MÉMOIRES
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES
DE LIÈGE

SIXIÈME SÉRIE
TOME I
FASCICULE 1

RECHERCHES SUR LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DE CERTAINES VARIÉTÉS À QUATRE DIMENSIONS

par

J. NAVEZ
Docteur en Sciences

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE DE BELGIQUE,
DU PATRIMOINE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE ET
DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA CULTURE

SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ :
UNIVERSITÉ
15, AVENUE DES TILLEULS
B 4000 LIÈGE, BELGIQUE

RECHERCHES SUR LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DE CERTAINES VARIÉTÉS À QUATRE DIMENSIONS

PAR

J. NAVEZ
Docteur en Sciences

INTRODUCTION

Les travaux d'Einstein (1879-1955) basés sur ceux de Christoffel (1826-1866), Riemann (1829-1900) et Lie (1842-1899) et leurs nombreux développements ultérieurs consistent à ramener l'étude de certaines propriétés physiques de l'univers à l'étude des propriétés géométriques d'un espace non-euclidien à quatre dimensions.

On a ainsi construit des espaces appelés modèles d'univers ou modèles cosmologiques dont la structure géométrique était censée faire naître des propriétés physiques observées ou observables. La difficulté pour les cosmologistes consiste dans le fait que l'on n'a pas trouvé le modèle cosmologique absolu, celui dont les propriétés géométriques intrinsèques seraient à même d'expliquer tous les phénomènes physiques; autrement dit, la théorie unitaire, chère à Einstein, n'est pas encore mise sur pied; soit que l'on n'ait pas encore trouvé le modèle d'univers parfait, soit que l'outil employé ne soit pas encore suffisamment raffiné. Néanmoins, dans le cadre actuel, la théorie de la relativité générale reste un des outils les plus perfectionnés dont dispose le théoricien en vue de la connaissance de l'univers et on se trouve ainsi en présence de nombreux modèles cosmologiques répondant le mieux à des titres différents à certaines propriétés que l'on veut étudier.

Dans ce travail, nous avons étudié les propriétés géométriques intrinsèques d'un ensemble assez large de ces modèles et nous avons présenté ces propriétés de manière aussi systématique que possible.

Nous avons voulu donner un outil de travail au praticien en débarrassant une fois pour toutes l'étude physique proprement dite de ces modèles d'univers quadridimensionnels d'un arsenal mathématique assez lourd et en lui donnant le maximum de propriétés intrinsèques qui réciproquement lui permettront de choisir un modèle particulièrement bien adapté à l'étude qu'il veut entreprendre.

Dans le premier chapitre, nous avons cité sans démonstration, les critères de classification des variétés riemanniennes, nous renvoyons le lecteur aux manuels classiques traitant la question pour obtenir de plus amples informations.

Dans le second chapitre, nous exposons le genre des modèles considérés. Étant donné une variété riemannienne V_4, à connexion de Levi-Civita, ayant une métrique de type hyperbolique normal (signature - - - +), dont les coordonnées locales généralisées sont x^1, x^2, x^3, x^4, nous avons imaginé qu'on pouvait lui imposer les conditions suivantes :

C. I. Les surfaces (V_2) $\{x^1 = c^{ste},\ x^4 = c^{ste}\}$ sont des surfaces à courbure de Gauss constante et à métrique définie.

C. II. Les surfaces (V_2) $\{x^2 = c^{ste},\ x^3 = c^{ste}\}$ sont totalement géodésiques dans la V_4.

Nous allons rechercher toutes les variétés riemanniennes à 4 dimensions de type hyperbolique normal qui satisfont aux conditions C I et C II et nous nous proposons ensuite d'en étudier les propriétés géométriques et de pouvoir ainsi en établir des classifications.

Au chapitre III, nous énumérons les symboles de Christoffel, les composantes des tenseurs de Riemann, de Ricci et de courbure conforme de ces modèles; enfin, nous déterminons lesquels sont pseudo-euclidiens et lesquels sont conformément plats.

Le chapitre IV étudie la notion géométrique qui à notre sens paraît la plus importante : la classe des modèles étudiés. Nous élargissons ainsi l'ensemble connu des variétés riemanniennes quadridimensionnelles de classe deux.

Le chapitre V détermine de façon systématique tous les groupes de mouvements et les algèbres de Lie associées des espaces considérés.

Nous tenons à exprimer nos remerciements à Monsieur le Professeur O. Rozet pour toute l'aide qu'il a bien voulu nous apporter lors de la réalisation de ce travail.

CHAPITRE I

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Ayant en vue la classification de certaines V_4 d'après leurs propriétés géométriques intrinsèques nous allons ici passer en revue les critères d'après lesquels nous établirons notre classification.

Notre objectif n'est pas d'étudier d'une manière approfondie ces propriétés qui se trouvent dans la littérature classique [1], [2], [3], [8].

Nous nous plaçons exclusivement dans le cas des variétés riemanniennes à n dimensions dotées de la connexion de Levi-Civita et nous les notons V_n.

Pour abréger l'exposé nous nous contenterons de citer ci-dessous les critères de classification. Pour un exposé plus détaillé, nous prions le lecteur de bien vouloir consulter les ouvrages cités en référence.

Critères de classification (ou propriétés géométriques intrinsèques).

1) Espaces (proprement) euclidiens [1].

2) Espaces pseudo-euclidiens [1].

3) Espaces isotropes [1], [8].

Ce sont les espaces à courbure de Riemann constante. Voyez la définition de la courbure riemannienne et le théorème de Schur.

4) Espaces conformes [1].

Voyez la condition pour qu'une V_n puisse être représentée conformément sur un S_n et l'étude du tenseur de Weyl.

5) Classe d'un espace [1], [5], [8], [10].

La classe d'une V_n est au plus $\frac{n(n-1)}{2}$. Voyez les équations de Gauss, Godazzi, Ricci-Kühne (classe > 1) et les formules d'immersion.

Remarquez le théorème de Thomas.

6) Groupe de mouvements d'un espace de Riemann [8], [11], [12], [13].

Voyez les équations de Killing, la structure d'algèbre de Lie formée par les opérateurs X_h, les définitions de groupes transitifs et sous-groupes invariants. Retenez que le groupe complet de mouvements comporte au plus $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres. Remarquez les théorèmes d'Egorov et de Fubini.

CHAPITRE II

MODÈLES D'UNIVERS QUADRIDIMENSIONNELS PARTICULIERS

1. Généralités

La théorie d'Einstein de la Relativité Générale a conduit de nombreux mathématiciens et physiciens théoriciens à l'étude de modèles d'univers quadridimensionnels qui sont en fait des variétés riemanniennes.

Nous allons adopter ici les hypothèses de travail qui sont couramment employées par les utilisateurs de la théorie de la Relativité Générale [27], à savoir :

1) l'Univers U est une variété riemannienne à 4 dimensions dotée de la connexion de Levi-Civita;

2) la structure du champ riemannien est hyperbolique normale, c'est-à-dire la signature du tenseur $\|g\|$ est $(- - - +)$;

3) U est une variété de classe C^2;

4) le champ riemannien $[X \to g]$ est différentiable $(\forall X \in U)$;

5) les éléments du recueil $C^\infty(R^4)$ dont le jacobien est partout non nul sont des changeurs de carte de U.

On voit que ces axiomes ne définissent pas complètement le recueil $\mathscr{R}$ des changeurs de cartes de l'Univers U; on le suppose simplement compris entre le recueil $C^2(R^4)$ [axiome 3)] et le recueil des éléments de $C^\infty(R^4)$ de jacobien non nul [axiome 5)]. C'est l'étude physique du modèle qui doit permettre de préciser $\mathscr{R}$; ainsi l'étude de la gravitation demande que les éléments de $\mathscr{R}$ soient au moins 4 fois différentiables.

Certains auteurs imposent que la variété U soit de classe C^4.

Pour une discussion plus étendue des conditions de différentiabilité, nous renvoyons le lecteur au livre de M. J. M. Souriau [25], pp. 315 et [11].

Nous allons à présent considérer une classe de variétés riemanniennes à 4 dimensions, suffisamment large pour que la plupart des espaces temps considérés en Relativité Générale puissent y entrer et nous allons montrer comment l'étude des propriétés géométriques purement intrinsèques de ces modèles permet d'en établir des classifications.

Nous supposons les V_4 rapportées aux coordonnées généralisées x^1, x^2, x^3, x^4 et nous imposons les deux conditions suivantes :

condition C. I. : les sous-variétés (surfaces) $\{x^1 = c^{ste}; x^4 = c^{ste}\}$ sont des surfaces à courbure de Gauss constante et à métrique définie.

condition C. II. : les surfaces $\{x^2 = c^{ste}, x^3 = c^{ste}\}$ sont totalement géodésiques dans la V_4.

La première condition fait intervenir des notions vues dans le chapitre I puisque dans le cas d'une V_2 la courbure de Gauss s'exprime à l'aide de la seule composante distincte et non nulle du tenseur de Riemann [6].

La seconde condition fait intervenir des notions intéressantes dont nous n'avons pas encore parlé. Nous allons les résumer brièvement et montrer leur intérêt géométrique.

2. Sous-variétés totalement géodésiques

Il nous paraît utile ici de rappeler dans ses grandes lignes un bel article de E. Bompiani ([15] et [16]).

La notion de droite dans un espace euclidien trouve son extension naturelle dans un espace riemannien en la notion de ligne géodésique. Il n'en va pas de même pour la notion de plan, subordonnée à l'espace ambiant.

C'est Hadamard [23], le premier qui a posé la question de déterminer dans quelles variétés définies par leur métrique il existe une hypersurface telle que toutes ses géodésiques soient des géodésiques de la variété ambiante.

Une telle hypersurface est appelée totalement géodésique.

Aux recherches de Hadamard, nous ajouterons deux résultats fondamentaux de Ricci [25], [26]. Dans le second, il donne la condition pour qu'une V_m soit totalement géodésique dans une $V_n (n > m)$, le moyen de reconnaître si une V_n donnée possède une V_m totalement géodésique et le moyen de déterminer son existence.

Dans le cas n quelconque, le ds^2 d'une V_n ayant une famille d'∞^1 V_{n-1} totalement géodésiques peut se réduire au type :

$$ds^2 = d\sigma^2 + g_{nn}(dx^n)^2 \tag{2.1}$$

où $d\sigma$ est l'élément linéaire d'une V_{n-1} en les variables $x^1, \dots, x^{n-1}$ et où $g_{nn} = g_{nn}(x^1, \dots, x^n)$.

E. Bompiani a étendu ce résultat en montrant que l'élément linéaire ds d'une variété V_n ayant $\infty^{n-m} V_m$ totalement géodésiques pouvait se réduire à :

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{m} g_{ik} dx^i dx^k + \sum_{i,k=m+1}^{n} g_{ik} dx^i dx^k \tag{2.2}$$

où

$$g_{ik} = g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^m) \quad i, k \leqslant m,$$

$$g_{ik} = g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^k) \quad i, k > m$$

où une V_m considérée est obtenue en égalant à des constantes les $n - m$ dernières coordonnées et où $n \geqslant m + 1$.

Il faut remarquer que le résultat (2.2) a été obtenu par des considérations purement géométriques.

Parallèlement aux $\infty^{n-m} V_m$, Bompiani introduit $\infty^m V_{n-m}$ orthogonales aux premières; celles-ci sont obtenues dans (2.2) en égalant à des constantes les m premières coordonnées.

Particulièrement intéressant est le cas où les $\infty^m V_{n-m}$ orthogonales aux $\infty^{n-m} V_m$ sont totalement géodésiques. La forme typique que revêt le ds^2 dans cette hypothèse est

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{m} g_{ik}(x^1, \ldots, x^m) dx^i dx^k + \sum_{i,k=m+1}^{n} g_{ik}(x^{m+1}, \ldots, x^n) dx^i dx^k. \qquad (2.3)$$

Le calcul des symboles de Riemann pour cette forme est immédiat et on reconnaît tout de suite qu'ils sont tous nuls à l'exception de ceux dont les indices appartiennent à un même groupe (soit tous supérieurs à m, soit tous inférieurs à $m+1$) et de plus les symboles de ce type ont la même valeur qu'on les construise dans la V_n ambiante ou dans la V_m ou la V_{n-m} que les indices figurant dans le symbole amènent à considérer [15], [17].

D'après un résultat de Schouten [28] la classe d'un tel espace est au plus égale à $N = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. Applications des conditions C I et C II

En appliquant la condition C II vue au § 1 et en tenant compte de (2.2) la forme générale des V_4 considérées sera du type :

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{11}(x^1, x^4)(dx^1)^2 + 2g_{14}(x^1, x^4) dx^1 dx^4 + g_{44}(x^1, x^4)(dx^4)^2 \\ & + g_{22}(x^1, x^2, x^3, x^4)(dx^2)^2 + 2g_{23}(x^1, x^2, x^3, x^4) dx^2 dx^3 \\ & + g_{33}(x^1, x^2, x^3, x^4)(dx^3)^2. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Pour appliquer la condition C I nous subdivisons en 3 sous-cas :

{1} — la surface	est à	courbure	constante	positive
{2} —	«	«	«	négative
{3} —	«	«	«	nulle

et nous étudions successivement chacun de ces sous-cas.

1) *Étude du cas* {1}.

On peut considérer ce cas sous deux aspects différents : la surface à courbure totale constante positive peut être interprétée [18], [20], [21].

1) comme le plan de la géométrie elliptique,

2) comme une surface sphérique.

Ces deux interprétations sont équivalentes.

En tous cas, le fait que la surface ait sa courbure totale $K = +1$ (sans restrictions) implique que sa forme fondamentale soit

$$d\Sigma^2 = du^2 + \sin^2 u \, dv^2. \qquad (2.5)$$

Pour la démonstration de cette formule et les considérations sur les géométries non-euclidiennes nous renverrons au livre de M. Coxeter [21].

2) *Étude du cas* {2}.

Ici aussi deux interprétations sont possibles [21], [24].

1) Comme le plan de la géométrie hyperbolique.

2) Comme une surface à courbure constante négative.
Ces deux interprétations sont naturellement équivalentes mais il faut remarquer que l'on n'est pas parvenu à donner un modèle euclidien du plan hyperbolique; la pseudo-sphère donne un modèle d'une portion de plan hyperbolique mais pas de son ensemble.

La seule réalisation possible du plan hyperbolique serait l'analogue d'une sphère dans un espace pseudo-euclidien S_3 mais il n'est évidemment pas possible d'en donner une image [21].

De toutes façons, la métrique d'une surface à courbure constante négative $K = -1$ (sans restrictions) s'écrit :

$$d\Sigma^2 = du^2 + sh^2 u \, dv^2. \tag{2.6}$$

Démonstration : voir [21].

3) *Étude du cas* $\{3\}$.

Ici l'interprétation est très aisée [21] : on considère soit

1) le plan auclidien,

2) une surface développable,

et on peut toujours écrire la métrique sous la forme

$$d\Sigma^2 = du^2 + dv^2. \tag{2.7}$$

4. Forme générale de la métrique du type $\{1\}$

Puisque elle doit contenir la surface

$$d\Sigma^2 = (dx)^2 + \sin^2 x^2 \, (dx^3)^2$$

quand on fait $x^1 = x^4 = c^{ste}$, elle doit être de la forme :

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{14}dx^1dx^4 + g_{44}(dx^4)^2 + g_{22}\left[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 \, (dx^3)^2\right] \tag{2.8}$$

où les g_{ij} sont seulement fonction de x^1 et x^4.

D'autre part, en tenant compte que cette métrique doit être du type hyperbolique normal, on peut l'écrire :

$$ds^2 = -A(dx^1)^2 - B\left[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2\right] + C(dx^4)^2 + 2D \, dx^1dx^4 \tag{2.9}$$

avec $B > 0$, $AC + D^2 > 0$; A, B, C, D étant des fonctions de x^1 et x^4 seuls.

Nous pouvons montrer que (2.9) est le type le plus général de métrique possédant la symétrie sphérique sur les coordonnées $(x^1x^2x^3)$.

Nous appellerons r, θ, φ, t les coordonnées x^1, x^2, x^3, x^4 respectivement.

On peut alors rappeler des travaux sur la symétrie sphérique : [19], [7], [22] et [31].

La forme fondamentale s'écrit

$$[S] \; ds^2 = -A(r, t)dr^2 - B(r, t)\,(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + C(r, t)dt^2 + 2D(r, t)drdt \tag{2.10}$$

où $B > 0$, $AC + D^2 > 0$.

5. Forme générale de la métrique du type $\{2\}$

Il serait particulièrement agréable d'obtenir ici une propriété analogue à celle trouvée pour le type $\{1\}$ mais il est difficile de définir une symétrie «hyperbolique» dans un espace euclidien E_3 et à notre avis la transposition se ferait plus aisément en définissant l'analogue des rotations de E_3 dans un espace pseudo-euclidien S_3.

