MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE

CINQUIÈME SÉRIE
TOME XI
FASCICULE 3

PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LES OPÉRATEURS MATRICIELS DE DÉRIVATION HYPERBOLIQUES DES PREMIER ET SECOND ORDRES

PAR

P. LÉONARD
Docteur en Sciences Mathématiques
Assistant à l'Université de Liège

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE DE BELGIQUE, DU PATRIMOINE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE ET DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA CULTURE

SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ :
UNIVERSITÉ
7 PLACE DU XX AOÛT
LIÈGE. BELGIQUE

PROBLÈMES AUX LIMITES POUR LES OPÉRATEURS MATRICIELS DE DÉRIVATION HYPERBOLIQUES DES PREMIER ET SECOND ORDRES

PAR

P. LÉONARD

Docteur en Sciences Mathématiques
Assistant à l'Université de Liège

INTRODUCTION

Cette étude concerne les problèmes aux limites de DIRICHLET-NEUMANN pour les opérateurs matriciels de dérivation hyperboliques, des premier et second ordres, linéaires à coefficients constants. Ces problèmes sont posés dans un ouvert de l'espace euclidien à n dimensions.

Nous adoptons une formulation généralisée débarrassée au maximum de toute hypothèse superflue tant sur les données que sur l'ouvert. La solution du problème ainsi posé existe toujours, est unique et se réduit à la solution du problème classique, si celui-ci peut être considéré.

On pose généralement de tels problèmes dans le cadre des espaces de HILBERT, ce qui impose des restrictions à l'infini lorsque l'ouvert n'est pas borné. Pour lever ces restrictions et mettre en évidence le caractère local, lié à l'hyperbolicité, des propriétés de la solution, nous nous plaçons dans des espaces plus généraux attachés à l'énergie et conservant ainsi une signification physique. Bien entendu, si on impose aux données des conditions d'intégrabilité à l'infini, la formulation adoptée se réduit à la formulation hilbertienne.

Nos problèmes sont résolus par une méthode nouvelle d'après une idée de C. H. WILCOX (*) que nous avons approfondie et généralisée.

Cette méthode est directe et résout le problème à partir de

(*) Dans [30], [31], [32], C. H. WILCOX résout le problème de NEUMANN pour les opérateurs du premier ordre et un problème particulier pour l'équation des ondes.

l'opérateur donné, sans passer par le problème stationnaire correspondant. Elle est basée sur une inégalité d'énergie établie à priori, qui permet de traiter le problème pour les données assez régulières et, par densité, de passer au cas général.

Pour le premier ordre, c'est la seule connue pour poser et résoudre ces problèmes au degré de généralité que nous nous sommes imposé. La méthode courante de réduction du système du premier ordre à une équation d'ordre supérieur impose des restrictions inadmissibles.

En ce qui concerne le second ordre, il semble que, dans les conditions générales où nous nous plaçons, les méthodes exploitées jusqu'à présent (transformation de LAPLACE, méthodes spectrales) ne peuvent fournir aussi facilement les mêmes précisions relatives à la nature et aux propriétés de la solution.

Dans les deux cas, nous retrouvons d'une manière naturelle un fait caché, que seule la résolution spectrale faisait apparaître, à savoir que la distribution solution est en fait la distribution d'une fonction. De plus, la méthode met particulièrement en évidence les propriétés, liées à l'hyperbolicité, des ensembles d'action et de dépendance.

Débordant légèrement du cadre des opérateurs hyperboliques, nous avons traité rapidement, par la même méthode, les problèmes aux limites relatifs aux opérateurs stationnaires associés aux opérateurs hyperboliques considérés. Insistons sur le fait que ces opérateurs ne sont pas nécessairement elliptiques ou auto-adjoints.

Nous exprimons toute notre gratitude à Monsieur le Professeur H. G. GARNIR pour les nombreux conseils qu'il nous a donnés.

Nous remercions vivement Monsieur J. GOBERT qui a discuté avec nous certaines parties de ce travail.

Chapitre I

FONCTIONS VECTORIELLES PARAMÉTRIQUES

Intégrales à valeurs vectorielles

1. — Nous considérons des fonctions de $x \in \Omega$, ouvert connexe quelconque de l'espace euclidien à n dimensions E_n, et de $t \in]a, b[$, intervalle ouvert borné ou non de E_1, à valeurs dans C^N.

Nous représentons une telle fonction par

$$\vec{u}_t = \vec{u}_t(x) = (u_{t,1}(x), \ldots, u_{t,N}(x)).$$

En ce qui concerne le calcul vectoriel et le calcul matriciel, nous adoptons les notations utilisées dans [15] (*) et pour les espaces fonctionnels, celles de [18].

Dans la suite, ω désignera toujours un sous-ouvert borné de Ω.

Nous convenons encore de représenter l'intégrale

$$\int_\Omega \vec{f} \times \bar{\vec{g}}\, dx$$

par

$$(\vec{f}, \vec{g})$$

si le produit scalaire $\vec{f} \times \bar{\vec{g}}$ est intégrable dans Ω ; si les fonctions $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont dans $L_2(\Omega)$ (en abrégé L_2), ce symbole représente le produit scalaire dans L_2.

Nous désignons par $L_2^b(\Omega)$ (en abrégé L_2^b) l'ensemble des fonctions de $x \in \Omega$ qui sont dans $L_2(\omega)$ quel que soit ω.

(*) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin du travail.

Cet espace linéaire est muni du système de semi-normes défini par

$$p_\omega(\vec{f}) = \|\vec{f}\|_{L_2(\omega)}. \text{ (*)}$$

Il est évident que ce système de semi-normes est équivalent au système obtenu en choisissant pour ouverts ω les ouverts

$$\omega_n = \{x : |x| < n, x \in \Omega\}, n = 1, 2, \ldots.$$

Comme ce système est dénombrable et comme l'égalité dans L_2^b est définie pp., l'espace L_2^b est un espace de FRECHET séparé.

Désignons par $L_2^c(\Omega)$ (en abrégé L_2^c) le sous-espace linéaire de L_2 des fonctions de L_2 à support compact dans $\overline{\Omega}$, muni de la norme de L_2.

Si $\langle\vec{f}, f'\rangle$ est une fonctionnelle linéaire bornée définie sur $\left\{\begin{matrix} L_2^b \\ L_2^c \end{matrix}\right\}$, alors

$$\langle\vec{f}, f'\rangle = (\vec{f}, \vec{g})$$

avec $\vec{g} \in \left\{\begin{matrix} L_2^c \\ L_2^b \end{matrix}\right\}$.

En effet, si $\vec{f} \in \left\{\begin{matrix} L_2^b \\ L_2^c \end{matrix}\right\}$, il existe ω tel que

$$|\langle\vec{f}, f'\rangle| \leqslant C \|\vec{f}\|_{L_2(\omega)},$$

avec $\omega \left\{\begin{matrix} \text{fixé} \\ : \overline{\omega} \supset [\vec{f}] \end{matrix}\right\}$, $[\vec{f}]$ désignant le support de $\vec{f}$, et

$$\langle\vec{f}, f'\rangle = \langle\vec{f}\delta_\omega, f'\rangle,$$

δ_ω étant la fonction caractéristique de ω.

Si ω est fixé, en vertu du théorème de F. RIESZ, il existe $\vec{g} \in L_2(\omega)$ tel que

$$\langle\vec{f}, f'\rangle = (\vec{f}, \vec{g}\delta_\omega)$$

puisque

$$\{\vec{f}\delta_\omega : \vec{f} \in \left\{\begin{matrix} L_2^b \\ L_2^c \end{matrix}\right\}\} = L_2(\omega).$$

(*) Au sujet de la théorie des espaces linéaires semi-normés, nous renvoyons à H. G. GARNIR-M. DE WILDE-J. SCHMETS. Espaces linéaires semi-normés. *Publication Séminaire Analyse Math. et Algèbre.* Université de Liège (1963).

Si $\vec{f} \in L_2^b$, $\vec{g}\delta_\omega \in L_2^c$ réalise la fonctionnelle.

Si $\vec{f} \in L_2^c$, $\vec{g}\delta_\omega$ réalise la fonctionnelle restreinte aux $\vec{f}$ à support compact dans $\overline{\omega}$.

Si $\vec{g}_1\delta_{\omega_1}$ correspond à ω_1, et $\vec{g}_2\delta_{\omega_2}$ à ω_2, montrons que

$$\vec{g}_1 = \vec{g}_2$$

dans $\omega_1 \cap \omega_2$.

Il suffit en effet de remarquer que si

$$[\vec{f}] \subset \overline{\omega_1 \cap \omega_2} \subset \overline{\omega}_1 \cap \overline{\omega}_2 \subset \begin{Bmatrix} \overline{\omega}_1 \\ \overline{\omega}_2 \end{Bmatrix},$$

alors

$$\langle \vec{f}, f' \rangle = (\vec{f}, \vec{g}_1\delta_{\omega_1}) = (\vec{f}, \vec{g}_2\delta_{\omega_2}) = (\vec{f}, \vec{g}_1\delta_{\omega_1 \cap \omega_2})$$
$$= (\vec{f}, \vec{g}_2\delta_{\omega_1 \cap \omega_2}),$$

cette dernière égalité entraînant l'égalité de $\vec{g}_1$ et $\vec{g}_2$ dans $\omega_1 \cap \omega_2$.

On définit ainsi de proche en proche dans Ω une fonction $\vec{g} \in L_2^b$.

Remarquons que, *si* $\langle \vec{f}, f' \rangle$ *est défini sur* L_2^c, *le théorème précédent est vrai si*

$$| \langle \vec{f}, f' \rangle | \leqslant C(\omega) \, || \vec{f} \, ||_{L_2(\omega)},$$

c'est-à-dire lorsque la fonctionnelle est bornée chaque fois qu'elle est restreinte à $L_2(\omega)$ *pour tout* ω.

Si la fonctionnelle considérée est antilinéaire, l'élément $\vec{g}$ qui la réalise est alors tel que

$$\langle \vec{f}, f' \rangle = (\vec{g}, \vec{f}).$$

Étant donné $\vec{u}_t$ mesurable dans $\Omega \times]a, b[$, nous dirons que $\vec{u}_t$ *est localement intégrable dans* $[a, b]$, *si*

$$\vec{u}_t \in L_2^b$$

pour presque tout $t \in]a, b[$, *et si*

$$|| \, \vec{u}_t \, ||_{L_2(\omega)} \in L_1^{\mathrm{loc}}([a, b])$$

pour tout ω.

L'ensemble de ces fonctions est représenté par

$$L_1^{\mathrm{loc}}([a, b] \, ; L_2^b).$$

Si $]t_0, t_1[$ est un intervalle borné $\subset\ ]a, b[$, et si $\vec{u}_t \in L_1^{loc}([a, b] ; L_2^b)$, on définit *l'intégrale dans* $[t_0, t_1]$ *de* $\vec{u}_t$ *comme l'élément de* L_b^2 *qui réalise la fonctionnelle antilinéaire définie sur* L_2^c

$$\int_{t_0}^{t_1} (\vec{u}_t, \vec{f})\, dt.$$

Cette fonctionnelle est visiblement antilinéaire et, quel que soit ω, on a l'inégalité

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} (\vec{u}_t, \vec{f})\, dt \right| \leqslant \left(\int_{t_0}^{t_1} \| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)}\, dt \right) \| \vec{f} \|_{L_2(\omega)},$$

pour tout $\vec{f} \in L_2(\omega)$.

L'intégrale dans $[t_0, t_1]$ de $\vec{u}_t$ est représentée par

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t\, dt.$$

2. — Désignons par

$$L_2^{loc}([a, b] ; L_2^b)$$

l'ensemble des fonctions de $L_1^{loc}([a, b] ; L_2^b)$ telles que

$$\| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \in L_2^{loc}([a, b])$$

pour tout ω.

La structure de ces fonctions est précisée par le théorème suivant.

Les ensembles $L_2^{loc}([a, b] ; L_2^b)$ *et* $L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ *coïncident.*

D'une part, si $\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$, alors, pour tout ω,

$$\int_{\omega \times]t_0, t_1[} | \vec{u}_t |^2\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)}^2\, dt,$$

en vertu du théorème de G. Fubini, et $\vec{u}_t \in L_2^{loc}([a, b] ; L_2^b)$.

D'autre part, si $\vec{u}_t \in L_2^{loc}([a, b] ; L_2^b)$, alors

$$\int_{t_0}^{t_1} \| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)}^2\, dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_\omega | \vec{u}_t |^2\, dx$$

et $\vec{u}_t \in L_2(\omega \times]t_0, t_1[)$ vu le théorème de L. Tonelli.

Comme tout sous-ouvert borné de $\Omega \times]a, b[$ peut être recouvert par un ouvert borné de la forme $\omega \times]t_0, t_1[$, on déduit que $\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$.

Notons que l'intégrale définie ci-dessus possède entre autres les propriétés immédiates suivantes :

$$\text{a)} \qquad \sum_{i=1}^{p} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \vec{u}_t \, dt = \int_{a_1}^{a_{p+1}} \vec{u}_t \, dt,$$

$$\text{b)} \qquad \sum_{i=1}^{p} c_i \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t^{(i)} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{p} c_i \, \vec{u}_t^{(i)} dt.$$

Dérivées paramétriques généralisées

3. — Nous dirons qu'*une suite de fonctions* $\vec{u}^m \in L_2^b$ *converge dans* L_2^b *vers* $\vec{u} \in L_2^b$, *lorsque* m *tend vers* M, *si*

$$\lim_{m \to M} \| \vec{u}^m - \vec{u} \|_{L_2(\omega)} = 0$$

quel que soit ω, ce qui s'écrit

$$\vec{u}^m \underset{L_2^b}{\to} \vec{u}.$$

L'espace L_2^b étant de Frechet, il est aisé de voir que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite converge dans* L_2^b *est qu'elle soit de* A. Cauchy *dans* $L_2(\omega)$ *pour tout* ω.

Cette proposition n'exprime d'ailleurs que la complétion de L_2^b.

