ sans préciser si Q_1 est nul ou pas.

Lorsque $\mathscr{M}_1 = 0$, nous savons que les lignes principales (R_1) de la $V_3(x)$ sont des courbes planes. On a donc

3-69 $d_1 d_1 d_1 x = \mu_0 x + \mu_1 d_1 x + \mu_{11} d_1 d_1 x$ (μ_0, μ_1, μ_{11} notations seulement valables pour ce chapitre).

Moyennant (3-47), (3-65), (3-66) et (3-69), on trouve

$$d_1 d_1 y_1 = j_0 y_1 + j_1 d_1 y_1 + j x,$$

3-70
$$\left\{\begin{aligned}
d_1 d'_2 y_1 &= \lambda_1 d_1 y_1 + y_1\{d_1(\lambda_1) + Q_1\} + x\{d_1(Q_1) - Q_1\theta_1\},\\
d'_2 d_1 y_1 &= d_1 y_1\{\lambda_1 + (1;2,1)' - (1;1,2)'\} + \\
&\quad y_1\{d_1(\lambda_1) + Q_1 + \lambda_1[(2;2,1)' - (2;1,2)']\} + \\
&\quad x\{d_1(Q_1) - Q_1\theta_1 + Q_1[(2;2,1)' - (2;1,2)']\},\\
\mathscr{H}_1 d'_2 d'_2 y_1 &= -Q_1 d'_3 y_1 + y_1\{\mathscr{H}_1 d'_2(\lambda_1) + Q_1[b'_2 + (1;3,1)'] + \mathscr{H}_1\lambda_1^2\} + \\
&\quad x\{\mathscr{H}_1 d'_2(Q_1) + \varepsilon Q_1 + \mathscr{H}_1\lambda_1 Q_1\},\\
d'_3 d'_2 y_1 &= \lambda_1 d'_3 y_1 + y_1 d'_3(\lambda_1) + Q_1 d'_3 x + x d'_3(Q_1),\\
d'_2 d'_3 y_1 &= d'_3 y_1\{\lambda_1 + (3;2,3)' - (3;3,2)'\} + k_1\mathscr{H}_1 d_1 y_1 + \\
&\quad y_1\{d'_3(\lambda_1) + \lambda_1[(2;2,3)' - (2;3,2)']\} + Q_1 d'_3 x + \\
&\quad x\{d'_3(Q_1) + Q_1[(2;2,3)' - (2;3,2)']\},\\
d_1 d'_3 y_1 &= d'_3 y_1\{\tau + (3;1,3)' - (3;3,1)'\} + d_1 y_1\{b'_2 + (1;3,1)'\} + \\
&\quad j_{30} y_1 + j_3 x,
\end{aligned}\right.$$

$$d_3'd_1y_1 = \tau d_3'y_1 + d_1y_1\{b_2'+2(1;3,1)'-(1;1,3)'\}$$
$$+ y_1\{j_{30}-\frac{1}{2}\mathscr{H}_1\lambda_1\} + x\{j_3 - \frac{1}{2}\mathscr{H}_1 Q_1\},$$

où τ, j, j_0, j_1, j_3, j_{30} (notations seulement valables pour ce chapitre) sont définis par

3-70 suite
$$\left\{\begin{aligned}
&\tau = d_1[\log(\mathscr{H}_1)]-\theta_1+(2;1,2)'-(2;2,1)'+(3;3,1)'-(3;1,3)',\\
&j_1 = \mu_{11} + \theta_1,\\
&j_0 = \mu_1 - \mu_{11}\theta_1 + 2d_1(\theta_1) - \theta_1^2,\\
&j = \mu_0 - \mu_1\theta_1 - \mu_{11}[d_1(\theta_1)-\theta_1^2] + d_1d_1(\theta_1) - 3\theta_1 d_1(\theta_1) + \theta_1^3,\\
&j_{30} = d_1\{b_2'+(1;3,1)'\} + \varepsilon - \mathscr{H}_1\{b_3'+(1;1,2)'\} +\\
&\qquad \{b_2'+(1;3,1)'\}\{-d_1[\log(\mathscr{H}_1)] + \theta_1 - (2;1,2)'+(2;2,1)'\},\\
&j_3 = d_1(\varepsilon) - a_3'\mathscr{H}_1 + \theta_1\mathscr{H}_1\{b_3'+(1;1,2)'\} -\\
&\qquad \varepsilon\{d_1[\log(\mathscr{H}_1)] + (2;1,2)' - (2;2,1)'\}.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (3-65) et (3-70) donnent encore

$$d_2'd_1d_1y_1 = ..x+..d_1y_1+..y_1 - \frac{j}{\mathscr{H}_1}d_3'y_1,$$
$$d_3'd_1d_1y_1 = ..x+..y_1+..d_1y_1 + d_3'y_1\{j_0+j_1\tau\} + jd_3'x,$$
$$d_1d_2'd_1y_1 = ..x+..y_1+..d_1y_1,$$
$$d_1d_3'd_1y_1 = ..x+..y_1+..d_1y_1 + d_3'y_1\{d_1(\tau)+\tau[\tau+(3;1,3)'-(3;3,1)']\}$$
$$d_3'd_2'd_1y_1 = ..x+..y_1+..d_1y_1+..d_3'y_1 +$$
$$d_3'x\{d_1(Q_1) - Q_1\theta_1 + Q_1[(2;2,1)'-(2;1,2)']\},$$
$$d_2'd_3'd_1y_1 = ..x+..y_1+..d_1y_1+..d_3'y_1 + \tau Q_1 d_3'x.$$

De ces équations et du fait que les points x, y_1, d_1y_1, $d_3'y_1$, $d_3'x$ sont toujours linéairement indépendants, on déduit les conditions d'intégrabilité suivantes

3-71
$$\left\{\begin{aligned}
&j = 0,\\
&j_0 + j_1\tau - d_1(\tau) - \tau^2 = 0,\\
&d_1(Q_1) - Q_1[\theta_1+\tau+(2;1,2)'-(2;2,1)'] = 0.
\end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant le point $z = d_1y_1 - \tau y_1$ (z notation seulement valable pour ce chapitre).

En tenant compte de (3-70) et (3-71), on trouve immédiatement

$$
3\text{-}72 \left\{ \begin{array}{l}
z = d_1 y_1 - \tau y_1, \qquad d_1 z = \{j_1 - \tau\} z, \\
d'_2 z = \{\lambda_1 + (1;2,1)' - (1;1,2)'\} z + r'_2 y_1, \\
d'_3 z = \{b'_2 + 2(1;3,1)' - (1;1,3)'\} z + r'_3 y_1 + r x, \\
\text{où } r, r'_2, r'_3 \text{ (notations seulement valables pour ce chapitre) sont} \\
\text{définis par} \\
r = j_3 - \frac{1}{2}\mathscr{H}_1 Q_1, \\
r'_2 = d_1(\lambda_1) - d'_2(\tau) + Q_1 + \lambda_1[(2;2,1)' - (2;1,2)'] + \\
\qquad \tau[(1;2,1)' - (1;1,2)'], \\
r'_3 = j_{30} - \frac{1}{2}\mathscr{H}_1 \lambda_1 - d'_3(\tau) + \tau[b'_2 + 2(1;3,1)' - (1;1,3)'].
\end{array} \right.
$$

De (3-65), (3-70) et (3-72), on déduit facilement les valeurs de $d'_3 d_1 z$, $d'_3 d'_2 z$, $d_1 d'_3 z$, $d'_2 d'_3 z$ sous la forme d'une combinaison linéaire des points linéairement indépendants z, y_1, x, $d'_3 y_1$. Ces expressions donnent de nouveau une série de conditions d'intégrabilité parmi lesquelles nous retenons

$$
3\text{-}73 \left\{ \begin{array}{l}
r + \mathscr{H}_1 r'_2 = 0, \\
d_1(r'_3) + 2r'_3\tau - r'_3 j_1 + r'_3[(3;3,1)' - (3;1,3)'] - \frac{3}{2} r = 0, \\
d'_2(r) + r'_3 Q_1 + r\left[\frac{\varepsilon}{\mathscr{H}_1} - \lambda_1 + (1;1,2)' - (1;2,1)' + (3;3,2)' - (3;2,3)'\right] = 0.
\end{array} \right.
$$

De plus, en ayant égard à (3-68) et (3-72), on trouve

3-74 $(z,\eta_1) = (z, d'_i \eta_1) = (z, d'_i d'_k \eta_1) = 0 \quad (i,k=1,2,3).$

Par ailleurs, on sait que, dans les hypothèses considérées ici, $(\mathring{\eta}_1)$ est une surface Φ de Segre parabolique dont l'unique système de caractéristiques est représenté dans le plan π par les point d'_2. On a donc

3-75 $d'_2 d'_2 \eta_1 = q_0 \eta_1 + q'_2 d'_2 \eta_1 + q'_3 d'_3 \eta_1$ où q_0, q'_2, q'_3 sont des notations valables seulement pour ce chapitre.

Le fait que $(d'_2 d'_2 \eta_1, d'_3 y_1) = q'_3 (d'_3 \eta_1, d'_3 y_1)$ donne alors

3-76 $\mathscr{H}_1 q'_3 = Q_1.$

Ces calculs et ce que nous connaissons déjà vont nous permettre de donner les conclusions des deux numéros suivants.

3. Cas $\mathscr{M}_1 = Q_1 = 0$.

Dans ce cas, $d_1\eta_1$ coïncide géométriquement avec η_1 et $(\mathring{\eta}_1)$ est une surface Φ de Segre du type parabolique. L'unique système de caractéristiques de cette surface est formé de droites et est représenté dans le plan π par le point d'_2 ; l'hyperplan osculateur à $(\mathring{\eta}_1)$ en son point générateur coïncide géométriquement avec $\mathring{z}$.

Le point $d'_2 y_1$ coïncide géométriquement avec y_1 et (y_1) est une surface de S_5. Le système de courbes de (y_1) représenté dans le plan π par d_1 est formé de droites et, en conséquence, (y_1) est une surface réglée.

Plus particulièrement :

a) Lorsque $r'_3 = 0$, les équations (3-73) et (3-72) montrent que $r'_2 = r = 0$ et que z est un point fixe de S_5. Dans ces conditions, $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface Φ parabolique, réglée et située entièrement dans un hyperplan fixe, qui coïncide avec $\mathring{z}$, tandis que (y_1) est un cône de S_5 de sommet z.*

b) Lorsque $r'_2 = 0$ et $r'_3 \neq 0$, les équations (3-73) et (3-72) montrent que $r = 0$ et que z décrit une courbe de S_5 ($d_1 z$ et $d'_2 z$ coïncident géométriquement avec z). Dans ces conditions, $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface Φ parabolique, réglée et telle que son hyperplan osculateur, qui coïncide géométriquement avec $\mathring{z}$, ne décrive qu'une famille à un paramètre essentiel, tandis que (y_1) coïncide avec la surface réglée décrite par les tangentes à la courbe (z).*

c) Lorsque $r'_2 \neq 0$, les équations (3-73) et (3-72) montrent que $rr'_3 \neq 0$ et que z décrit une surface de S_5 ($d_1 z$ coïncide géométriquement avec z) que l'on vérifie très facilement être une surface Φ parabolique et réglée dont l'hyperplan osculateur coïncide avec η_1 et dont le seul système de caractéristiques est représenté dans π par le point d'_2. Dans ces conditions, $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface Φ parabolique et réglée dont l'hyperplan osculateur coïncide géométriquement avec $\mathring{z}$, tandis que (y_1) est une surface Φ parabolique et réglée dont l'unique système de caractéristiques est représenté dans π par le point d_1. De plus, la génératrice de (y_1)* (c'est-à-dire la droite qui joint y_1 à $d_1 y_1$) *coïncide* *géométriquement avec la génératrice de* (z) (c'est-à-dire la droite qui joint z à $d'_2 z$). *Les surfaces* (y_1) *et* (z) *coïncident donc géométriquement.* Par ailleurs, on vérifie encore très facilement que *l'hyperplan osculateur à* (y_1) *en son point générateur coïncide géométriquement avec l'hyperplan*

$$\zeta'_2 = d'_2\eta_1 - \eta_1\{d'_2[\log(\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{H}_1)] - \lambda_1 + 2(3;3,2)' - 2(3;2,3)'\}$$

(ζ'_2 notation seulement valable pour ce chapitre).