La forme générale de la métrique, compte tenu de (2.6) s'écrira ici

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{14}dx^1dx^4 + g_{44}(dx^4)^2 + g_{22}\left[(dx^2)^2 + sh^2\, x^2(dx^3)^2\right] \quad (2.11)$$

les g_{ij} étant fonctions de x^1 et x^4 seulement.

Par souci d'uniformisation, les coordonnées généralisées seront encore appelées r, θ, φ, t et la métrique s'écrira

$$[\mathrm{H}]\ ds^2 = -\mathrm{A}(r, t)dr^2 - \mathrm{B}(r, t)\,(d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\,\theta\, d\varphi^2) + \mathrm{C}(r, t)dt^2 + 2\mathrm{D}(r, t)drdt \quad (2.12)$$

où $\mathrm{AC} + \mathrm{D}^2 > 0$ et $\mathrm{B} > 0$ (structure hyperbolique normale).

6. Forme générale de la métrique du type $\{3\}$

Puisqu'elle doit contenir la surface (2.7) quand on fait $x^1 = c^{ste}$, $x^4 = c^{ste}$, elle est de la forme

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{14}(dx^1)\,(dx^4) + g_{44}(dx^4)^2 + g_{22}\left[(dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] \quad (2.13)$$

où les g_{ij} sont fonction uniquement de x^1 et x^4.

En lui donnant une structure hyperbolique normale, on l'écrit

$$ds^2 = -\mathrm{A}(dx^1)^2 + 2\mathrm{D}\, dx^1dx^4 + \mathrm{C}(dx^4)^2 - \mathrm{B}\left[(dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] \quad (2.14)$$

où $\mathrm{AC} + \mathrm{D}^2 > 0$ et $\mathrm{B} > 0$.

On peut montrer que ce modèle peut convenir pour représenter une symétrie axiale spatiale.

En appelant encore une fois r, θ, φ, t les coordonnées généralisées, la métrique s'écrit

$$[\mathrm{C}]\ ds^2 = -\mathrm{A}(r, t)dr^2 + 2\mathrm{D}(r, t)drdt + \mathrm{C}(r, t)dt^2 - \mathrm{B}(r, t)\,(d\theta^2 + d\varphi^2) \quad (2.15)$$

où $\mathrm{AC} + \mathrm{D}^2 > 0$ et $\mathrm{B} > 0$.

On peut rapprocher cette forme à celle étudiée par : [19], [22], [29], [30].

7. Transformations de coordonnées

Nous allons considérer dans la métrique [G] une transformation de coordonnées permise

$$\mathrm{T}\begin{cases}\bar{r} = \bar{r}(r, t)\\ \bar{t} = \bar{t}(r, t)\end{cases} \quad (2.16)$$

telle que $\dfrac{\partial(\bar{r}, \bar{t})}{\partial(r, t)} \neq 0$ et telle que la transformation inverse

$$\mathrm{T}^{-1}\begin{cases}r = r(\bar{r}, \bar{t})\\ t = t(\bar{r}, \bar{t})\end{cases} \quad (2.17)$$

existe et soit définie.

La transformation T^{-1} agissant sur [G] nous donne une nouvelle métrique

$$d\bar{s}^2 = -\bar{A}(\bar{r}, \bar{t})d\bar{r}^2 - \bar{B}(\bar{r}, \bar{t})\, d\Sigma^2 + \bar{C}(\bar{r}, \bar{t})d\bar{t}^2 + 2\bar{D}(\bar{r}, \bar{t})d\bar{r}d\bar{t} \tag{2.18}$$

Si nous posons $m = AC + D^2$, $\bar{m} = \overline{AC} + \bar{D}^2$

$$J = \frac{\partial(r, t)}{\partial(\bar{r}, \bar{t})} \quad (\neq 0)$$

on a

$$\bar{m} = J^2 m \tag{2.19}$$

et

$$\begin{aligned}
&\bar{B} = B\\
&\frac{\bar{C}}{\bar{m}} = \frac{1}{m}\left[C\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\right)^2 - A\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}\right)^2 - 2D\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}\right]\\
&\frac{\bar{A}}{\bar{m}} = \frac{1}{m}\left[-C\left(\frac{\partial\bar{t}}{\partial r}\right)^2 + A\left(\frac{\partial\bar{t}}{\partial t}\right)^2 + 2D\frac{\partial\bar{t}}{\partial t}\frac{\partial\bar{t}}{\partial r}\right]\\
&\frac{\bar{D}}{\bar{m}} = \frac{1}{m}\left[A\frac{\partial\bar{t}}{\partial t}\frac{\partial\bar{r}}{\partial t} - C\frac{\partial\bar{t}}{\partial r}\frac{\partial\bar{r}}{\partial r} + D\left(\frac{\partial\bar{t}}{\partial t}\frac{\partial\bar{r}}{\partial r} + \frac{\partial\bar{r}}{\partial t}\frac{\partial\bar{t}}{\partial r}\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

8. Forme réduite de la métrique [G]

Nous allons montrer que par un choix judicieux de coordonnées, toute métrique du type [G] peut être ramenée au type

[G_0]
$$ds^2 = -A(r, t)dr^2 - B(r, t)d\Sigma^2 + C(r, t)dt^2 \tag{2.21}$$
avec $A, B, C > 0$.

Il suffit de trouver une transformation T telle que (2.16) qui fait $\bar{D} = 0$. De (2.20) cette condition s'écrit

$$A\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}\frac{\partial\bar{t}}{\partial t} - C\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\frac{\partial\bar{t}}{\partial r} + D\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\frac{\partial\bar{t}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{r}}{\partial t}\frac{\partial\bar{t}}{\partial r}\right) = 0. \tag{2.22}$$

1) Si $C \neq 0$.

Posons $\bar{r} = r$, (4.33) devient

$$-C\frac{\partial\bar{t}}{\partial r} + D\frac{\partial\bar{t}}{\partial t} = 0. \tag{2.23}$$

Le jacobien de la transformation T : $\dfrac{\partial\,(\bar{r}, \bar{t})}{\partial\,(r, t)}$ est égal ici à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ \dfrac{\partial\bar{t}}{\partial r} & \dfrac{\partial\bar{t}}{\partial t}\end{pmatrix} = \frac{\partial\bar{t}}{\partial t}. \tag{2.24}$$

Il existe une solution de (2.23) telle que $\dfrac{\partial\bar{t}}{\partial t} \neq 0$.

2) Si $A \neq 0$.

Posons $\bar{t} = t$, (2.22) devient

$$A \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + D \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} = 0 \tag{2.25}$$

le jacobien de la transformation étant ici égal à

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} & \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} \tag{2.26}$$

et il existe une solution de (2.25) pour laquelle $\frac{\partial \bar{r}}{\partial r} \neq 0$.

3) Si $A = C = 0$.

La condition (2.22) sécrit

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial r}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\frac{\partial \bar{t}}{\partial r} = 0 \tag{2.27}$$

puisque l'on peut supposer $D \neq 0$, sinon le problème serait résolu.

On peut y satisfaire en prenant $\bar{r} = r + t$, $\bar{t} = r - t$, (2.28)
le jacobien s'écrivant alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

4) Il reste maintenant à voir si la nouvelle métrique est du type hyperbolique normal.

Le tenseur métrique $\| g \| =$

$$\left\| \begin{matrix} -\bar{A} & . & . & . \\ . & -\bar{B} & . & . \\ . & . & -\bar{B}\alpha & . \\ . & . & . & \bar{C} \end{matrix} \right\|, \quad \alpha = \sin^2\theta, \operatorname{sh}^2\theta \text{ ou } 1$$

puisque $\bar{B} = B$, il faut que $\bar{A}$ et $\bar{C}$ soient > 0, ou bien

a) $\bar{A} > 0$, $\bar{C} > 0$ ce qu'il fallait.

b) $\bar{A} < 0$, $C < 0$ on permute le rôle des coordonnées $\bar{r}$ et $\bar{t}$.

c) $\bar{A} > 0$, $\bar{C} < 0$ ce cas est impossible.

En effet en vertu de la formule (2.19) $\bar{m}$ et m sont du même signe.

Puisque m est positif, $\bar{m} = \overline{AC}$ est aussi positif.

9. Système canonique de coordonnées

1) *Supposons* $D \neq 0$.

Essayons de ramener la métrique à la forme

$$[G_1]\ ds^2 = -A(r,t)dr^2 - r^2\, d\Sigma^2 + C(r,t)dt^2 \quad A \text{ et } C > 0. \tag{2.29}$$

Cela suppose qu'il existe une transformation T subissant les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \bar{r} = \sqrt{\mathrm{B}} \text{ (rappelons que B est } > 0) \\ \overline{\mathrm{D}} = 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

Sans restrictions nous supposons que la métrique est mise sous la forme $[\mathrm{G}_{00}]$; (2.30) s'écrit alors (*)

$$\begin{cases} \bar{r} = \sqrt{\mathrm{B}} \\ \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial r}\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t}\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial r} = 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

soit
$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial r}\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}\frac{\partial \bar{t}}{\partial r} = 0. \tag{2.32}$$

a) $\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} \neq 0.$

Alors (2.32) possède une solution $\bar{t}(r, t)$ non-constante, le jacobien est $\neq 0$ et la métrique peut se mettre sous la forme (2.29).

b) $\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial r} = 0, \ \dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} \neq 0.$

Alors $\mathrm{B} = \mathrm{B}(t)$ et on ne peut pas ramener la métrique à une forme $[\mathrm{G}_1]$ par une transformation non-singulière. Cependant par une transformation non-singulière, on peut ramener la métrique à la forme

$$[\mathrm{G}_3] \ ds^2 = - \mathrm{A}(r, t)\, dr^2 - \mathrm{B}(t)\, d\Sigma^2 + \mathrm{C}(r, t) dt^2. \tag{2.33}$$
$$\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C} > 0.$$

En effet, cela impose les conditions suivantes (avec une métrique de type $[\mathrm{G}_{00}]$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial r}\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial t} + \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t}\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial r} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial r}\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial t} - \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t}\dfrac{\partial \bar{t}}{\partial r} \neq 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

ce qui peut toujours être réalisé en prenant par exemple

$$\begin{cases} \bar{r} = r + t \\ \bar{t} = r - t. \end{cases} \tag{2.35}$$

c) $\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial r} \neq 0, \ \dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} = 0.\ \mathrm{B} = \mathrm{B}(r)$

Ici non plus on ne peut ramener la métrique au type $[\mathrm{G}_1]$ mais on peut la ramener au type $[\mathrm{G}_3]$ par échange entre les variables r et t.

(*) En suivant le même procédé qu'au § 8, on peut montrer que la Forme $[\mathrm{G}_0]$ peut toujours être ramenée à la Forme :

$$[\mathrm{G}_{00}] \ ds^2 = 2\, \mathrm{D}(r, t)\, dr\, dt - \mathrm{B}(r, t)\, d\Sigma^2.$$

d) $\dfrac{\partial B}{\partial r} = \dfrac{\partial B}{\partial t} = 0.$

On ne peut pas ramener la métrique au type [G_1] mais on peut la ramener au type

$$[G_2]\ ds^2 = -A(r,t)dr^2 - B\,d\Sigma^2 + C(r,t)dt^2, \qquad A,\ B,\ C > 0,\ B = c^{ste}, \tag{2.36}$$

par une transformation du type (2.32).

2) *Si* D = 0.

On pose

$$\begin{cases} \bar{r} = \sqrt{B} \\ \bar{t} = t. \end{cases} \tag{2.37}$$

le jacobien

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\sqrt{B}}{\partial r} & \dfrac{\partial\sqrt{B}}{\partial t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial\sqrt{B}}{\partial r} \text{ est } \neq 0 \text{ pourvu que } \frac{\partial B}{\partial r} \neq 0.$$

a) $\dfrac{\partial B}{\partial r} \neq 0$: on aboutit au type [G_1]

b) $\dfrac{\partial B}{\partial r} = 0$: on aboutit au type [G_3].

3) *Ultime réduction du type* [G_3].

Nous allons montrer que la forme fondamentale (2.33) peut être ramenée au type

$$[G_3]\ ds^2 = -A(r,t)dr^2 - B(t)\,d\Sigma^2 + dt^2. \tag{2.38}$$

Cela postule l'existence d'une transformation T telle que

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{AC}\left[-C\left(\dfrac{\partial\bar{t}}{\partial r}\right)^2 + A\left(\dfrac{\partial\bar{t}}{\partial t}\right)^2\right] \\ A\,\dfrac{\partial\bar{t}}{\partial t}\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial t} - C\,\dfrac{\partial\bar{t}}{\partial r}\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial r} = 0 \end{cases} \tag{2.39}$$

avec $J \neq 0$.

La première équation (2.39) est une équation aux dérivées partielles en la fonction $\bar{t}$ qui admet une solution non-constante; en substituant cette solution dans la 2e équation (2.39), nous obtenons une solution $\bar{r}$ non constante et puisque A et C sont positifs, J est $\neq 0$.

4) *Conclusions.*

Les types de métriques à considérer sont donc

$$[G_1]\ ds^2 = -A(r,t)dr^2 - r^2\,d\Sigma^2 + C(r,t)dt^2,\ A > 0,\ C > 0$$
$$\rightarrow S_1, H_1, C_1 \text{ selon } d\Sigma^2$$

$$[G_2]\ ds^2 = -A(r,t)dr^2 - B\,d\Sigma^2 + C(r,t)dt^2,\ A > 0,\ C > 0,\ B = c^{ste} > 0$$
$$\rightarrow S_2, H_2, C_2 \text{ selon } d\Sigma^2$$

$$[G_2]\ ds^2 = -A(r,t)dr^2 - B(t)\,d\Sigma^2 + dt^2,\ A > 0,\ B > 0$$
$$\rightarrow S_3, H_3, C_3 \text{ selon } d\Sigma^2.$$

CHAPITRE III

SYMBOLES DE CHRISTOFFEL TENSEUR DE RIEMANN ET TENSEURS DÉRIVÉS ESPACES CONFORMÉMENT PLATS

Nous nous proposons dans ce bref chapitre d'établir des tables donnant les symboles de Christoffel, les composantes du tenseur de Riemann et des tenseurs dérivés pour tous les modèles S_i, H_i et C_i, $i = 1, 2, 3$.

1. Tables

Nous ne mentionnons pas les symboles nuls, ni ceux qui se déduisent de symboles donnés par les règles de symétrie habituelles.

Dès à présent nous notons $'$ les dérivées partielles par rapport à r et $\dot{}$ les dérivées partielles par rapport à t.