4. — *Une fonction* $\vec{u}_t$ *localement intégrable dans* $[a, b]$ *est dite*

faiblement continue dans $]a, b[$ si

$$\lim_{h \to 0} | (\vec{u}_{t+h}, \vec{f}) - (\vec{u}_t, \vec{f}) | = 0$$

pour tout $\vec{f} \in L_2^c$,

fortement continue dans $]a, b[$ si

$$\vec{u}_{t+h} \underset{L_2^b}{\to} \vec{u}_t$$

lorsque h tend vers 0,

p fois faiblement dérivable s'il existe $\vec{v}_t^{(s)}$ localement intégrable dans $[a, b]$ tel que

fortement dérivable s'il existe $\vec{v}_t \in L_2^b$ pour presque tout t tel que

$$(-1)^s \int_a^b (\vec{u}_t, \vec{f})\, D_t^s\, \varphi(t)\, dt$$

$$= \int_a^b (\vec{v}_t^{(s)}, \vec{f})\, \varphi(t)\, dt$$

quels que soient $s \leqslant p$, $f \in L_2^b$, et $\varphi(t) \in D(]a, b[)$,

indéfiniment faiblement dérivable si elle est p fois faiblement dérivable quel que soit p.

$$\frac{1}{h}(\vec{u}_{t+h} - \vec{u}_t) \underset{L_2^b}{\rightarrow} \vec{v}_t$$

lorsque h tend vers 0,

p fois fortement dérivable si les dérivées successives d'ordre 0, 1, ..., $p - 1$ sont fortement dérivables,

indéfiniment fortement dérivable si elle est p fois fortement dérivable quel que soit p.

Nous convenons de représenter par $D_t^p\, \vec{u}_t$ la dérivée d'ordre p de $\vec{u}_t$ en spécifiant le type considéré lorsque le contexte ne lève pas l'ambiguité.

Les dérivées ainsi définies sont évidemment uniques.

5. — Les théorèmes suivants montrent quelques propriétés des dérivées faibles et fortes.

Si $\vec{u}_t$ est fortement dérivable, l'expression $(\vec{u}_t, \vec{f})$ est dérivable quel que soit $\vec{f} \in L_2^c$.

La définition de la dérivée forte entraîne en effet que

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\vec{u}_{t+h} - \vec{u}_t}{h}, \vec{f} \right) = (D_t \vec{u}_t, \vec{f}),$$

c'est-à-dire

$$D_t(\vec{u}_t, \vec{f}) = (D_t \vec{u}_t, \vec{f}).$$

Toute dérivée forte localement intégrable dans $[a, b]$ est faible.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

En effet, $(\vec{u}_t, \vec{f})$ est dérivable ; sa dérivée coïncide avec sa dérivée au sens des distributions ; comme elle s'écrit $(D_t\vec{u}_t, \vec{f})$, le théorème est démontré vu la définition de la dérivée faible.

Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons toujours *la dérivée forte localement intégrable dans $[a, b]$*.

Les fonctions indéfiniment fortement dérivables sont denses dans

$$L_2^b(\Omega \times]a, b[).$$

Considérons la fonction

$$\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - t^2}}}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\, dx}\, \delta_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(t)$$

Cette fonction est dans $D(E_1)$ et son support $[\rho_\varepsilon(t)]$ est $[-\varepsilon, \varepsilon]$. On trouvera une étude détaillée de cette fonction dans [14].

Prolongeons $\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ par O dans $\complement_{E_1}]a, b[$, nous notons encore $\vec{u}_t$ la fonction prolongée.

Il est évident que $\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times E_1)$.

Considérons

$$\vec{u}_t^\varepsilon = [\vec{u}_\tau * \rho_\varepsilon(\tau)]_t.$$

Cette fonction est définie pour tout t, elle est dans $L_2^b(\Omega \times E_1)$, et indéfiniment fortement dérivable dans E_1.

En effet, pour tout $t \in E_1$,

$$\| \vec{u}_\tau \rho_\varepsilon(t - \tau) \|_{L_2(\omega)} = \rho_\varepsilon(t - \tau) \| \vec{u}_\tau \|_{L_2(\omega)} \in L_1(E_1)$$

et, de plus,

$$\| [\vec{u}_\tau * \rho_\varepsilon(\tau)]_t \|_{L_2(\omega)} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(t - \tau) \| \vec{u}_\tau \|_{L_2(\omega)} d\tau \in L_2^{\mathrm{loc}}(E_1),$$

puisque $\rho_\varepsilon(t) \in D(E_1)$ et $\| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \in L_2^{\mathrm{loc}}(E_1)$.

Posons

$$\vec{u}_t^{\varepsilon, p} = [\vec{u}_\tau * D_\tau^p \rho_\varepsilon(\tau)]_t.$$

Cette fonction possède les mêmes propriétés que $\vec{u}_t^\varepsilon$, car les considérations précédentes restent valables si ρ_ε est remplacé par $D_t^p \rho_\varepsilon$.

Montrons que $\vec{u}_t^{\varepsilon, p+1}$ est la dérivée forte de $\vec{u}_t^{\varepsilon, p}$ quel que soit p entier positif ou nul.

On a en effet, quel que soit p,

$$\left\| \frac{\vec{u}^{\varepsilon, p}_{t+h} - \vec{u}^{\varepsilon, p}_t}{h} - \vec{u}^{\varepsilon, p+1}_t \right\|_{L_2(\omega)}$$

$$= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{u}_{t-\tau} \left\{ \frac{[D^p_t \rho_\varepsilon(t)]_{\tau+h} - D^p_\tau \rho_\varepsilon(\tau)}{h} - D^{p+1}_\tau \rho_\varepsilon(\tau) \right\} d\tau \right\|_{L_2(\omega)}$$

$$\leqslant [\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \| \vec{u}_{t-\tau} \|_{L_2(\omega)} d\tau] \sup_{t \in E_1} \left| \frac{[D^p_t \rho_\varepsilon]_{t+h} - D^p_t \rho_\varepsilon}{h} - D^{p+1}_t \rho_\varepsilon \right| ;$$

le dernier membre ci-dessus tend vers 0, lorsque h tend vers 0, car ρ_ε est indéfiniment uniformément dérivable.

Montrons que

$$\vec{u}^\varepsilon_t \xrightarrow[L^b_2(\Omega \times]a, b[)]{} \vec{u}_t$$

lorsque ε tend vers 0.

Il suffit de montrer que

$$\| \vec{u}^\varepsilon_t - \vec{u}_t \|_{L_2(\omega \times]t_0, t_1[)} \to 0$$

quel que soit $\omega \times]t_0, t_1[$ borné $\subset \Omega \times]a, b[$.

Posons

$$\vec{f}^\varepsilon_t = \vec{u}^\varepsilon_t - \vec{u}_t.$$

On a

$$\| \vec{f}^\varepsilon_t \|^2_{L_2(\omega \times]t_0, t_1[)} = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{f}^\varepsilon_t, \int_{-\infty}^{+\infty} [\vec{u}_{t-\tau} - \vec{u}_t] \rho_\varepsilon(\tau)\, d\tau) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{f}^\varepsilon_t, \vec{u}_{t-\tau} - \vec{u}_t)_{L_2(\omega)}\, \rho_\varepsilon(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(\tau)\, (\vec{f}^\varepsilon_t, \vec{u}_{t-\tau} - \vec{u}_t)_{L_2(\omega \times]t_0, t_1[)}\, d\tau,$$

en vertu des théorèmes de G. Fubini-L. Tonelli.

Nous obtenons ainsi

$$\| \vec{u}^\varepsilon_t - \vec{u}_t \|_{L_2(\omega \times]t_0, t_1[)} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(\tau)\, \| \vec{u}_{t-\tau} - \vec{u}_t \|_{L_2(\omega \times]t_0, t_1[)}\, d\tau$$

par l'inégalité de H. A. Schwarz.

Montrons que le second membre de cette inégalité peut être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de ε.

Choisissons ε_1 positif arbitraire.

Soit $\vec{\varphi}_t^m(x)\Big(\in \mathrm{D}(\omega \times]t_0', t_1'[)\Big) \xrightarrow[\mathrm{L}_2(\omega \times]t_0', t_1'[)]{} \vec{u}_t(x),$

avec $t_0' \leqslant t_0 - \varepsilon < t_1 + \varepsilon \leqslant t_1'$.

On a l'inégalité

$$\begin{aligned}\| \vec{u}_{t-\tau} - \vec{u}_t \|_{\mathrm{L}_2(\omega \times]t_0, t_1[)} \leqslant & \| \vec{u}_{t-\tau} - \vec{\varphi}_{t-\tau}^m \|_{\mathrm{L}_2(\omega \times]t_0, t_1[)} \\ & + \| \vec{\varphi}_{t-\tau}^m - \varphi_t^m \|_{\mathrm{L}_2(\omega \times]t_0, t_1[)} \\ & + \| \vec{\varphi}_t^m - \vec{u}_t \|_{\mathrm{L}_2(\omega \times]t_0, t_1[)}.\end{aligned}$$

Comme $|\tau| \leqslant \varepsilon$, le second membre est inférieur à

$$2 \| \vec{u}_t - \vec{\varphi}_t^m \|_{\mathrm{L}_2(\omega \times]t_0', t_1'[)} + \| \vec{\varphi}_{t-\tau}^m - \vec{\varphi}_t^m \|_{\mathrm{L}_2(\Omega \times \mathrm{E}_1)}.$$

Choisissons alors m de manière que

$$\| \vec{u}_t - \vec{\varphi}_t^m \|_{\mathrm{L}_2(\omega \times]t_1', t_0'[)} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{3}$$

et, cet m étant fixé, ε de manière que, lorsque $|\tau| \leqslant \varepsilon$,

$$\| \vec{\varphi}_{t-\tau}^m - \varphi_t^m \|_{\mathrm{L}_2(\Omega \times \mathrm{E}_1)} \leqslant \frac{\varepsilon_1}{3},$$

ce qui est toujours possible puisque

$$\begin{aligned}\| \vec{\varphi}_{t-\tau}^m - \vec{\varphi}_t^m \|_{\mathrm{L}_2(\Omega \times \mathrm{E}_1)} &= \Big(\int_{\Omega \times \mathrm{E}_1} | \vec{\varphi}_{t-\tau}^m - \varphi_t^m |^2 \, dx \, dt\Big)^{1/2} \\ &\leqslant \sup_{\Omega \times \mathrm{E}_1} | \vec{\varphi}_{t-\tau}^m - \vec{\varphi}_t^m | \,.\, (\mathrm{mes}\,\{[\vec{\varphi}_t^m] \cup [\vec{\varphi}_{t-\tau}^m]\})^{1/2}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Toute fonction faiblement dérivable dans $]a, b[$, $\in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]a, b[)$ ainsi que sa dérivé, est fortement continue dans $]a, b[$ et

$$\vec{u}_t - \vec{u}_{t_0} = \int_{t_0}^t \mathrm{D}_s \vec{u}_s ds,$$

quels que soient t_0 et t finis $\in]a, b[$.

Pour toute fonction $\vec{u}_t^\varepsilon$, on a

$$\vec{u}_t^\varepsilon - \vec{u}_{t_0}^\varepsilon = \int_{t_0}^t \mathrm{D}_s \vec{u}_s^\varepsilon ds$$

quels que soient t_0 et t finis $\in]a, b[$. En effet, pour tout $\vec{f} \in L_2^c$,

$$(\int_{t_0}^{t} D_s\vec{u}_s^\varepsilon ds, \vec{f}) = \int_{t_0}^{t} (D_s\vec{u}_s^\varepsilon, \vec{f})ds = \int_{t_0}^{t} ds \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{u}_r, \vec{f}) D_s\rho_\varepsilon(s-r)dr$$

et, vu les théorèmes de G. Fubini-L. Tonelli, cette expression est égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{u}_r, \vec{f})dr \int_{t_0}^{t} D_s\rho_\varepsilon(s-r)ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{u}_r, \vec{f}) [\rho_\varepsilon(t-r) - \rho_\varepsilon(t_0 - r)]dr.$$

Dans tout intervalle compact $[t_0, t_1]$ de $]a, b[$, pour ε assez petit, on a

$$D_t u_t^\varepsilon = (\vec{u}_\tau * D_\tau \rho_\varepsilon)_t = (D_\tau \vec{u}_\tau * \rho_\varepsilon)_t = (D_t \vec{u}_t)^\varepsilon$$

car, considéré comme fonction de τ, $\rho_\varepsilon(t-r)$ est à support compact dans $]a, b[$ lorsque $\varepsilon < d([t_0, t_1], \complement_{E_1}]a, b[)$.

On en déduit que

$$\vec{u}_t^\varepsilon - \vec{u}_{t_0}^\varepsilon = \int_{t_0}^{t} (D_s\vec{u}_s)^\varepsilon \, ds.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit d'établir que

$$\int_{t_0}^{t} (D_s\vec{u}_s)^\varepsilon \, ds \xrightarrow[L_2^b(\Omega \times]a, b[)]{} \int_{t_0}^{t} D_s\vec{u}_s ds,$$

ce qui s'obtient à partir des inégalités suivantes :

$$\int_{a'}^{b'} dt \left\| \int_{t_0}^{t} [(D_s\vec{u}_s)^\varepsilon - D_s\vec{u}_s]ds \right\|_{L_2(\omega)}^2$$

$$\leqslant \int_{a'}^{b'} dt \left[\int_{t_0}^{t_1} \| (D_s\vec{u}_s)^\varepsilon - D_s\vec{u}_s \|_{L_2(\omega)} ds \right]^2$$

$$\leqslant (b' - a') \mid t_1 - t_0 \mid \| (D_t\vec{u}_t)^\varepsilon - D_t\vec{u}_t \|_{L_2(\omega \times]t_0, t_1[)}^2,$$

ces inégalités étant valables pour tout $\omega \times]a', b'[\subset \Omega \times]a, b[$ avec $]t_0, t_1 [\supset] t_0, t[,] a', b'$ [et] $t_0, t_1[$ bornés, le dernier membre s'obtenant à partir de l'inégalité de H. A. Schwarz.

Il est alors aisé de voir que

$$\vec{u}_t - \vec{u}_{t_0} = \int_{t_0}^{t} D_s\vec{u}_s ds, \; t_0 \text{ et } t \in]a, b[.$$

Si t et $t + h \in]a, b[$, on a donc

$$\| \vec{u}_{t+h} - \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} = \| \int_t^{t+h} D_s\vec{u}_s ds \|_{L_2(\omega)} \leqslant \int_t^{t+h} \| D_s\vec{u}_s \|_{L_2(\omega)} ds,$$

où le dernier membre tend vers 0 en vertu du théorème de H. Lebesgue, lorsque h tend vers 0.

Toute fonction $\in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ *faiblement dérivable, dont la dérivée* $\in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ *est fortement continue, est fortement dérivable, les dérivées fortes et faibles coïncidant.*

En effet, en vertu du théorème précédent, on peut écrire

$$\| \frac{1}{h} (\vec{u}_{t+h} - \vec{u}_t) - D_t\vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} = \| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} D_s\vec{u}_s \, ds - D_t\vec{u}_t \|_{L_2(\omega)}$$

$$\leqslant \left| \frac{1}{h} \right| \left| \int_t^{t+h} \| D_s\vec{u}_s - D_t\vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} ds \right|.$$

Comme $\| D_s\vec{u}_s - D_t\vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \leqslant \varepsilon$ lorsque $|t - s| \leqslant \eta(\varepsilon)$, on a donc

$$\| \frac{1}{h} (\vec{u}_{t+h} - \vec{u}_t) - D_t\vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \leqslant \varepsilon$$

lorsque $|h| \leqslant \eta(\varepsilon)$, car $s \in [t, t + h]$.