$(\mathring{\zeta}'_2)$ est une surface Φ parabolique et réglée qui coïncide géométriquement avec $(\mathring{\eta}_1)$ et dont l'unique système de caractéristiques est représenté dans π par le point d_1.

4. Cas $\mathscr{M}_1 = 0$ avec $Q_1 \neq 0$.

Dans ce cas, (y_1) est une V_3 effective et les équations (3-68) montrent que les hyperplans η_1 et $d'_2\eta_1$ sont tangents à cette V_3 en son point générateur. Plus précisément, si $\Gamma^{y_1}_{\eta_1}$ et $\Gamma^{y_1}_{d'_2\eta_1}$ désignent respectivement les coniques de π associées à ces hyperplans tangents et si t'_1, t'_2, t'_3 sont les coordonnées courantes relatives à d'_1, d'_2, d'_3, on trouve que

$\Gamma^{y_1}_{\eta_1}$ a pour équation $t'^2_3 = 0$,

$\Gamma^{y_1}_{d'_2\eta_1}$ a pour équation

$$2Q_1 t'_2 t'_3 + t'^2_3\{d'_2[\log(\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{H}_1)] - \lambda_1 + 2(3;3,2)' - 2(3;2,3)'\} = 0.$$

En conséquence, (y_1) *est une* V_3 *de* S_5 *dont le faisceau de coniques associé est formé de coniques dégénérées en deux droites généralement distinctes : une de ces deux droites coïncide toujours avec* $(d_1\text{-}d'_2)$ *et est donc fixe ; l'autre varie dans le faisceau de droites de sommet* d_1.

Par ailleurs, remarquons que (3-66) entraîne ici $\mathscr{J}'_3 = 0$. On déduit donc, de (3-4) et (3-6), que *les systèmes de courbes représentés dans* π *par* d_1 *et* d'_2 *forment sur la* $V_3(y_1)$ *un double système conjugué de première espèce et en involution.*

Compte tenu de (3-4), on trouve que x est le point générateur de la transformée de (y_1) dans le sens d'_2 ; (3-72) permet de conclure que z *est le point générateur de la transformée de* (y_1) *dans le sens* d_1.

Puisque $Q_1 \neq 0$, les équations (3-73) montrent que $r'_2 = 0$ entraîne $r = r'_3 = 0$ et que $r'_2 \neq 0$ entraîne $r \neq 0$. En conséquence, il n'y a que deux cas possibles pour (z) : ou bien $r'_2 = 0$ et z est un point fixe, ou bien $r'_2 \neq 0$ et z décrit une surface Φ parabolique et non réglée dont l'hyperplan osculateur coïncide avec η_1 et dont l'unique système de caractéristiques est représenté dans π par d'_2.

A ces deux cas correspondent les propriétés suivantes.

Lorsque z est un point fixe ($r'_2 = 0$), (y_1) est un cône de S_5 *de sommet z et $(\mathring{\eta}_1)$ est une surface Φ parabolique, non réglée et située entièrement dans un hyperplan fixe qui coïncide avec $\mathring{z}$. Lorsque z décrit une surface ($r'_2 \neq 0$), (y_1) est le lieu des tangentes aux caractéristiques de cette surface (z) et $(\mathring{\eta}_1)$ est une surface Φ parabolique et non réglée dont l'hyperplan osculateur coïncide encore avec $\mathring{z}$.*

5. Exemple.

Comme notre travail a sa raison d'être dans le fait qu'il existe des V_3 de S_5 du type (1,1,1,1) qui ne sont pas des systèmes points de Guichard, comme les deux numéros précédents concernent certaines de ces V_3 ($\mathscr{I}_1 \neq 0$) et comme les propriétés trouvées permettent de construire de telles V_3, nous allons donner l'exemple suivant qui, en plus d'illustrer le numéro précédent, fournira donc un exemple de V_3 qui n'est pas un système point de Guichard.

Pour ne pas confondre dans cet exemple les points de S_5 avec les fonctions, nous les surmonterons d'une flèche. De plus, nous introduirons quelques nouvelles notations qui ne seront valables que pour ce numéro.

Soit $\vec{h}$ le point générateur d'une surface Φ parabolique non réglée et située entièrement dans un hyperplan fixe H de S_5. On peut toujours supposer en toute généralité que le point $\vec{h}$ est référé à deux paramètres v, w tels que l'unique système de caractéristiques de la surface soit donné par les courbes v. Par un choix convenable des courbes w et du facteur de proportionnalité des coordonnées de $\vec{h}$, on peut finalement supposer en toute généralité que les coordonnées de $\vec{h}$ vérifient le système d'équations aux dérivées partielles suivant

$\vec{h}_{vv} = i_2\vec{h}_w$ avec $i_2 \neq 0$,
$\vec{h}_{vww} = g_2\vec{h}_w + g_3\vec{h}_{vw} + g_4\vec{h}_{ww}$,
$\vec{h}_{www} = j_2\vec{h}_w + j_3\vec{h}_{vw} + j_4\vec{h}_{ww}$.

Soit maintenant $\vec{\mathrm{T}}$ un point fixe quelconque de S_5 n'appartenant pas à H et considérons le point
$\vec{y} = u\vec{\mathrm{T}} + \vec{h}$ où u est un nouveau paramètre indépendant de v et w.

On vérifie facilement que $\vec{y}$ décrit une V_3 lorsque u, v, w varient, que les points $\vec{y}, \vec{y}_u, \vec{y}_v, \vec{y}_w, \vec{y}_{vw}, \vec{y}_{ww}$ sont toujours linéairement indépendants et que les coordonnées de $\vec{y}$ vérifient le système d'équations aux dérivées partielles
$\vec{y}_{uu} = \vec{y}_{uv} = \vec{y}_{uw} = 0$,
$\vec{y}_{vv} = i_2\vec{y}_w$,
$\vec{y}_{vww} = g_2\vec{y}_w + g_3\vec{y}_{vw} + g_4\vec{y}_{ww}$,
$\vec{y}_{www} = j_2\vec{y}_w + j_3\vec{y}_{vw} + j_4\vec{y}_{ww}$.

Sur $(\vec{y})$ le système de lignes u et un système quelconque de courbes distinct du précédent et vérifiant $dw = 0$ forment un double système conjugué de première espèce et en involution. C'est en considérant un de ces ∞^1 doubles systèmes conjugués de première espèce et en recherchant le point générateur de la variété transformée de $(\vec{y})$ que nous posons

$$\vec{x} = \vec{y}_v + \frac{u^2}{2}\vec{y}_u - u\vec{y}.$$

Ce point $\vec{x}$ décrit toujours une V_3 lorsque u, v, w varient. De plus, si l'on désigne par d_1, d'_2, d'_3 respectivement les points $(1,0,0)$, $\left(\frac{u^2}{2},1,0\right)$ et $\left(\frac{u^2}{4i_2}(3u-g_4), \frac{u-g_4}{2i_2}, 1\right)$ du plan π, on vérifie que $\mathscr{J}'_1 = \frac{u^3}{4i_2^2}\{2[\log(i_2)]_v - u\} \neq 0$ et que les coordonnées de $\vec{x}$ vérifient le système
$d'_2d_1\vec{x} = ud_1\vec{x} - \vec{x}$,
$2i_2d'_3d_1\vec{x} = (g_4-3u)\vec{x} + u(4u-g_4)d_1\vec{x} - 2d'_2\vec{x}$,

$$d'_2d'_2\vec{x} + \frac{u^3}{4}\{u-2[\log(i_2)]_v\}d_1d_1\vec{x} = ..\vec{x} + ..d_1\vec{x} + ..d'_2\vec{x} + ..d'_3\vec{x},$$

$$d'_3 d'_3 \vec{x} + \frac{u^3}{16 i_2^2} \mathrm{L} d_1 d_1 \vec{x} = ..\vec{x} + ..d_1\vec{x} + ..d'_2\vec{x} + ..d'_3\vec{x},$$

où l'on a posé $\mathrm{L} = u[3u - g_4]^2 - 2[\log(i_2)]_v[u - g_4]^2 - 8i_2[g_2 + ug_3]$
$+ 8[u - g_4][u^2 - i_{2w}]$.

Puisque les points $\vec{x}, d_1\vec{x}$, $d'_2\vec{x}$, $d'_3\vec{x}$, $d_1d_1\vec{x}$ et $d'_2d'_3\vec{x}$ sont linéairement indépendants et puisque les coefficients de $d_1d_1\vec{x}$ dans le système précédent ne sont jamais identiquement nuls (pour démontrer que $\mathrm{L} \neq 0$. il suffit de remarquer que $\mathrm{L}_{uuu} = 102$), $\vec{x}$ décrit donc une V_3 de S_5 du type (1,1,1,1). Plus précisément, on vérifie très facilement que $(\vec{x})$ est une V_3 de S_5 du type (1,1,1,1) telle que $\mathscr{K}_1 = \mathscr{M}_1 = 0$ avec $\mathscr{J}_1 \mathscr{H}_1 \mathrm{Q}_1 \neq 0$. $(\vec{x})$ est donc bien une V_3 du type considéré au numéro 3 de ce chapitre et n'est donc jamais un système point de Guichard puisque $\mathscr{J}_1 \neq 0$.

6. Cas $\mathscr{M}_1 \neq 0$.

Dans le cas considéré ici ($\mathscr{M}_1 = 0$ et (3-64) vérifiée), on déduit aisément de (3-23), (3-42) et (3-65) que

3-77
$$\begin{cases} \gamma_x \text{ a pour équation } t'_2 t'_3 = 0 \\ \gamma_{y_1} \text{ a pour équation } \mathscr{M}_1 t_1'^2 + 2k_1 \mathscr{H}_1 t_3'^2 = 0, \\ \text{où } t'_1, t'_2, t'_3 \text{ sont les coordonnées courantes relatives à } d_1, d'_2, d'_3. \end{cases}$$

Ces équations ou les théorèmes (3-27) et (3-34) donnent les propriétés suivantes : $(\mathring{\eta}_1)$ *est une* V_3 *du type* (2,1,1) ; d'_2 *est l'image dans* π *du système de lignes principales de* $(\mathring{\eta}_1)$ *qui coïncide avec le double système d'asymptotiques de la* V_3 *et l'hyperplan bitangent correspondant coïncide avec* $\mathring{y}_1$; d_1 *est l'image dans* π *de l'autre système de ligne principales de* $(\mathring{\eta}_1)$ *et l'hyperplan bitangent correspondant coïncide avec* $\mathring{x}$.