TABLE 1

$$S_1 : ds^2 = - A(r, t)dr^2 - r^2(d\theta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + C(r, t)dt^2$$

$$[11,1] = -\frac{A'}{2} \quad [11,4] = -[14,1] = \frac{\dot{A}}{2} \quad [12,2] \sin^2\theta = [13,3] = -r\sin^2\theta$$

$$[22,1]\sin^2\theta = [33,1] = r\sin^2\theta \quad [23,3] = -[33,2] = -r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$[14,4] = -[44,1] = \frac{C'}{2} \quad [44,4] = \frac{\dot{C}}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right\} = \frac{A'}{2A} \quad \left\{\begin{matrix}4\\11\end{matrix}\right\} = \frac{\dot{A}}{2C} \quad \left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}3\\13\end{matrix}\right\} = \frac{1}{r} \quad \left\{\begin{matrix}1\\14\end{matrix}\right\} = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \left\{\begin{matrix}4\\14\end{matrix}\right\} = \frac{C'}{2C}$$

$$\left\{\begin{matrix}1\\22\end{matrix}\right\}\sin^2\theta = \left\{\begin{matrix}1\\33\end{matrix}\right\} = \frac{-r}{A}\sin^2\theta \quad \left\{\begin{matrix}3\\23\end{matrix}\right\} = \operatorname{cotg}\theta \quad \left\{\begin{matrix}2\\33\end{matrix}\right\} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\left\{\begin{matrix}1\\44\end{matrix}\right\} = \frac{C'}{2A} \quad \left\{\begin{matrix}4\\44\end{matrix}\right\} = \frac{\dot{C}}{2C}$$

$$R_{1212} = -\frac{A'r}{2A} \quad R_{1224} = \frac{\dot{A}r}{2A} \quad R_{1313} = -\frac{A'r}{2A}\sin^2\theta \quad R_{1334} = \frac{\dot{A}r}{2A}\sin^2\theta$$

$$R_{1414} = \frac{1}{2}(\ddot{A} - C'') + \frac{1}{4C}(C'^2 - AC) + \frac{1}{4A}(A'C' - \dot{A}^2) \quad R_{2323} = r^2\left(\frac{1}{A} - 1\right)\sin^2\theta$$

$$R_{2424} = -\frac{rC'}{2A} \quad R_{3434} = -\frac{rC'}{2A}\sin^2\theta.$$

$$R_{11} = \frac{A'}{Ar} + \frac{1}{2C}(\ddot{A} - C'') + \frac{1}{4C^2}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) + \frac{1}{4AC}(A'C' - \dot{A}^2) \qquad R_{14} = \frac{\dot{A}}{Ar}$$

$$R_{22} = 1 - \frac{1}{A} + \frac{A'r}{2A^2} - \frac{C'r}{2AC} \qquad R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$$

$$R_{44} = \frac{C'}{Ar} - \frac{1}{2A}(\ddot{A} - C'') - \frac{1}{4AC}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) - \frac{1}{4A^2}(A'C' - \dot{A}^2)$$

TABLE 2

$$S_2 : ds^2 = -A(r, t)dr^2 - B(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + C(r, t)dt^2 \qquad B = c^{ste}$$

$$[11,1] = -\frac{A'}{2} \quad [11,4] = -[14,1] = \frac{\dot{A}}{2} \quad [14,4] = -[44,1] = \frac{C'}{2} \quad [44,4] = \frac{\dot{C}}{2}$$

$$[23,3] = -[33,2] = -B\sin\theta\cos\theta.$$

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{A'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 11} \right\} = \frac{\dot{A}}{2C} \quad \left\{ {1 \atop 14} \right\} = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 14} \right\} = \frac{C'}{2C} \quad \left\{ {1 \atop 44} \right\} = \frac{C'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 44} \right\} = \frac{\dot{C}}{2C}$$

$$\left\{ {3 \atop 23} \right\} = \operatorname{cotg}\theta \qquad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = -\sin\theta\cos\theta.$$

$$R_{1414} = \frac{1}{2}(\ddot{A} - C'') + \frac{1}{4A}(A'C' - \dot{A}^2) + \frac{1}{4C}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) \qquad R_{2323} = -B\sin^2\theta$$

$$R_{11} = \frac{1}{2C}(\ddot{A} - C'') + \frac{1}{4AC}(A'C' - \dot{A}^2) + \frac{1}{4C^2}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) \qquad R_{44} = -\frac{C}{A}R_{11}$$

$$R_{22} = 1 \qquad R_{33} = \sin^2\theta.$$

TABLE 3

$$S_3 : ds^2 = -A(r, t)dr^2 - B(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + dt^2$$

$$[11,1] = -\frac{A'}{2} \quad [11,4] = -[14,1] = \frac{\dot{A}}{2}$$

$$[22,4] = -[24,2] = \frac{\dot{B}}{2} \quad [23,3] = -[33,2] = -B\sin\theta\cos\theta \quad [33,4] = -[34,3] = \frac{\dot{B}}{2}\sin^2\theta$$

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{A'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 11} \right\} = \frac{\dot{A}}{2} \quad \left\{ {1 \atop 14} \right\} = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 22} \right\} = \frac{\dot{B}}{2} \quad \left\{ {2 \atop 24} \right\} = \frac{\dot{B}}{2B}$$

$$\left\{ {3 \atop 23} \right\} = \operatorname{cotg}\theta \quad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = -\sin\theta\cos\theta \quad \left\{ {4 \atop 33} \right\} = \frac{\dot{B}}{2}\sin^2\theta \quad \left\{ {3 \atop 34} \right\} = \frac{\dot{B}}{2B}$$

$$R_{1212} = -\frac{\dot{A}\dot{B}}{4} \quad R_{1313} = -\frac{\dot{A}\dot{B}}{4}\sin^2\theta \quad R_{1414} = \frac{1}{2}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right)$$

$$R_{2323} = -\left(B + \frac{\dot{B}^2}{4}\right)\sin^2\theta \quad R_{2424} = \frac{1}{2}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right) \quad R_{3434} = \frac{1}{2}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right)\sin^2\theta$$

$$R_{11} = \frac{\dot{A}\dot{B}}{2B} + \frac{1}{2}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right) \qquad R_{22} = 1 + \frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4A} \qquad R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$$

$$R_{44} = -\frac{1}{2A}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right) - \frac{1}{B}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right)$$

TABLE 4

$$H_1 : ds^2 = -A(r,t)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\,\theta d\varphi^2) + C(r,t)dt^2$$

$$[11,1] = -\frac{A'}{2} \quad [11,4] = -[14,1] = \frac{\dot A}{2} \quad [12,2] = -\frac{[13,3]}{\mathrm{sh}^2\,\theta} = -r \quad [14,4] = -[44,1] = \frac{C'}{2}$$

$$[22,1]\,\mathrm{sh}^2\,\theta = [33,1] = r\,\mathrm{sh}^2\,\theta \quad [23,3] = -[33,2] = -r^2\,\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta \quad [44,4] = \frac{\dot C}{2}$$

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{A'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 11} \right\} = \frac{\dot A}{2C} \quad \left\{ {2 \atop 12} \right\} = \left\{ {3 \atop 13} \right\} = \frac{1}{r} \quad \left\{ {1 \atop 14} \right\} = \frac{\dot A}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 14} \right\} = \frac{C'}{2C}$$

$$\left\{ {1 \atop 22} \right\}\mathrm{sh}^2\,\theta = \left\{ {1 \atop 33} \right\} = -\frac{r}{A}\,\mathrm{sh}^2\,\theta \quad \left\{ {3 \atop 23} \right\} = \coth\theta \quad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = -\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta \quad \left\{ {1 \atop 44} \right\} = \frac{C'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 44} \right\} = \frac{\dot C}{2C}$$

$$R_{1212} = -\frac{A'r}{2A} \quad R_{1224} = \frac{\dot A r}{2A} \quad R_{1313} = -\frac{A'r}{2A}\,\mathrm{sh}^2\,\theta \quad R_{1334} = \frac{\dot A r}{2A}\,\mathrm{sh}^2\,\theta$$

$$R_{1414} = \frac{1}{2}(\ddot A - C'') + \frac{1}{4C}(C'^2 - \dot A\dot C) + \frac{1}{4A}(A'C' - \dot A^2) \quad R_{2323} = r^2\left(1 + \frac{1}{A}\right)\mathrm{sh}^2\theta$$

$$R_{2424} = -\frac{rC'}{2A} \quad R_{3434} = -\frac{rC'}{2A}\,\mathrm{sh}^2\,\theta.$$

$$R_{11} = \frac{A'}{Ar} + \frac{1}{2C}(\ddot A - C'') + \frac{1}{4C^2}(C'^2 - \dot A\dot C) + \frac{1}{4AC}(A'C' - \dot A^2) \quad R_{14} = \frac{\dot A}{Ar}$$

$$R_{22} = \frac{A'r}{2A^2} - \frac{C'r}{2AC} - \left(1 + \frac{1}{A}\right) \quad R_{33} = R_{22}\,\mathrm{sh}^2\,\theta$$

$$R_{44} = \frac{C'}{Ar} - \frac{1}{2A}(\ddot A - C'') - \frac{1}{4AC}(C'^2 - \dot A\dot C) - \frac{1}{4A^2}(A'C' - \dot A^2)$$

TABLE 5

$$H_2 : ds^2 = -A(r,t) - B(d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\,\theta d\varphi^2) + C(r,t)dt^2 \quad B = c^{ste}$$

$$[11,1] = \frac{A'}{2} \quad [11,4] = -[14,1] = \frac{\dot A}{2} \quad [14,4] = -[44,1] = \frac{C'}{2} \quad [44,4] = \frac{\dot C}{2}$$

$$[23,2] = -[33,2] = -B\,\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta$$

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{A'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 11} \right\} = \frac{\dot A}{2C} \quad \left\{ {1 \atop 14} \right\} = \frac{\dot A}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 14} \right\} = \frac{C'}{2C} \quad \left\{ {1 \atop 44} \right\} = \frac{C'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 44} \right\} = \frac{\dot C}{2C}$$

$$\left\{ {3 \atop 23} \right\} = \coth\theta \quad \left\{ {2 \atop 33} \right\} = -\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta$$

$$R_{1414} = \frac{1}{2}(\ddot A - C'') + \frac{1}{4A}(A'C' - \dot A^2) + \frac{1}{4C}(C'^2 - \dot A\dot C) \quad R_{2323} = B\,\mathrm{sh}^2\,\theta$$

$$R_{11} = \frac{1}{2C}(\ddot A - C'') + \frac{1}{4AC}(A'C' - \dot A^2) + \frac{1}{4C^2}(C'^2 - \dot A\dot C) \quad R_{44} = -\frac{C}{A}R_{11}$$

$$R_{22} = -1 \quad R_{33} = -\mathrm{sh}^2\,\theta$$

TABLE 6

$$H_3 : ds^2 = -A(r,t)dr^2 - B(t)(d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\,\theta\, d\varphi^2) + dt^2$$

$$[11,1] = -\frac{A'}{2} \qquad [11,4] = -[14,1] = \frac{\dot{A}}{2}$$

$$[22,4] = -[24,2] = \frac{\dot{B}}{2} \quad [23,3] = -[33,2] = -B\,\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta \quad [33,4] = -[34,3] = \frac{\dot{B}}{2}\mathrm{sh}^2\,\theta$$

$$\begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix} = \frac{A'}{2A} \quad \begin{Bmatrix}4\\11\end{Bmatrix} = \frac{\dot{A}}{2} \quad \begin{Bmatrix}1\\14\end{Bmatrix} = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \begin{Bmatrix}4\\22\end{Bmatrix} = \frac{\dot{B}}{2} \quad \begin{Bmatrix}2\\24\end{Bmatrix} = \frac{\dot{B}}{2B}$$

$$\begin{Bmatrix}3\\23\end{Bmatrix} = \coth\theta \quad \begin{Bmatrix}2\\33\end{Bmatrix} = -\mathrm{sh}\,\theta\,\mathrm{ch}\,\theta \quad \begin{Bmatrix}4\\33\end{Bmatrix} = \frac{\dot{B}}{2}\mathrm{sh}^2\,\theta \quad \begin{Bmatrix}3\\34\end{Bmatrix} = \frac{\dot{B}}{2B}$$

$$R_{1212} = -\frac{\dot{A}\dot{B}}{4} \quad R_{1313} = -\frac{\dot{A}\dot{B}}{4}\mathrm{sh}^2\,\theta \quad R_{1414} = \frac{1}{2}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right)$$

$$R_{2323} = \left(B - \frac{\dot{B}^2}{4}\right)\mathrm{sh}^2\,\theta \quad R_{2424} = \frac{1}{2}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right) \quad R_{3434} = \frac{1}{2}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right)\mathrm{sh}^2\,\theta$$

$$R_{11} = \frac{\dot{A}\dot{B}}{2B} + \frac{1}{2}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right) \quad R_{22} = -1 + \frac{\ddot{B}}{2} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{4A} \quad R_{33} = R_{22}\ \mathrm{sh}^2\,\theta$$

$$R_{44} = -\frac{1}{2A}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right) - \frac{1}{B}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right)$$

TABLE 7

$$C_1 : ds^2 = -A(r,t)dr^2 - r^2(d\theta^2 + d\varphi^2) + C(r,t)dt^2$$

$$[11,1] = -\frac{A'}{2} \quad [11,4] = -[14,1] = \frac{\dot{A}}{2} \quad [12,2] = [13,3] = -r \quad [14,4] = [44,1] = \frac{C'}{2}$$

$$[22,1] = [33,1] = r \quad [44,4] = \frac{\dot{C}}{2}$$

$$\begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix} = \frac{A'}{2A} \quad \begin{Bmatrix}4\\11\end{Bmatrix} = \frac{\dot{A}}{2C} \quad \begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}3\\13\end{Bmatrix} = \frac{1}{r} \quad \begin{Bmatrix}1\\14\end{Bmatrix} = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \begin{Bmatrix}4\\14\end{Bmatrix} = \frac{C'}{2C}$$

$$\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\33\end{Bmatrix} = -\frac{r}{A} \quad \begin{Bmatrix}1\\44\end{Bmatrix} = \frac{C'}{2A} \quad \begin{Bmatrix}4\\44\end{Bmatrix} = \frac{\dot{C}}{2C}$$

$$R_{1212} = R_{1313} = -\frac{A'r}{2A} \quad R_{1224} = R_{1334} = \frac{\dot{A}r}{2A} \quad R_{2323} = \frac{r^2}{A}$$

$$R_{1414} = \frac{1}{2}(\ddot{A} - C'') + \frac{1}{4C}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) + \frac{1}{4A}(A'C' - \dot{A}^2) \quad R_{2424} = R_{3434} = -\frac{C'r}{2A}$$

$$R_{11} = \frac{A'}{Ar} + \frac{1}{2C}(\ddot{A} - C'') + \frac{1}{4C^2}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) + \frac{1}{4AC}(A'C' - \dot{A}^2) \quad R_{14} = \frac{\dot{A}}{Ar}$$

$$R_{22} = R_{33} = -\frac{1}{A} + \frac{A'r}{2A^2} - \frac{C'r}{2AC}$$

$$R_{44} = \frac{C'}{Ar} - \frac{1}{2A}(\ddot{A} - C'') - \frac{1}{4AC}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) - \frac{1}{4A^2}(A'C' - \dot{A}^2)$$

TABLE 8

$$C_2 : ds^2 = -A(r,t)dr^2 - B(d\theta^2 + d\varphi^2) + C(r,t)dt^2 \qquad B = c^{ste}$$

$$[11,1] = -\frac{A'}{2} \quad [11,4] = -[14,1] = \frac{\dot{A}}{2} \quad [14,4] = -[44,1] = \frac{C'}{2} \quad [44,4] = \frac{\dot{C}}{2}$$

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{A'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 11} \right\} = \frac{\dot{A}}{2C} \quad \left\{ {1 \atop 14} \right\} = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 14} \right\} = \frac{C'}{2C} \quad \left\{ {1 \atop 44} \right\} = \frac{C'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 44} \right\} = \frac{\dot{C}}{2C}$$

$$R_{1414} = \frac{1}{2}(\ddot{A} - C'') + \frac{1}{4A}(A'C' - \dot{A}^2) + \frac{1}{4C}(C'^2 - \dot{A}\dot{C})$$

$$R_{11} = \frac{1}{2C}(\ddot{A} - C'') + \frac{1}{4AC}(A'C' - \dot{A}^2) + \frac{1}{4C^2}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) \qquad R_{44} = -\frac{C}{A}R_{11}$$

TABLE 9

$$C_3 : ds^2 = -A(r,t)dr^2 - B(t)(d\theta^2 + d\varphi^2) + dt^2$$

$$[11,1] = -\frac{A'}{2} \quad [11,4] = -[14,1] = \frac{\dot{A}}{2}$$

$$[22,4] = -[24,2] = \frac{\dot{B}}{2} \quad [33,4] = -[34,3] = \frac{\dot{B}}{2}$$

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\} = \frac{A'}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 11} \right\} = \frac{\dot{A}}{2} \quad \left\{ {1 \atop 14} \right\} = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \left\{ {4 \atop 22} \right\} = \left\{ {4 \atop 33} \right\} = \frac{\dot{B}}{2} \quad \left\{ {2 \atop 24} \right\} = \left\{ {3 \atop 34} \right\} = \frac{\dot{B}}{2B}$$

$$R_{1212} = R_{1313} = -\frac{\dot{A}\dot{B}}{4} \quad R_{1414} = \frac{1}{2}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right) \quad R_{2323} = -\frac{\dot{B}^2}{4} \quad R_{2424} = R_{3434} = \frac{1}{2}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right)$$

$$R_{11} = \frac{\dot{A}\dot{B}}{2B} + \frac{1}{2}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right) \qquad R_{22} = R_{33} = \frac{\dot{A}\dot{B}}{4A} + \frac{\ddot{B}}{2}$$

$$R_{44} = -\frac{1}{2A}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right) - \frac{1}{B}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right)$$

2. Tenseur de courbure conforme

Nous allons d'abord poser :

$$\alpha = \begin{cases} \sin\theta & (S) \\ \operatorname{sh}\theta & (H) \\ 1 & (C) \end{cases} \tag{3.1}$$

puis, en vue de conduire les calculs de la même manière pour tous les modèles, nous allons introduire une fonction $N(r, t)$ qui prendra les valeurs suivantes

$$N(r,t) = \begin{cases} \dfrac{3}{Ar}\left(\dfrac{A'}{A} - \dfrac{C'}{C}\right) & (S_1, H_1, C_1) \\ 0 & (S_2, H_2, C_2) \\ \dfrac{3}{B}\left(\dfrac{\dot{A}\dot{B}}{2A} + \ddot{B} - \dfrac{\dot{B}^2}{2B}\right) & (S_3, H_3, C_3). \end{cases} \tag{3.2}$$

Dès lors, l'expression du tenseur de Weyl est pour tous les modèles :

TABLE 10

Tenseur de Weyl pour $ds^2 = -A(r, t)dr^2 - B(r, t)\, d\Sigma^2 + C(r, t)dt^2$

$$C_{1212} = \frac{C_{1313}}{\alpha^2} = -\frac{AB}{12}(R + N) \qquad C_{1414} = -\frac{AC}{6}(R + N)$$

$$C_{2323} = \frac{B^2\alpha^2}{6}(R + N) \qquad C_{2424} = \frac{C_{3434}}{\alpha^2} = \frac{BC}{12}(R + N)$$

---

où $B(r, t)$ désigne ici $\left\{\begin{array}{ll} r^2 & (S_1, H_1, C_1) \\ B & (S_2, H_2, C_2) \\ B(t) & (S_3, H_3, C_3) \end{array}\right.$

et où $R = g^{ij}R_{ij}$.