On déduit des théorèmes précédents que *toute fonction p fois faiblement dérivable,* $\in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ *ainsi que ses dérivées, est $p - 1$ fois fortement dérivable ; les dérivées fortes et faibles d'ordre $< p$ coïncident et la dérivée d'ordre $(p - 1)$ est fortement continue.*

On en déduit que *toute fonction indéfiniment faiblement dérivable,* $\in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ *ainsi que ses dérivées, est indéfiniment fortement dérivable.*

Si $\vec{u}_t \in L_1^{loc}([a, b] ; L_2^b)$, *il existe une fonction* $\vec{U}_t \in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ *faiblement dérivable telle que* $D_t\vec{U}_t = \vec{u}_t$. *Cette fonction* $\vec{U}_t$ *est définie à une fonction* $\in L_2^b$ *près.*

Considérons

$$\vec{U}_t = \int_{t_0}^t \vec{u}_s ds, \quad t_0, t \in]a, b[.$$

Pour tout $\vec{f} \in L_2^c$, on a

$$-\int_a^b \left(\int_{t_0}^t \vec{u}_s ds, \vec{f}\right) D_t\varphi(t)dt = -\int_a^b dt \int_{t_0}^t (\vec{u}_s, \vec{f})\, D_t\varphi(t)ds$$

et, en vertu du théorème de G. FUBINI-L. TONELLI, le second membre est égal à

$$\int_a^b (\vec{u}_s, \vec{f})\varphi(s)ds$$

pour tout $\varphi(t) \in D(]a, b[)$. D'où la dérivabilité faible de $\vec{U}_t$.

Cette fonction est dans $L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ car, quel que soit $]a', b'[\in]a, b[$, on a

$$\left\| \int_{t_0}^t \vec{u}_s ds \right\|_{L_2(\omega)} \leqslant \left[\int_{t_0}^t \| \vec{u}_s \|_{L_2(\omega)} ds\right]^2$$

$$\leqslant \left[\left|\int_{a'}^{t_0} \| \vec{u}_s \|_{L_2(\omega)} ds \right| + \left| \int_{t_0}^{b'} \| \vec{u}_s \|_{L_2(\omega)} ds\right|\right]^2$$

qui est intégrable dans $]a', b'[$ puisque le dernier membre de l'inégalité précédente est indépendant de t.

6. — Les théorèmes suivants donnent des conditions de dérivation de certains produits de fonctions paramétriques.

Si $\vec{u}_t$ est faiblement dérivable et si $(\vec{u}_t, \vec{f})$ est dérivable pour tout $\vec{f} \in L_2^c$ (ce qui a toujours lieu lorsque $\vec{u}_t$ est fortement dérivable), si de plus v_t est fortement dérivable, alors le produit scalaire $(\vec{u}_t, v_t)_{L_2(\omega)}$ est dérivable quel que soit ω et

$$D_t(\vec{u}_t, \vec{v}_t)_{L_2(\omega)} = (D_t\vec{u}_t, \vec{v}_t)_{L_2(\omega)} + (\vec{u}_t, D_t\vec{v}_t)_{L_2(\omega)}.$$

En effet, nous pouvons écrire

$$\left| \frac{1}{h}[(\vec{u}_{t+h}, \vec{v}_{t+h})_{L_2(\omega)} - (\vec{u}_t, \vec{v}_t)_{L_2(\omega)}] - (D_t\vec{u}_t, \vec{v}_t)_{L_2(\omega)} - (\vec{u}_t, D_t\vec{v}_t)_{L_2(\omega)} \right|$$

$$\leqslant \left| (\vec{u}_{t+h}, \frac{1}{h}[\vec{v}_{t+h} - \vec{v}_t] - D_t\vec{v}_t)_{L_2(\omega)} \right| + \left| (\frac{1}{h}[\vec{u}_{t+h} - \vec{u}_t] - D_t\vec{u}_t, \vec{v}_t)_{L_2(\omega)} \right|$$
$$+ \left| (\vec{u}_{t+h} - \vec{u}_t, D_t\vec{v}_t)_{L_2(\omega)} \right|.$$

Le premier terme du second membre est majoré par

$$\| \vec{u}_{t+h} \|_{L_2(\omega)} \left\| \frac{1}{h}(\vec{v}_{t+h} - \vec{v}_t) - D_t\vec{v}_t \right\|_{L_2(\omega)}.$$

Comme

$$\left| (\vec{u}_{t+h}, \vec{f}) \right| \leqslant |h| \varepsilon + \left| (\vec{u}_t, \vec{f}) \right| + |h| \left| (\mathrm{D}_t\vec{u}_t, \vec{f}) \right| \leqslant \mathrm{C}(t),$$

si $|h| < h_0$, en vertu des théorèmes de la borne uniforme [10 ; Livre I : VII], le second membre tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de ce théorème.

Si la fonction scalaire $f(t)$ est dérivable, si $\vec{u}_t$ est faiblement dérivable (resp. *fortement dérivable*) *et si $(\vec{u}_t, \vec{f})$ est dérivable pour tout $\vec{f} \in \mathrm{L}_2^c$, alors $\vec{u}_t f(t)$ est faiblement* (resp. *fortement*) *dérivable et*

$$\mathrm{D}_t(\vec{u}_t f(t)) = f(t)\mathrm{D}_t\vec{u}_t + \vec{u}_t\, \mathrm{D}_t f(t).$$

Pour le constater, il suffit de substituer $\vec{v}(x)f(t)$ à $\vec{v}_t$ dans le théorème précédent, $\vec{v}(x) \in \mathrm{L}_2^b$. Le cas de la dérivée faible est immédiat. Pour la dérivée forte, on considère

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{h} [\vec{u}_{t+h} f(t+h) - \vec{u}_t f(t)] - f(t)\mathrm{D}_t\vec{u}_t - \vec{u}_t \mathrm{D}_t f(t) \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)} \\
&\quad \leqslant \left\| \frac{1}{h} (\vec{u}_{t+h} - \vec{u}_t) - \mathrm{D}_t\vec{u}_t \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)} \left| f(t+h) \right| \\
&\quad + \left\| \vec{u}_t \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)} \left| \frac{1}{h} [f(t+h) - f(t)] - \mathrm{D}_t f(t) \right| \\
&\quad + \left\| \mathrm{D}_t\vec{u}_t \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)} \left| f(t+h) - f(t) \right|.
\end{aligned}$$

L'espace $\mathrm{H}_m^b(\Omega)$

7. — Nous représentons par $\mathrm{H}_m^b(\Omega)$ (en abrégé H_m^b) l'espace visiblement linéaire des fonctions $\vec{u} \in \mathrm{L}_2^b$ qui admettent des dérivées au sens des distributions, dans l'ouvert Ω,

$$\mathrm{D}^{\mu} u = \mathrm{D}_{x_1}^{\mu_1} \dots \mathrm{D}_{x_n}^{\mu_n} \vec{u} \in \mathrm{L}_2^b,$$

pour tout μ tel que $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n \leqslant m$.

Si $\vec{u}_t \in \mathrm{H}_m^b$ et est p fois faiblement (resp. *fortement*) *dérivable ainsi que ses dérivées par rapport à* x, *alors*

$$\mathrm{D}_t^k \vec{u}_t \in \mathrm{H}_m^b$$

et

$$\mathrm{D}^{\mu}\mathrm{D}_t^k \vec{u}_t = \mathrm{D}_t^k \mathrm{D}^{\mu} \vec{u}_t,$$

pour tout $|\mu| \leqslant m$ et tout $k \leqslant p$.

En effet, on a

$$(-1)^k \int_a^b (D^\mu \vec{u}_t, \vec{\Phi}) D_t^k \varphi(t) dt = \int_a^b (D_t^k D^\mu \vec{u}_t, \vec{\Phi}) \varphi(t)\, dt,$$

pour tout $\vec{\Phi} \in D(\Omega) \subset L_2^{\text{comp}}(\Omega) \subset L_2^c$ et tout $\varphi(t) \in D(]a, b[)$.

Vu les hypothèses faites sur $\vec{u}_t$, le premier membre de l'égalité précédente est égal à

$$(-1)^{k+|\mu|} \int_a^b (\vec{u}_t, D^\mu \vec{\Phi}) D_t^k \varphi(t)\, dt = (-1)^{|\mu|} \int_a^b (D_t^k \vec{u}_t, D^\mu \vec{\Phi}) \varphi(t)\, dt.$$

D'où le théorème.

Si $\vec{u}_t \in H_m^b$ *et si* $D^\mu \vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ *pour* $0 \leqslant |\mu| \leqslant m$, *alors*

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt \in H_m^b,$$

$$D^\mu \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt = \int_{t_0}^{t_1} D^\mu \vec{u}_t dt,$$

pour tout $|\mu| \leqslant m$, *quel que soit* $]t_0, t_1[$ *borné* $\subset]a, b[$, *et*

$$\int_{t_0}^{t_1} (\vec{u}_t, \vec{v})_{H_m(\omega)}\, dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt, \vec{v}\right)_{H_m(\omega)}$$

quel que soit ω *et pour tout* $\vec{v} \in H_m^b$, *de plus*

$$\left\| \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt \right\|_{H_m(\omega)} \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \| \vec{u}_t \|_{H_m(\omega)}\, dt.$$

Des égalités suivantes, valables pour tout $\vec{\Phi} \in D(\Omega)$,

$$(-1)^{|\mu|} \left(\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt, D^\mu \vec{\Phi}\right) = (-1)^{|\mu|} \int_{t_0}^{t_1} (\vec{u}_t, D^\mu \vec{\Phi}) dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} D^\mu \vec{u}_t dt, \vec{\Phi}\right),$$

nous déduisons la première partie de l'énoncé.

D'autre part, vu ce résultat, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (\vec{u}_t, \vec{v})_{H_m(\omega)}\, dt &= \sum_{|\mu| \leqslant m} \int_{t_0}^{t_1} (D^\mu \vec{u}_t, D^\mu \vec{v})_{L_2(\omega)}\, dt \\ &= \sum_{|\mu| \leqslant m} \left(D^\mu \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt, D^\mu \vec{v}\right)_{L_2(\omega)} \\ &= \left(\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt, \vec{v}\right)_{H_m(\omega)}, \end{aligned}$$

pour tout $\vec{v} \in H_m^b$.

Quant à l'inégalité, elle est conséquence immédiate des inégalités

$$\left| \left(\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt, \vec{v} \right)_{\mathrm{H}_m(\omega)} \right| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \left| (\vec{u}_t, \vec{v})_{\mathrm{H}_m(\omega)} \right| dt \leqslant \| \vec{v} \|_{\mathrm{H}_m(\omega)} \int_{t_0}^{t_1} \| \vec{u}_t \|_{\mathrm{H}_m(\omega)} dt.$$

Cas des espaces $L_2(\Omega)$ et $L_2^{\mathrm{loc}}(\Omega)$

8. — Toutes les notions introduites dans le chapitre I sont solidaires de l'espace L_2^b considéré au départ. Si on considère la théorie précédente développée dans le cadre de L_2 [19, 30, 31 : cas des espaces de HILBERT], on retrouve l'intégrale de S. BOCHNER et les notions de dérivées fortes et faibles (au sens des distributions) d'éléments paramétriques d'un espace de HILBERT. Les théorèmes et leurs démonstrations restent valables à condition d'y considérer L_2 au lieu de L_2^b et L_2^c, toutes les considérations relatives à ω étant supprimées.

Notons enfin que la théorie précédente peut être développée dans le cadre de l'espace L_2^{loc}. Il suffit de remplacer L_2^b par L_2^{loc}, L_2^c par L_2^{comp}, ω par « compact de Ω » et de considérer les intervalles bornés de $]a, b[$ d'adhérence compacte dans $]a, b[$, si on ne considère que l'intégrabilité locale dans $]a, b[$.

Chapitre II

OPÉRATEURS MATRICIELS DE DÉRIVATION HYPERBOLIQUES DU PREMIER ORDRE

Opérateurs matriciels de dérivation

9. — Nous considérons des opérateurs matriciels carrés, du premier ordre, de la forme

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \mathrm{D}_{x_i} + \mathrm{A},$$

où (D) est mis pour $(\mathrm{D}_{x_1}, \ldots, \mathrm{D}_{x_n})$, les matrices A_i et A étant constantes.

Nous supposons que

a) *les matrices* A_i *sont hermitiennes* ; ainsi l'opérateur homogène

$$\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \mathrm{D}_{x_i}$$

est anti-hermitien, c'est-à-dire que

$$- \mathring{\mathscr{A}}^*(- \mathrm{D}) = \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D}),$$

l'astérisque indiquant que la matrice de départ est transposée et conjuguée,

b) *il existe une matrice constante* P *hermitienne et idempotente* (projecteur numérique) *telle que*

$$\mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D}) = \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\,(\mathrm{E} - \mathrm{P}),$$

la matrice E *étant l'identité* [11].

On appelle *opérateur de dérivation hyperbolique* tout opérateur du type

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t$$

où $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ satisfait aux hypothèses précédentes.

Si $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ est réel, on retrouve les opérateurs symétriques hyperboliques classiques [6 ch. VI, § 3, — 8] [11], étant entendu que ces opérateurs ne sont pas nécessairement totalement hyperboliques [4], [6].

Il est évident que si P est un projecteur satisfaisant à la condition précédente, la matrice (E — P) est un projecteur et jouit de la même propriété.

Remarquons que, sous les hypothèses imposées ci-dessus, nous avons

$$[\mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})]^* = \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P} = (\mathrm{E} - \mathrm{P})\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D}),$$

$$[(\mathrm{E} - \mathrm{P})\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})]^* = \mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D}).$$

10. — Nous pouvons réduire le projecteur P à la forme diagonale en le transformant par une matrice unitaire, plus précisément de la manière suivante :

$$\mathrm{U^*PU} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}' & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{U^*(E - P)U} = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{E}'' \end{pmatrix},$$

la dimension des sous-matrices diagonales étant différente de O et N, où N est la dimension de $\mathscr{A}(\mathrm{D})$.

A partir des propriétés de P, il est aisé de voir que

$$\mathrm{U^*PU\,U^*}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{U} = \mathrm{U^*}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{U\,U^*(E - P)U}. \qquad (*)$$

Par définition, *la matrice* U *réduit* $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ *à la forme canonique*.