Notons encore que (3-48) et (3-67) entraînent que *la condition nécessaire et suffisante pour que* (y_1) *soit une surface est que les courbes de* $(\mathring{\eta}_1)$ *représentées dans* π *par* d'_2 (c'est-à-dire les courbes de $(\mathring{\eta}_1)$ qui sont simultanément des asymptotiques et des lignes principales) *soient des droites*.

Posons

3-78 $\psi'_2 = d'_2\eta_1 - [B'_3 + (1;1,2)']\eta_1$ (ψ'_2 notation seulement valable pour ce chapitre).

Les équations (3-68) et le fait que $B'_3 + (1;1,2)' = d'_2\left[\log\left(\frac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\right)\right] - \lambda_1 + 2(1;1,2)' - 2(1;2,1)'$ donnent

$$(\psi'_2, y_1) = (\psi'_2, d'_i y_1) = 0 \quad (i=1,2,3),$$

$$3\text{-}79 \left\{\begin{aligned} &(\psi'_2, d_1 d'_2 y_1) = (\psi'_2, d'_2 d'_2 y_1) = (\psi'_2, d_1 d_1 y_1) = 0,\\ &(\psi'_2, d_1 d'_3 y_1) = -\frac{1}{2}\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{H}_1 \mathscr{M}_1,\\ &(\psi'_2, d'_2 d'_3 y_1) = 2\rho_1 k_2 k_3 Q_1,\\ &(\psi'_2, d'_3 d'_3 y_1) = 2\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{H}_1 \left\{ d'_2\left[\log\left(\frac{k_1 \mathscr{H}_1}{\mathscr{M}_1}\right)\right] + 2(1;2,1)' - 2(1;1,2)' \right.\\ &\qquad\qquad \left. + 2(3;3,2)' - 2(3;2,3)' \right\}. \end{aligned}\right.$$

Désignons encore par (C'_2) le système de courbes de ($\mathring{\eta}_1$) qui est représenté dans π par d'_2 et par ($\mathscr{C}'_2$) celui qui est représenté dans π par $D'_2 = \frac{Q_1}{\mathscr{H}_1} d_1 + \frac{1}{4}\mathscr{M}_1 d'_2$ (C'_2, $\mathscr{C}'_2$, D'_2 notations seulement valables pour ce chapitre).

On arrive ainsi aux conclusions suivantes.

a) *Lorsque* $Q_1 = 0$, *les courbes* C'_2 *sont des droites sur* ($\mathring{\eta}_1$) *et* (y_1) *est une surface* ($d'_2 y_1 = \lambda_1 y_1$).

b) *Lorsque* $Q_1 \neq 0$, *les courbes* C'_2 *ne sont plus des droites sur* ($\mathring{\eta}_1$) *et forment avec les courbes* $\mathscr{C}'_2$ *un double système* (C'_2, $\mathscr{C}'_2$) *conjugué de première espèce sur* ($\mathring{\eta}_1$) (($\mathscr{C}'_2$) est d'ailleurs le seul système de courbes de ($\mathring{\eta}_1$) qui vérifie cette propriété) ; *le point générateur de la variété transformée de* ($\mathring{\eta}_1$) *par l'intermédiaire de ce double système coïncide géométriquement avec* $\mathring{\psi}'_2$.

De plus, dans ce cas $Q_1 \neq 0$, η_1 et ψ'_2 sont deux hyperplans tangents à la $V_3(y_1)$;

$\Gamma^{y_1}_{\eta_1}$ a pour équation $\mathscr{M}_1 t_1'^2 + 2k_1\mathscr{H}_1 t_3'^2 = 0$,

$\Gamma^{y_1}_{\psi'_2}$ a pour équation $-\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{H}_1 \mathscr{M}_1 t'_1 t'_3 + 4\rho_1 k_2 k_3 Q_1 t'_2 t'_3 + (\psi'_2, d'_3 d'_3 y_1)\, t_3'^2 = 0$.

Dans ce cas $Q_1 \neq 0$, on a donc : (y_1) *est une* V_3 *du type* (2,1,1) ; d'_2 *est l'image dans* π *du système de lignes principales de* (y_1) *qui coïncide avec le double système d'asymptotiques de la* V_3 *et l'hyperplan bitangent correspondant coïncide avec* η_1 ; D'_2 *est l'image dans* π *de l'autre système de lignes principales de* (y_1) *et l'hyperplan bitangent correspondant coïncide avec* ψ'_2.

CHAPITRE VII

CAS $\mathscr{K}_1 \neq 0$.

1. Introduction de la base $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$.

Nous savons déjà qu'il existe dans ce cas deux systèmes distincts de courbes que nous avons désignés par $(\mathscr{C}_{12})$ et $(\mathscr{C}_{13})$ et qui sont tels que les doubles systèmes $(R_1, \mathscr{C}_{1k})$ $(k=2,3)$ sont conjugués de première espèce sur (x). Les trois systèmes de courbes (R_1), $(\mathscr{C}_{12})$, $(\mathscr{C}_{13})$ forment sur la $V_3(x)$ une base qui jouera un rôle très important dans ce chapitre. Nous désignerons donc par $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$ respectivement les images dans le plan π de ces trois systèmes de courbes.

En tenant compte de (3-10) et de ce que devient (3-10) lorsqu'elle est exprimée par l'intermédiaire de (3-42) en coordonnées courantes relatives à la base d'_1, d'_2, d'_3, on trouve

$$\text{3-81}\quad \left\{\begin{array}{l} \bar{d}_1 = d_1, \\ \bar{d}_2 = -m'_2 d'_2 + m'_3 d'_3 = m_2 d_2 + m_3 d_3, \\ \bar{d}_3 = m'_2 d'_2 + m'_3 d'_3 = n_2 d_2 + n_3 d_3, \\ \text{où} \\ m'^2_2 = \mathscr{K}_1 + 2\sqrt{k_2 k_3 \dfrac{\mathscr{I}_1}{k_1}}, \quad m'^2_3 = \mathscr{K}_1 - 2\sqrt{k_2 k_3 \dfrac{\mathscr{I}_1}{k_1}}, \\ m_2 = \sqrt{k_2}(m'_2 + m'_3), \quad m_3 = -\sqrt{k_3}(m'_2 - m'_3), \\ n_2 = -\sqrt{k_2}(m'_2 - m'_3), \quad n_3 = \sqrt{k_3}(m'_2 + m'_3). \end{array}\right.$$

En conséquence, si l'on désigne par t_{1i}, t_{2i}, t_{3i} les coordonnées relatives à d_1, d_2, d_3 du point $\bar{d}_i$, on a

$$\text{3-82}\quad \left\{\begin{array}{l} t_{11} = 1, \ t_{21} = t_{31} = 0, \\ t_{12} = 0, \ t_{22} = m_2, \ t_{32} = m_3, \\ t_{13} = 0, \quad t_{23} = n_2, \quad t_{33} = n_3. \end{array}\right.$$

2. Calcul des $(i;j,s)^-$.

Si on surmonte d'une barre (qui sera parfois remplacée par une petite barre en exposant) les expressions déduites de la base d_1, d_2, d_3 pour désigner celles de la base $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$ qui sont définies d'une manière analogue, on trouve en tenant compte des formules (1-16) et (1-21) que

$$(1;i,s)^- = (1;i^-,s^-),$$

$$(2;i,s)^- = \frac{1}{m_2n_3 - m_3n_2}\{n_3(2;i^-,s^-) - n_2(3;i^-,s^-)\},$$

$$(3;i,s)^- = \frac{1}{m_2n_3 - m_3n_2}\{m_2(3;i^-,s^-) - m_3(2;i^-,s^-)\},$$

$i,s = 1,2,3$ et où l'on a posé

$$(j;i^-,s^-) = \alpha_j\bar{d}_i(\overline{du_s}) + \beta_j\bar{d}_i(\overline{dv_s}) + \varepsilon_j\bar{d}_i(\overline{dw_s}).$$

Compte tenu de la dernière de (1-27), on obtient finalement

$$\text{3-83}\quad\left\{\begin{aligned}
(1;i,s)^- &= \sum_{p,q=1}^{3} t_{pi}t_{qs}(1;p,q),\\
(2;i,s)^- &= \frac{1}{m_2n_3 - m_3n_2}\{n_3\bar{d}_i(t_{2s}) - n_2\bar{d}_i(t_{3s}) +\\
&\qquad \sum_{p,q=1}^{3} t_{pi}t_{qs}[n_3(2;p,q) - n_2(3;p,q)]\},\\
(3;i,s)^- &= \frac{1}{m_2n_3 - m_3n_2}\{m_2\bar{d}_i(t_{3s}) - m_3\bar{d}_i(t_{2s}) +\\
&\qquad \sum_{p,q=1}^{3} t_{pi}t_{qs}[m_2(3;p,q) - m_3(2;p,q)]\},
\end{aligned}\right.$$

$i,s = 1,2,3$ et où t_{jk} est défini par (3-82).

En particulier, on a

$$\text{3-84}\quad\left\{\begin{aligned}
\bar{\mathscr{I}}_1 &= (1;3,2)^- - (1;2,3)^- = [m_2n_3 - m_3n_2]\mathscr{I}_1 = 4\sqrt{k_2k_3m_2'm_3'}\,\mathscr{I}_1,\\
\bar{\mathscr{I}}_2 &= (2;1,3)^- - (2;3,1)^- = \frac{\sqrt{k_2k_3}\,\mathscr{I}_1}{2m_2'm_3'\,k_1}\mathscr{M}_1 + \frac{\sqrt{k_2k_3}}{2\mathscr{K}_1}\mathrm{J},\\
\bar{\mathscr{I}}_3 &= (3;2,1)^- - (3;1,2)^- = \frac{\sqrt{k_2k_3}\,\mathscr{I}_1}{2m_2'm_3'\,k_1}\mathscr{M}_1 - \frac{\sqrt{k_2k_3}}{2\mathscr{K}_1}\mathrm{J}.
\end{aligned}\right.$$

3-84 suite
où l'on a posé

$$J = \mathscr{H}_1\left[\frac{\mathscr{I}_2}{k_2} - \frac{\mathscr{I}_3}{k_3}\right] + 2\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}d_1(\mathscr{H}_1) - 2\mathscr{H}_1 d_1\left(\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\right) - \mathscr{H}_1\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}d_1[\log(k_2k_3)]$$

et où l'on a tenu compte de ce que les formules (3-81) entraînent

$$m_2n_3 - m_3n_2 = 4\sqrt{k_2k_3}\,m_2'm_3',$$

3-85

$$\begin{aligned}
&2m_2'\mathrm{D}(m_2') = \mathrm{D}(\mathscr{H}_1) + 2\sqrt{k_2k_3}\,\mathrm{D}\left(\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\right) + \sqrt{k_2k_3}\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\,\mathrm{D}\,[\log(k_2k_3)],\\
&2m_3'\mathrm{D}(m_3') = \mathrm{D}(\mathscr{H}_1) - 2\sqrt{k_2k_3}\,\mathrm{D}\left(\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\right) - \sqrt{k_2k_3}\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\,\mathrm{D}[\log(k_2k_3)],\\
&n_3\mathrm{D}(n_2) - n_2\mathrm{D}(n_3) = 2k_2k_3\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\,\mathrm{D}\left[\log\left(\frac{k_3}{k_2}\right)\right] +\\
&\qquad \frac{2k_2k_3}{m_2'm_3'}\left\{2\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\,\mathrm{D}(\mathscr{H}_1) - 2\mathscr{H}_1\mathrm{D}\left(\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\right) - \mathscr{H}_1\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\mathrm{D}[\log(k_2k_3)]\right\},
\end{aligned}$$

etc.

où D représente une direction quelconque de différentiation.