Remarque. Pour une étude approfondie du tenseur de Weyl, il y a avantage à utiliser un repérage à l'aide de congruences orthogonales [8]. Nous ne reprenons pas la théorie des congruences orthogonales mais pour ce qui concerne plus particulièrement le tenseur de Weyl, nous conseillons au lecteur de se référer à [32]. La découverte des congruences orthogonales est d'ailleurs immédiate pour les modèles ici considérés ; elles donnent lieu alors aux nouvelles composantes du tenseur de Weyl :

$$C_{\underline{1212}} = C_{\underline{1313}} = C_{\underline{2424}} = C_{\underline{3434}} = -\frac{1}{12}(R + N) \quad C_{\underline{1414}} = C_{\underline{2323}} = \frac{1}{6}(R + N). \tag{3.3}$$

Les composantes du tenseur de Weyl étant mises sous la forme (3.3), on peut étudier la classification de Petrov ([33], [34], [35]) et on voit que tous les modèles appartiennent au *type D de Petrov*.

Espaces conformément plats.

On les obtient en faisant

$$R = -N. \tag{3.4}$$

L'équation (3.4) est dans chaque cas une équation aux dérivées partielles très difficile à résoudre. Nous ne pouvons pas en dégager les solutions générales. Néanmoins nous tenons à en signaler certaines solutions particulières dont la particularisation donnera les espaces pseudo-euclidiens.

1) S_1. On obtient une solution particulière en faisant

$$\left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ C = (r^2c_1(t) + c_2(t))^2 \end{array}\right. \tag{3.5}$$

2) H_3 : on obtient une solution particulière en faisant

$$\left\{\begin{array}{l} A = ((et + b)^2\, a_1(r) + a_2(r))^2 \\ B = (et + b)^2 \quad e = \pm 1, \ b = c^{ste}. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

3) C_3 : on obtient une solution particulière en faisant

$$\left\{\begin{array}{l} A = (a_1(r)\, t + a_2(r))^2 \\ B = b_1\, e^{\overline{\frac{b_2}{a_1(r)t + a_2(r)}}} \qquad b_1, b_2 = c^{stes}. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Comme on le verra au § 4, on obtient les espaces psuedo-euclidiens en faisant $c_1 = 0$ dans (3.5), $a_1 = 0$ dans (3.6) et $b_2 = 0$ dans (3.7).

Remarque. La condition pour que C_2 soit conformément plat est $R = 0$; c'est aussi la condition pour qu'il soit pseudo-euclidien. Il n'existe donc pas d'espace C_2 conformément plat qui ne soit pas pseudo-euclidien.

3. Espaces à courbure constante

Pour trouver les espaces à courbure constante il suffit de résoudre les équations $R_{hijk} = K_0 (g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})$. (3.8)

On peut voir que dans les conditions où l'on se trouve, il n'existe pas d'espace $[G_2]$ ou $[G_3]$ à courbure constante.

Par contre les espaces $[G_1]$ à courbure constante sont ceux pour lesquels les fonctions A et C vérifient les relations suivantes.

TABLE 11

Espaces à courbure constante

S_1	H_1	C_1	
$A = \dfrac{1}{1 + K_0 r^2}$ $C = c_1(t)(1 + K_0 r^2)$	$A = \dfrac{1}{K_0 r^2 - 1}$ $C = c_1(t)(K_0 r^2 - 1)$	$A = \dfrac{1}{K_0 r^2}$ $C = r^2 c_1(t)$	$K_0 = c^{ste}$

Nous devons retrouver ces résultats dans l'étude des groupes de mouvements.

4. Espaces pseudo-euclidiens

Étant donnée la signature (-2) de la métrique, il n'existe pas d'espaces euclidiens, mais il existe des espaces pseudo-euclidiens ce sont ceux pour lesquels $R_{hijk} = 0$, ou encore espaces de classe 0.

D'après l'examen des tables, on voit que les espaces H_1, C_1, S_2, H_2 et S_3 ne sont jamais pseudo-euclidiens : pour les autres nous avons la table 12.

TABLE 12

Eêpaces pseudo-euclidiens

S_1	H_3	C_2	C_3
$A = 1$ $C = c_1(t)$	$A = a_1(r)$ $B = (\varepsilon t + \beta)^2$ $\varepsilon = \pm 1$	$(\ddot{A} - C'') + \dfrac{1}{2A}(A'C' - \dot{A}^2)$ $+ \dfrac{1}{2C}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) = 0$	$A = [\alpha_1(r)t + \alpha_2(r)]^2$ $B = \beta_1$ $\beta_1 = c^{ste}$

Nous devons retrouver ces résultats dans l'étude de la classe.

CHAPITRE IV

CLASSE DES MODÈLES CONSIDÉRÉS

1. Introduction

Nous allons démontrer que la classe des modèles S, H et C est au plus deux, c'est-à-dire qu'ils peuvent toujours être immergés dans un espace pseudo-euclidien S_6. Ceci géralise un résultat que Eiesland [36] avait trouvé pour les modèles V_4 à symétrie sphérique.

Nous donnerons ensuite les conditions pour que la classe soit ramenée à 0 ou 1. Pour la classe 0, il suffit d'annuler le tenseur R_{hijk}; pour la classe 1 nous utiliserons les formules de Gauss et Codazzi en nous servant au besoin du théorème de Thomas [10].

2. La classe des espaces considérés est au plus deux

Nous savons que la classe maximum d'une V_4 est 6. Nous allons montrer que pour les modèles considérés cette classe maximum peut être ramenée à 2.

Espaces du type [S].

Considérons les formules suivantes d'immersion dans S_6 dont les coordonnées locales seraient z^i $i = 1, \dots, 6$.

$$\left\{\begin{aligned} z^1 &= \sqrt{\mathrm{B}} \sin\theta \cos\varphi \\ z^2 &= \sqrt{\mathrm{B}} \sin\theta \sin\varphi \\ z^3 &= \sqrt{\mathrm{B}} \cos\theta \\ z^4 &= \psi^4(r, t) \\ z^5 &= \psi^5(r, t) \\ z^6 &= \psi^6(r, t) \end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

On a alors

$$\begin{aligned}(dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 = (\sqrt{\mathrm{B}})'^2\, dr^2 + (\dot{\sqrt{\mathrm{B}}})^2 dt^2 + 2(\sqrt{\mathrm{B}})'(\dot{\sqrt{\mathrm{B}}}) drdt \\ + \mathrm{B}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Les conditions d'isométrie s'écrivent

$$\sum_\sigma e_\sigma \frac{\partial z^\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial z^\sigma}{\partial x^j} = g_{ij} \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad \sigma = 1, \dots, 6 \tag{4.3}$$

$$e_\sigma = \pm 1$$

la forme du S_6 étant

$$ds^2 = \sum_\sigma e_\sigma (dz^\sigma)^2. \tag{4.4}$$

Vu (4.2) nous prenons $e_1 = e_2 = e_3 = -1$ et les conditions (4.3) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_\rho e_\rho \left(\frac{\partial\psi^\rho}{\partial r}\right)^2 = (\sqrt{\mathrm{B}})'^2 - \mathrm{A} \\ &\sum_\rho e_\rho \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = (\sqrt{\dot{\mathrm{B}}})^2 + \mathrm{C} \\ &\sum_\rho e_\rho \frac{\partial\psi^\rho}{\partial r}\frac{\partial\psi^\rho}{\partial t} = (\sqrt{\mathrm{B}})'(\sqrt{\dot{\mathrm{B}}}) + \mathrm{D} \quad \rho = 4, 5, 6 \quad e_\rho = \pm 1. \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

Il s'agit d'un système de 3 équations aux dérivées partielles en les 3 fonctions inconnues ψ^4, ψ^5, ψ^6 et en les 2 variables r et t. Ces équations admettent au moins une solution non-triviale dans un voisinage bien déterminé vu les conditions de régularité que nous avons supposées satisfaites.

Le modèle [S] peut donc être immergé dans un S_6 de métrique

$$ds_6^2 = -(dz^1)^2 - (dz^2)^2 - (dz^3)^2 + e_4(dz^4)^2 + e_5(dz^5)^2 + e_6(dz^6)^2. \tag{4.6}$$

Nous pouvons opérer de la même façon pour les espaces du type [H] à condition de prendre $e_1 = e_2 = -1$, $e_3 = +1$ et pour les espaces du type [C] en prenant $e_1 = e_2 = e_3 = -1$, $e_4 = +1$.

On aboutit aux mêmes conclusions.

Remarquons que les espaces du type C_2 sont visiblement de classe 1 puisqu'il s'agit du produit direct de variétés à 2 dimensions : $V_4 = V_2(r, t) \otimes V_2(\theta, \varphi)$, la $V_2(r, t)$ étant au maximum de classe un et la $V_2(\theta, \varphi)$ étant de classe zéro.

3. Espaces de classe zéro

Nous avons déjà distingué quels espaces pouvaient être pseudo-euclidiens (v. table 12). Ce sont les espaces de classe zéro.

4. Conditions pour que S_1 soit de classe un

Pour les trouver nous devons tenter de résoudre les équations de Gauss et Codazzi.

Nous allons tout d'abord écrire in-extenso les équations de Gauss :

1) $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -\dfrac{e\,\mathrm{A}'r}{2\mathrm{A}} \quad e = \pm 1$

2) $b_{11}b_{33} - b_{13}^2 = -e\,\dfrac{\mathrm{A}'r}{2\mathrm{A}}\sin^2\theta$

3) $b_{11}b_{44} - b_{14}^2 = e\left[\dfrac{1}{2}(\ddot{\mathrm{A}} - \mathrm{C}'') + \dfrac{1}{4\mathrm{C}}(\mathrm{C}'^2 - \dot{\mathrm{A}}\dot{\mathrm{C}}) + \dfrac{1}{4\mathrm{A}}(\mathrm{A}'\mathrm{C}' - \dot{\mathrm{A}}^2)\right]$

4) $b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = e\,r^2\sin^2\theta\left(\dfrac{1}{\mathrm{A}} - 1\right)$

5) $b_{33}b_{44} - b_{24}^2 = -\dfrac{e\,r\,\mathrm{C}'}{2\mathrm{A}}$

$$6)\ b_{33}b_{44} - b_{34}^2 = -\frac{e\,r\,C'}{2A}\sin^2\theta$$

$$7)\ b_{12}b_{24} - b_{14}b_{22} = e\,\frac{\mathring{A}\,r}{2A}$$

$$8)\ b_{13}b_{34} - b_{14}b_{33} = e\,\frac{\mathring{A}\,r}{2A}\sin^2\theta$$

$$\begin{array}{ll} 9)\ b_{11}b_{23} - b_{13}b_{12} = 0 & 15)\ b_{12}b_{34} - b_{14}b_{23} = 0 \\ 10)\ b_{11}b_{24} - b_{14}b_{12} = 0 & 16)\ b_{12}b_{34} - b_{13}b_{24} = 0 \\ 11)\ b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22} = 0 & 17)\ b_{12}b_{44} - b_{14}b_{24} = 0 \\ 12)\ b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23} = 0 & 18)\ b_{13}b_{44} - b_{14}b_{34} = 0 \\ 13)\ b_{11}b_{34} - b_{14}b_{13} = 0 & 19)\ b_{22}b_{34} - b_{23}b_{24} = 0 \\ 14)\ b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23} = 0 & 20)\ b_{23}b_{34} - b_{24}b_{33} = 0 \\ & 21)\ b_{23}b_{44} - b_{24}b_{34} = 0 \end{array} \tag{4.7}$$

D'après le théorème de Thomas [10] les équations de Codazzi sont des conséquences des équations de Gauss quand $|\,b_{ij}\,| \neq 0$; nous ne les écrirons donc que si c'est indispensable.

A) $A \neq 1$.

Il résulte de 4) que

$$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 \neq 0 \tag{4.8}$$

et par suite, considérant les équations 19) et 20) comme un système d'équations linéaires et homogènes en les inconnues b_{24} et b_{34} de déterminant non-nul, vu (4.8)

$$b_{24} = b_{34} = 0. \tag{4.9}$$

De même les équations 11) et 14) donnent

$$b_{12} = b_{13} = 0. \tag{4.10}$$

1°) $\mathring{A} = 0$, $A' = 0$, $C' = 0$. Soit $A = a\ (c^{ste})\ (\neq 1)$, $C = c_1(t)$.

Compte tenu de (4.8), 1), 2) et 9) donnent

$$b_{11} = 0. \tag{4.11}$$

7), 8) et 21) donnent

$$b_{44} = 0. \tag{4.12}$$

Dans ces cas restent donc non-nuls b_{22}, b_{33} et b_{23} liés par l'équation de Gauss 4) et les équations de Codazzi restantes :

$$\begin{array}{l} 1'')\ \dfrac{\partial b_{22}}{\partial t} = \dfrac{\partial b_{23}}{\partial t} = \dfrac{\partial b_{33}}{\partial t} = 0 \\ 2'')\ \dfrac{\partial b_{22}}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\,b_{22},\ \dfrac{\partial b_{23}}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\,b_{23},\ \dfrac{\partial b_{33}}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\,b_{33} \\ 3'')\ \dfrac{\partial b_{22}}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial b_{23}}{\partial \theta} = b_{23}\operatorname{cotg}\theta \\ 4'')\ \dfrac{\partial b_{33}}{\partial \theta} - \dfrac{\partial b_{23}}{\partial \varphi} = b_{33}\operatorname{cotg}\theta + b_{22}\sin\theta\cos\theta. \end{array} \tag{4.13}$$

Les équations 4) et (4.13) admettent la solution particulière suivante

$$\left\{\begin{aligned} & b_{23} = 0 \\ & b_{22} = \varepsilon r \sqrt{e\left(\frac{1}{a} - 1\right)} \\ & b_{33} = \varepsilon r \sin^2\theta \sqrt{e\left(\frac{1}{a} - 1\right)} \end{aligned}\right. \tag{4.14}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et $e = +1$ si $a > 1$. $e = -1$ si $a > 1$.

2°) $\dot{A}$, A' et C' ne sont pas simultanément nuls.

Si $A \neq 0$, $7) \to b_{14} \neq 0 \to 12) \to b_{23} = 0$.

Si $A' \neq 0$, $1) \to b_{11} \neq 0 \to 9) \to b_{23} = 0$.

Si $C' \neq 0$, $5) \to b_{44} \neq 0 \to 21') \to b_{23} = 0$.

et dans tous les cas

$$b_{23} = 0. \tag{4.15}$$

Il reste donc b_{11}, b_{22}, b_{33}, b_{44} et b_{14} non nuls et $|b_{ij}| \neq 0$.

Les équations (4.7) sont compatibles si et seulement si

$$\boxed{2(\ddot{A} - C'') + \frac{C'^2 - \dot{A}\dot{C}}{C} + \frac{\dot{A}^2 - A'C'}{1 - A} = 0.} \tag{4.16}$$

Elles admettent alors les solutions suivantes

$A > 1$, $e = -1$, $\varepsilon = \pm 1$ $\qquad$ $A < 1$, $e = +1$, $\varepsilon = \pm 1$.

$$\left\{\begin{aligned} & b_{11} = \varepsilon \frac{A'}{2\sqrt{A(A-1)}} \\ & b_{22} = \frac{b_{33}}{\sin^2\theta} = \varepsilon r \sqrt{\frac{A-1}{A}} \\ & b_{44} = \varepsilon \frac{C'}{2\sqrt{A(A-1)}} \\ & b_{14} = \varepsilon \frac{\dot{A}}{2\sqrt{A(A-1)}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} & b_{11} = -\varepsilon \frac{A'}{2\sqrt{A(1-A)}} \\ & b_{22} = \frac{b_{33}}{\sin^2\theta} = \varepsilon r \sqrt{\frac{1-A}{A}} \\ & b_{44} = -\varepsilon \frac{C'}{2\sqrt{A(1-A)}} \\ & b_{14} = -\varepsilon \frac{\dot{A}}{2\sqrt{A(1-A)}} \end{aligned}\right. \tag{4.17}$$

qui vérifient identiquement les équations de Codazzi (même quand $|b_{ij}| = 0$).

B) $A = 1$.