Décomposons l'opérateur réduit à la forme canonique en quatre sous-matrices correspondant à la décomposition de U*PU et posons

$$\mathrm{U^*}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}.$$

De la relation (*) ci-dessus, nous déduisons que $\mathrm{A} = \mathrm{D} = 0$ et, comme $\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D}) = \mathring{\mathscr{A}}^*(\mathrm{D})$, $\mathrm{C} = \mathrm{B}^*$.

La forme canonique des opérateurs considérés est donc

$$\begin{pmatrix} O & B^*(D) \\ B(D) & O \end{pmatrix} + M,$$

où M est une matrice constante.

Ces opérateurs sont donc les transformés par une matrice unitaire constante quelconque d'opérateurs de la forme canonique précédente.

On déduit des considérations précédentes que

$$\lambda_0(x) = \sup_i \lambda_i(x) \geqslant 0, \quad |x| = 1$$

$\lambda_i(x)$, $i = 1, \ldots, N$, étant les valeurs propres de $\mathring{\mathscr{A}}(x)$.

Il suffit en effet de remarquer que les valeurs propres de $\mathring{\mathscr{A}}(x)$ sont les racines de

$$dtm \begin{pmatrix} -\lambda E' & B^*(x) \\ B(x) & -\lambda E'' \end{pmatrix}.$$

Si p et q sont les dimensions respectives de E′ et E″, ces valeurs propres sont racines de

$$(-\lambda)^{p-q} dtm\,(\lambda^2 E'' - BB^*),$$

si $p \geqslant q$, ou de

$$(-\lambda)^{q-p} dtm\,(\lambda^2 E' - B^*B),$$

si $p \leqslant q$.

Étant nulles ou opposées, ces valeurs propres ont une enveloppe supérieure positive et $\lambda_0(x)$ est positif.

Notons encore que $\lambda_0(x)$ est une fonction continue sur le compact $\{x : |x| = 1\}$, donc bornée sur ce compact car le coéfficient de λ^N est $(-1)^N$ dans le polynôme caractéristique.

De plus, si $\lambda_0(x) = 0$ pour tout x, $\mathring{\mathscr{A}}(D)$ est identiquement nul.

Exemples d'opérateurs matriciels $\mathscr{A}(D) - D_t$ hyperboliques du premier ordre

11. — Donnons quelques exemples importants d'opérateurs matriciels hyperboliques du premier ordre rencontrés en physique mathématique.

a) *Les équations de* J. C. MAXWELL.

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{\mathrm{H}} = \sigma\vec{\mathrm{E}} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \mathrm{D}_t\vec{\mathrm{E}} + \vec{\mathrm{F}}, \\ &-\operatorname{rot} \vec{\mathrm{E}} = \mu\mathrm{D}_t\vec{\mathrm{H}} + \vec{\mathrm{G}}, \quad (\varepsilon_i, \mu > 0), \end{aligned}\right.$$

s'écrivent, en posant $\vec{u}_t = (\vec{\mathrm{E}}, \vec{\mathrm{H}})$ et $\vec{f}_t = (\vec{\mathrm{F}}, \vec{\mathrm{G}})$,

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \cdot & \cdot & \cdot & -\mathrm{D}_z & \mathrm{D}_y \\ \cdot & -\sigma & \cdot & \mathrm{D}_z & \cdot & -\mathrm{D}_x \\ \cdot & \cdot & -\sigma & -\mathrm{D}_y & \mathrm{D}_x & \cdot \\ \cdot & \mathrm{D}_z & -\mathrm{D}_y & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\mathrm{D}_z & \cdot & \mathrm{D}_x & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{D}_y & -\mathrm{D}_x & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \vec{u}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \varepsilon_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{bmatrix} \mathrm{D}_t\vec{u}_t + \vec{f}_t$$

Si ε_1, ε_2, ε_3 sont inégaux, ces équations concernent un milieu anisotrope.

Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, on retrouve les équations de J. C. MAXWELL dans un milieu homogène et isotrope.

Si $\sigma = 0$ et $\mu = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, on obtient les équations de J. C. MAXWELL dans le vide.

Écrivons ce système sous la forme

$$\mathscr{B}(\mathrm{D})\vec{u}_t = \mathscr{H}\mathrm{D}_t\vec{u}_t + \vec{f}_t.$$

La matrice $\mathscr{H}$ est hermitienne définie positive, il existe donc une matrice S telle que $\mathrm{S}^*\mathscr{H}\mathrm{S} = \mathrm{E}$ (S est invertible) et dans le cas présent

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}^* = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}}, \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right).$$

Le système considéré peut alors s'écrire

$$[\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t]\vec{\mathscr{U}}_t = \vec{\mathscr{F}}_t$$

en posant

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \mathrm{S}^*\mathscr{B}(\mathrm{D})\mathrm{S}, \quad \vec{\mathscr{U}}_t = \mathrm{S}^{-1}\vec{u}_t, \quad \vec{\mathscr{F}}_t = \mathrm{S}^*\vec{f}_t.$$

L'opérateur $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ relatif aux équations de J. C. MAXWELL s'écrit

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sigma}{\varepsilon_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{-D_z}{\sqrt{\mu\varepsilon_1}} & \frac{D_y}{\sqrt{\mu\varepsilon_1}} \\ \cdot & -\frac{\sigma}{\varepsilon_2} & \cdot & \frac{D_z}{\sqrt{\mu\varepsilon_2}} & \cdot & \frac{-D_x}{\sqrt{\mu\varepsilon_2}} \\ \cdot & \cdot & -\frac{\sigma}{\varepsilon_3} & \frac{-D_y}{\sqrt{\mu\varepsilon_3}} & \frac{-D_x}{\sqrt{\mu\varepsilon_3}} & \cdot \\ \cdot & \frac{D_z}{\sqrt{\mu\varepsilon_2}} & \frac{-D_y}{\sqrt{\mu\varepsilon_3}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{-D_z}{\sqrt{\mu\varepsilon_1}} & \cdot & \frac{D_x}{\sqrt{\mu\varepsilon_3}} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{D_y}{\sqrt{\mu\varepsilon_1}} & \frac{-D_x}{\sqrt{\mu\varepsilon_2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

et le projecteur P est diag (1, 1, 1, 0, 0, 0) ou diag (0, 0, 0, 1, 1, 1)

b) *Les équations de l'acoustique*

$$\rho D_t\vec{v} = \vec{F} - \operatorname{grad} p,$$

$$D_t p = - \rho \operatorname{div} \vec{v},$$

ρ étant constant et $\vec{F}$ donné, s'écrivent, en posant

$$\vec{u}_t = (\rho\vec{v}, p), \ \vec{f}_t = (- \rho\vec{F}, 0),$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -D_x \\ \cdot & \cdot & \cdot & -D_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & -D_z \\ -D_x & -D_y & -D_z & \cdot \end{bmatrix} \vec{u}_t = D_t\vec{u}_t + \vec{f}_t.$$

Nous obtenons donc l'opérateur sous la forme canonique.

Le projecteur P est l'une ou l'autre des matrices

$$\operatorname{diag}\ (1, 1, 1, 0), \ \operatorname{diag}\ (0, 0, 0, 1).$$

c) *Les équations de la magnétohydrodynamique* [22],

$$D_t p = - a^2\rho \operatorname{div} \vec{v},$$

$$D_t\vec{H} = \operatorname{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B}),$$

$$D_t\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi\rho}(\operatorname{rot}\vec{H}) \wedge \vec{B},$$

peuvent s'écrire sous la forme de système matriciel

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -D_x & -D_y & -D_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b_2D_y + b_3D_z & -b_1D_y & -b_1D_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -b_2D_x & b_3D_z + b_1D_x & -b_2D_z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -b_3D_x & -b_3D_y & b_1D_x + b_2D_y \\ -D_x & b_2D_y + b_3D_z & -b_2D_z & -b_3D_x & \cdot & \cdot & \cdot \\ -D_y & -b_1D_y & b_3D_z + b_1D_x & -b_3D_y & \cdot & \cdot & \cdot \\ -D_z & -b_1D_z & -b_2D_z & b_1D_x + b_2D_y & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ \dfrac{\vec{H}}{4\pi} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{D_tp}{a^2\rho} \\ 4\pi D_t\dfrac{\vec{H}}{4\pi} \\ \rho D_t\vec{v} \end{bmatrix}$$

La matrice S de transformation est

$$S = S^* = \operatorname{diag}(a\sqrt{\rho}, 1/2\sqrt{\pi}, 1/2\sqrt{\pi}, 1/2\sqrt{\pi}, 1/\sqrt{\rho}, 1/\sqrt{\rho}, 1/\sqrt{\rho}).$$

Le système s'écrit après transformation

$$\mathscr{A}(D)\vec{u}_t - D_t\vec{u}_t = \vec{f}_t,$$

où l'opérateur $\mathscr{A}(D) = S^*\mathscr{B}(D)S$, $\mathscr{B}(D)$ étant l'opérateur matriciel explicité ci-dessus, et

$$\vec{u}_t = (p/a\sqrt{\rho}, \vec{H}/2\sqrt{\pi}, \sqrt{\rho}\,\vec{v}).$$

Le projecteur P sera

$$\operatorname{diag}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \text{ ou } \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0).$$

Espace V(Ω) associé à un opérateur $\mathscr{A}$(D)

12. — Nous dirons que $\mathscr{A}(D)\vec{u}$ existe dans L_1^{loc}, s'il existe une fonction $\vec{v}$, telle que

$$(\vec{v}, \vec{\Phi}) = (\vec{u}, \mathscr{A}^*(-D)\vec{\Phi})$$

pour tout $\vec{\Phi} \in D(\Omega)$.

Nous représentons par $\mathscr{A}(D)\vec{u}$ la fonction $\vec{v}$, d'ailleurs unique si elle existe, qui satisfait à cette relation.

Nous désignons par $V(\Omega)$ le sous-espace linéaire de L_2 des fonctions $\vec{u}$ telles que $\mathscr{A}(D)\vec{u} \in L_2$, en abrégé cet espace est noté V.

Muni du produit scalaire

$$(\vec{u}, \vec{v})_V = (\vec{u}, \vec{v}) + (\mathscr{A}(D)\vec{u}, \mathscr{A}(D)\vec{v}),$$

V est visiblement un espace de HILBERT.

Désignons par $V_e(\Omega)$ pour $e \subset \dot{\Omega}$, frontière de Ω, l'adhérence dans V des fonctions de V identiquement nulles dans un voisinage de e. Cet espace est un sous-espace linéaire fermé dans V, donc de HILBERT, nous le noterons V_e pour abréger.

Notons que $V_\varnothing = V$.

13. — Soit V' l'espace V associé à $\mathring{\mathscr{A}}(D)$.

Montrons que V' et V sont identiques, plus précisément

a) *les espaces* V *et* V' *coïncident, les normes étant équivalentes.*

b) *les espaces* V_e *et* V'_e *coïncident, les normes étant équivalentes.*

a) Les éléments de V sont dans V' et réciproquement. C'est une conséquence de la linéarité de L_2 et du fait que si $\vec{u} \in L_2$, alors $A\vec{u} \in L_2$.

L'équivalence des normes se démontre en appliquant l'inégalité de H. A. SCHWARZ aux produits scalaires du second membre de

$$\| \vec{u} \|_V^2 = \| \vec{u} \|_{V'}^2 + (A\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}\vec{u}) + (\mathring{\mathscr{A}}\vec{u}, A\vec{u}).$$

Nous obtenons

$$\| \vec{u} \|_V^2 \leqslant \| \vec{u} \|^2 + \| \mathring{\mathscr{A}}\vec{u} \|^2 + 2C \| \vec{u} \| \| \mathring{\mathscr{A}}\vec{u} \|$$
$$\leqslant \sup (C, 1) (\| \vec{u} \| + \| \mathring{\mathscr{A}}\vec{u} \|)^2 \leqslant 2 \sup (C, 1) \| \vec{u} \|_{V'}^2,$$

où $C = \| A \|_{L_2 \to L_2}$, toute matrice constante étant un opérateur borné agissant de L_2 dans L_2, et $\| \vec{u} \|$ désignant la norme de $\vec{u}$ dans L_2.

De même, en considérant

$$\| \vec{u} \|_{V'}^2 = \| \vec{u} \|_V^2 - (A\vec{u}, \mathscr{A}\vec{u}) - (\mathscr{A}\vec{u}, A\vec{u}),$$

nous obtenons

$$\| \vec{u} \|_{V'}^2 \leqslant 2 \sup (C, 1) \| \vec{u} \|_V^2.$$

b) Cette propriété est une conséquence immédiate de l'identité des convergences dans V et V'.

Nous noterons toujours V les espaces V et V'.

14. — Désignons par $V_P(\Omega)$ (en abrégé V_P) l'espace V associé à $P\mathscr{A}(D)$.

Si $\vec{u} \in V$, *alors* $\vec{u} \in V_P \cap V_{E-P}$ *et réciproquement.*

Cette propriété reste évidemment vraie si on considère $V_{P,e}$, $V_{E-P,e}$ *et* V_e.

Si $\vec{u} \in V$, alors, vu la linéarité de L_2,

$$P\mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{u} \qquad \text{et} \qquad (E - P)\mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{u} \in L_2.$$

Réciproquement, si $\vec{u} \in V_P \cap V_{E-P}$, alors

$$P\mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{u} + (E - P)\mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{u} + A\vec{u} = \mathscr{A}(D)\vec{u} \in L_2.$$

Signalons une identification utile des éléments de V_P.

Les éléments de V_P *coïncident avec ceux de*

$$\{\vec{u} : \vec{u} \in L_2, (E - P)\vec{u} \in V\}.$$

Si $\vec{u} \in V_P$, alors $\vec{u} \in L_2$ et $P\mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{u} \in L_2$, par définition.

Comme

$$P\mathring{\mathscr{A}}(D) = \mathring{\mathscr{A}}(D)\,(E - P),$$

la proposition est établie.

Formule de Green

15. — Étant donné un opérateur quelconque du premier ordre, si $\vec{u}$, $\vec{v}$, et Ω sont assez réguliers, $\vec{n}$ étant la normale unitaire en un point de $\dot{\Omega}$, frontière de Ω, la formule de G. Green s'écrit

$$\int_\Omega \mathscr{A}(D)\vec{u} \times \vec{v}\, dx - \int_\Omega \vec{u} \times \mathscr{A}^*(-D)\vec{v}\, dx = \int_{\dot{\Omega}} \mathring{\mathscr{A}}(n)\vec{u} \times \vec{v}\, ds.$$

Conditions aux limites associées à un projecteur P

16. — Décomposons $\dot{\Omega}$ en $\dot{\Omega}_D \cup \dot{\Omega}_N (\dot{\Omega}_D \cap \dot{\Omega}_N = \varnothing)$.