3. Quelques formules préliminaires.

Nous avons déjà désigné par y_{1k} le point générateur de la variété transformée de (x) par l'intermédiaire du double système $(\mathrm{R}_1, \mathscr{C}_{1k})$ $(k=2,3)$ conjugué de première espèce sur (x) (voir (3-13)).

Moyennant (3-11), (3-12), (3-16) et (3-81), nous trouvons donc

$$y_{1k} = d_1x + \theta_{1k}x,$$

3-86

$$\begin{aligned}
&\overline{d}_k y_{1k} = \sigma_{1k}x + \lambda_{1k}d_1x = \lambda_{1k}y_{1k} + \mathrm{Q}_{1k}x,\\
&\overline{k} = 2{,}3 \text{ avec}\\
&\theta_{12} = -\frac{1}{2}[e_3+(2;2,1)+f_2+(3;3,1)] - \frac{1}{2}\,m_2'm_3',\\
&\theta_{13} = -\frac{1}{2}[e_3+(2;2,1)+f_2+(3;3,1)] + \frac{1}{2}\,m_2'm_3',\\
&\theta_{13} - \theta_{12} = m_2'm_3' \neq 0,\\
&\sigma_{12} = m_2a_3 + m_3a_2 + \overline{d}_2(\theta_{12}),\\
&\lambda_{12} = m_2b_3 + m_3b_2 + (1;2,1)^-,\\
&\sigma_{13} = n_2a_3 + n_3a_2 + \overline{d}_3(\theta_{13}),\\
&\lambda_{13} = n_2b_3 + n_3b_2 + (1;3,1)^-,\\
&\mathrm{Q}_{1k} = \sigma_{1k} - \lambda_{1k}\theta_{1k}(k=2{,}3).
\end{aligned}$$

Notons que dans le cas considéré ici on a

$$
(3\text{-}87)\left\{
\begin{array}{l}
\bar{d}_2 * d_1 x = \bar{a}_3 x + \bar{b}_3 d_1 x + \bar{e}_3 \bar{d}_2 x + \bar{f}_3 \bar{d}_3 x, \\
\bar{d}_3 * d_1 x = \bar{a}_2 x + \bar{b}_2 d_1 x + \bar{e}_2 \bar{d}_2 x + \bar{f}_2 \bar{d}_3 x, \\
(\theta_{13} - \theta_{12}) \bar{d}_2 * \bar{d}_3 x - \mathscr{J}_1 d_1 d_1 x = \bar{a}_1 x + \bar{b}_1 d_1 x + \bar{e}_1 \bar{d}_2 x + \bar{f}_1 \bar{d}_3 x, \\
4 k_1 \mathscr{H}_1 d_1 d_1 x + \bar{d}_2 \bar{d}_2 x + \bar{d}_3 \bar{d}_3 x = \bar{a} x + \bar{b} d_1 x + \bar{e} \bar{d}_2 x + \bar{f} \bar{d}_3 x, \\
\text{où l'on a posé} \\
\bar{a}_3 = \sigma_{12} - \bar{d}_2(\theta_{12}), \qquad \bar{a}_2 = \sigma_{13} - \bar{d}_3(\theta_{13}), \\
\bar{b}_3 = \lambda_{12} - (1;2,1)^-, \qquad \bar{b}_2 = \lambda_{13} - (1;3,1)^-, \\
\bar{e}_3 = -\theta_{12} - (2;2,1)^-, \quad \bar{e}_2 = -(2;3,1)^-, \\
\bar{f}_3 = -(3;2,1)^-, \qquad \bar{f}_2 = -\theta_{13} - (3;3,1)^-, \\
\bar{a}_1 = \bar{d}_2(\bar{a}_2) - \bar{d}_3(\bar{a}_3) + \bar{a}_3[\lambda_{13} + (2;3,2)^- - (2;2,3)^-] - \\
\qquad \bar{a}_2[\lambda_{12} + (3;2,3)^- - (3;3,2)^-], \\
\bar{b}_1 = \bar{d}_2(\lambda_{13}) - \bar{d}_3(\lambda_{12}) + \lambda_{12}[(2;3,2)^- - (2;2,3)^-] + \\
\qquad \lambda_{13}[(3;3,2)^- - (3;2,3)^-] - \theta_{13}(1;2,3)^- + \theta_{12}(1;3,2)^-, \\
\bar{e}_1 = \bar{d}_3(\theta_{12} - \theta_{13}) + \sigma_{13} - \theta_{12}\lambda_{13} + (\theta_{12} - \theta_{13})\,(2;2,3)^-, \\
\bar{f}_1 = \bar{d}_2(\theta_{12} - \theta_{13}) - \sigma_{12} + \theta_{13}\lambda_{12} + (\theta_{12} - \theta_{13})\,(3;3,2)^-, \\
\text{et des valeurs non calculées pour } \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{e},\ \bar{f}.
\end{array}
\right.
$$

La démonstration de ces formules (3-87) pourrait se faire en travaillant d'une manière analogue à celle employée pour obtenir (3-47). C'est d'ailleurs par cette méthode que nous avons obtenu la quatrième de (3-87). Par contre, les trois premières de (3-87) s'obtiennent plus facilement de la manière suivante. Si, dans la seconde de (3-86) pour $k = 2$, on remplace y_{12} par sa valeur, on obtient directement la valeur de $\bar{d}_2 d_1 x$. De même, on trouve de la seconde de (3-86) pour $k = 3$ la valeur de $\bar{d}_3 d_1 x$. De ces valeurs de $\bar{d}_2 d_1 x$ et $\bar{d}_3 d_1 x$, on déduit directement les deux premières de (3-87) et les valeurs de $\bar{d}_3 \bar{d}_2 d_1 x$ et $\bar{d}_2 \bar{d}_3 d_1 x$. Si ensuite on compare ces deux différentielles troisièmes, on obtient finalement la troisième de (3-87).

De (3-87) et (3-86), on déduit maintenant

$$
(3\text{-}88)\left\{
\begin{array}{l}
y_{12} = d_1 x + \theta_{12} x, \\
d_1 y_{12} = d_1 d_1 x + \theta_{12} d_1 x + x d_1(\theta_{12}),
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{3-88 suite}\quad\left\{\begin{aligned}
&\bar{d}_2 y_{12} = \sigma_{12}x + \lambda_{12}d_1 x = \lambda_{12}y_{12} + Q_{12}x,\\
&\bar{d}_3 y_{12} = x\{\bar{a}_2+\bar{d}_3(\theta_{12})\} + \lambda_{13}d_1 x + (\theta_{12}-\theta_{13})\bar{d}_3 x =\\
&\qquad \lambda_{13}y_{12} + (\theta_{12}-\theta_{13})\bar{d}_3 x + x\{\bar{d}_3(\theta_{12}-\theta_{13})+\sigma_{13}-\lambda_{13}\theta_{12}\}.
\end{aligned}\right.
$$

Finalement, en tenant compte de (3-20), (3-81), (3-86), (3-87) et (3-88), on trouve

$$
\text{3-89}\quad\left[\begin{aligned}
&(\eta_1,y_{12}) = (\eta_1,\bar{d}_i y_{12}) = (\bar{d}_i\eta_1,y_{12}) = 0 \quad (i = 1,2,3),\\
&(\eta_1,d_1\bar{d}_2 y_{12}) = (\eta_1,\bar{d}_2\bar{d}_2 y_{12}) = (\eta_1,\bar{d}_3\bar{d}_2 y_{12}) = (\eta_1,d_1\bar{d}_3 y_{12}) = 0,\\
&(\eta_1,d_1 d_1 y_{12}) = \frac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1},\\
&(\eta_1,\bar{d}_3\bar{d}_3 y_{12}) = 4\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{K}_1,\\
&(\bar{d}_2\eta_1,y_{12}) = (\bar{d}_2\eta_1,\bar{d}_i y_{12}) = (\bar{d}_i\bar{d}_2\eta_1,y_{12}) = 0 \quad (i = 1,2,3),\\
&(\bar{d}_2\eta_1,d_1\bar{d}_2 y_{12}) = (\bar{d}_2\eta_1,\bar{d}_3\bar{d}_2 y_{12}) = 0,\\
&(\bar{d}_2\eta_1,\bar{d}_2\bar{d}_2 y_{12}) = -4\rho_1 k_2 k_3 m'_2 m'_3 Q_{12},\\
&(\bar{d}_2\eta_1,d_1\bar{d}_3 y_{12}) = 4\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{K}_1 \bar{\mathscr{J}}_2,\\
&(\bar{d}_2\eta_1,d_1 d_1 y_{12}) = \frac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\left\{\bar{d}_2\left[\log\left(\frac{\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{M}_1}{k_1}\right)\right] - \lambda_{12} + 2(1;1,2)^-\right.\\
&\qquad\qquad\left. - 2(1;2,1)^-\right\},\\
&(\bar{d}_2\eta_1,\bar{d}_3\bar{d}_3 y_{12}) = 4\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{K}_1\Big\{\bar{d}_2[\log(\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{K}_1)] - \lambda_{12} + \frac{Q_{12}}{m'_2 m'_3}\\
&\qquad\qquad + 2(3;3,2)^- - 2(3;2,3)^-\Big\},\\
&(\bar{d}_i\bar{d}_k\eta_1,y_{12}) = (\eta_1,\bar{d}_i\bar{d}_k y_{12}) \quad (i,k = 1,2,3).
\end{aligned}\right.
$$

4. Cas $\mathscr{M}_1 = Q_{12} = 0$.

Dans ces conditions, on déduit aisément des équations précédentes que

$$
\text{3-90}\quad\left\{\begin{aligned}
&\bar{\mathscr{J}}_2 = -\bar{\mathscr{J}}_3 = \frac{\sqrt{k_2 k_3}}{\mathscr{K}_1}\mathscr{F}_1 \text{ où } \mathscr{F}_1 \text{ a été défini par (3-36)},\\
&\bar{d}_2 y_{12} = \lambda_{12}y_{12},\\
&(\bar{d}_2\bar{d}_2\eta_1,y_{12}) = (\bar{d}_2\bar{d}_2\eta_1,\bar{d}_i y_{12}) = 0 \quad (i = 1,2,3),\\
&(\bar{d}_3\eta_1,d_1 d_1 y_{12}) = 0,
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{3-90 suite}\quad\left\{\begin{array}{l}
(\bar{d}_2\bar{d}_2\eta_1, d_1d_1y_{12}) = -8\rho_1 k_2 k_3 \mathcal{K}_1 \bar{\mathcal{J}}_2 \bar{\mathcal{J}}_3,\\
(\bar{d}_2\bar{d}_2\eta_1, \bar{d}_3\bar{d}_1y_{12}) = 0 \text{ lorsque } \bar{\mathcal{J}}_2 = 0.
\end{array}\right.
$$