Les équations de Gauss s'écrivent comme en (4.7) sauf

$$\begin{aligned} & 1''')\ b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0 \\ & 2''')\ b_{11}b_{33} - b_{13}^2 = 0 \\ & 3''')\ b_{11}b_{44} - b_{14}^2 = e\left(\frac{C'^2}{4C} - \frac{C''}{2}\right) \\ & 4''')\ b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0 \\ & 7''')\ b_{12}b_{24} - b_{14}b_{22} = 0 \\ & 8''')\ b_{13}b_{34} - b_{14}b_{33} = 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Nous pouvons supposer $C' \neq 0$, car quand $A = 1$ et $C' = 0$ l'espace est de classe 0, (§ 3).

Les équations 5) et 6) impliquent alors

$$\begin{cases} b_{22}b_{44} - b_{24}^2 \neq 0 \\ b_{33}b_{44} - b_{34}^2 \neq 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

si bien que 7‴) et 17) donnent

$$b_{12} = b_{14} = 0. \tag{4.20}$$

20) et 21) donnent

$$b_{23} = b_{24} = 0. \tag{4.21}$$

19) et 21) donnent

$$b_{23} = b_{34} = 0. \tag{4.22}$$

8‴) et 18) donnent enfin

$$b_{13} = b_{14} = 0. \tag{4.23}$$

Des équations restantes 5) et 6) on tire $b_{22} \neq 0$, $b_{33} \neq 0$ et $b_{44} \neq 0$ ce qui est en contradiction avec 4‴) (où l'on a fait $b_{23} = 0$).

Dans ce cas, l'espace ne peut être de classe un, ni a fortiori de classe 0, il est donc de classe 2 (voir § 2).

5. Conditions pour que S_2 soit de classe un

Les équations de Gauss s'écrivent comme en (4.7) sauf

$$\begin{aligned}
&1)\ b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0 \\
&2)\ b_{11}b_{33} - b_{13}^2 = 0 \\
&4)\ b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = - e\, B \sin^2 \theta \\
&5)\ b_{22}b_{44} - b_{24}^2 = 0 \\
&6)\ b_{33}b_{44} - b_{34}^2 = 0 \\
&7)\ b_{12}b_{24} - b_{14}b_{22} = 0 \\
&8)\ b_{13}b_{34} - b_{14}b_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

De 4), on tire

$$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 \neq 0 \tag{4.25}$$

et toujours par le même raisonnement que celui fait précédemment

$$b_{12} = b_{13} = b_{24} = b_{34} = 0. \tag{4.26}$$

1), 2) et 9); 5), 6) et 21), 7, 8) et 12) donnent alors

$$b_{11} = b_{44} = b_{14} = 0. \tag{4.17}$$

Les équations restantes sont compatibles si et seulement si

$$\boxed{2(\ddot{A} - C'') + \frac{1}{A}(A'C' - \dot{A}^2) + \frac{1}{C}(C'^2 - \dot{A}\dot{C}) = 0.} \tag{4.28}$$

Ce résultat était attendu; en effet, ici $V_4(r, \theta, \varphi, t) = V_2(r, t) \otimes V_2(\theta, \varphi)$, la $V_2(\theta, \varphi)$ étant de classe un, (4.28) exprime que la $V_2(r, t)$ est de classe 0.

Une solution particulière des équations restantes $(e = -1)$ $\varepsilon = \pm 1$ est

$$\begin{cases} b_{23} = 0 \\ b_{22} = \dfrac{b_{33}}{\sin^2 \theta} = \varepsilon\sqrt{B}. \end{cases} \tag{4.29}$$

Elle vérifie identiquement les équations de Codazzi.

6. Conditions pour que S_3 soit de classe un

Les équations de Gauss sont (4.7) excepté

$$\begin{aligned}
&1)\ b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -e\,\frac{\dot{A}\dot{B}}{4} \\
&2)\ b_{11}b_{33} - b_{13}^2 = -e\,\frac{\dot{A}\dot{B}}{4}\sin^2\theta \\
&3)\ b_{11}b_{44} - b_{14}^2 = \frac{e}{2}\left(\ddot{A} - \frac{\dot{A}^2}{2A}\right) \\
&4)\ b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = -e\left(B + \frac{\dot{B}^2}{4}\right)\sin^2\theta \\
&5)\ b_{22}b_{44} - b_{24}^2 = \frac{e}{2}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right) \\
&6)\ b_{33}b_{44} - b_{34}^2 = \frac{e}{2}\left(\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}\right)\sin^2\theta \\
&7)\ b_{12}b_{24} - b_{14}b_{22} = 0 \\
&8)\ b_{13}b_{34} - b_{14}b_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

D'après 4), puisque $B + \dfrac{\dot{B}^2}{4} > 0$, on a

$$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 \neq 0. \tag{4.31}$$

Compte tenu de (4.31), 19) et 20) et 11) et 14) impliquent

$$b_{12} = b_{13} = b_{24} = b_{34} = 0. \tag{4.32}$$

De même 7), 8) et 12) donnent

$$b_{14} = 0. \tag{4.33}$$

1⁰) $\dot{A} = 0$ *et* $\ddot{B} - \dfrac{\dot{B}^2}{2B} = 0$ *ou bien* $\dot{B} = 0$ *et* $\ddot{A} - \dfrac{\dot{A}^2}{2A} = 0$.

Soit $A = a_1(r)$, $B = (\beta_1 t + \beta_2)^2$ ou $B = b$ et $A = [\alpha_1(r)t + \alpha_2(r)]^2$.

Dès lors, compte tenu de (4.31), (4.32) et (4.33), 1), 2) et 9) donnent

$$b_{11} = 0 \tag{4.34}$$

5), 6) et 21) donnent aussi

$$b_{44} = 0. \tag{4.35}$$

Il reste à résoudre le système formé par l'équation de Gauss 4) et les équations de Codazzi qui sont dans le premier cas (4.13) sauf

$$1'')\ \frac{\partial b_{22}}{\partial t} = \frac{\beta_1}{\beta_1 t + \beta_2} b_{22};\ \frac{\partial b_{23}}{\partial t} = \frac{\beta_1 b_{23}}{\beta_1 t + \beta_2};\ \frac{\partial b_{33}}{\partial t} = \frac{\beta_1 b_{33}}{\beta_1 t + \beta_2} \tag{4.36}$$

$$2'')\ \frac{\partial b_{22}}{\partial r} = \frac{\partial b_{23}}{\partial r} = \frac{\partial b_{33}}{\partial r} = 0$$

et dans le second cas (4.13) sauf

$$2'')\ \frac{\partial b_{22}}{\partial r} = \frac{\partial b_{23}}{\partial r} = \frac{\partial b_{33}}{\partial r} = 0. \tag{4.37}$$

Elles admettent les solutions particulières suivantes dans le premier cas, avec $e = +1$ et $\varepsilon = \pm 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{23} = 0 \\ b_{22} = \dfrac{b_{33}}{\sin^2 \theta} = \varepsilon(\beta_1 t + \beta_2)\sqrt{1 + \beta_1^2} \end{array} \right. \tag{4.38}$$

et dans le second cas

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{23} = 0 \\ b_{22} = \dfrac{b_{33}}{\sin^2 \theta} = \varepsilon\sqrt{\mathrm{B}} \end{array} \right. \tag{4.39}$$

et l'espace est toujours de classe un.

2^0) *Dans les autres cas* :

$\dot{\mathrm{A}} = 0$ et $\ddot{\mathrm{B}} - \dfrac{\dot{\mathrm{B}}^2}{2\mathrm{B}} \neq 0$

$\dot{\mathrm{A}} \neq 0,\ \dot{\mathrm{B}} = 0$ et $\ddot{\mathrm{A}} - \dfrac{\dot{\mathrm{A}}^2}{2\mathrm{A}} \neq 0$

$\dot{\mathrm{A}} \neq 0,\ \dot{\mathrm{B}} \neq 0.$

Si $\ddot{\mathrm{A}} - \dfrac{\dot{\mathrm{A}}^2}{2\mathrm{A}} \neq 0$, comte tenu de 3), $b_{11}b_{44} \neq 0$ et 9) implique $b_{23} = 0$.

Si $\ddot{\mathrm{B}} - \dfrac{\dot{\mathrm{B}}^2}{2\mathrm{B}} \neq 0$, compte tenu de 5), $b_{22}b_{44} \neq 0$ et 21) implique $b_{23} = 0$.

Si $\dot{\mathrm{A}}\dot{\mathrm{B}} \neq 0$, compte tenu de 1), $b_{11}b_{22} \neq 0$ et 9) implique $b_{23} = 0$.

Dans tous les cas on a donc

$$b_{23} = 0. \tag{4.40}$$

Il reste donc non-nuls b_{11}, b_{22}, b_{33} et b_{44}.

Les équations de Gauss (4.30) sont compatibles si et seulement si

$$\boxed{\left(\ddot{\mathrm{A}} - \frac{\dot{\mathrm{A}}^2}{2\mathrm{A}}\right)\left(\mathrm{B} + \frac{\dot{\mathrm{B}}^2}{4}\right) = \frac{\dot{\mathrm{A}}\dot{\mathrm{B}}}{4}\left(\ddot{\mathrm{B}} - \frac{\dot{\mathrm{B}}^2}{2\mathrm{B}}\right)} \tag{4.41}$$

TABLE 13

Classe

	Classe 0	Classe 1	Classe 2
S_1	$A = 1$ $C' = 0$	$A \neq 1$ $2(\ddot{A} - C'') + \dfrac{C'^2 - \dot{A}\dot{C}}{C} + \dfrac{\dot{A}^2 - A'C'}{1 - A} = 0 \quad (\mathrm{I}')$	1) $A = 1,\ C' \neq 0$ 2) (I') non vérifié
H_1		$2(\ddot{A} - C'') + \dfrac{C'^2 - \dot{A}\dot{C}}{C} + \dfrac{A'C' - \dot{A}^2}{1 + A} = 0 \quad (\mathrm{II}')$	(II') non vérifié
C_1		$2(\ddot{A} - C'') + \dfrac{C'^2 - \dot{A}\dot{C}}{C} = 0 \quad (\mathrm{III}')$	(III') non vérifié
S_2		$2(\ddot{A} - C'') + \dfrac{C'^2 - \dot{A}\dot{C}}{C} + \dfrac{A'C' - \dot{A}^2}{A} = 0 \quad (\mathrm{I}'')$	(I'') non vérifié
H_2		$2(\ddot{A} - C'') + \dfrac{C'^2 - \dot{A}\dot{C}}{C} + \dfrac{A'C' - \dot{A}^2}{A} = 0 \quad (\mathrm{I}'')$	(I'') non vérifié
C_2	$2(\ddot{A} - C'') + \dfrac{C'^2 - \dot{A}\dot{C}}{C}$ $+ \dfrac{A'C' - \dot{A}^2}{A} = 0 \quad (\mathrm{I}'')$	(I'') non vérifié	
S_3		$\left(\ddot{A} - \dfrac{\dot{A}^2}{2A}\right)\left(B + \dfrac{\dot{B}^2}{4}\right) = \dfrac{\dot{A}\dot{B}}{4}\left(\ddot{B} - \dfrac{\dot{B}^2}{2B}\right) \quad (\mathrm{I}''')$	(I''') non vérifié
H_3	$B = (\varepsilon t + \beta_2)^2$ $\varepsilon = \pm 1$ $\dot{A} = 0$	$B \neq (\varepsilon t + \beta_2)^2 \quad \varepsilon = \pm 1$ $\left(\ddot{A} - \dfrac{\dot{A}^2}{2A}\right)\left(\dfrac{\dot{B}^2}{4} - B\right) = \dfrac{\dot{A}\dot{B}}{4}\left(\ddot{B} - \dfrac{\dot{B}^2}{2B}\right) \quad (\mathrm{II}''')$	1) $B = (\varepsilon t + \beta_2)^2,\ \dot{A} \neq 0$ 2) (II''') non vérifié
C_3	$\dot{B} = 0$ $A = [\alpha_1(r)t + \alpha_2(r)]^2$	$\dot{B}\left(\ddot{A} - \dfrac{\dot{A}^2}{2A}\right) = \dot{A}\left(\ddot{B} - \dfrac{\dot{B}^2}{2B}\right) \quad (\mathrm{III}''')$	(III''') non vérifié

et admettent alors les solutions ($e = -1$)

$$\left\{\begin{aligned} b_{11} &= \varepsilon \frac{\dot{A}\dot{B}}{4\sqrt{B + \frac{\dot{B}^2}{4}}} \\ b_{22} &= \frac{b_{33}}{\sin^2 \theta} = \varepsilon\sqrt{B + \frac{\dot{B}^2}{4}} \\ b_{44} &= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\ddot{B} - \frac{\dot{B}^2}{2B}}{\sqrt{B + \frac{\dot{B}^2}{4}}} \end{aligned}\right. \tag{4.42}$$

qui vérifient identiquement les équations de Codazzi.

Remarque.

Les raisonnements sont analogues pour les espaces du type [H] et [C] sauf pour C_2 qui est toujours de classe 1. Nous avons simplement porté les résultats finaux dans les tables.

TABLE 14

Classe

	Classe 0	Classe 1		Classe 2
S	$R_{2323} = 0$ $R_{2424} = 0$	$R_{2323} \neq 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$	(I)	1) $R_{2323} = 0$, $R_{2424} \neq 0$ 2) (I) non vérifié
H	$R_{2323} = 0$ $R_{1212} = 0$	$R_{2323} \neq 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$	(II)	1) $R_{2323} = 0$, $R_{1212} \neq 0$ 2) (II) non vérifié
C	$R_{2323} = 0$ $R_{1414} = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2$	(III)	(III) non vérifié

où : $\left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= R_{1224}R_{1334} + R_{1414}R_{2323} \\ \lambda_2 &= R_{1313}R_{2424} = R_{1212}R_{3434}. \end{aligned}\right.$

CHAPITRE V

GROUPES DE MOUVEMENTS

1. Introduction

La recherche des groupes continus de mouvements des espaces [S], [H], [C] amène de nouvelles classifications de ces espaces quant au nombre de paramètres du groupe et de nouvelles considérations qui ont trait à la transitivité et à l'homogénéité des espaces. D'autre part, elle constitue la première étape qui permet d'étudier les groupes d'isotropie (ou de stabilité) et les espaces symétriques. Nous signalions d'autre part que les modèles [S], [H], [C] étaient les modèles les plus généraux qui admettaient un G_3 sur une sous-variété $V_2(\theta, \varphi)$ (groupe de stabilité sur la V_2), il est donc logique de trouver un G_3 comme groupe minimum à ces modèles. La théorie des groupes continus d'isométries nous apprend par ailleurs que le nombre maximum de paramètres du groupe est 10 dans le cas d'une V_2 et que ceci n'est réalisé que pour les espaces à courbure totale constante; un théorème de Fubini nous apprend enfin qu'il n'existe pas de groupe à 9 paramètres, sauf pour des espaces einsteiniens (?). La première démarche pour la détermination des groupes consiste à trouver les vecteurs ξ^i_α c'est-à-dire essentiellement la résolution des équations de Killing [1], [8], [13].

Nous ne traiterons explicitement que le cas des modèles [S]. Les modèles [H], [C] se résolvent de la même manière. Cependant nous donnerons les résultats pour tous les modèles.

2. Vecteur de Killing pour S_1

Les équations de Killing s'écrivent ici

$$(K_{11})\quad \xi^1 A' + \xi^4 \dot{A} + 2A \frac{\partial \xi^1}{\partial r} = 0$$

$$(K_{12})\quad A \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta} + r^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial r} = 0$$

$$(K_{13})\quad A \frac{\partial \xi^1}{\partial \varphi} + r^2 \sin^2\theta \frac{\partial \xi^3}{\partial r} = 0$$

$$(K_{14})\quad A \frac{\partial \xi^1}{\partial t} - C \frac{\partial \xi^4}{\partial r} = 0 \qquad (5.1)$$

$$(K_{22})\quad \xi^1 + r \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta} = 0$$

$$(\mathrm{K}_{23})\quad \frac{\partial \xi^2}{\partial \varphi} + \sin^2\theta\,\frac{\partial \xi^3}{\partial \theta} = 0$$

$$(\mathrm{K}_{24})\quad r^2\,\frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \mathrm{C}\,\frac{\partial \xi^4}{\partial \theta} = 0$$

$$(\mathrm{K}_{33})\quad \xi^1 \sin\theta + \xi^2 r\cos\theta + r\sin\theta\,\frac{\partial \xi^3}{\partial \varphi} = 0$$

$$(\mathrm{K}_{34})\quad r^2\sin^2\theta\,\frac{\partial \xi^3}{\partial t} - \mathrm{C}\,\frac{\partial \xi^4}{\partial \varphi} = 0$$

$$(\mathrm{K}_{44})\quad \xi^1\mathrm{C}' + \xi^4\dot{\mathrm{C}} + 2\mathrm{C}\,\frac{\partial \xi^4}{\partial t} = 0.$$

A) *Détermination de* ξ^1, ξ^2 *et* ξ^3.