Nous dirons que $\vec{u}$ *satisfait aux conditions aux limites associées à* P, *en abrégé* $\vec{u} \in N$, *si*

a) $(E - P)\vec{u} \in V_{\dot{\Omega}_D}$, (*condition de* P. LEJEUNE-DIRICHLET),

b) $(P\mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(D)P\vec{v}) = 0$,

pour tout $\vec{v} \in V_{E-P}$, (*condition de* C. NEUMANN).

Cette dernière condition, vérifiée chaque fois que $\vec{v}$ est à support compact dans Ω, généralise visiblement la condition de C. NEUMANN classique, elle s'écrit

$$\mathring{\mathscr{A}}(n)\,(E - P)\vec{u} = 0 \text{ sur } \dot{\Omega}_N,$$

lorsque les hypothèses d'application de la formule de G. GREEN sont vérifiées.

On vérifie aisément que $V \cap N$ est un espace de HILBERT pour la norme introduite dans V.

Notons encore que *si* $\vec{u}$ *et* $\vec{v} \in V \cap N$, *alors*

$$(\mathscr{A}(D)\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}, \mathscr{A}^*(-D)\vec{v}) = 0.$$

En effet, considérons

$$(\mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{u}, \vec{v}) = (P\mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{u}, \vec{v}) + (\mathring{\mathscr{A}}(D)P\vec{u}, \vec{v}).$$

Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v} \in V \cap N$, le second membre s'écrit

$$-(\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(D)P\vec{v}) - (\vec{u}, P\mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{v}) = -(\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(D)\vec{v}),$$

d'où la proposition, puisque $(A\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, A^*\vec{v})$.

Conditions aux limites locales associées à un projecteur P

17. — Désignons par

$$V^b(\Omega) = \{\vec{u} : \vec{u} \in V(\omega), \text{ pour tout } \omega\},$$

$$V^c(\Omega) = \{\vec{u} : \vec{u} \in V(\Omega), \vec{u}, [\vec{u}], \text{ étant compact dans } \overline{\Omega}\},$$

$[\vec{u}]$ désignant le support de $\vec{u}$, et, si e est un sous-ensemble de $\dot{\Omega}$,

$$\mathrm{V}_e^b(\Omega) = \{\vec{u} : \vec{u} \in \mathrm{V}_{e \cap \dot{\omega}}(\mathrm{P}) \text{ pour tout } \omega\},$$
$$\mathrm{V}_e^c(\Omega) = \{\vec{u} : \vec{u} \in \mathrm{V}_e(\Omega),\ [\vec{u}] \text{ compact dans } \overline{\Omega}\}.$$

Nous noterons respectivement V^b, V^c, V_e^b et V_e^c ces espaces.

On définit d'une manière analogue les espaces V_P^b, V_P^c, $(\mathrm{V}_\mathrm{P})_e^b$ et $(\mathrm{V}_\mathrm{P})_e^c$.

Nous dirons que *la fonction $\vec{u}$ satisfait aux conditions de* DIRICHLET-NEUMANN *locales, en abrégé $\vec{u} \in \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$, si*

a) $(\mathrm{E} - \mathrm{P})\vec{u} \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}^b$,

b) $(\mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{v}) = 0$

pour tout $\vec{v} \in \mathrm{V}_{\mathrm{E}-\mathrm{P}}^c$.

Remarquons immédiatement que

a) si Ω est borné, les conditions de $\mathrm{D} - \mathrm{N}$ (conditions aux limites de P. LEJEUNE-DIRICHLET-C. NEUMANN associées à un projecteur P) locales et ordinaires sont identiques,

b) si $\vec{u}$ satisfait aux conditions de $\mathrm{D} - \mathrm{N}$ ordinaires, il satisfait à fortiori aux conditions de $\mathrm{D} - \mathrm{N}$ locales.

18. — Lorsque les hypothèses d'application de la formule de G. GREEN sont vérifiées, les conditions de $\mathrm{D} - \mathrm{N}$ s'écrivent,

a) *pour les équations de* J. C. MAXWELL,

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sqrt{\varepsilon_2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sqrt{\varepsilon_2} \end{pmatrix} \vec{\mathrm{E}} \\ 0\vec{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}^b,$$

généralisant la condition de DIRICHLET sur $\dot{\Omega}_\mathrm{D}$,

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\, \vec{n} \wedge \vec{\mathrm{E}} = 0 \text{ sur } \dot{\Omega}_\mathrm{N},$$

lorsqu'on choisit le projecteur diag $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$.

Si on choisit le projecteur diag (1, 1, 1, 0, 0, 0), on obtient formellement des conditions analogues pour $\vec{\mathrm{H}}$

$$\begin{pmatrix} 0\vec{\mathrm{E}} \\ \sqrt{\mu}\vec{\mathrm{H}} \end{pmatrix} \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}},$$

et

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}} \end{bmatrix} \vec{n}\right) \wedge \vec{\mathrm{H}} = 0 \text{ sur } \dot{\Omega}_\mathrm{N},$$

b) *pour les équations de l'acoustique,*

d'une part

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ 0p \end{pmatrix} \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}},$$

$$\rho\vec{n} \times \vec{v} = 0 \text{ sur } \dot{\Omega}_\mathrm{N},$$

lorsqu'on considère le projecteur diag (0, 0, 0, 1), et d'autre part

$$\begin{pmatrix} 0\vec{v} \\ p \end{pmatrix} \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}},$$

$$p\vec{n} = 0 \text{ sur } \dot{\Omega}_\mathrm{N},$$

si on considère le projecteur diag (1, 1, 1, 0).

c) *pour les équations de la magnétohydrodynamique*

$$\begin{pmatrix} p/a\sqrt{\rho} \\ \vec{\mathrm{H}}/2\sqrt{\pi} \\ 0\vec{v} \end{pmatrix} \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}},$$

$$-\vec{n}p + \frac{1}{4\pi}(\vec{n} \wedge \vec{\mathrm{H}}) \wedge \vec{\mathrm{B}} = 0 \text{ sur } \dot{\Omega}_\mathrm{N},$$

dans le cas du projecteur diag (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), et

$$\begin{pmatrix} 0p \\ 0\vec{\mathrm{H}} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}},$$

$$\left.\begin{cases} \vec{n} \times \vec{v} = 0, \\ \vec{n} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\mathrm{B}}) = (\vec{n} \times \vec{\mathrm{B}})\vec{v} = 0, \end{cases}\right\} \text{ sur } \dot{\Omega}_{\mathrm{N}},$$

dans le cas du projecteur diag (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0).

19. — Démontrons quelques théorèmes relatifs aux espaces associés à $\mathscr{A}(\mathrm{D})$.

Si $\vec{u} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$, *alors* $\vec{u} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$, *et réciproquement.*

La proposition directe est évidente.

Démontrons la réciproque.

Comme $[\vec{u}]$ est compact, il est évident que, si

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P})\vec{u} \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}} \cap \dot{\omega}}(\omega)$$

pour tout ω, alors

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P})\vec{u} \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}}$$

car, si $\overline{\omega} \supset [\vec{u}]$, $(\mathrm{E} - \mathrm{P})\vec{u} = 0$ dans $\complement_{\overline{\Omega}} \overline{\omega}$.

En ce qui concerne la condition de Neumann, considérons une fonction réelle $\alpha_{\mathrm{R}}(x) \in \mathrm{D}\,(\mathrm{E}_n)$, telle que

$$\alpha_{\mathrm{R}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant \mathrm{R}, \\ 0 & \text{si } |x| > \mathrm{R} + 1, \end{cases}$$

$$0 \leqslant \alpha_{\mathrm{R}} \leqslant 1.$$

Si $\vec{v} \in \mathrm{V}_{\mathrm{E-P}}$, alors $\alpha_{\mathrm{R}}\vec{v} \in \mathrm{V}_{\mathrm{E-P}}$ et $\alpha_{\mathrm{R}}\vec{v} \xrightarrow[\mathrm{V}_{\mathrm{E-P}}]{} \vec{v}$.

En effet, on a

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P})\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\alpha_{\mathrm{R}}\vec{v} = (\mathrm{E} - \mathrm{P})\mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v} + \alpha_{\mathrm{R}}(\mathrm{E} - \mathrm{P})\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{v}$$

et

$$\| (1 - \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v} \|^2_{\mathrm{V}_{\mathrm{E-P}}} \leqslant \| (1 - \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v} \|^2 + \| (1 - \alpha_{\mathrm{R}})(\mathrm{E} - \mathrm{P})\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{v} \|^2$$
$$+ \| (\mathrm{E} - \mathrm{P})\mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v} \|^2.$$

Les trois termes du second membre tendent vers 0 en vertu du théorème de H. Lebesgue car

$$| (1 - \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v} | \leqslant | \vec{v} |$$

et

$$| (\mathrm{E} - \mathrm{P})\mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v} | \leqslant \mathrm{K}\, | \vec{v} |,$$

K étant une constante indépendante de R.

Comme

$$(\mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{u}, \alpha_{\mathrm{R}}\vec{v}) + (\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\alpha_{\mathrm{R}}\vec{v}) = 0,$$

pour tout R et tout $\vec{v} \in \mathrm{V}_{\mathrm{E-P}}$ et puisque $\vec{u} \in \mathrm{V}_{\mathrm{P}}$, l'expression

$$(\mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{u}, (1 - \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v}) + (\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}(1 - \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v})$$

a un sens et est majorée en module par

$$\| \vec{u} \|_{\mathrm{V}_{\mathrm{P}}} \| (1 - \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v} \|_{\mathrm{V}_{\mathrm{E-P}}}$$

qui tend vers 0 lorsque R tend vers $+ \infty$.

La fonction $\vec{u} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$ satisfait donc aux conditions de D — N ordinaires et $\mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}} = \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$.

Si $\vec{u} \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$ *et si* $\vec{v} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$, *alors*

$$(\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}, \mathscr{A}^*(- \mathrm{D})\vec{v}) = 0.$$

En effet, considérons

$$(\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{u}, \vec{v}) = (\mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{u}, \vec{v}) + (\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{u}, \vec{v}).$$

Comme $\vec{v} \in \mathrm{V}^c \subset \mathrm{V}^c_{\mathrm{E-P}}$ et $\vec{u} \in \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$, le premier terme du second membre vaut

$$- (\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{v}).$$

Considérons ensuite

$$(\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{v}).$$

Comme le support de $\vec{v}$ est compact, choisissons R tel que

$$[\vec{v}] \subset \{x : |x| \leqslant \mathrm{R}\}$$

et considérons la fonction α_{R} introduite dans le théorème précédent, on a évidemment

$$\vec{v} = \alpha_{\mathrm{R}}\vec{v}$$

et l'expression considérée en second lieu peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&(\alpha_{\mathrm{R}}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\alpha_{\mathrm{R}}\vec{v}) \\
&= (\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\alpha_{\mathrm{R}}\vec{u}, \vec{v}) + (\alpha_{\mathrm{R}}\vec{u}, \mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{v}) \\
&- (\mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_{\mathrm{R}})\mathrm{P}\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_{\mathrm{R}})\vec{v}) = 0,
\end{aligned}$$

car $\vec{v} \in \mathrm{N}$, $\alpha_{\mathrm{R}}\vec{u} \in \mathrm{V} \subset \mathrm{V}_{\mathrm{E-P}}$ et les deux derniers termes du second membre sont opposés.

Finalement

$$(\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{u}, \vec{v}) = - (\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{v}) - (\vec{u}, \mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{v}) = - (\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{v}),$$

d'où le théorème, puisque

$$(A\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, A^*\vec{v})$$

et

$$\mathscr{A}^*(-D) = -\mathring{\mathscr{A}}(D) + A^*.$$

Les fonctions de $V^c \cap N$ *sont denses dans* $V \cap N$.

Considérons encore la fonction α_R définie ci-dessus.

Il est évident que si $\vec{u} \in V \cap N$, alors $\alpha_R\vec{u} \in V^c \cap N$. Pour le voir, il suffit de vérifier que $(E - P)\alpha_R\vec{u} \in V_{\dot{\Omega}_D}$, ce qui se fait aisément et de vérifier que

$$(P\mathring{\mathscr{A}}(D)\alpha_R\vec{u}, \vec{v}) + (\alpha_R\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(D)P\vec{v}) = 0,$$

ce qui se fait un raisonnement semblable à celui du théorème précédent.

Comme $\alpha_R\vec{u} \underset{V}{\rightarrow} \vec{u}$, le théorème est démontré, $V \cap N$ étant fermé dans V.

On déduit également de cette démonstration que V^c *est dense dans* V *et* V_e^c *dans* V_e, $e \subset \dot{\Omega}$.

Les espaces $V \cap V_e^b$ *et* V_e, $e \subset \dot{\Omega}$, *sont identiques.*

Il est évident que

$$V_e \subset V \cap V_e^b.$$

D'autre part, si

$$\vec{u} \in V \cap V_e^b,$$

alors visiblement $\alpha_R\vec{u} \in V_e$ pour tout R.

Comme $\alpha_R\vec{u} \underset{V}{\rightarrow} \vec{u}$ et puisque V_e est fermé dans V, on en déduit que

$$\vec{u} \in V_e.$$

Si $\vec{u}_t \in V^b$ *et si* $\vec{u}_t$ *et* $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]a, b[)$, *alors*

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt \in V^b,$$

$$\mathscr{A}(D) \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{A}(D)\vec{u}_t dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (\vec{u}_t, \vec{v})_{V(\omega)} dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt, \vec{v}\right)_{V(\omega)},$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt \right\|_{V(\omega)} \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \| \vec{u}_t \|_{V(\omega)} dt,$$

quel que soit $\omega \times]t_0, t_1[$ *borné* $\subset \Omega \times]a, b[$ *et pour tout* $\vec{v} \in V^b$.

La démonstration de ce théorème est semblable à la démonstration du théorème correspondant à H_m^b (ch. I, § 7), il suffit d'y remplacer les grandeurs correspondant à H_m^b par celles correspondant à V^b.

Le théorème précédent modifié en y remplaçant V^b *par* V_c^b *est encore vrai.*

En effet, comme $V_{e\cap\dot{\omega}}(\omega) \subset V(\omega)$, l'expression

$$(\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt,\, \vec{v})_{V(\omega)}$$

définit une fonctionnelle antilinéaire bornée de $\vec{v} \in V_{e\cap\dot{\omega}}(\omega)$ car

$$\left| (\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt,\, \vec{v})_{V(\omega)} \right| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \| \vec{u}_t \|_{V(\omega)} dt \, \| \vec{v} \|_{V(\omega)}.$$

Il existe donc un élément $\vec{w} \in V_{e\cap\dot{\omega}}(\omega)$ tel que

$$(\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt,\, \vec{v})_{V(\omega)} = (\vec{w},\, \vec{v})_{V(\omega)}$$

pour tout $\vec{v} \in V_{e\cap\dot{\omega}}(\omega)$.