En tenant compte de (3-89), (3-90) et du théorème (3-39), on trouve donc que le cas considéré ici se subdivise en deux sous-cas ; on obtient ainsi les résultats suivants.

a) *Lorsque* $\bar{\mathcal{J}}_2 \neq 0$, $(\mathring{\eta}_1)$ *et* (y_{12}) *sont des surfaces de* S_5 *qui ne sont pas* Φ *de Segre ; le plan tangent à* $(\mathring{\eta}_1)$ *en son point générateur est déterminé par les points* $\mathring{\eta}_1$, $\bar{d}_2\mathring{\eta}_1$ et $\bar{d}_3\mathring{\eta}_1$ *et coïncide avec l'intersection complète des hyperplans* $\mathring{y}_{12}$, $d_1\mathring{y}_{12}$, $d_1d_1\mathring{y}_{12}$ *; le plan tangent à* (y_{12}) *en son point générateur est déterminé par les points* y_{12}, d_1y_{12} *et* $\bar{d}_3y_{12}$ *et coïncide avec l'intersection complète des hyperplans* η_1, $\bar{d}_2\eta_1$, $\bar{d}_2\bar{d}_2\eta_1$.

b) *Lorsque* $\bar{\mathcal{J}}_2 = 0$, $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface* Φ *de Segre non parabolique dont les deux systèmes de caractéristiques sont représentés dans le plan* π *par les points* $\bar{d}_2$ *et* $\bar{d}_3$; (y_{12}) *est une surface réglée dont l'espace osculateur est l'*S_3 *déterminé par les points* y_{12}, d_1y_{12}, $\bar{d}_3y_{12}$, $\bar{d}_3\bar{d}_3y_{12}$ *et dont les génératrices rectilignes sont représentées dans le plan* π *par le point* d_1.

De plus, dans les conditions envisagées ici ($\mathcal{M}_1 = Q_{12} = \bar{\mathcal{J}}_2 = 0$), on vérifie que

$$
\text{3-91}\quad\left\{\begin{array}{l}
\bar{d}_2y_{12} = \lambda_{12}y_{12},\\
d_1d_1y_{12} = j_{111}d_1y_{12} + j_{110}y_{12},\\
\bar{d}_3d_1y_{12} = j_{313}\bar{d}_3y_{12} + j_{311}d_1y_{12} + j_{310}y_{12},
\end{array}\right.
$$

où l'on n'a pas calculé les j_{ikm}.

De ce système (3-91), on déduit des conditions d'intégrabilité parmi lesquelles nous ne retenons que les suivantes (qui proviennent des coefficients de $\bar{d}_3y_{12}$)

$$
\text{3-92}\quad\left\{\begin{array}{l}
\bar{d}_2(j_{313}) - d_1(\lambda_{12}) + j_{313}[(1;1,2)^{-} - (1;2,1)^{-}] +\\
\lambda_{12}[(2;1,2)^{-} - (2;2,1)^{-}] = 0,\\
d_1(j_{313}) + j_{313}(j_{313} - j_{111}) - j_{110} = 0.
\end{array}\right.
$$

Ce système (3-91) nous suggère encore de considérer le point $z_{12} = d_1y_{12} - j_{313}y_{12}$ pour lequel on trouve les équations

$$
3\text{-}93 \begin{cases} z_{12} = d_1 y_{12} - j_{313} y_{12}, \\ d_1 z_{12} = (j_{111} - j_{313}) z_{12}, \\ \bar{d}_2 z_{12} = [\lambda_{12} + (1;2,1)^- - (1;1,2)^-] z_{12}, \\ \bar{d}_3 z_{12} = j_{311} z_{12} + y_{12}[-\bar{d}_3(j_{313}) + j_{310} + j_{311} j_{313}], \\ (\eta_1, z_{12}) = (\bar{d}_i \eta_1, z_{12}) = (\bar{d}_k \bar{d}_i \eta_1, z_{12}) = 0 \quad (i,k = 1,2,3). \end{cases}
$$

Par ailleurs, dans le cas considéré pour le moment ($\mathcal{M}_1 = Q_{12} = \bar{\mathcal{J}}_2 = 0$), les propriétés de la surface ($\mathring{\eta}_1$) et les équations (3-89) entraînent

$$\bar{d}_3 \bar{d}_2 \eta_1 = q_0 \eta_1 + q_2 \bar{d}_2 \eta_1 + q_3 \bar{d}_3 \eta_1,$$

où $q_3 = \bar{d}_2[\log(\rho_1 k_2 k_3 \mathcal{K}_1)] - \lambda_{12} + 2(3;3,2)^- - 2(3;2,3)^-$,

et où l'on n'a pas calculé les valeurs de q_0 et q_2.

Ces équations nous suggèrent maintenant de considérer l'hyperplan $\zeta_{12} = \bar{d}_2 \eta_1 - q_3 \eta_1$ pour lequel on vérifie que

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{12} = \bar{d}_2 \eta_1 - q_3 \eta_1, \\
&\bar{d}_3 \zeta_{12} = q_2 \zeta_{12} + \eta_1\{q_0 + q_2 q_3 - \bar{d}_3(q_3)\}, \\
&(y_{12}, \zeta_{12}) = (\bar{d}_i y_{12}, \zeta_{12}) = 0 \quad (i = 1,2,3), \\
&(\bar{d}_3 \bar{d}_3 y_{12}, \zeta_{12}) = (x, \zeta_{12}) = 0.
\end{aligned}
$$

Cet hyperplan ζ_{12} est donc complètement déterminé par les points x, y_{12}, $d_1 y_{12}$, $\bar{d}_3 y_{12}$, $\bar{d}_3 \bar{d}_3 y_{12}$ et reste donc fixe lorsque l'on varie dans la direction d_1. Par contre, $\bar{d}_2 \zeta_{12}$ est toujours distinct de ζ_{12}.

On peut donc compléter les propriétés du sous-cas $\bar{\mathcal{J}}_2 = 0$ par les propositions suivantes.

$\mathring{\zeta}_{12}$ est le transformé de Laplace dans le sens $\bar{d}_2$ de la surface ($\mathring{\eta}_1$). L'S_3 osculateur à (y_{12}) en son point générateur coïncide avec l'intersection des hyperplans ζ_{12} et $\bar{d}_2 \zeta_{12}$. $\mathring{z}_{12}$ coïncide avec l'hyperplan osculateur à ($\mathring{\eta}_1$) en son point générateur.

Or, il n'y a que deux cas possibles pour (z_{12}) : ou bien z_{12} est un point fixe, ou bien z_{12} décrit une courbe. De même, il n'y a que deux cas possibles pour ($\mathring{\zeta}_{12}$) : ou bien $\mathring{\zeta}_{12}$ décrit une courbe qui est une droite, ou bien $\mathring{\zeta}_{12}$ décrit une surface réglée dont les droites sont représentées dans le plan π par le point $\bar{d}_2$.

De ceci, on déduit donc que le sous-cas $\bar{\mathcal{J}}_2 = 0$ se subdivise de nouveau en quatre possibilités.

1) z_{12} *est fixe et* $\mathring{\zeta}_{12}$ *décrit une droite. Dans ce cas,* (y_{12}) *est un cône de sommet* z_{12} *situé entièrement dans l'*S_3 *fixe déterminé par le dual de la droite décrite par* $\mathring{\zeta}_{12}$ (c'est-à-dire l'S_3 déterminé par les hyperplans ζ_{12} et $\overline{d}_2\zeta_{12}$) ; $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface* Φ *non parabolique située entièrement dans un hyperplan fixe qui coïncide avec* $\mathring{z}_{12}$, *son transformé de Laplace dans le sens* $\overline{d}_2$ *ne décrit qu'une droite.*

2) z_{12} *est fixe et* $\mathring{\zeta}_{12}$ *décrit une surface. Dans ce cas,* (y_{12}) *est un cône de sommet* z_{12}, *son* S_3 *osculateur est déterminé par l'intersection des hyperplans* ζ_{12} *et* $\overline{d}_2\zeta_{12}$ *et ne décrit qu'une famille à un paramètre essentiel* (il reste fixe lorsque l'on varie dans les directions d_1 et $\overline{d}_2$) ; $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface* Φ *non parabolique située entièrement dans un hyperplan fixe qui coïncide avec* $\mathring{z}_{12}$.

3) z_{12} *décrit une courbe et* $\mathring{\zeta}_{12}$ *décrit une droite. Dans ce cas,* (y_{12}) *est le lieu des tangentes à la courbe* (z_{12}) *et est située entièrement dans l'*S_3 *fixe déterminé par le dual de la droite décrite par* $\mathring{\zeta}_{12}$; $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface* Φ *non parbolique, son hyperplan osculateur coïncide avec* $\mathring{z}_{12}$ *et ne décrit donc qu'une famille à un paramètre essentiel, son transformé de Laplace dans le sens* $\overline{d}_2$ *ne décrit qu'une droite.*

4) z_{12} *décrit une courbe et* $\mathring{\zeta}_{12}$ *décrit une surface. Dans ce cas,* (y_{12}) *est le lieu des tangentes à la courbe* (z_{12}), *son* S_3 *osculateur coïncide avec l'intersection des hyperplans* ζ_{12} *et* $\overline{d}_2\zeta_{12}$ *et ne décrit donc qu'une famille à un paramètre essentiel* ; $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface* Φ *non parabolique, son hyperplan osculateur coïncide avec* $\mathring{z}_{12}$ *et ne décrit donc qu'une famille à un paramètre essentiel.*

5. Complément à quelques résultats de E. G. Togliatti.

Dans le numéro suivant, nous déduirons certains de nos résultats de propriétés (que nous devrons parfois compléter) déjà trouvées par E. G. Togliatti pour deux types de V_3 de S_5 [10].

Il s'agit d'abord des V_3 de S_5 du type (4). E. G. Togliatti a démontré : « *une* V_3 *de* S_5 *qui possède un système quadruple d'asymptotiques est, ou bien le lieu de* ∞^1 *réglées développables situées dans les* S_3 1-*caractéristiques de* ∞^1 S_4, *ou bien le lieu des* C^2 *focales sur les* *plans* 1-*caractéristiques de* ∞^2 S_4 ; *les asymptotiques sont dans le premier cas les génératrices rectilignes et dans l'autre les* C^2 *focales* ».

Il s'agit ensuite des V_3 de S_5 dont le faisceau de coniques associé est formé de coniques dégénérées en deux droites d'un faisceau de droites. Désignons par Y le point générateur d'une telle V_3, par (Γ^Y) le faisceau de coniques associé, par D_1 l'unique point-base de (Γ^Y), par Δ_2 et Δ_3 les deux droites de π données par les deux coniques de (Γ^Y) dégénérées en deux droites confondues, par ψ_2 et ψ_3 les deux hyperplans tangents tels que la conique $\Gamma^Y_{\psi_k}$ $(k = 2{,}3)$ dégénère en deux droites confondues avec Δ_k. Désignons encore par (C_1) le système de courbes de (Y) qui est représenté dans π par D_1 et par (C_k) $(k = 2{,}3)$ celui qui est représenté dans π par D_k (point quelconque de Δ_k distinct toutefois de D_1).