(K_{12}), (K_{13}), (K_{22}) et (K_{23}) donnent

$$\mathrm{A}\,\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial \theta^2} - r\,\frac{\partial \xi^2}{\partial r} = 0 \tag{5.2}$$

$$r\sin\theta\,\frac{\partial \xi^3}{\partial r} + \mathrm{A}\sin\theta\,\frac{\partial^2 \xi^3}{\partial \theta^2} + 2\mathrm{A}\cos\theta\,\frac{\partial \xi^3}{\partial \theta} = 0. \tag{5.3}$$

(K_{24}), (K_{34}) et (K_{23}) impliquent

$$\sin\theta\,\frac{\partial^2 \xi^3}{\partial \theta\,\partial t} + \cos\theta\,\frac{\partial \xi^3}{\partial t} = 0 \tag{5.4}$$

soit

$$\xi^3 = f(r, \theta, \varphi) + \frac{g(r, \varphi, t)}{\sin\theta}. \tag{5.5}$$

Compte tenu de (K_{12}), (K_{13}) et (K_{23}) on obtient finalement

$$\xi^3 = -\,\omega_1(r, t)\,\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} + \omega_2(r, t)\,\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + b_1\cos\varphi\,\mathrm{cotg}\,\theta - b_2\sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,\theta + b_3 \tag{5.6}$$

avec

$$\omega_i(r, t) \,:\, \mathrm{A}\omega_i + r\,\frac{\partial \omega_i}{\partial r} = 0 \tag{5.7}$$

et

$$b_i = c^{ste}.$$

On obtient alors

$$\xi^2 = \omega_2(r, t)\cos\theta\sin\varphi + \omega_1(r, t)\cos\theta\cos\varphi - \omega_3(r, t)\sin\theta + b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi \tag{5.8}$$

et de (K_{22})

$$\xi^1 = r\,[\omega_1(r, t)\sin\theta\cos\varphi + \omega_2(r, t)\sin\theta\sin\varphi + \omega_3(r, t)\cos\theta]. \tag{5.9}$$

B) *Détermination de ξ^4 et classification.*

(K_{24}), (K_{34}), (5.6) et (5.8) impliquent

$$\xi^4 = \frac{r^2}{C}\,[\dot{\omega}_1 \sin\theta\cos\varphi + \dot{\omega}_2 \sin\theta\sin\varphi + \dot{\omega}_3\cos\theta] + n(r, t). \tag{5.10}$$

(K_{14}) et (5.9) donnent d'autre part

$$\frac{\partial \xi^4}{\partial r} = \frac{rA}{C}\,[\dot{\omega}_1 \sin\theta\cos\varphi + \dot{\omega}_2 \sin\theta\sin\varphi + \dot{\omega}_3\cos\theta]. \tag{5.11}$$

Or de (5.10) on tire

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi^4}{\partial r} &= \left(\frac{2r}{C} - \frac{r^2C'}{C^2}\right)[\dot{\omega}_1 \sin\theta\cos\varphi + \dot{\omega}_2 \sin\theta\sin\varphi + \dot{\omega}_3\cos\theta]\\ &\quad + \frac{r^2}{C}\,[\dot{\omega}_1' \sin\theta\cos\varphi + \dot{\omega}_2' \sin\theta\sin\varphi + \dot{\omega}_3'\cos\theta] + \frac{\partial n}{\partial r}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

En comparant (5.11) et (5.12), il vient

$$\frac{\partial n}{\partial r} = 0 \tag{5.13}$$

$$\dot{\omega}_i\left(2r - \frac{r^2C'}{C} - Ar\right) + r^2\dot{\omega}_i' = 0. \tag{5.14}$$

En introduisant (5.10) et (5.9) dans (K_{11}) puis dans (K_{44}), on obtient

$$\dot{A}n(t) = 0 \tag{5.15}$$

$$\omega_i(A'r - 2A - 2A^2) + \dot{\omega}_i\,\frac{\dot{A}r^2}{C} = 0 \tag{5.16}$$

$$Cn + 2C\,\frac{dn}{dt} = 0 \tag{5.17}$$

$$rC'\omega_i + 2r^2\,\ddot{\omega}_i - \frac{r^2\dot{C}}{C}\,\dot{\omega}_i = 0. \tag{5.18}$$

Il faut donc résoudre le système $\mathscr{S}$ formé par les équations (5.7), (5.14), (5.15), (5.16), (5.17), (5.18).

Nous devons maintenant distinguer plusieurs cas.

1°) $\dot{A} = 0$.

Le système $\mathscr{S}$ se réduit à

$$\left.\begin{aligned}&1)\ A\omega_i + r\omega_i' = 0\\ &2)\ \omega_i(A'r - 2A - 2A^2) = 0\\ &3)\ \dot{\omega}_i\,(2 - rC' - A) + \frac{r\dot{\omega}_i'}{C} = 0\\ &4)\ \dot{C}n + 2C\dot{n} = 0\\ &5)\ C'\omega_i + 2r\ddot{\omega}_i - \frac{r\dot{C}}{C}\,\dot{\omega}_i = 0.\end{aligned}\right. \tag{5.19}$$

Étant donnée l'équation 2) de (5.19) nous considérons

a) $A'r - 2A - 2A^2 \neq 0$

2) donne alors

$$\omega_i = 0. \tag{5.20}$$

Il reste 4) à résoudre

1) $C = c_1(t)c_2(r)$.
D'où

$$n = \frac{b_4}{\sqrt{c_1(t)}} \quad b_4 = c^{ste}.$$

Nous avons donc affaire à un G_4 *de paramètres* b_1, b_2, b_3, b_4.

2) $C \neq c_1(t)c_2(r)$.

L'équation 4) implique $n = 0$, et nous avons affaire à un G_3 *de paramètres* b_1, b_2, b_3.

b) $A'r - 2A - 2A^2 = 0$ soit $A = \dfrac{1}{1 + K^2r^2}$, $K = c^{ste}$.

L'équation 1) donne

$$\omega_i = \rho_i(t) \frac{\sqrt{1 + K^2r^2}}{r} \tag{5.21}$$

tandis que 3) donne

$$\dot{\rho}_i \left[2K^2r - \frac{C'}{C}(1 + K^2r^2)\right] = 0. \tag{5.22}$$

1) $2K^2r - \dfrac{C'}{C}(1 + K^2r^2) = 0$ soit $C = (1 + K^2r^2)c_1(t)$; de l'équation 3) on tire

$$n = \frac{b_4}{\sqrt{c_1(t)}} \tag{5.23}$$

et de 5) $$\rho_i = c_{i1} \sin K \int \sqrt{c_1(t)}dt + c_{i2} \cos K \int \sqrt{c_1(t)}dt \tag{5.24}$$

si bien que l'on a un G_{10} de paramètres $b_1, b_2, b_3, b_4, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}$.

2) $2K^2r - \dfrac{C'}{C}(1 + K^2r^2) \neq 0$ soit $C \neq (K^2r^2 + 1)c_1(t)$,

De (5.22) on tire $\dot{\rho}_i = 0$ soit

$$\omega_i = c_i \frac{\sqrt{1 + K^2r^2}}{r}, \quad c_i = c^{ste}. \tag{5.25}$$

α) $C' \neq 0$ l'équation 5) donne alors

$$c_i = 0. \tag{5.26}$$

i. $C = c_1(t)c_2(r)$.

De 4), il vient

$$n = \frac{b_4}{\sqrt{c_1(t)}} \tag{5.27}$$

et on obtient le G_4 vu ci-dessus.

ii. $C \neq c_1(t)c_2(r)$.

De 4), il vient

$$n = 0 \tag{5.28}$$

et on obtient le G_3 vu ci-dessus.

β) $C' = 0$ soit $C = c_1(t)$.

De 4) on tire

$$n = \frac{b_4}{\sqrt{c_1(t)}} \tag{5.29}$$

et il reste un G_7 *de paramètres* b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3.

2°) $\dot{A} \neq 0$.

Dès lors (5.15) implique $n = 0$ et le système $\mathscr{S}$ devient

$$\begin{aligned}
&1)\ A\omega_i + r\omega_i' = 0\\
&2)\ \omega_i(A'r - 2A - 2A^2) + \dot{\omega}_i \frac{\dot{A}r^2}{C} = 0\\
&3)\ \dot{\omega}_i\left((2r - \frac{r^2C'}{C} - Ar)\right) + r^2\,\dot{\omega}_i' = 0\\
&5)\ C'\omega_i + 2r\ddot{\omega}_i - \frac{r\dot{C}}{C}\,\dot{\omega}_i = 0.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Posons

$$X(r, t) = \frac{A'r + 2A - 2A^2}{\dot{A}}. \tag{5.31}$$

2') donne

$$\dot{\omega}_i = -\frac{XC}{r^2}\,\omega_i \tag{5.32}$$

et (5.10) entraîne

$$\xi^4 = -X(\omega_1 \sin\theta\cos\varphi + \omega_2 \sin\theta \sin\varphi + \omega_3 \cos\theta). \tag{5.33}$$

(5.32) et 3) impliquent

$$\omega_i\left[\frac{X'}{X} - \frac{A}{r}\right] + \omega_i' = 0 \tag{5.34}$$

et vu 1)

$$\frac{X'}{X} = \frac{2A}{r}. \tag{5.35}$$

(5.32) et 5) donnent alors

$$rC' - \dot{C}X - 2C\left(\dot{X} - \frac{X^2C}{r^2}\right) = 0 \tag{5.36}$$

et 1) est vérifié si

$$r^2\dot{A} = 2XC(A - 1) + XC'r. \tag{5.37}$$

a) *Les relations* (5.35), (5.36) *et* (5.37) *sont vérifiées.*

Alors il existe une solution non nulle aux équations (5.30) obtenue en primitivant le système complètement intégrable

$$\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{A}{r}, \quad \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{XC}{r^2} \tag{5.38}$$

la solution s'écrivant alors

$$\omega_i = c_i\omega(r, t). \tag{5.39}$$

Dès lors le groupe de mouvements est un G_6 *de paramètres* $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$.

b) *Les relations* (5.35), (5.36) *et* (5.37) *ne sont pas toutes vérifiées.*

Les équations (5.30) entraînent alors

$$\omega_i = 0 \tag{5.40}$$

et le groupe de mouvements est le G_3 que nous avons rencontré plus haut.

3. Vecteur de Killing pour S_3

Les équations de Killing s'écrivent

$$(K_{11}) \quad \xi^1 A^1 + \xi^4 \dot{A} + 2A\frac{\partial \xi^1}{\partial r} = 0$$

$$(K_{12}) \quad A\frac{\partial \xi^1}{\partial \theta} + B\frac{\partial \xi^2}{\partial r} = 0$$

$$(K_{13}) \quad A\frac{\partial \xi^1}{\partial \varphi} + B\sin^2\theta\,\frac{\partial \xi^3}{\partial r} = 0$$

$$(K_{14}) \quad A\frac{\partial \xi^1}{\partial t} - \frac{\partial \xi^4}{\partial r} = 0$$

$$(K_{22}) \quad \xi^4\dot{B} + 2B\frac{\partial \xi^2}{\partial \theta} = 0$$

$$(K_{23}) \quad \frac{\partial \xi^2}{\partial \varphi} + \sin^2\theta\,\frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} = 0 \tag{5.41}$$

(K_{24}) $B \dfrac{\partial \xi^2}{\partial t} - \dfrac{\partial \xi^4}{\partial \theta} = 0$

(K_{33}) $2B \cos\theta\, \xi^2 + \dot{B} \sin\theta\, \xi^4 + 2B \sin\theta \dfrac{\partial \xi^3}{\partial \varphi} = 0$

(K_{34}) $B \sin^2\theta \dfrac{\partial \xi^3}{\partial t} - \dfrac{\partial \xi^4}{\partial \varphi} = 0$

(K_{44}) $\dfrac{\partial \xi^4}{\partial t} = 0.$

(K_{12}) et (K_{13}) donnent

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial \xi^2}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin^2\theta\, \xi^3)\right] = 0. \tag{5.42}$$

(K_{24}) et (K_{34}) donnent

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \xi^2}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin^2\theta\, \xi^3)\right] = 0. \tag{5.43}$$

(K_{23}), (5.42) et (5.43) donnent enfin

$$\xi^3 = \frac{p(\varphi, t)}{\sin\theta} + q(\theta, \varphi). \tag{5.44}$$

De (K_{22}), (K_{33}), (K_{13}), on tire

$$\xi^2 = \sin\theta\, h(r, t) + l(\theta, \varphi, t). \tag{5.45}$$

(K_{24}), (K_{34}), (5.44) et (5.45) donnent enfin

$$\xi^2 = \sin\theta\, h(r) + l(\theta, \varphi)$$
$$\xi^3 = \frac{p(\varphi)}{\sin\theta} + q(\theta, \varphi). \tag{5.46}$$

(K_{12}) implique

$$\xi^1 = \cos\theta \frac{B}{A} \frac{dh}{dr} + m(r, t) \tag{5.47}$$

et (K_{22})

$$\xi^4 \dot{B} + 2B \cos\theta\, h(r) = 0. \tag{5.48}$$

De (K_{22}), (K_{33}) et (K_{23}) on tire

$$\left\{\begin{aligned} \xi^2 &= l(\varphi) \\ \xi^3 &= q(\theta, \varphi) \\ \xi^4 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{5.49}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial l}{d\varphi} + \sin^2\theta \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0 \\ &\frac{\partial q}{\partial \varphi} = -\operatorname{cotg}\theta\, l(\varphi) \end{aligned}\right.$$

si bien que finalement

$$\begin{cases} \xi^2 = b_1 \sin\varphi + b_2 \cos\varphi \\ \xi^3 = \operatorname{cotg}\theta\,(b_1\cos\varphi - b_2\sin\varphi) + b_3 \end{cases} \qquad (5.50)$$
$$b_i = c^{ste}.$$

Pour déterminer ξ^1, on doit envisager 2 cas.

1°) $A = a_1(r)a_2(t)$.

Alors (K_{11}) donne $\xi^1 = \dfrac{b_4}{\sqrt{a_1(r)}}$

et on obtient le G_4 *de paramètres* b_1,b_2,b_3,b_4.

2°) $A \neq a_1(r)a_2(t)$.

Alors (K_{11}) donne $\xi^1 = 0$ et on obtient le G_3 *de paramètres* b_1,b_2,b_3.

4. Groupe de mouvements d'une surface $V_2(r, t)$

Les espaces du type G_2 apparaissent comme étant le produit direct d'une $V_2(r, t)$ par une $V_2(\theta, \varphi)$, la détermination du groupe de mouvements de la surface $V_2(r, t)$

$$d\sigma^2 = - A(r, t)dr^2 + C(r, t)dt^2 \qquad (5.51)$$

est préalable à l'étude du groupe complet de la V_4.

Nous pouvons classer les surfaces $V_2(r, t)$ sous les trois rubriques suivantes [1], [8], [12].

1) *La surface* $V_2(r, t)$ *n'admet aucune déformation continue.*

Alors le groupe complet de la V_4 est celui de la $V_2(\theta, \varphi)$.

2) *La surface* $V_2(r, t)$ *admet une déformation continue mais n'est pas à courbure constante.*

La forme fondamentale (5.51) peut se ramener à une des 2 formes

$$d\sigma_1^2 = - A(t)\, dr^2 + dt^2 \ (A > 0) \qquad (5.52)$$

ou

$$d\sigma_2^2 = - dr^2 + C(r)dt^2 \ (C > 0). \qquad (5.33)$$

Si l'espace (5.52) est à courbure K constante, A possède la forme suivante

$$(K > 0) \ A = (a_1 \sin\sqrt{K}\, t + a_2 \cos\sqrt{K}\, t)^2 \qquad (5.54)$$

$$(K < 0) \ A = (a_1 \operatorname{sh}\sqrt{-K}\, t + a_2 \operatorname{ch}\sqrt{-K}\, t)^2 \qquad (5.55)$$

$$(K = 0) \ A = (a_1 t + a_2)^2. \qquad (5.56)$$

Si l'espace (5.53) est à courbure K constante, C possède la forme suivante

$$(\mathrm{K} > 0) \quad \mathrm{C} = (c_1 \operatorname{sh} \sqrt{\mathrm{K}}\, r + c_2 \operatorname{ch} \sqrt{\mathrm{K}}\, r)^2 \tag{5.57}$$

$$(\mathrm{K} < 0) \quad \mathrm{C} = (c_1 \sin \sqrt{-\mathrm{K}}\, r + c_2 \cos \sqrt{-\mathrm{K}}\, r)^2 \tag{5.58}$$

$$(\mathrm{K} = 0) \quad \mathrm{C} = (c_1 r + c_2)^2. \tag{5.50}$$

Nous supposons donc maintenant que la surface $\mathrm{V}_2(r, t)$ prend la forme (5.52) ou (5.53) mais ne vérifie aucune des relations (5.54) à (5.59).