Montrons que

$$\vec{w} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt.$$

Étant donné $\vec{f}$ quelconque $\in L_2(\omega)$, il existe une fonction $\vec{u} \in V_{e\cap\dot{\omega}}(\omega)$, telle que

$$(\vec{v},\, \vec{u})_{V(\omega)} = (\vec{v},\, \vec{f})_{L_2(\omega)}$$

car $(\vec{v}, \vec{f})_{L_2(\omega)}$ est une fonctionnelle linéaire bornée de $\vec{v} \in V_{e\cap\dot{\omega}}(\omega)$.

Puisque $\vec{w} \in V_{e\cap\dot{\omega}}(\omega)$, on a donc d'une part

$$(\vec{w},\, \vec{u})_{V(\omega)} = (\vec{w},\, \vec{f})_{L_2(\omega)},$$

et d'autre part

$$(\vec{w},\, \vec{u})_{V(\omega)} = (\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt,\, \vec{u})_{V(\omega)}$$

car $\vec{u} \in V_{e\cap\dot{\omega}}(\omega)$.

Comme $\vec{u}_t \in V_{e\cap\dot{\omega}}(\omega)$, il vient

$$(\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt,\, \vec{v})_{V(\omega)} = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{u}_t,\, \vec{v})_{V(\omega)} dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{u}_t,\, \vec{f})_{L_2(\omega)} dt$$

et finalement

$$(\vec{w}, \vec{f})_{L_2(\omega)} = (\int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt, \vec{f})_{L_2(\omega)},$$

pour tout $\vec{f} \in L_2(\omega)$.

Vu l'arbitraire de ω, on déduit que

$$\vec{w} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{u}_t dt,$$

pp. dans Ω.

20. — Remarquons qu'il est possible de développer une théorie analogue pour les espaces $V^{loc}(\Omega)$, $V_e^{loc}(\Omega)$ et $V^{comp}(\Omega) = V_e^{comp}(\Omega)$, ces espaces étant définis à partir de L_2^{loc} et L_2^{comp}.

Tous les théorèmes précédents restent vrais à condition de substituer « loc » à « b » et « comp » à « c », sauf pour $L_2^b(\Omega \times]a, b[)$ que l'on peut remplacer par $L_2^{loc}([a, b]\,; L_2^{loc})$ au lieu de $L_2^{loc}(\Omega \times]a, b[)$.

Chapitre III

PROBLÈMES DE DIRICHLET-NEUMANN POUR LES OPÉRATEURS MATRICIELS DE DÉRIVATION HYPERBOLIQUES DU PREMIER ORDRE

Position du problème de Dirichlet-Neumann pour $\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t$

21. — Adoptons une formulation du problème de D — N débarrassée de toute hypothèse superflue.

Soit Ω un ouvert connexe de E_n. Donnons-nous

— la *donnée au second membre* (en abrégé le second membre) $\vec{f}_t(x) \in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$,

— la *donnée initiale* $\vec{u}_0(x) \in \mathrm{L}_2^b$.

Le *problème de* D — N, posé pour l'opérateur $\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t$ dans l'ouvert Ω, consiste à chercher $\vec{u}_t(x) \in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, tel que

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}},$$

et

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \mathrm{D}_t \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \vec{f}_t \varphi(t) dt - \vec{u}_0 \varphi(0),$$

quel que soit $\varphi(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$ [2, 12, 17, 24].

Ce problème peut aussi être formulé de la manière suivante : il consiste à déterminer $\vec{u}_t \in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, tel que

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P}) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}},$$

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})\mathrm{D}_t\varphi(t)dt$$
$$= \int_0^{+\infty} (\vec{f}_t, \vec{v})\varphi(t)dt - (\vec{u}_0, \vec{v})\varphi(0)$$

pour tout $\vec{v} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$ et pour tout $\varphi(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$ [23], [24].

22. — Montrons *l'équivalence de ces deux formulations.*

a) Si $\vec{u}_t$ satisfait aux conditions de la première formulation, puisque

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt \in \mathrm{V}^b,$$

on a évidemment

$$\left(\mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt, \vec{v}\right) + \left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\mathrm{D}_t\varphi(t)dt, \vec{v}\right)$$
$$= \left(\int_0^{+\infty} \vec{f}_t\varphi(t)dt, \vec{v}\right) - \left(\vec{u}_0\varphi(0), \vec{v}\right)$$

pour tout $\vec{v} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N} \subset \mathrm{L}_2^c$.

Comme

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}},$$

cette relation peut s'écrire, en appliquant la définition de l'intégrale à valeur dans L_2^b,

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})\mathrm{D}_t\varphi(t)dt$$
$$= \int_0^{+\infty} (\vec{f}_t, \vec{v})\varphi(t)dt - (\vec{u}_0, \vec{v})\varphi(0),$$

comme $\mathrm{N}^{\mathrm{loc}} \subset (\mathrm{V_P})^b_{\mathring{\Omega}_\mathrm{D}}$, $\vec{u}_t$ est solution au sens de la seconde formulation.

b) Inversement, supposons que $\vec{u}_t$ satisfasse aux conditions de la seconde formulation.

L'équation qui y figure est en particulier vérifiée si on y remplace $\vec{v}$ par $\vec{\Phi} \in D(\Omega)$.

Si on applique la définition de l'intégrale à valeur dans L_2^b à chaque intégrale, on constate que

$$\left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt, \mathscr{A}^*(-D)\vec{\Phi}\right) =$$

$$\left(\int_0^{+\infty} \vec{f}_t \varphi(t) dt - \int_0^{+\infty} \vec{u}_t D_t \varphi(t) dt - \vec{u}_0 \varphi(0), \vec{\Phi}\right),$$

pour tout $\varphi \in D(E_1)$ et tout $\vec{\Phi} \in D(\Omega)$. Par conséquent,

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \in V^b$$

et

$$\mathscr{A}(D) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt = -\int_0^{+\infty} \vec{u}_t D_t \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \vec{f}_t \varphi(t) dt - \vec{u}_0 \varphi(0),$$

ce qui est l'équation intervenant dans la première formulation.

Des considérations précédentes, on déduit que

$$\left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt, \mathscr{A}^*(-D)\vec{v}\right) = \left(\mathscr{A}(D) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt, \vec{v}\right),$$

pour tout $\vec{v} \in V^c \cap N$.

Montrons, à partir de cette relation, que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt$$

satisfait à la condition de NEUMANN locale.

Puisque cette intégrale est dans V_{E-P}^b (cf. ch. II, § 14), en tenant compte du fait que $\vec{v}$ satisfait à la condition de NEUMANN, la relation de départ se réduit à

$$\left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt, \mathring{\mathscr{A}}(D) P\vec{v}\right) + \left(P\mathring{\mathscr{A}}(D) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt, \vec{v}\right) = 0.$$

La propriété sera établie si nous montrons qu'une telle relation, valable pour tout $\vec{v} \in V^c \cap N$, l'est également pour tout $\vec{v} \in V_{E-P}^c$.

Vu la définition de P, la relation précédente ne change pas si nous remplaçons $\vec{v}$ par $P\vec{v}$ dans le second terme.

Supposons que $\vec{v} \in V^c_{E-P}$, on a

$$\vec{v} = P\vec{v} + (E - P)\vec{v},$$

avec

$$P(E - P) = 0, \qquad P\vec{v} \in V^c \cap N,$$

et la relation considérée est encore vraie si $\vec{v} \in V^c_{E-P}$, elle exprime que l'intégrale en question satisfait à la condition de NEUMANN locale.

Interprétation physique

23. — Le théorème suivant montre que la solution du problème est la généralisation naturelle de la solution classique du système

$$[\mathscr{A}(D) - D_t]\vec{u}_t = \vec{f}_t,$$

qui vaut $\vec{u}_0$ lorsque $t = 0$.

Si $\vec{u}_t \in C_1(\Omega \times]0, +\infty[)$ est une solution du problème, si

$$\lim_{t\to 0} \vec{u}_t \in L_1^{\mathrm{loc}}$$

alors

$$\mathscr{A}(D)\vec{u}_t - D_t\vec{u}_t = \vec{f}_t$$

pp. dans $\Omega \times]0, +\infty[$ et

$$\lim_{t\to 0} \vec{u}_t = \vec{u}_0$$

pp. dans Ω.

Considérons la seconde formulation du problème. Vu les hypothèses faites sur $\vec{u}_t$, après intégration par parties et application du théorème ldémontré en pp. 37-38, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} (\mathscr{A}(D)\vec{u}_t, \vec{\Phi})\varphi(t)dt - \int_0^{+\infty} (D_t\vec{u}_t, \vec{\Phi})\varphi(t)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (\vec{f}_t, \vec{\Phi})\varphi(t)dt - ([\vec{u}_0 - \lim_{t\to 0} \vec{u}_t]\varphi(0), \vec{\Phi}),$$

pour tout $\vec{\Phi} \in D(\Omega)$.

Si $\varphi \in D(]0, +\infty[)$, cela entraîne que

$$\mathscr{A}(D)\vec{u}_t - D_t\vec{u}_t = \vec{f}_t$$

pp. dans $\Omega \times]0, +\infty[$.

Tenant compte de ce résultat, nous obtenons

$$\vec{u}_0 = \lim_{t \to 0} \vec{u}_t$$

pp. dans Ω.

24. — La formulation du problème fait intervenir explicitement des expressions de la forme

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt$$

et leurs dérivées, ce sont des *distributions par rapport à t à valeurs dans* L_2^b, nous les appellons *moyennes temporelles* ou simplement *moyennes*.

La formulation adoptée exprime donc que ce sont les moyennes de $\vec{u}_t$ qui satisfont aux conditions de D — N et vérifient l'équation

$$[\mathscr{A}(D) - D_t]\mathcal{T} = \int_0^{+\infty} \vec{f}_t \varphi(t) dt,$$

conformément à la définition des dérivées des distributions [29].

Théorème d'annulation

25. — *Si*

$$\int_0^T \vec{u}_t \varphi(t) dt \in N$$

et

$$\left(\int_0^T \vec{u}_t \varphi(t) dt, \mathscr{A}^*(-D)\vec{v}\right) + \left(\int_0^T \vec{u}_t D_t \varphi(t) dt, v\right) = 0,$$

pour tout $\vec{v} \in V \cap N$ *et tout* $\varphi \in D(]-\infty, T[)$, T *positif fixé, alors* $\vec{u}_t = 0$ *pp. dans* $\Omega \times]0, T[$.

Comme $D(\Omega) \subset V \cap N$, on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \in V \cap N.$$

Dans la condition imposée au départ, nous pouvons donc remplacer $\vec{v}$ par l'intégrale de $\vec{u}_t \varphi(t)$ dans $]0, T[$.

En tenant compte de la valeur de

$$\mathscr{A}^*(-D) \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t) dt,$$

nous obtenons

$$\left(\int_0^T \vec{u}_t \varphi(t) dt, \int_0^T \vec{u}_t D_t \varphi(t) dt\right) + \left(\int_0^T \vec{u}_t D_t \varphi(t) dt, \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t) dt\right)$$

$$+ \left(\int_0^T \vec{u}_t \varphi(t) dt, [A + A^*] \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t) dt\right) = 0.$$

Cette relation a lieu pour tout $\varphi \in D(]-\infty, T[)$, nous pouvons donc effectuer sur φ une translation à gauche, $\varphi(t)$ devient $\varphi(t + s)$ et $D_t \varphi(t)$ devient $D_s \varphi(t + s)$.

Le symbole de dérivation par rapport à s peut visiblement sortir du signe d'intégration et, la dérivée par rapport à s de l'intégrale étant une dérivée forte, nous obtenons

$$D_s \left\| \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t + s) dt \right\|^2 = -\left(\int_0^T \vec{u}_t \varphi(t + s) dt, [A + A^*] \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t+s) dt\right).$$

Comme $A + A^*$ est hermitien, nous avons

$$D_s \left\| \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t + s) dt \right\|^2 \geqslant \lambda \left\| \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t + s) dt \right\|^2,$$

où λ est la plus petite des valeurs propres de $-(A + A^*)$.

Si la norme écrite au second membre de l'inégalité précédente est nulle en $s = 0$ pour tout φ, alors $\vec{u}_t = 0$ pp. dans $\Omega \times]0, T[$.

Si cette norme n'est pas nulle pour un φ en $s = 0$, il existe un intervalle $[0, S]$ où elle n'est pas nulle car elle est continue dans $[0, +\infty[$.

Dans cet intervalle, nous avons

$$\frac{D_s \left\| \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t+s) dt \right\|^2}{\left\| \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t+s) dt \right\|^2} \geqslant \lambda$$

et, en intégrant de 0 à S, nous obtenons

$$\left\| \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t+s) dt \right\|^2 \geqslant e^{\lambda s} \left\| \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t) dt \right\|^2.$$

Si S tend vers le plus petit zéro du premier membre de cette inégalité, vu la continuité de la norme, il vient

$$\left\| \int_0^T \vec{u}_t \varphi(t) dt \right\|^2 = 0$$

et la norme est nulle en $s = 0$, contrairement à ce que nous venons de supposer.

Théorème de densité

26. — A toute fonction $\vec{u}\varphi(t) \in (V \cap N) \otimes D(E_1)$ (*), associons

$$\Theta\,[\vec{u}\varphi(t)] = \begin{pmatrix} \mathscr{A}(D)\vec{u}\varphi(t) - \vec{u}D_t\varphi(t) \\ \vec{u}\varphi(0) \end{pmatrix} \in L_2(\Omega \times]0, T[) \times L_2(\Omega).$$

quel que soit T positif fixé et fini.

L'ensemble des $\Theta\,[\vec{u}\varphi(t)]$ *est total dans*

$$L_2(\Omega \times]0, T[) \times L_2(\Omega)$$

muni du produit scalaire

$$\left(\begin{pmatrix} \vec{u}_t \\ \vec{u}_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{v}_t \\ \vec{v}_0 \end{pmatrix}\right) = (\vec{u}_t, \vec{v}_t)_{L_2(\Omega \times]0, T[)} + (\vec{u}_0, \vec{v}_0).$$

Nous démontrons ce théorème en établissant l'annulation de toute fonction de $L_2(\Omega \times]0, T[) \times L_2$ orthogonale à l'ensemble des $\Theta\,[\vec{u}\varphi(t)]$.