Compte tenu des résultats de E. G. Togliatti, on peut démontrer : *les courbes* C_1 *sont des droites* ; *les droites* Δ_2 *et* Δ_3 *du plan* π *représentent des différentielles totales exactes* ; *le double système* (C_1, C_k) $(k = 2{,}3)$ *est, sur la* $V_3(Y)$, *un double système conjugué de première espèce et en involution* ; $(\mathring{\psi}_k)$ $(k = 2{,}3)$ *peut parfois se réduire à une courbe, mais est généralement une surface* Φ *non parabolique dont les caractéristiques sont représentées dans* π *par* D_2 *et* D_3.

Si l'on désigne par Z_k le point générateur de la variété transformée de (Y) par l'intermédiaire du double système $(C_1, C_k)(k{=}2{,}3)$ on peut encore démontrer : Z_k *est indépendant du choix de* D_k *sur la droite* Δ_k ; Z_k *reste toujours fixe lorsque l'on varie dans la direction* D_1 ; *lorsque* $\mathring{\psi}_j$ $(j \neq k)$ *décrit une surface,* $\mathring{Z}_k$ *coïncide avec son hyperplan osculateur*.

De plus, il n'y a que les trois configurations suivantes qui soient possibles pour les variétés (Z_2) et (Z_3).

Ou bien $Z_k(k = 2$ *ou* $3)$ *est un point fixe. Dans ce cas,* Z_j $(j \neq k)$ *est également un point fixe et coïncide avec* Z_k.

Ou bien Z_2 *et* Z_3 *décrivent des courbes. Dans ce cas,* Z_k $(k = 2{,}3)$ *reste fixe lorsque l'on varie dans les directions* D_1 *et* D_k.

Ou bien au moins un des deux points décrit une surface effective (soit Z_k, $k = 2$ ou 3). *Dans ce cas,* Z_k *décrit une surface* Φ *non* *parabolique dont les caractéristiques sont représentées dans* π *par* D_2 *et* D_3 *et* Z_j $(j \neq k)$ *est le point générateur du transformé de Laplace de* (Z_k) *dans le sens* D_k (Z_j peut donc décrire une courbe ou une surface du type de (Z_k).)

A ces configurations des variétés (Z_2) et (Z_3) correspondent les sous-cas suivants de la $V_3(Y)$.

1) Z_2 *et* Z_3 *sont des points fixes. Dans ce cas,* (Y) *est un cône de sommet* Z_2 (qui coïncide avec Z_3) ; *si* $\mathring{\psi}_k$ $(k = 2,3)$ *décrit effectivement une surface, son hyperplan osculateur coïncide avec* $\mathring{Z}_2$ *et* $(\mathring{\psi}_k)$ *est donc une surface située entièrement dans un hyperplan fixe.*

2) Z_2 *et* Z_3 *décrivent des courbes. Dans ce cas,* (Y) *est le lieu des* ∞^2 *droites qui s'appuient sur les courbes* (Z_2) *et* (Z_3) ; *si* $\mathring{\psi}_k (k = 2,3)$ *décrit effectivement une surface, son hyperplan osculateur coïncide avec* $\mathring{Z}_j$ $(j \neq k)$ *et ne décrit donc qu'une famille à un paramètre essentiel.*

3) Z_k $(k = 2$ *ou* $3)$ *décrit une surface. Dans ce cas,* (Y) *est le lieu des tangentes aux caractéristiques de* (Z_k) *représentées dans* π *par* D_k ; *si* $\mathring{\psi}_j$ $(j \neq k)$ *décrit une surface effective, son hyperplan osculateur coïncide avec* $\mathring{Z}_k$ *et décrit donc une famille à deux paramètres essentiels. Dans ce troisième cas,* Z_j $(j \neq k)$ *peut décrire une courbe ou une surface. Lorsque* Z_j *décrit une courbe, les génératrices rectilignes de* (Y) *s'appuient sur cette courbe* ; *lorsque* Z_j *décrit une surface, les génératrices rectilignes de* (Y) *sont également tangentes aux caractéristiques de* (Z_j) *représentées dans* π *par* D_j.

6. Cas $\mathscr{M}_1 = 0$ et $Q_{12} \neq 0$.

Dans ce cas, y_{12} décrit effectivement une V_3 et les hyperplans η_1 et $\bar{d}_2\eta_1$ sont tangents à cette V_3 en son point générateur. De (3-89), on déduit que

$$\text{3-94}\begin{cases} \Gamma^{y_{12}}_{\eta_1} \text{ a pour équation } (\bar{t}_3)^2 = 0, \\ \Gamma^{y_{12}}_{\bar{d}_2\eta_1} \text{ a pour équation } 8\rho_1 k_2 k_3 \mathscr{K}_1 \mathscr{J}_2 \bar{t}_1 \bar{t}_3 - 4\rho_1 k_2 k_3 m'_2 m'_3 Q_{12} (\bar{t}_2)^2 \\ \qquad + (\bar{d}_2\eta_1, \bar{d}_3\bar{d}_3 y_{12}) (\bar{t}_3)^2 = 0. \end{cases}$$

Si l'on remarque que la première équation de (3-90) est encore vérifiée dans ce cas-ci, on trouve immédiatement que ce cas se subdivise en deux sous-cas.

a) *Lorsque* $\overline{\mathscr{I}}_2 \neq 0$, $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface de* S_5 *qui n'est pas* Φ *de Segre* ; y_{12} *décrit une* V_3 *de* S_5 *du type* (4) *dont l'unique système d'asymptotiques est représenté dans* π *par* d_1 *et dont l'unique conique dégénérée a pour équation* $(\bar{t}_3)^2 = 0$.

Puisqu'on vérifie très facilement que les asymptotiques de (y_{12}) *ne sont jamais des droites*, on déduit du numéro précédent que (y_{12}) *est le lieu des* C^2 *focales sur les plans* 1-*caractéristiques des* ∞^2 S_4 *engendrés par* η_1 *et ces* C^2 *focales sont les asymptotiques quadruples de* (y_{12}).

b) *Lorsque* $\overline{\mathscr{I}}_2 = 0$, $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface* Φ *de Segre non parabolique dont les deux systèmes de caractéristiques sont représentés dans* π *par* $\bar{d}_2$ *et* $\bar{d}_3$; (y_{12}) *est une* V_3 *du type de la* $V_3(Y)$ *considérée au numéro précédent.*

Le point d_1 joue ici le rôle du point D_1 du numéro précédent ; la droite $(d_1\text{-}\bar{d}_k)$ $(k = 2,3)$ joue celui de la droite Δ_k ($\bar{d}_k$ est donc un point du type de D_k) ; l'hyperplan η_1 joue celui de l'hyperplan ψ_2 ; l'hyperplan $\bar{d}_2\eta_1 + \tau\eta_1$ où τ est défini par $(\bar{d}_2\eta_1, \bar{d}_3\bar{d}_3 y_{12}) + \tau(\eta_1, \bar{d}_3\bar{d}_3 y_{12}) = 0$ joue celui de l'hyperplan ψ_3. Finalement, le rôle du point Z_k du numéro précédent est joué ici par le point z_k défini par

$$\left\{\begin{aligned} z_2 &= d_1 y_{12} - \tau_2 y_{12},\\ z_3 &= d_1 y_{12} - \tau_3 y_{12},\end{aligned}\right.$$

3-95 où

$$\left\{\begin{aligned} \tau_2 &= d_1[\log(Q_{12})] - \theta_{12} + (2;2,1)^- - (2;1,2)^-,\\ \tau_3 &= d_1[\log(\theta_{12} - \theta_{13})] - \theta_{13}.\end{aligned}\right.$$

En conséquence, on déduit du numéro précédent que ce sous-cas $\overline{\mathscr{I}}_2 = 0$ se subdivise de nouveau en quatre possibilités.

1) z_2 *et* z_3 *sont des points fixes* (cela a lieu si et seulement si $\tau_2 = \tau_3$). *Dans ce cas,* z_2 *coïncide avec* z_3 ; (y_{12}) *est un cône de sommet* z_3 ; $(\mathring{\eta}_1)$ *est une surface située entièrement dans l'hyperplan fixe* z_3.

2) z_2 *et* z_3 *décrivent des courbes. Dans ce cas,* $d_1 z_k$ *et* $\overline{d}_k z_k (k=2,3)$ *coïncident géométriquement avec* z_k ; (y_{12}) *est le lieu des* ∞^2 *droites qui s'appuient sur les courbes* (z_2) *et* (z_3) ; *l'hyperplan osculateur à* $(\mathring{\eta}_1)$ *en son point générateur coïncide avec* $\mathring{z}_3$ *et ne décrit donc qu'une famille à un paramètre essentiel.*

3) z_2 *décrit une surface et* z_3 *décrit une courbe. Dans ce cas,* $d_1 z_3$ *et* $\overline{d}_3 z_3$ *coïncident géométriquement avec* z_3 ; $d_1 z_2$ *coïncide géométriquement avec* z_2 ; (z_2) *est une surface* Φ *non parabolique dont les caractéristiques sont représentées dans* π *par* $\overline{d}_2$ *et* $\overline{d}_3$; z_3 *est le transformé de Laplace de* (z_2) *dans le sens* $\overline{d}_2$; (y_{12}) *est le lieu des tangentes aux caractéristiques de* (z_2) *représentées dans* π *par* $\overline{d}_2$ *et ses génératrices rectilignes s'appuient sur la courbe* (z_3) ; *l'hyperplan osculateur à* $(\mathring{\eta}_1)$ *en son point générateur coïncide avec* $\mathring{z}_3$ *et ne décrit donc qu'une famille à un paramètı e essentiel.*

4) z_3 *décrit une surface. Dans ce cas,* $d_1 z_3$ *coïncide géométriquement avec* z_3 ; (z_3) *est une surface* Φ *de Segre non parabolique dont les caractéristiques sont représentées dans* π *par* $\overline{d}_2$ *et* $\overline{d}_3$; z_2 *est le transformé de Laplace de* (z_3) *dans le sens* $\overline{d}_3$ *et décrit donc une courbe ou une surface du type de* (z_3) ; (y_{12}) *est le lieu des tangentes aux caractéristiques de* (z_3) *représentées dans* π *par* $\overline{d}_3$; *l'hyperplan osculateur à* $(\mathring{\eta}_1)$ *en son point générateur coïncide avec* $\mathring{z}_3$ *et décrit donc une famille à deux paramètres essentiels.*

7. Cas $\mathscr{M}_1 \neq 0$.

De (3-27) et (3-34), on déduit ici que *le point* $\mathring{\eta}_1$ *décrit une* V_3 *du type* (1,1,1,1) *dont les systèmes de lignes principales sont représentés dans le plan* π *par les points* $d_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3$ *et dont les hyperplans bitangents correspondants sont respectivement les hyperplans* $\mathring{x}, \mathring{y}_{12}$ *et* $\mathring{y}_{13}$.