Les équations de Killing pour (5.52) et pour (5.53) admettent uniquement pour solution

$$\begin{cases} \xi^1 = c^{ste} \\ \xi^4 = 0 \end{cases} \tag{5.60}$$

et

$$\begin{cases} \xi^1 = 0 \\ \xi^4 = c^{ste} \end{cases} \tag{5.61}$$

ce qui donne lieu respectivement, aux opérateurs

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\partial}{\partial r} \tag{5.62}$$

ou

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.63}$$

3) *La surface* $\mathrm{V}_2(r, t)$ *est à courbure ɔonstante.*

Nous pouvons constater que vu la forme de A pour (5.52)

$$\lambda = -\frac{\ddot{\mathrm{A}}}{2} + \frac{\dot{\mathrm{A}}^2}{2\mathrm{A}} = c^{ste} \tag{5.64}$$

de même pour (5.53)

$$\lambda = -\frac{\mathrm{C}''}{2} + \frac{\mathrm{C}'^2}{2\mathrm{C}} = c^{ste}. \tag{5.65}$$

Nous pouvons donc classer les $\mathrm{V}_2(r, t)$ à courbure constante sous la forme suivante :

Table 15 : Surfaces $\mathrm{V}_2(r, t)$ *à courbure* K *constante*

	$\mathrm{K} > 0$	$\mathrm{K} < 0$	$\mathrm{K} = 0$
$\lambda \neq 0$	$\mathrm{A} = (a_1 \sin \sqrt{\mathrm{K}} t$ $+ a_2 \cos \sqrt{\mathrm{K}} t)^2$ $\lambda = \mathrm{K}(a_1^2 + a_2^2)$ $\lambda = k^2,\ k > 0$	$\mathrm{A} = (a_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\mathrm{K}} t$ $+ a_2 \operatorname{ch} \sqrt{-\mathrm{K}} t)^2$ $\lambda = \mathrm{K}(a_2^2 - a_1^2)$ $\lambda = \varepsilon k^2,\ \varepsilon = \pm 1$ $k > 0$ selon que $\lambda \lessgtr 0$	$\mathrm{A} = (a_1 t + a_2)^2$ $\lambda = a_1^2,\ a_1 \neq 0$ $k = a_1$

$\lambda = 0$		$A = e^{\pm 2\sqrt{-K}t}$ $K = -k^2 \ (k > 0)$	$A = a_2^2 (a_2 \neq 0)$
$\lambda \neq 0$	$C = (c_1 \operatorname{sh} \sqrt{K} r$ $+ c_2 \operatorname{ch} \sqrt{K} r)^2$ $\lambda = K(c_1^2 - c_2^2)$ $\lambda = \varepsilon k^2$, $\varepsilon = \pm 1$ selon que $k > 0$, $\lambda \lesseqgtr 0$	$C = (c_1 \sin \sqrt{-K} r$ $+ c_2 \cos \sqrt{-K} r)^2$ $\lambda = -K(c_1^2 + c_2^2)$ $k = k^2$, $k > 0$	$C = (c_1 r + c_2)^2$ $\lambda = c_1^2$, $c_1 \neq 0$ $k = c_1$
$\lambda = 0$	$C = e^{\pm 2\sqrt{-K}r}$ $K = k^2$, $k > 0$		$C = c_2^2$, $c_2 \neq 0$

5. Groupe de mouvements des surfaces $V_2(\theta, \varphi)$

Il s'agit des surfaces dont les formes fondamentales sont

$$d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2 \tag{5.66}$$

$$d\Sigma^2 = d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta \, d\varphi^2 \tag{5.67}$$

$$d\Sigma^2 = d\theta^2 + d\varphi^2. \tag{5.68}$$

Le vecteur de Killing de (5.66) s'écrit

$$\begin{aligned} \xi^2 &= b_1 \sin\varphi + b_2 \cos\varphi \\ \xi^3 &= \operatorname{cotg}\theta\,(b_1 \cos\varphi - b_2 \sin\varphi) + b_3. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Celui de (5.67)

$$\begin{aligned} \xi^2 &= b_1 \sin\varphi + b_2 \cos\varphi \\ \xi^3 &= \coth\theta\,(b_1 \cos\varphi - b_2 \sin\varphi) + b_3 \end{aligned} \tag{5.70}$$

et celui de (5.68)

$$\begin{aligned} \xi^2 &= b_1 \varphi + b_2 \\ \xi^3 &= -b_1\,\theta + b_3. \end{aligned} \tag{5.71}$$

6. Vecteur de Killing des espaces du type G_2

La forme fondamentale du type G_2 étant

$$ds^2 = -A(r, t)dr^2 - B\,d\Sigma^2 + C(r, t)dt^2$$

où $d\Sigma^2$ prend la valeur (5.66), (5.67) ou (5.68), le vecteur de Killing a pour composantes ξ^2 et ξ^3 (5.69), (5.70) ou (5.71), les composantes ξ^1 et ξ^4 dépendent de la forme de la $V_2(r, t)$.

Nous pouvons maintenant dresser la table complète donnant le nombre de paramètres du groupe.

TABLE 16. — *Nombre de paramètres du groupe complet*

	S_1	S_2	S_3	H_1	H_2	H_3
G_{10}	$A = \dfrac{1}{1 + K^2r^2}$ $C = c_1(t)\,(1 + K^2r^2)$			$A = \dfrac{1}{K^2r^2 - 1}$ $C = c_1(t)\,(K^2r^2 - 1)$		
G_7	$A = \dfrac{1}{1 + K^2r^2}$ $C = c_1(t)$			$A = \dfrac{1}{K^2r^2 - 1}$ $C = c_1(t)$		
G_6	$\dot{A} \neq 0$ $(*)\begin{cases} X = \dfrac{A'r + 2A - 2A^2}{\dot{A}} \\ \dfrac{X'}{X} = \dfrac{2A}{r} \\ C'r = X\dot{C} + 2C\left(\dot{X} + \dfrac{X^2C}{r^2}\right) \\ r^2\dot{A} = 2XC(A - 1) + XC'r \end{cases}$	$V_2(r, t)$ est à courbure c^{ste}		$\dot{A} \neq 0$ $(*)\begin{cases} X = \dfrac{A'r + 2A + 2A^2}{\dot{A}} \\ \dfrac{X'}{X} = -\dfrac{2A}{r} \\ C'r = X\dot{C} + 2C\left(\dot{X} + \dfrac{X^2C}{r^2}\right) \\ \dot{A}r^2 = -2XC(A + 1) + XC'r \end{cases}$	$V_2(r, t)$ est à courbure c^{ste}	
G_4	$\dot{A} = 0$ $C = c_1(t)c_2(r)$ ni G_7, ni G_{10}	$V_2(r, t)$ admet une déform. continue	$A = a_1(r)a_2(t)$	$\dot{A} = 0$ $C = c_1(t)c_2(r)$ ni G_7, ni G_{10}	$V_2(r, t)$ admet une déform. continue	$A = a_1(r)a_2(t)$
G_3	1) $\dot{A} = 0$ $C \neq c_1(t)c_2(r)$ 2) $\dot{A} \neq 0$ (*) non vérifié	sinon	$A \neq a_1(r)a_2(t)$	1) $\dot{A} = 0$ $C \neq c_1(t)c_2(r)$ 2) $\dot{A} \neq 0$ (*) non vérifié	sinon	$A \neq a_1(r)a_2(t)$

TABLE 16 (*suite*)

	C_1	C_2	C_3
G_{10}	$A = \dfrac{1}{K^2 r^2}$ $C = r^2 c_1(t)$		
G_7	$A = \dfrac{1}{K^2 r^2}$ $C = c_1(t)$		
G_6	$(*) \left\{ \begin{array}{l} \mathring{A} \neq 0 \\ X = \dfrac{A'r + 2A}{\mathring{A}} \\ X' = 0 \\ C'r = X\dot{C} + 2C\dot{X} \\ \mathring{A}r^2 = -2XC + XC'r \end{array} \right.$	$V_2(r, t)$ à courbure c^{ste}	
G_4	$\mathring{A} = 0$ $C = c_1(t)c_2(r)$ ni G_7, ni G_{20}	$V_2(r, t)$ admet une déform. continue	$A = a_1(r)a_2(t)$
G_3	1) $\mathring{A} = 0$ $C \neq c_1(t)c_2(r)$ 2) $\mathring{A} \neq 0$ (*) non vérifié	sinon	$A \neq a_1(r)a_2(t)$

7. Les opérateurs X_α

Les vecteurs de Killing peuvent s'écrire

$$\xi^i = a^\alpha \xi^i_\alpha \qquad i = 1 \dots n \qquad \alpha = 1 \dots r \tag{5.72}$$

r étant le nombre de paramètres.

On introduit alors l'opérateur

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{5.73}$$

et on peut répertorier tous les opérateurs X_α des modèles étudiés.

TABLE 17

Groupes de mouvements. Opérateurs X_α

	S_1 S_3	H_1 H_3	C_1 C_3
G_3	$X_1 = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cotg}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $X_2 = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{cotg}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $X_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$	$X_1 = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \coth\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $X_2 = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \coth\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $X_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $X_3 = \varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta \frac{\partial}{\partial\varphi}$
G_4	$X_4 = \frac{1}{\sqrt{c_1(t)}} \frac{\partial}{\partial t}$ ou $X_4 = \frac{1}{\sqrt{a_1(r)}} \frac{\partial}{\partial r}$	$X_4 = \frac{1}{\sqrt{c_1(t)}} \frac{\partial}{\partial t}$ ou $X_4 = \frac{1}{\sqrt{a_1(r)}} \frac{\partial}{\partial r}$	$X_4 = \frac{1}{\sqrt{c_1(t)}} \frac{\partial}{\partial t}$ ou $X_4 = \frac{1}{\sqrt{a_1(r)}} \frac{\partial}{\partial r}$
G_6	$X_4 = \omega(r \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ $+ \cos\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{cosec}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $- X \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial t})$ $X_5 = \omega(r \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ $+ \cos\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cosec}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $- X \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial t})$	$X_4 = \omega\,(- r \operatorname{sh}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ $+ \operatorname{ch}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{cosech}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $+ X \operatorname{sh}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial t})$ $X_5 = \omega\,(- r \operatorname{sh}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ $+ \operatorname{ch}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cosech}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $+ X \operatorname{sh}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial t})$	$X_4 = - r\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \theta\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}$ $+ [\frac{1}{2}(\varphi^2 - \theta^2) + \mathscr{A})] \frac{\partial}{\partial\varphi} + X\varphi \frac{\partial}{\partial t}$ $X_5 = - r\,\theta \frac{\partial}{\partial r} + [\frac{1}{2}(\theta^2 - \varphi^2) + \mathscr{A}] \frac{\partial}{\partial\theta}$ $+ \theta\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + X\,\theta \frac{\partial}{\partial t}$

	S_1 S_3	H_1 H_3	C_1 C_3
	$X_6 = \omega(r \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}$ $- X \cos\theta \frac{\partial}{\partial t})$ où $X = \frac{A'r + 2A - 2A^2}{\dot{A}}$ $\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{A}{r} \quad \frac{\dot\omega}{\omega} = -\frac{XC}{r^2}$	$X_6 = \omega(-r \operatorname{ch}\theta \frac{\partial}{\partial r} + \operatorname{sh}\theta \frac{\partial}{\partial\theta}$ $+ X \operatorname{ch}\theta \frac{\partial}{\partial t})$ où $X = \frac{A'r + 2A + 2A^2}{\dot{A}}$ $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{A}{r} \quad \frac{\dot\omega}{\omega} = \frac{XC}{r^2}$	$X_6 = -r \frac{\partial}{\partial r} + \theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi} + X \frac{\partial}{\partial t}$ où $X = \frac{A'r + 2A}{\dot{A}}$ $\mathscr{A} = \int \frac{A}{r}\, dr$
G_7	$G_3 +$: $Y_4 = \frac{\sqrt{K^2r^2+1}}{r}(r \sin\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ $+ \cos\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{cosec}\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi})$ $Y_5 = \frac{\sqrt{K^2r^2+1}}{r}(r \sin\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ $+ \cos\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cosec}\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi})$ $Y_6 = \frac{\sqrt{K^2r^2+1}}{r}(r \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}$ $- \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta})$ $Y_7 = \frac{1}{\sqrt{c_1(t)}} \frac{\partial}{\partial t}$ où $A = \frac{1}{K^2r^2+1}$	$Y_4 = \frac{\sqrt{K^2r^2-1}}{r}(-r \operatorname{sh}\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ $+ \operatorname{ch}\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{cosech}\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi})$ $Y_5 = \frac{\sqrt{K^2r^2-1}}{r}(-r \operatorname{sh}\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial r}$ $+ \operatorname{ch}\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cosech}\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi})$ $Y_6 = \frac{\sqrt{K^2r^2-1}}{r}(-r \operatorname{ch}\theta \frac{\partial}{\partial r}$ $+ \operatorname{sh}\theta \frac{\partial}{\partial\theta})$ $Y_7 = \frac{1}{\sqrt{c_1(t)}} \frac{\partial}{\partial t}$ où $A = \frac{1}{K^2r^2-1}$	$Y_4 = -r\varphi \frac{\partial}{\partial r} + \theta\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}$ $+ [\frac{1}{2}(\varphi^2 - \theta^2) - \frac{1}{2K^2r^2}] \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $Y_5 = -r\theta \frac{\partial}{dr} + [\frac{1}{2}(\theta^2 - \varphi^2)$ $- \frac{1}{2K^2r^2}] \frac{\partial}{\partial\theta} + \theta\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $Y_6 = -r \frac{\partial}{\partial r} + \theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$ $Y_7 = \frac{1}{\sqrt{c_1(t)}} \frac{\partial}{\partial t}$ où $A = \frac{1}{K^2r^2}$

G_{10}

$$
\begin{aligned}
X_4 &= \sin K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_4 \\
&+ \frac{K\, r \cos K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 + 1}} \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial t} \\
X_5 &= \sin K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_5 \\
&+ \frac{K\, r \cos K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 + 1}} \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial t} \\
X_6 &= \sin K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_6 \\
&+ \frac{K\, r \cos K \int \sqrt{c_1(t)}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 + 1}} \cos\theta \frac{\partial}{\partial t} \\
X_7 &= \cos K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_4 \\
&- \frac{K\, r \sin K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 + 1}} \sin\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial t} \\
X_8 &= \cos K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_5 \\
&- \frac{K\, r \sin K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 + 1}} \sin\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial t} \\
X_9 &= \cos K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_6 \\
&- \frac{K\, r \sin K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 + 1}} \cos\theta \frac{\partial}{\partial t} \\
X_{10} &= Y_7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_4 &= \operatorname{sh} K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_4 \\
&+ \frac{K\, r \operatorname{ch} K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 - 1}} \operatorname{sh}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{dt} \\
X_5 &= \operatorname{sh} K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_5 \\
&+ \frac{K\, r \operatorname{ch} K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 - 1}} \operatorname{sh}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial t} \\
X_6 &= \operatorname{sh} K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_6 \\
&+ \frac{K\, r \operatorname{ch} K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 - 1}} \operatorname{ch}\theta \frac{\partial}{\partial t} \\
X_7 &= \operatorname{ch} K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_4 \\
&+ \frac{K\, r \operatorname{sh} K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 - 1}} \operatorname{sh}\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial t} \\
X_8 &= \operatorname{ch} K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_5 \\
&+ \frac{K\, r \operatorname{sh} K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 - 1}} \operatorname{sh}\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial t} \\
X_9 &= \operatorname{ch} K \int \sqrt{c_1}\, dt\ Y_6 \\
&+ \frac{K\, r \operatorname{sh} K \int \sqrt{c_1}\, dt}{\sqrt{c_1}\sqrt{K^2 r^2 - 1}} \operatorname{ch}\theta \frac{\partial}{\partial t} \\
X_{10} &= Y_7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_4 &= Y_4 + \mathscr{C}_1(t) \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\varphi\mathscr{C}(t)}{\sqrt{c_1}} \frac{\partial}{\partial t} \\
X_5 &= Y_5 + \mathscr{C}_1(t) \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\theta\mathscr{C}(t)}{\sqrt{c_1}} \frac{\partial}{\partial t} \\
X_6 &= Y_6 + \frac{\mathscr{C}(t)}{\sqrt{c_1}} \frac{\partial}{\partial t} \\
X_7 &= \mathscr{C}(t) \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\varphi}{\sqrt{c_1}} \frac{\partial}{\partial t} \\
X_8 &= \mathscr{C}(t) \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\theta}{\sqrt{c_1}} \frac{\partial}{\partial t} \\
X_9 &= -\, r\, \mathscr{C}(t) \frac{\partial}{\partial r} + \theta\, \mathscr{C}(t) \frac{\partial}{\partial\theta} \\
&\quad + \varphi\, \mathscr{C}(t) \frac{\partial}{\partial\varphi} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{c_1}} [\frac{1}{2} (\theta^2 + \varphi^2) + \frac{1}{2K^2 r^2} \\
&+ \mathscr{C}_1(t)] \frac{\partial}{\partial t} \\
X_{10} &= Y_7 \\
\text{où : } \mathscr{C}(t) &= \int \sqrt{c_1(t)}\, dt \\
\mathscr{C}_1(t) &= \int \sqrt{c_1(t)}\, \mathscr{C}(t) dt
\end{aligned}
$$

TABLE 18

Algèbres de Lie

		S_1S_3	H_1H_3	C_1C_3		S_1S_3	H_2H_3	C_1C_3
	$(X_1, X_2) =$	X_3	X_3	0				
G_3	$(X_2, X_3) =$	X_1	X_1	X_1				
	$(X_3, X_1) =$	X_2	X_2	X_2				
G_4	$(X_i, X_4) =$ $i = 1, 2, 3$	0	0	0				
	$(X_1, X_4) =$	0	0	X_3	$(X_3, X_4) =$	$-X_5$	$-X_5$	$-X_5$
	$(X_1, X_5) =$	X_6	X_6	X_6	$(X_3, X_5) =$	X_4	X_4	X_4
	$(X_1, X_6) =$	$-X_5$	X_5	X_1	$(X_3, X_6) =$	0	0	0
	$(X_2, X_4) =$	X_6	X_6	X_6	$(X_4, X_5) =$	FX_3	$-FX_3$	0
	$(X_2, X_5) =$	0	0	$-X_3$	$(X_5, X_6) =$	$-FX_1$	FX_1	$-X_5$
G_6	$(X_2, X_6) =$	$-X_4$	X_4	X_2	$(X_6, X_4) =$	FX_2	$-FX_2$	X_4
	$F = \omega(\omega + r\omega' - X\dot{\omega}) = c^{ste}$.							