(*) Si E et F sont des ensembles de fonctions à valeurs respectivement dans C^N et C, on représente par $E \otimes F$ l'ensemble des produits

$$\vec{u}v, \ \vec{u} \in E, \ v \in F.$$

Soit $\begin{pmatrix} \vec{f}_t \\ \vec{g} \end{pmatrix} \in L_2(\Omega \times]0, T[) \times L_2$, tel que

$$\int_0^T (\vec{f}_t, \mathscr{A}(D)\vec{u}\varphi(t))dt - \int_0^T (\vec{f}_t, \vec{u}D_t\varphi(t))dt + (\vec{g}, \vec{u}\varphi(0)) = 0,$$

pour tout $\varphi \in D(E_1)$, et tout $\vec{u} \in V \cap N$.

Considérons $\varphi \in D(]0, +\infty[)$, le dernier terme du premier membre de la relation précédente est nul et nous déduisons l'existence de

$$\mathscr{A}^*(-D) \int_0^T \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt$$

dans L_2 et l'égalité

$$(\int_0^T \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt, \mathscr{A}(D)\vec{u}) = (\mathscr{A}^*(-D) \int_0^T \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt, \vec{u})$$

pour tout $\vec{u} \in V \cap N$.

Comme l'intégrale dans $]0, T[$ de $\vec{f}_t\overline{\varphi}(t)$ est dans V_{E-P}, en exprimant que $\vec{u} \in N$, l'égalité précédente se réduit à

$$(\int_0^T \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt, \mathring{\mathscr{A}}(D)P\vec{u}) = (\mathring{\mathscr{A}}(-D) \int_0^T \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt, P\vec{u}). \qquad (*)$$

On démontre comme au § 22, en considérant V au lieu de V^b et V^c, qu'une telle relation, vérifiée pour tout $\vec{u} \in V \cap N$, l'est encore pour tout $\vec{u} \in V_{E-P}$, donc pour tout $\vec{u} \in V$ et satisfaisant à la condition de NEUMANN.

En particulier

$$\int_0^T \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt$$

satisfait à la condition de NEUMANN.

Puisque $\vec{u} \in V$ et satisfait à la condition de NEUMANN et puisque

$$\int_0^T \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt \in V_{E-P},$$

nous avons successivement

$$(\mathrm{P}\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{u}, \int_0^{\mathrm{T}} \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt) + (\vec{u}, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P} \int_0^{\mathrm{T}} \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt) = 0,$$

$$(\int_0^{\mathrm{T}} \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})(\mathrm{E} - \mathrm{P})\vec{u}) = (\mathring{\mathscr{A}}(-\mathrm{D}) \int_0^{\mathrm{T}} \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt, (\mathrm{E}-\mathrm{P})\vec{u}). (**)$$

En additionnant membre à membre les relations (*) et (**) ci-dessus, nous obtenons, vu la valeur de

$$\mathscr{A}^*(-\mathrm{D}) \int_0^{\mathrm{T}} \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt,$$

$$(\int_0^{\mathrm{T}} \vec{f}_t\overline{\varphi}(t)dt, -\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}) + (\int_0^{\mathrm{T}} \vec{f}_t\mathrm{D}_t\overline{\varphi}(t), \vec{u}) = 0,$$

pour tout $\vec{u} \in \mathrm{V}$ et satisfaisant à la condition de NEUMANN et pour tout $\varphi(t) \in \mathrm{D}(]0, +\infty[)$.

Posons

$$t = \mathrm{T} - t', \qquad \vec{f}_{\mathrm{T}-t'} = \vec{\mathrm{F}}_{t'}, \qquad \overline{\varphi}(\mathrm{T} - t') = \psi(t'),$$

par suite $\psi(t') \in \mathrm{D}(]-\infty, \mathrm{T}[)$ et $\mathrm{D}_t\overline{\varphi}(t)$ devient $-\mathrm{D}_{t'}\psi(t')$.

La relation considérée s'écrit

$$(\int_0^{\mathrm{T}} \vec{\mathrm{F}}_{t'}\psi(t')dt', \mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}) + (\int_0^{\mathrm{T}} \vec{\mathrm{F}}_{t'}\mathrm{D}_{t'}\psi(t')dt', \vec{u}) = 0,$$

pour tout $\vec{u} \in \mathrm{V}$ et satisfaisant à la condition de NEUMANN et tout $\psi(t') \in \mathrm{D}(]-\infty, \mathrm{T}[)$.

La fonction $\vec{\mathrm{F}}_t{}'$ satisfait donc aux hypothèses du théorème d'annulation pour l'opérateur $\mathscr{A}^*(-\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t$ dans le cas où $\dot{\Omega}_{\mathrm{D}} = \varnothing$, elle est donc nulle dans $\Omega \times]0, \mathrm{T}[$.

On en déduit que $\vec{f}_t = 0$ pp. dans $\Omega \times]0, \mathrm{T}[$. Comme T est arbitraire, $\vec{f}_t$ est nul pp. dans $\Omega \times]0, +\infty[$.

Tenant compte de ce résultat, en considérant $\varphi(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$ dans la relation de départ, nous déduisons que

$$(\vec{g}, \vec{u}\varphi(0)) = 0,$$

pour tout $\varphi(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$ et tout $\vec{u} \in \mathrm{V} \cap \mathrm{N}$, donc pour tout $\vec{u} \in \mathrm{D}(\Omega)$.

Dès lors, $\vec{g} = 0$ pp. dans Ω.

Ensemble de dépendance et inégalités d'énergie

27. — On appelle *cône de dépendance du point* (ou *de sommet*) (x_0, t_0), l'ensemble

$$C(x_0, t_0) = \bigcap_{|\alpha|=1} \{(x, t) : (x - x_0) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)(t - t_0) \leqslant 0\},$$

$\lambda_0(\alpha)$ étant défini au § 10.

Cet ensemble est fermé et convexe comme intersection de fermés convexes, il contient toujours les points (x_0, t) avec $t \leqslant t_0$ et ne contient jamais de points tels que $t > t_0$.

Étant donné un ensemble E quelconque de E_n, posons

$$E_{t_0} = \{(x, t) : x \in E, t = t_0\}.$$

On appelle *ensemble de dépendance de* E_{t_0}, l'union des cônes de dépendance des points de E_{t_0} :

$$C(E_{t_0}) = \bigcup_{x \in E} C(x, t_0).$$

Si E *est une boule fermée de* E_n, *de centre* x_0 *et de rayon* $r > 0$, *alors*

$$C(E_{t_0}) = \bigcap_{|\alpha|=1} \{(x, t) : (x - x_0) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)(t - t_0) \leqslant r, t \leqslant t_0\}.$$

En particulier l'ensemble de dépendance d'une boule fermée est un fermé convexe.

Désignons par B l'intersection considérée dans l'énoncé.

D'une part $C(E_{t_0}) \subset B$ car $C(x, t_0) \subset B$ quel que soit $x \in E$.

D'autre part, soit $(x_1. t_1) \in B$.

Considérons

$$C'(x_1, t_1) = \bigcap_{|\alpha|=1} \{(x, t_0) : (x - x_1) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)(t_0 - t_1) \geqslant 0\}.$$

Montrons que

$$E_{t_0} \cap C'(x_1, t_1) \neq \varnothing.$$

Si cette intersection est vide, il existe $\alpha_0(|\alpha_0| = 1)$ tel que pour tout $\rho \leqslant r$ et tout α de module égal à 1,

$$(x_0 + \rho\alpha - x_1) \times \alpha_0 + \lambda_0(\alpha_0)(t_0 - t_1) < 0$$

c'est-à-dire, en choisissant $\rho = r$ et $\alpha = \alpha_0$,

$$(x_1 - x_0) \times \alpha_0 + \lambda_0(\alpha_0)\,(t_1 - t_0) > r$$

et $(x_1, t_1) \notin \mathrm{B}$.

Soit (y, t_0) un point quelconque de $\mathrm{E}_{t_0} \cap \mathrm{C}'(x_1, t_1)$, le cône de dépendance de (y, t_0) contient (x_1, t_1) car l'inégalité

$$(y - x_1) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)\,(t_0 - t_1) \geqslant 0$$

exprime simultanément que $(y, t_0) \in \mathrm{C}'(x_1, t_1)$ et $(x_1, t_1) \in \mathrm{C}(y, t_0)$.

Tout ouvert étant limite d'unions finies emboitées de boules fermées contenues dans l'ouvert, *si* E *est un ouvert de* E_n *et si*

$$\mathrm{E} = \lim_{\mathrm{N}} \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} b_{i(\mathrm{N})},$$

b_i *désignant une boule fermée de* E_n, *alors*

$$\mathrm{C}(\mathrm{E}_{t_0}) = \lim_{\mathrm{N}} \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{C}(b_{i(\mathrm{N}),t_0}).$$

Il est évident que

$$\mathrm{C}(\mathrm{E}_{t_0}) \supset \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{C}(b_{i(\mathrm{N}),t_0})$$

quel que soit N car $\mathrm{E}_{t_0} \supset b_{i(\mathrm{N}),t_0}$.

Il suffit alors de montrer que tout point de $\mathrm{C}(\mathrm{E}_{t_0})$ appartient à l'ensemble de dépendance d'une boule d'un élément de la suite qui tend vers E_{t_0}.

Tout point (x, t) de $\mathrm{C}(\mathrm{E}_{t_0})$ appartient au cône de dépendance d'un point de E_{t_0}. Ce point appartient à une boule $b_{i(\mathrm{N}),t_0}$ dont l'ensemble de dépendance contient (x, t).

Comme les unions finies sont emboitées,

$$(x, t) \in \lim_{\mathrm{N}} \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{C}(b_{i(\mathrm{N}),t_0}).$$

Si E *est ouvert*, $\mathrm{C}(\mathrm{E}_{t_0}) \cap \{(x, t) : t < t_0\}$ *est ouvert*.

Si $(x, t) \in \mathrm{C}(\mathrm{E}_{t_0})$, alors $(x, t) \in \mathrm{C}(x_0, t_0)$, $(x_0, t_0) \in \mathrm{E}_{t_0}$ avec

$$b_{t_0} = \{(x, t_0) : |\, x - x_0 \,| \leqslant r\} \subset \mathrm{E}_{t_0},\ r > 0.$$

Évidemment $\mathrm{C}(b_{t_0}) \ni (x, t)$.

Il suffit de montrer que $d[(x, t), \complement_{\mathrm{E}_{n+1}} \mathrm{C}(b_{t_0})] > 0$ lorsque $t < t_0$.

Si cette distance est nulle, alors

$$(x, t) \in \overline{\complement\, C(b_{t_0})} \cap C(b_{t_0}) = \dot{C}(b_{t_0})$$

et puisque $t < t_0$, il existe α_0 tel que

$$(x - x_0) \times \alpha_0 + \lambda_0(\alpha_0)\,(t - t_0) = r > 0,$$

ce qui est en contradiction avec $(x, t) \in C(x_0, t_0)$.

On déduit de la proposition précédente que

$$\{x : (x, t) \in C(E_{t_0}),\ t \text{ fixé} \leqslant t_0\}$$

est un ouvert de E_n, borné si E est borné.

28. — Dans E_n, recouvrons $\{\alpha : |\alpha| = 1\}$ par un nombre fini M de boules ouvertes de rayon $1/m$ centrées dans cet ensemble.

Soient $\alpha_{1,m}, \ldots, \alpha_{M,m}$ les centres de ces boules.

Si b est une boule fermée de E_n de centre x_0 et de rayon $r \geqslant 0$, alors $C(b_{t_0})$ coïncide avec

$$\lim_{m\to\infty} \bigcap_{k=1}^{M} \{(x, t) : (x - x_0) \times \alpha_{k,m} + \lambda_0(\alpha_{k,m})\,(t - t_0) \leqslant r,\ t \leqslant t_0\}.$$

Désignons par C_m l'intersection finie considérée ci-dessus.

D'une part, il est immédiat que $C_m \supset C(b_{t_0})$ vu la forme particulière de l'ensemble de dépendance d'une boule fermée établie précédemment.

D'autre part, montrons qu'à tout point $(x, t) \in \complement_{E_{n+1}} C(b_{t_0})$ on peut associer m tel que $(x, t) \in \complement_{E_{n+1}} C_m$.

Évidemment si $t > t_0$, $(x, t) \in \complement\, C_m$ pour tout m.

Supposons $t \leqslant t_0$, alors il existe $\alpha (|\alpha| = 1)$ tel que

$$(x - x_0) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)\,(t - t_0) > r.$$

Vu la continuité de α et de $\lambda_0(\alpha)$ dans $\{\alpha : |\alpha| = 1\}$, il existe une boule de E_n

$$\beta = \{\xi : |\xi - \alpha| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\},$$

telle que

$$(x - x_0) \times \frac{\xi}{|\xi|} + \lambda_0\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)(t - t_0) > r.$$

Alors, pour tout $m > 1/\varepsilon$, β contient au moins un centre $\alpha_{k,m}$ d'une boule du recouvrement pour lequel

$$(x - x_0) \times \alpha_{k,m} + \lambda_0(\alpha_{k,m})(t - t_0) > r$$

et $(x, t) \in \complement \, C_m$.

29. — Établissons à présent les *inégalités d'énergie* relatives aux opérateurs $\mathscr{A}(D) - D_t$.

Soit ω un sous-ouvert borné de Ω.

Nous représenterons désormais par

C_T l'ensemble de dépendance de ω_T,

B_τ, $C_T \cap \Omega_\tau$,

B_0, $C_T \cap \Omega$,

B_T, l'ensemble ω_T.

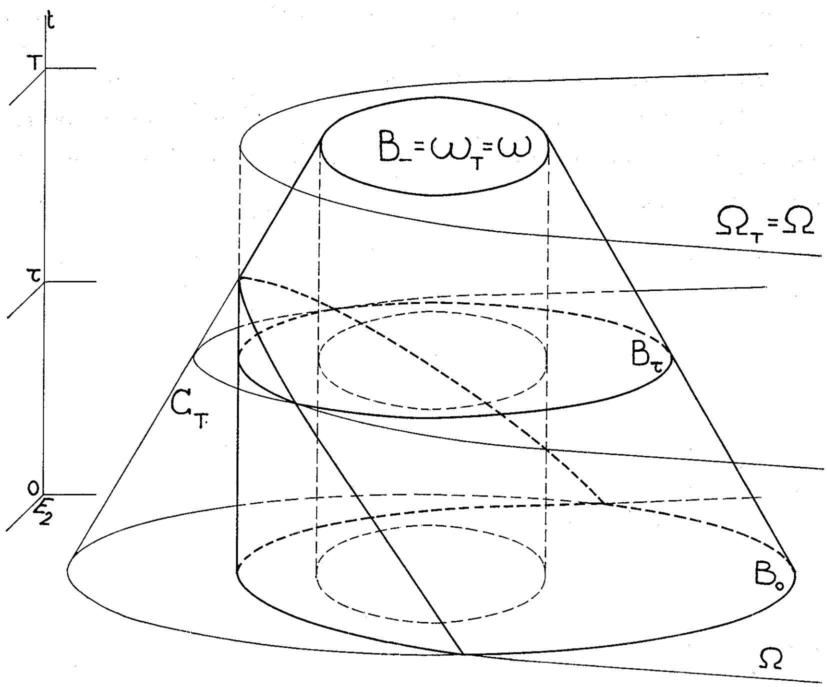

Figure avec $\Omega \subset E_2$.