Les coordonnées de η_1 vérifient donc un système d'équations aux dérivées partielles du type du système (2-5). On obtient de cette façon

$$
\text{3-96} \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{d}_1 * \overline{d}_2 \eta_1 &= \overline{A}_3 \eta_1 + \overline{B}_3 \overline{d}_1 \eta_1 + \overline{E}_3 \overline{d}_2 \eta_1 + \overline{F}_3 \overline{d}_3 \eta_1, \\ \overline{d}_1 * \overline{d}_3 \eta_1 &= \overline{A}_2 \eta_1 + \overline{B}_2 \overline{d}_1 \eta_1 + \overline{E}_2 \overline{d}_2 \eta_1 + \overline{F}_2 \overline{d}_3 \eta_1, \end{aligned} \right.
$$

$$
\text{3-96 suite}\left\{\begin{aligned}
&d_2 * \bar{d}_3\eta_1 = \bar{A}_1\eta_1 + \bar{B}_1\bar{d}_1\eta_1 + \bar{E}_1\bar{d}_2\eta_1 + \bar{F}_1\bar{d}_3\eta_1,\\
&\bar{K}_1\bar{d}_1\bar{d}_1\eta_1+\bar{K}_2\bar{d}_2\bar{d}_2\eta_1+\bar{K}_3\bar{d}_3\bar{d}_3\eta_1 = \bar{A}\eta_1 + \bar{\bar{B}}\bar{d}_1\eta_1 + \bar{\bar{E}}\bar{d}_2\eta_1 + \bar{\bar{F}}\bar{d}_3\eta_1.
\end{aligned}\right.
$$

Puisque (3-83) donne les valeurs des $(i;j,k)^{-}$, il suffit théoriquement de connaître les expressions des coefficients qui interviennent dans ce système (3-96) pour pouvoir dire que le cas envisagé ici est étudié. En effet, lorsque ces coefficients seront connus, il suffira d'appliquer à la $V_3(\mathring{\eta}_1)$ toute la théorie qui précède pour obtenir les différents cas possibles pour $(\mathring{\eta}_1)$ et les variétés décrites par les points y_{12} et y_{13}.

Pour calculer ces coefficients de (3-96), il suffit par exemple de passer dans le plan π de la base d_1, d_2, d_3 à la base $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$. Compte tenu de (1-27), (3-21), (3-22) et (3-81), on obtient ainsi

$$
\text{3-97}\left\{\begin{aligned}
&\bar{A}_3 = m_2A_3 + m_3A_2, \qquad \bar{B}_3 = m_2B_3 + m_3B_2,\\
&(m_2n_3 - m_3n_2)\bar{\bar{E}}_3 = n_3(m_2E_3+m_3E_2) - n_2(m_2F_3+m_3F_2),\\
&(m_2n_3 - m_3n_2)\bar{\bar{F}}_3 = - m_3(m_2E_3+m_3E_2) + m_2(m_2F_3+m_3F_2),\\
&\bar{A}_2 = n_2A_3 + n_3A_2, \qquad \bar{B}_2 = n_2B_3 + n_3B_2,\\
&(m_2n_3 - m_3n_2)\bar{\bar{E}}_2 = - n_2(n_2F_3+n_3F_2) + n_3(n_2E_3+n_3E_2),\\
&(m_2n_3 - m_3n_2)\bar{\bar{F}}_2 = + m_2(n_2F_3+n_3F_2) - m_3(n_2E_3+n_3E_2),\\
&\bar{A}_1 = 4\sqrt{k_2k_3}\,\{\mathscr{H}_1A_1 - \frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\,A\},\\
&\bar{B}_1 = 4\sqrt{k_2k_3}\{\mathscr{H}_1B_1 - \frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\,[B - k_2(1;2,2) - k_3(1;3,3)]\},\\
&m'_2m'_3\bar{\bar{E}}_1 = n_3\{\mathscr{H}_1E_1 - \frac{\mathscr{I}_1}{k_1}[E - k_2(2;2,2) - k_3(2;3,3)]\}\\
&\qquad - n_2\{\mathscr{H}_1F_1 - \frac{\mathscr{I}_1}{k_1}[F - k_2(3;2,2) - k_3(3;3,3)]\},\\
&m'_2m'_3\bar{\bar{F}}_1 = - m_3\{\mathscr{H}_1E_1 - \frac{\mathscr{I}_1}{k_1}[E - k_2(2;2,2) - k_3(2;3,3)]\}\\
&\qquad + m_2\{\mathscr{H}_1F_1 - \frac{\mathscr{I}_1}{k_1}[F - k_2(3;2,2) - k_3(3;3,3)]\},\\
&\bar{K}_2 = \bar{K}_3 = 1,\ \ \bar{K}_1 = - \frac{4k_1\mathscr{K}_1}{\mathscr{M}_1},
\end{aligned}\right.
$$

3-97 suite

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{A}} = 4\mathscr{H}_1\mathrm{A} - 16k_2k_3\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}\mathrm{A}_1,\\
&\overline{\mathrm{B}} = 4\mathscr{H}_1\mathrm{B} - 8k_2k_3\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}[2\mathrm{B}_1+(1;2,3)+(1;3,2)],\\
&(m_2n_3-m_3n_2)\overline{\mathrm{E}} = n_3\Big\{ m_2d_2(m_2) + m_3d_3(m_2) + n_2d_2(n_2) + n_3d_3(n_2) +\\
&\qquad 4\mathscr{H}_1\mathrm{E} - 8k_2k_3\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}[2\mathrm{E}_1+(2;2,3)+(2;3,2)]\Big\}\\
&\qquad -n_2\Big\{ m_2d_2(m_3) + m_3d_3(m_3) + n_2d_2(n_3) + n_3d_3(n_3) +\\
&\qquad 4\mathscr{H}_1\mathrm{F} - 8k_2k_3\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}[2\mathrm{F}_1+(3;2,3)+(3;3,2)]\Big\},\\
&(m_2n_3-m_3n_2)\overline{\mathrm{F}} = -m_3\Big\{ m_2d_2(m_2) + m_3d_3(m_2) + n_2d_2(n_2) + n_3d_3(n_2)\\
&\qquad + 4\mathscr{H}_1\mathrm{E} - 8k_2k_3\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}[2\mathrm{E}_1+(2;2,3)+(2;3,2)]\Big\}\\
&\qquad + m_2\Big\{ m_2d_2(m_3) + m_3d_3(m_3) + n_2d_2(n_3) + n_3d_3(n_3) +\\
&\qquad 4\mathscr{H}_1\mathrm{F} - 8k_2k_3\frac{\mathscr{I}_1}{k_1}[2\mathrm{F} + (3;2,3)+(3;3,2)]\Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

A partir du système (2-5) et des $(i;j,k)$, nous avons introduit précédemment les expressions $\mathscr{I}_i, \mathscr{K}_i, \mathscr{H}_i, \mathscr{M}_i$, M_i, N_{ik}, $\mathscr{R}_i$, $\mathscr{S}_i$ etc. $(i,k = 1,2,3)$ qui sont au fond des invariants relatifs de la $\mathrm{V}_3(x)$ ou qui interviennent dans des systèmes invariants pour cette V_3. Pour la V_3 $(\mathring{\eta}_1)$, il existe également des expressions définies d'une manière analogue. Si nous les surmontons d'une barre pour les distinguer de celles relatives à (x), nous pouvons donc obtenir à partir de (3-82), (3-96) et (3-97) les valeurs de $\overline{\mathscr{I}}_i, \overline{\mathscr{K}}_i$, ... Si dans ces valeurs, on tient compte de (3-22), (3-26), (3-81) et d'équations du type de (3-85), on obtient finalement

3-98
$$
\left\{
\begin{aligned}
&\overline{\mathscr{I}}_1, \overline{\mathscr{I}}_2, \overline{\mathscr{I}}_3 \text{ sont déjà donnés par (3-84)},\\
&m_2'm_3'\overline{\mathscr{H}}_1 = \mathscr{H}_1\mathscr{M}_1,\\
&m_2'm_3'\overline{\mathrm{M}}_1 = \mathscr{H}_1\mathscr{M}_1 + \mathscr{K}_1,\\
&m_2'm_3'\overline{\mathscr{M}}_1 = \mathscr{K}_1,
\end{aligned}
\right.
$$

3-98 suite

$$\overline{\mathcal{K}}_1 = \mathcal{M}_1^2,$$

$$m'_2 m'_3 \overline{\mathcal{R}}_1 = \sqrt{k_2k_3}\left\{\mathcal{H}_1 - 2\sqrt{k_2k_3}\,\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\right\}\mathcal{R}_1,$$

$$m'_2 m'_3 \overline{\mathcal{S}}_1 = \sqrt{k_2k_3}\left\{\mathcal{H}_1 + 2\sqrt{k_2k_3}\,\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\right\}\mathcal{S}_1,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1\overline{\mathrm{M}}_2 = m_2\Big\{ & \mathcal{K}_1\mathrm{M}_2 - \mathcal{K}_1 d_2[\log(\mathcal{M}_1)] + \mathcal{H}_1 d_2(\mathcal{H}_1) - 4k_2k_3\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}d_2\left(\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\right)\\
& - 2k_2k_3\,\frac{\mathcal{J}_1^2}{k_1^2}\,d_2[\log(k_2k_3)] + 2k_3\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}d_3(\mathcal{H}_1) - 2k_3\mathcal{H}_1 d_3\left(\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\right)\\
& - \frac{k_3\mathcal{J}_1}{k_1}\,\mathcal{H}_1 d_3[\log(k_2k_3)]\Big\} +\\
m_3\Big\{ & -\mathcal{K}_1\mathrm{M}_3 - \mathcal{K}_1 d_3[\log(\mathcal{M}_1)] + \mathcal{H}_1 d_3(\mathcal{H}_1) - 4k_2k_3\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}d_3\left(\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\right)\\
& - 2k_2k_3\,\frac{\mathcal{J}_1^2}{k_1^2}\,d_3[\log(k_2k_3)] + 2k_2\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}d_2(\mathcal{H}_1) - 2k_2\mathcal{H}_1 d_2\left(\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\right)\\
& - \frac{k_2\mathcal{J}_1}{k_1}\,\mathcal{H}_1 d_2\,[\log(k_2k_3)]\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1\overline{\mathcal{H}}_2 = m_2\Big\{ & -\mathcal{K}_1 d_2[\log(\mathcal{M}_1)] + \mathcal{K}_1[\mathcal{M}_2 + (1;2,1) - (1;1,2)]\\
& + k_3\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}d_3(\mathcal{H}_1) - k_3\mathcal{H}_1 d_3\left(\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\right) - 2\mathrm{N}_{12}k_2k_3\,\frac{\mathcal{J}_1^2}{k_1^2}\\
& + \frac{k_3\mathcal{J}_1}{k_1}\mathcal{H}_1[2\mathrm{N}_{13} - d_3(\log(k_2k_3))]\Big\} +\\
m_3\Big\{ & -\mathcal{K}_1 d_3[\log(\mathcal{M}_1)] - \mathcal{K}_1[\mathcal{M}_3 + (1;1,3) - (1;3,1)]\\
& + k_2\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}d_2(\mathcal{H}_1) - k_2\mathcal{H}_1 d_2\left(\frac{\mathcal{J}_1}{k_1}\right) + 2\mathrm{N}_{13}k_2k_3\,\frac{\mathcal{J}_1^2}{k_1^2}\\
& - \frac{k_2\mathcal{J}_1}{k_1}\mathcal{H}_1[2\mathrm{N}_{12} + d_2(\log(k_2k_3))]\Big\},
\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{M}}_3$ s'obtient en remplaçant dans $\overline{\mathrm{M}}_2$ m_2 par $-n_2$ et m_3 par $-n_3$,