G_7 : comme G_6 excepté : $F = K^2$ et $(X_i, X_7) = 0 \quad i = 1, \ldots, 6$

comme G_6 excepté $F = K^2$ pour $S_1S_3H_1H_3$ et
G_{10} : $(X_4, X_5) = -FX_3$, $(X_5, X_6) = -X_5 + FX_1$, $(X_6, X_4) = X_4 - FX_2$ où
$F = 2\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}^2 = c^{ste}$ pour C_1 et C_3. En plus :

TABLE 18 (*suite*)

		S_1S_3	H_1H_3	C_1C_3		S_1S_3	H_1H_3	C_1C_3		S_1S_3	H_1H_3	C_1C_3
G_{10}	$(X_1, X_7) =$	0	0	0	$(X_4, X_7) =$	$-KX_{10}$	$-KX_{10}$	$-X_9+FX_{10}$	$(X_7, X_8) =$	K^2X_3	K^2X_2	X_3
	$(X_1, X_8) =$	X_9	X_9	X_{10}	$(X_4, X_8) =$	0	0	0	$(X_8, X_9) =$	$-K^2X_1$	$-K^2X_1$	$X_5 - FX_1$
	$(X_1, X_9 =$	$-X_8$	X_8	X_8	$(X_4, X_9) =$	0	0	0	$(X_9, X_7) =$	K^2X_2	K^2X_2	$-X_4+FX_2$
	$(X_2, X_7) =$	X_9	X_9	X_{10}	$(X_5, X_7) =$	0	0	0	$(X_4, X_{10}) =$	$-KX_7$	$-KX_7$	$-X_7$
	$(X_2, X_8) =$	0	0	0	$(X_5, X_8) =$	$-KX_{10}$	$-KX_{10}$	$-X_9+FX_{10}$	$(X_5, X_{10}) =$	$-KX_8$	$-KX_8$	$-X_8$
	$(X_2, X_9) =$	$-X_7$	X_7	X_7	$(X_5, X_9) =$	0	0	0	$(X_6, X_{10}) =$	$-KX_9$	$-KX_9$	X_{10}
	$(X_3, X_7) =$	$-X_8$	$-X_8$	$-X_8$	$(X_6, X_7) =$	0	0	0	$(X_7, X_{10}) =$	KX_4	$-KX_4$	$-X_2$
	$(X_3, X_8) =$	X_7	X_7	X_7	$(X_6, X_8) =$	0	0	0	$(X_8, X_{10}) =$	KX_5	$-KX_5$	$-X_1$
	$(X_3, X_9) =$	0	0	0	$(X_6, X_9) =$	$-KX_{10}$	$-KX_{10}$	$-X_9+FX_{10}$	$(X_9, X_{10}) =$	KX_6	$-KX_6$	$-X_6$
	$(X_i, X_{10}) =$ $i = 1, 2, 3$	0	0	0								

8. Retour sur les espaces $V_2(r, t)$

TABLE 19. — *Opérateurs* X_α *de la surface* $V_2(r, t)$ *à courbure constante*

	$\lambda \neq 0$		$\lambda = 0 \quad K \neq 0$
$\lambda > 0$	$X_1 = -\frac{\dot{A}}{2Ak}\,\mathrm{ch}\,kr\,\frac{\partial}{\partial r} + \mathrm{sh}\,kr\,\frac{\partial}{\partial t}$ $X_2 = -\frac{\dot{A}}{2Ak}\,\mathrm{sh}\,kr\,\frac{\partial}{\partial r} + \mathrm{ch}\,kr\,\frac{\partial}{\partial t}$ $X_3 = \frac{\partial}{\partial r}\,(\mathscr{L}^-)$ ou $X_1 = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial r}\,(\mathscr{L}^0)$ (quand $K = 0$)	$\dot{A} > 0$	$X_1 = \sqrt{\frac{k}{2}}\left[-\left(\frac{kr^2}{2} + \frac{1}{2Ak} + 1\right)\frac{\partial}{\partial r} + r\,\frac{\partial}{\partial t}\right]$ $\left(X_1 = \frac{\partial}{\partial r}\right)$ $X_2 = -kr\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} \quad \left(X_2 = -\frac{\partial}{\partial t}\right)$ $X_3 = \sqrt{\frac{k}{2}}\left[-\left(\frac{kr^2}{2} + \frac{1}{2Ak} - 1\right)\frac{\partial}{\partial r} + r\,\frac{\partial}{\partial t}\right]$ $\left(X_3 = t\,\frac{\partial}{\partial r} + r\,\frac{\partial}{\partial t}\right.$ quand $\left.K = 0\right)$ $\mathscr{L}^-$ (ou $\mathscr{L}^0$)
$\lambda < 0$	$X_1 = \frac{\dot{A}}{2Ak}\cos kr\,\frac{\partial}{\partial r} + \sin kr\,\frac{\partial}{\partial t}$ $X_2 = -\frac{\dot{A}}{2Ak}\sin kr\,\frac{\partial}{\partial r} + \cos kr\,\frac{\partial}{\partial t}$ $X_3 = \frac{\partial}{\partial r}$ $(\mathscr{L}^+)$	$\dot{A} < 0$	$X_1 = \sqrt{\frac{k}{2}}\left[\left(\frac{kr^2}{2} + \frac{1}{2Ak} + 1\right)\frac{\partial}{\partial r} + r\,\frac{\partial}{\partial t}\right]$ $X_2 = kr\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t}$ $X_1 = \sqrt{\frac{k}{2}}\left[-\left(\frac{kr^2}{2} + \frac{1}{2Ak} - 1\right)\frac{\partial}{\partial r} - r\,\frac{\partial}{\partial t}\right]$ $(\mathscr{L}^-)$

$\lambda > 0$	$X_1 = \text{sh}\, kt \frac{\partial}{\partial r} - \frac{C'}{2Ck} \text{sh}\, kt \frac{\partial}{\partial t}$ $X_2 = \text{ch}\, kt \frac{\partial}{\partial r} - \frac{C'}{2Ck} \text{sh}\, kt \frac{\partial}{\partial t}$ $X_3 = \frac{\partial}{\partial t} (\mathscr{L}^-)$ ou $X_3 = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} (\mathscr{L}^o)$ (quand $K = 0$)	$C' > 0$	$X_1 = \sqrt{\frac{k}{2}} \left[-\left(\frac{kt^2}{2} + \frac{1}{2Ck} - 1\right) \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial r} \right]$ $\left(X_1 = \frac{\partial}{\partial t}\right)$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial r} - kt \frac{\partial}{\partial t} \qquad \left(X_2 = -\frac{\partial}{\partial r}\right)$ $X_3 = \sqrt{\frac{k}{2}} \left[t \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{kt^2}{2} + \frac{1}{2Ck} - 1\right) \frac{\partial}{\partial t} \right]$ $(X_3 = t \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial t}$ quand $K = 0)$ $\mathscr{L}^-$ (ou $\mathscr{L}^o$)
$\lambda < 0$	$X_1 = \sin kt \frac{\partial}{\partial r} + \frac{C'}{2Ck} \cos kt \frac{\partial}{\partial t}$ $X_2 = \cos kt \frac{\partial}{\partial r} - \frac{C'}{2Ck} \sin kt \frac{\partial}{\partial t}$ $X_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $(\mathscr{L}^+)$	$C' < 0$	$X_1 = \sqrt{\frac{k}{2}} \left[t \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{kt^2}{2} + \frac{1}{2Ck} + 1\right) \frac{\partial}{\partial t} \right]$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial r} + kt \frac{\partial}{\partial t}$ $X_3 = \sqrt{\frac{k}{2}} \left[-t \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{kt^2}{2} + \frac{1}{2Ck} - 1\right) \frac{\partial}{\partial t} \right]$ $(\mathscr{L}^-)$

TABLE 20

Algèbres de Lie possibles d'une $V_2(r, t)$ *à courbure constante* $(k > 0)$

$\mathscr{L}^+$	$\mathscr{L}^-$	$\mathscr{L}^0$
$(X_1, X_2) = k\,X_3$	$= -k\,X_3$	$= 0$
$(X_2, X_3 = k\,X_1$	$= -k\,X_1$	$= X_1$
$(X_3, X_1) = k\,X_2$	$= -k\,X_2$	$= X_2$

TABLE 21

Algèbres de Lie des espaces S_2, H_2, C_2

		S_2	H_2	C_2
G_3	$(X_1, X_2) =$	X_3	X_3	0
	$(X_2, X_3) =$	X_1	X_1	X_1
	$(X_3, X_1) =$	X_2	X_2	X_2

G_4 $(X_i, X_4) = 0$ $i = 1,2,3$

G_6 $(X_i, X_\alpha) = 0$ $i = 1, 2, 3$ $\alpha = 4, 5, 6$ $(X_4, X_5) = k\,X_6$ $(X_5, X_6) = \pm\, kX_4$ $(X_6, X_4) = k\,X_5$

ou $(X_4, X_5) = 0$ $(X_5, X_6) = X_4$ $(X_6, X_4) = X_5$

9. Espaces homogènes

Ce sont ceux à groupe de mouvements transitifs.

TABLE 22

Espaces homogènes

	S_1	H_1	C_1
G_{10}	$A = \dfrac{1}{K^2r^2 + 1}$ $C = c_1(t)\,(K^2r^2 + 1)$	$A = \dfrac{1}{K^2r^2 - 1}$ $C = c_1(t)\,(K^2r^2 - 1)$	$A = \dfrac{1}{K^2r^2}$ $C = r^2c_1(t)$
G_7	$A = \dfrac{1}{K^2r^2 + 1}$ $C = c_1(t)$	$A = \dfrac{1}{K^2r^2 - 1}$ $C = c_1(t)$	$A = \dfrac{1}{K^2r^2}$ $C = c_1(t)$

10. Propriétés des constantes de structure

TABLE 23

Propriétés des groupes de mouvements

	Simple	Semi-Simple	Intégrable	Non-Intégrable	Produit direct de 2 s/groupes invariants	Centre	Parfait	Symétrique
$G_{3[S,H]}$	×	×					×	
$G_{3[C]}$			×					
$G_{4[S,H]}$					×	×	×	
$G_{4[C]}$			×		×	×		
G_6 sauf S_2H_2 [S, H]	×	×						
G_6 sauf C_2 [C]				×				
G_6 S_2H_2 : type (I), (II)		×			×			
G_6 S_2H_2 : type (III), C_2					×			
$G_{7[S,H]}$					×	×		×
$G_{7[C]}$					×	×		
$G_{10[S,H]}$	×	×					×	×
$G_{10[C]}$				×				

BIBLIOGRAPHIE

[1] Eisenhart L. P., Riemannian Geometry. Princeton University Press. 1949.

[2] Kobayashi S. et Nomizu K., Foundations of Differential Geometry. *Interscience Tracts*, vol. I, nº 5, 1963.

[3] Laugwitz D., Differential and Riemannian Geometry. Academic Press. 1965.

[4] Lichnerowicz., Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Masson, Paris, 1955.

[5] Mansfield M. J., Introduction to Topology. Van Nostrand, Princeton, 1963.

[6] Rozet O., Calcul tensoriel et géométrie infinitésimale. Univ. de Liège, 1966.

[7] Synge J. L., Relativity, the General Theory. North Holland Publ., 1960.

[8] Vranceanu G., Leçons de géométrie différentielle. Éd. Acad. Rép. Pop. Roumaine, Bucarest, 1957.

[9] Eisenhart L. P., An Introduction to Differentiable Geometry. Princeton University Press, 1940.

[10] Thomas T. Y., Riemannian Spaces of Class one and their characterization. *Acta Math.*, 67, p. 169, 1936.

[11] Cartan E., Sur certaines formes riemanniennes à groupe fondamental simple. *Ann. Sc. de l'E.N.S.*, t. XLIV, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

[12] Cartan E., La théorie des groupes continus et finis et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile. *Cah. Sc.*, XVIII, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[13] Eisenhart L. P., Continuous Groups of Transformations. Dover, New-York, 1961.

[14] Petrow A. S., Einstein Räume. Akademie Verlag, Berlin, 1964.

[15] Bompiani E., Spazi riemanniani luoghi di varietà totalmente geodetiche. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **48**, p. 121, 1924.

[16] Bompiani E., Spazi riemanniani luoghi di varietà totalmente geodetiche. *Rend. R. Acad. Lincei*, V, vol. XXXII, p. 14, 1923.

[17] Bompiani E., Studi sugli spazi curvi. *Atti R. Is. Veneto*, LXXX, 2a, p. 355, 839 e 1113, 1920-1921.

[18] Cartan E., Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. *Cah. Sc.*, II, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[19] Chazy J., Sur le champ de gravitation de 2 masses fixes dans la théorie de la Relativité. *Bull. Soc. Math. de France*, **52**, p. 17, 1924.

[20] Coxeter H. S. M., Introduction to Geometry. John Wiley, New York, 1961.

[21] Coxeter H. S. M., Non-euclidean Geometry. Univ. of Toronto Press, 1965.

[22] Darmois G., Équations de la gravitation einsteinienne. *Mém. des Sc. Math.*, **25**, 1927.

[23] Hadamard J., Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions. *Bull. Soc. Math.*, t. XXV, 1e partie, p. 37, 1901.

[24] Kulczycki S., Non-euclidean Geometry. Pergamon Press, 1961.

[25] Ricci G., Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e delle loro curvatura. *Rend. R. Acad. Lincei*, V, vol. XI, p. 355, 1902.

[26] Ricci G., Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque. *Rend. R. Acad. Lincei*, V, vol. XII, p. 409, 1903.

[27] Souriau J. M., Géométrie et Relativité. Hermann, Paris, 1964.

[28] Schouten J. A., On the Number of Degrees of Freedom of the Geodetically Moving Systems. Kon. Akad. Wet. Amsterdam, XXI, p. 607, 1918.

[29] Levi-Civita, ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. *Rend. R. Acad. Lincei*, V, vol. XXVII, fasc. 9-10, p. 240, 1918.

[30] Levi-Civita, Statica Einsteiniana. *Rend. R. Acad. Lincei*, V, vol. XXVI, fasc. 9, p. 458, 1917.

[31] Takeno H., The Theory of Spherically Symmetric Space-Times. *J. of Math. Soc. of Japan*, **3**, p. 317, 1951 and *J. of Sc. of Hiroshima Univ.*, Ser. A, **16**, p. 67 and 291, 1952.

[32] Debever R., Étude géométrique du tenseur de Riemann-Christoffel des espaces de Riemann à 4 dimensions. *Bull. Acad. R. de Belgique*, **42**, p. 313, 1956.

[33] Geheniau J., Classification des espaces d'Einstein. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **244**, p. 723, 1957.

[34] Debever R., La super-énergie en relativité générale. *Bull. Soc. Math. de Belg.*, t. X, f. 2, p. 112, 1958.

[35] Cahen M., Debever R., Defrise L., A complex Vectorial Formalism in General Relativity. *J. of Math. and Mech.*, **16**, n °7, p. 765, 1967.

[36] Eiesland J., The Group of Motions of an Einstein Space. *Trans. of Americ. Math. Soc.*, **27**, p. 213, 1925.

TABLE DES MATIÈRES