$\overline{\mathcal{H}}_3$ s'obtient en remplaçant dans $\overline{\mathcal{H}}_2$ m_2 par $-n_2$ et m_3 par $-n_3$,

$$\overline{\mathcal{M}}_k = \overline{\mathrm{M}}_k - \overline{\mathcal{H}}_k \quad (k = 2,3),$$

$$\overline{\mathscr{K}}_k = \overline{\mathscr{H}}_k^2 - 4\overline{K}_1\overline{K}_j\left(\frac{\overline{\mathscr{J}}_k}{\overline{\overline{K}}_k}\right)^2 \quad (j,k = 2,3 \text{ et } j \neq k),$$

$\overline{\mathscr{R}}_2, \overline{\mathscr{R}}_3, \overline{\mathscr{S}}_2, \overline{\mathscr{S}}_3$ sont donnés par des formules du type de (2-20),

$$\overline{N}_{21} = \frac{1}{4}d_1\left[\log\left(\frac{k_1^4\mathscr{K}_1^3\mathscr{M}_1^2}{k_2k_3}\right)\right] - \frac{b}{k_1} + e_3 + f_2 - \frac{1}{2}[(2;1,2)+(3;1,3)]$$

$$+ \frac{3}{2}[(2;2,1) + (3;3,1)] + \frac{1}{4m_2'm_3'}[3\mathscr{H}_1\mathscr{M}_1 - \mathscr{K}_1],$$

3-98 suite $\overline{N}_{31}$ s'obtient en multipliant $\overline{N}_{21}$ par -1 et en changeant dans le résultat m_2' en $-m_2'$,

$$\overline{N}_{11} = -\overline{N}_{21} - \overline{N}_{31} = \frac{1}{2}\overline{M}_1 - 2\overline{\mathscr{H}}_1,$$

$$\mathscr{K}_1\overline{N}_{12} = m_2\{-\mathscr{H}_1^2N_{12} - 4k_2k_3\frac{\mathscr{J}_1^2}{k_1^2}N_{12} + 4k_3\frac{\mathscr{J}_1}{k_1}\mathscr{H}_1N_{13}\} +$$

$$m_3\{+\mathscr{H}_1^2N_{13} + 4k_2k_3\frac{\mathscr{J}_1^2}{k_1^2}N_{13} - 4k_2\frac{\mathscr{J}_1}{k_1}\mathscr{H}_1N_{12}\},$$

$\overline{N}_{13}$ s'obtient en remplaçant dans $\overline{N}_{12}$ m_2 par $-n_2$ et m_3 *par* $-n_3$,

$$\overline{N}_{kk} = \frac{1}{2}\overline{M}_k - 2\overline{\mathscr{H}}_k \quad (k = 2,3),$$

$$\overline{N}_{32} = -\overline{N}_{12} - \overline{N}_{22},$$

$$\overline{N}_{23} = -\overline{N}_{13} - \overline{N}_{33}.$$

Comme nous l'avons déjà signalé, ces formules (3-83), (3-84), (3-96), (3-97), (3-98) et toute la théorie qui précède permettent de dire que le cas envisagé ici est étudié. A titre d'exemple, nous donnons les résultats suivants.

Lorsque $\overline{\mathscr{J}}_2 = \overline{\mathscr{H}}_2 = \overline{\mathscr{M}}_2 = 0$, (y_{12}) *est une surface non développable située dans l'*S_3 *fixe déterminé par le dual de la droite décrite par le transformé dans le sens* $\overline{d}_2$ *de la* $V_3(\mathring{\eta}_1)$; *les asymptotiques de* (y_{12}) *sont représentées dans le plan* π *par les deux points d'intersection de* $\gamma_{y_{12}}^{\eta_1}$ *avec la droite* $(\overline{d}_1\text{-}\overline{d}_3)$.

Lorsque $\overline{\mathscr{K}}_2 = \overline{\mathscr{M}}_2 = 0$ *et* $\overline{\mathscr{J}}_2\overline{\mathscr{H}}_2 \neq 0$, (y_{12}) *est une surface* Φ *de Segre parabolique ; l'unique système de caractéristiques de* (y_{12}) *est représenté dans le plan* π *par un des deux points d'intersection de* $\gamma_{y_{12}}^{\eta_1}$ *avec la droite* $(\overline{d}_1\text{-}\overline{d}_3)$.

Lorsque $\overline{\mathscr{K}}_2 \neq 0$ et $\overline{\mathscr{M}}_2 = \overline{\mathscr{F}}_2 = 0$ $\left(\overline{\mathscr{F}}_2 = \overline{\mathscr{K}}_2\left[\frac{\overline{\mathscr{J}}_3}{\overline{\overline{\mathrm{K}}}_3} - \frac{\overline{\mathscr{J}}_1}{\overline{\overline{\mathrm{K}}}_1}\right] + 2\frac{\overline{\mathscr{J}}_2}{\overline{\overline{\mathrm{K}}}_2}\bar{d}_2(\overline{\mathscr{H}}_2) - 2\overline{\mathscr{H}}_2\bar{d}_2\left(\frac{\overline{\mathscr{J}}_2}{\overline{\overline{\mathrm{K}}}_2}\right) - \overline{\mathscr{H}}_2\frac{\overline{\mathscr{J}}_2}{\overline{\overline{\mathrm{K}}}_2}\bar{d}_2\left[\log(\overline{\mathrm{K}}_1\overline{\mathrm{K}}_3)\right]\right)$, (y_{12}) *est une surface* Φ *de Segre non parabolique ; les systèmes de caractéristiques de cette surface sont représentés dans le plan* π *par les deux solutions de*

$$
(3\text{-}99)\quad \begin{cases} \bar{t}_2 = 0, \\ \dfrac{\overline{\mathrm{K}}_3\overline{\mathscr{J}}_2}{\overline{\overline{\mathrm{K}}}_2}(\bar{t}_1)^2 + \dfrac{\overline{\mathrm{K}}_1\overline{\mathscr{J}}_2}{\overline{\overline{\mathrm{K}}}_2}(\bar{t}_3)^2 + \overline{\mathscr{H}}_2\bar{t}_1\bar{t}_3 = 0, \end{cases}
$$

où $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, $\bar{t}_3$ sont les coordonnées courantes relatives à la base $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$, $\bar{d}_3$.

Lorsque $\overline{\mathscr{M}}_2 = 0$ *et* $\overline{\mathscr{F}}_2 \neq 0$, (y_{12}) *est une surface de* S_5 *qui n'est pas* Φ *de Segre.*

Lorsque $\overline{\mathscr{J}}_2 = \overline{\mathscr{H}}_2 = 0$ *et* $\overline{\mathscr{M}}_2 \neq 0$, (y_{12}) *est une* V_3 *de* S_5 *du type* (2,2) ; *les systèmes doubles d'asymptotiques de* (y_{12}) *sont représentés dans le plan* π *par les deux points de rencontre de* $\gamma_{y_{12}}^{\eta_1}$ *avec la droite* $(\bar{d}_1\text{-}\bar{d}_3)$; *les hyperplans bitangents à* (y_{12}) *en son point générateur coïncident avec l'hyperplan* η_1 *et le dual du transformé dans le sens* $\bar{d}_2$ *de la* $\mathrm{V}_3(\mathring{\eta}_1)$; *les lignes principales de* (y_{12}) *sont représentées dans le plan* π *par le point* $\bar{d}_2$ *et les points de la droite* $(\bar{d}_1\text{-}\bar{d}_3)$.

Lorsque $\overline{\mathscr{K}}_2 = 0$ *et* $\overline{\mathscr{J}}_2\overline{\mathscr{H}}_2\overline{\mathscr{M}}_2 \neq 0$, (y_{12}) *est une* V_3 *de* S_5 *du type* (2,1,1) ; *le système double d'asymptotiques de* (y_{12}) *est représenté dans le plan* π *par un des deux points de rencontre de* $\gamma_{y_{12}}^{\eta_1}$ *avec la droite* $(\bar{d}_1\text{-}\bar{d}_3)$ *et est également un système de lignes principales pour cette* V_3 ; *l'autre système de lignes principales de* (y_{12}) *est représenté dans le plan* π *par le point* $\bar{d}_2$; *les hyperplans bitangents à* (y_{12}) *en son point générateur coïncident avec l'hyperplan* η_1 *et le dual du transformé dans le sens* $\bar{d}_2$ *de la* V_3 $(\mathring{\eta}_1)$.

Lorsque $\overline{\mathscr{K}}_2\overline{\mathscr{M}}_2 \neq 0$, (y_{12}) *est une* V_3 *de* S_5 *du type* (1,1,1,1) ; *les hyperplans bitangents à* (y_{12}) *en son point générateur coïncident avec l'hyperplan* η_1 *et les deux hyperplans duaux des deux transformés dans le sens* $\bar{d}_2$ *de la* V_3 $(\mathring{\eta}_1)$; *les lignes principales de* (y_{12}) *sont représentées dans le plan* π *par le point* $\bar{d}_2$ *et les deux points solutions de* (3-99).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BOMPIANI, Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi, *Rendic. Circ. Mat. di Palermo*, 46, 1922, pp. 91-104.

[2] FUBINI-CECH, Geometria proiettiva differenziale, *Bologne, Zanichelli*, 1927, 2 volumes.

[3] C. GUICHARD, Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triples-orthogonaux, *Collection Scienta*, nº 25, 1905, 95 pp.

[4] O. ROZET, Recherches sur la géométrie projective réglée différentielle, *Mém. Soc. Roy. Sc. Liège*, 3e série, t. XX, 1935, 95 pages.

[5] O. ROZET, Sur certains systèmes points de Guichard et sur certains complexes de droites, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 1941, pp. 612-622.

[6] B. SEGRE, Les systèmes conjugués et autoconjugués d'espèce ν et leur transformation de Laplace, *Annales scientifiques de l'École Normale*, 3e série, 44, 1927, pp. 153-212.

[7] B. SEGRE, Les systèmes conjugués de deuxième espèce en involution ou grilles, *Annales de la faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, 1928, 20, pp. 1-46.

[8] C. SEGRE, Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziale di 2º ordine, *Atti R. Accad. delle Scienze di Torino*, 42, 1907, pp. 1047-1079.

[9] A. TERRACINI, Esposizione di alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale negli iperspazi, appendice III_A, pp. 729-769 du tome II de la référence [2] ci-dessus.

[10] E. G. TOGLIATTI, Sulle V_3 di S_5 con coincidenze di tangenti principali, *Atti del R. Ist. Veneto*, t. 87, 1927-28, pp. 1373-1421.

[11] J. VANGELDERE, Sur les V_3 de S_5 qui possèdent deux systèmes distincts d'asymptotiques doubles, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 30e année, 1961, pp. 110-126.

TABLE DES MATIÈRES