Conformément à l'usage, nous représenterons encore par B_s, $s = \tau$, 0 ou T, l'ensemble de E_n

$$\{x : (x, t) \in B_s\}.$$

a) *Si* $\vec{u}_t \in V \cap N$ *est fortement continu dans* $[0, +\infty[$ *et fortemen-dérivable dans* $]0, +\infty[$ *et si* $\vec{u}_t$, $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t$, $D_t\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, *alors* $\vec{u}_t$ *satisfait à l'inégalité*

$$\| \vec{u}_\tau \|^2_{L_2(B_\tau)} \leqslant \| \vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_0)} - 2\mathrm{Re}\,([\mathscr{A}(D) - D_t]\vec{u}_t, \vec{u}_t)_{L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0,\tau[\})}$$
$$+ \Lambda \int_0^\tau \| \vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)} dt,$$

où $\vec{u}_0 = \lim \vec{u}_t$ *lorsque* $t \to 0$, Λ *est la plus grande des valeurs propres de* $A + A^*$ *et* $\mathrm{Re}\, f$ *représente la partie réelle de* f.

b) *Sous les hypothèses précédentes, on a encore l'inégalité*

$$\| \vec{u}_\tau \|^2_{L_2(B_\tau)} \leqslant K(\tau)\, [\| \vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_0)} + \| [\mathscr{A}(D) - D_t]\vec{u}_t \|^2_{L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0,\tau[\})}$$

où $K(\tau) = \sup\,(1, e^{(\Lambda+1)\tau})$.

c) *Si* $\vec{u}_t$ *satisfait aux hypothèses précédentes, alors*

$$\left\| \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \right\|^2_{L_2(B_T)} \leqslant (\sup_{[0,T]} |\varphi(t)| \int_0^T \sqrt{K(\tau)} d\tau)^2 \times$$
$$\times [\| \vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_0)} + \| [\mathscr{A}(D) - D_t]\vec{u}_t \|_{L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0,+\infty[\})}],$$

quel que soit $\varphi(t) \in D(]-\infty, T[)$.

Démontrons d'abord deux lemmes.

Si $f(t)$ *est une fonction réelle continue dans* $[0, +\infty[$, $g(t)$ *une fonction croissante dans* $]0, +\infty[$ *et si*

$$f(t) \leqslant g(t) + K \int_0^t f(s)\, ds,$$

dans $]0, +\infty[$, K *étant une constante positive, alors*

$$f(t) \leqslant e^{Kt} g(t).$$

Considérons

$$D_s\, e^{-Ks} \int_0^s f(u)du = -\, e^{-Ks}\, K \int_0^s f(u)du + e^{-Ks} f(s)$$

$$= e^{-Ks}\, [f(s) - K \int_0^s f(u)du]$$

$$\leqslant g(s)\, e^{-Ks}$$

$$\leqslant g(t)\, e^{-Ks},$$

si $t \geqslant s$.

En intégrant de 0 à t les membres extrêmes des inégalités ci-dessus, nous obtenons

$$e^{-Kt} \int_0^t f(u)du \leqslant (-\,1/K)\, g(t)\, (e^{-Kt} - 1),$$

ce qui entraîne

$$g(t) + K \int_0^t f(u)du \leqslant g(t)e^{Kt}$$

et à fortiori l'inégalité à démontrer.

Considérons une union finie de boules de E_n, $\bigcup_1^N b_i$, avec

$$b_i = \{x : \left| x - x_i \right| \leqslant r_i\}.$$

Soit $h_\varepsilon\,(s)$ une fonction de $C_\infty(E_1)$, croissante et telle que

$$h_\varepsilon(s) = \begin{cases} 1 \text{ si } s > 0, \\ 0 \text{ si } s \leqslant -\,\varepsilon, \end{cases} \qquad (\varepsilon > 0)$$

posons

$$\alpha_\varepsilon(x, t) = 1 - \prod_{i=1}^{N} \{1 - \prod_{k=1}^{M} h_\varepsilon[r_i - (x - x_i) \times \alpha_{k,m} - \lambda_0(\alpha_{k,m})(t - T)]\}$$

Il est évident que cette dernière fonction converge pp. dans $E_n \times\,]0, T[$ vers la fonction caractéristique de l'ensemble de dépendance de l'union de boules respectivement de centre x_i et de rayon r_i lorsque $\varepsilon \to 0$ et $m \to \infty$.

Si $\vec{u}_t \in V \cap N$, *alors* $\alpha_\varepsilon \vec{u}_t \in V \cap N$.

D'une part, si $(E - P)\vec{u}_t \in V_{\dot{\Omega}_D}$, alors $(E - P)\alpha_\varepsilon \vec{u}_t \in V_{\dot{\Omega}_D}$.

En effet, si $\vec{u}_t^p$, identiquement nul dans un voisinage de $\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}$, converge dans V vers $\vec{u}_t$, alors $\alpha_\varepsilon u_t^p$ est aussi identiquement nul dans un voisinage de $\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}$ et

$$\left| \alpha_\varepsilon(\vec{u}_t^p - \vec{u}_t) \right\|_{\mathrm{V}}^2$$
$$\leqslant \left\| \alpha_\varepsilon(\vec{u}_t^p - \vec{u}_t) \right\|^2 + 2 \left\| \mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_\varepsilon)\, (\vec{u}_t^p - \vec{u}_t) \right\|^2$$
$$+ \left\| \alpha_\varepsilon \mathscr{A}(\mathrm{D})\, (\vec{u}_t^p - \vec{u}_t) \right\|^2,$$

donc $\alpha_\varepsilon \vec{u}_t^p$ converge dans V vers $\alpha_\varepsilon \vec{u}_t$ car $\alpha_\varepsilon \leqslant 1$ et les dérivées $\mathrm{D}_{x_k}\alpha_\varepsilon$ sont uniformément bornées par rapport à p.

D'autre part, si $\vec{u}_t$ satisfait à la condition de Neumann, alors

$$(\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\alpha_\varepsilon\vec{u}_t, \mathrm{P}\vec{v}) + (\alpha_\varepsilon\vec{u}_t, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{v})$$
$$= (\mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_\varepsilon)\vec{u}_t, \mathrm{P}\vec{v}) + (\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\vec{u}_t, \alpha_\varepsilon\mathrm{P}\vec{v}) + (\alpha_\varepsilon\vec{u}_t, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{v}).$$

Le second terme du second membre vaut

$$-\,(\vec{u}_t, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\alpha_\varepsilon\vec{v})$$

et l'expression de départ s'écrit, en développant ce terme,

$$(\mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_\varepsilon)\vec{u}_t, \mathrm{P}\vec{v}) - (\vec{u}_t, \mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_\varepsilon)\mathrm{P}\vec{v})$$
$$-\,(\vec{u}_t, \alpha_\varepsilon\mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{v}) + (\alpha_\varepsilon\vec{u}_t, \mathring{\mathscr{A}}(\mathrm{D})\mathrm{P}\vec{v}),$$

c'est-à-dire 0.

Démontrons la première inégalité d'énergie écrite en a) ci-dessus.

Considérons l'expression

$$([\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t]\vec{u}_t, \alpha_\varepsilon\vec{u}_t) - (\alpha_\varepsilon\vec{u}_t, [\mathscr{A}^*(-\,\mathrm{D}) + \mathrm{D}_t]\vec{u}_t),$$

qui s'écrit également

$$(\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_t, \alpha_\varepsilon\vec{u}_t) - (\alpha_\varepsilon\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-\,\mathrm{D})\vec{u}_t) - (\mathrm{D}_t\vec{u}_t, \alpha_\varepsilon\vec{u}_t) - (\alpha_\varepsilon\vec{u}_t, \mathrm{D}_t\vec{u}_t).$$

Comme $\vec{u}_t$ et $\alpha_\varepsilon\vec{u}_t \in \mathrm{V} \cap \mathrm{N}$, le premier terme vaut

$$(\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-\,\mathrm{D})\alpha_\varepsilon\vec{u}_t),$$

ce qui se développe en

$$-\,(\vec{u}_t, \mathring{\mathscr{A}}(\operatorname{grad} \alpha_\varepsilon)\vec{u}_t) + (\alpha_\varepsilon\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-\,\mathrm{D})\vec{u}_t).$$

Le dernier terme peut s'écrire

$$(\vec{u}_t, \vec{u}_t\mathrm{D}_t\alpha_\varepsilon) - (\vec{u}_t, \mathrm{D}_t\alpha_\varepsilon\vec{u}_t).$$

Substituons dans l'expression de départ et intégrons de 0 à τ, nous obtenons

$$-\int_0^\tau [(\mathring{\mathscr{A}}(\text{grad } \alpha_\varepsilon)\vec{u}_t, \vec{u}_t) - (\vec{u}_t \mathrm{D}_t \alpha_\varepsilon, \vec{u}_t)]dt$$

$$- (\vec{u}_t, \alpha_\varepsilon(x, \tau)\vec{u}_t) + (\vec{u}_0, \alpha_\varepsilon(x, 0)\vec{u}_0).$$

En calculant grad α_ε et $\mathrm{D}_t\alpha_\varepsilon$ et en posant

$$a_{ik} = r_i - (x - x_i) \times \alpha_{k,m} - \lambda_0(\alpha_{k,m})\,(t - \mathrm{T})$$

le premier terme de ce résultat s'écrit

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \sum_{p=1}^{\mathrm{M}} \int_0^\tau \Bigg(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\mathrm{N}} [1 - \prod_{k=1}^{\mathrm{M}} h_\varepsilon(a_{ik})]$$

$$\prod_{\substack{k=1\\ k\neq p}}^{\mathrm{M}} h_\varepsilon(a_{jk}) \mathrm{D}_{a_{jp}} h_\varepsilon(a_{jp})\,[\mathring{\mathscr{A}}(\alpha_{p,m}) - \lambda_0(\alpha_{p,m})]\,\vec{u}_t, \vec{u}_t \Bigg)\, dt$$

Cette expression est visiblement négative ou nulle vu les propriétés de h_ε et λ_0. En la supprimant, on obtient l'inégalité

$$(\vec{u}_\tau, \alpha_\varepsilon(x, \tau)\vec{u}_\tau) - (\vec{u}_0, \alpha_\varepsilon(x, 0)\vec{u}_0)$$

$$\leqslant - \int_0^\tau \{ ([\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t]\vec{u}_t, \alpha_\varepsilon \vec{u}_t) - (\alpha_\varepsilon u_t, [\mathscr{A}^*(-\mathrm{D}) + \mathrm{D}_t]\vec{u}_t) \} dt.$$

Cette inégalité se conserve si $\varepsilon \to 0$ et $m \to +\infty$, en vertu du théorème de H. Lebesgue car $\alpha_\varepsilon \leqslant 1$ et a son support dans un compact fixe de E_{n+1} lorsque ε est assez petit et m assez grand. Comme, quel que soit $t < \mathrm{T}$, α_ε tend vers la fonction caractéristique de l'union des ensembles de dépendance des boules

$$\{x : |x - x_i| \leqslant r_i\}_{\mathrm{T}},$$

pp. dans E_n, nous obtenons à la limite

$$\| \vec{u} \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}'_\tau)} \leqslant \| \vec{u}_0 \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}'_0)} - 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau ([\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t]\vec{u}_t, \vec{u}_t)^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}'_t)} dt$$

$$+ \int_0^\tau ([\mathrm{A} + \mathrm{A}^*]\vec{u}_t, \vec{u}_t)_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}'_t)} dt,$$

où les ensembles B'_s, $s = \tau$, 0 ou t, sont les ensembles définis au début de ce paragraphe, relatifs à l'union finie de boules fermées considérée.

Cette inégalité est vraie lorsque l'ouvert de départ est un sous-ouvert quelconque de Ω.

Il suffit de considérer une suite d'unions finies emboitées de boules fermées tendant vers ω_τ et d'appliquer le théorème de H. LEBESGUE, l'inégalité étant vraie pour chaque élément de la suite.

Si Λ est la plus grande des valeurs propres de $A + A^*$, on déduit aisément l'inégalité a).

Démontrons l'inégalité b).

Appliquons l'inégalité de H. A. SCHWARZ au second terme du second membre de l'inégalité a), nous obtenons

$$- 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau ([\mathscr{A}(D) - D_t]\vec{u}_t, \vec{u}_t)^2_{L_2(B_t)}\, dt$$

$$\leqslant 2 \left[\int_0^\tau \| (\mathscr{A}(D) - D_t)\vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)}\, dt \right]^{1/2} \left[\int_0^\tau \| \vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)}\, dt \right]^{1/2}$$

$$\leqslant \int_0^\tau \| (\mathscr{A}(D) - D_t)\vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)}\, dt + \int_0^\tau \| \vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)}\, dt.$$

Modifiée en fonction de ce résultat, l'inégalité a) entraîne l'inégalité b), il suffiit en effet d'appliquer le premier lemme démontré ci-dessus en considérant

$$f(t) = \| \vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)},$$

$$g(t) = \| \vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_0)} + \int_0^t \| (\mathscr{A}(D) - D_t)\vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)}\, dt,$$

et

$$K = \sup(0, 1 + \Lambda).$$

La fonction $g(t)$ est évidemment croissante et la fonction $f(t)$ est continue car $\vec{u}_t$ est fortement continu et les ensembles B_t et B_{t+h} sont contenus dans un ouvert borné fixe pour toute valeur de $|h|$ inférieure à une quantité fixée.

L'inégalité relative à la moyenne est une conséquence directe de l'inégalité précédente. En effet, on a avec les notations précédentes

$$\left\| \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \right\|_{L_2(B_T)} \leqslant \sup_{[0,\,T]} |\varphi(t)| \int_0^T \|\vec{u}_t\|_{L_2(B_t)} dt$$

$$\leqslant \sup_{[0,\,T]} |\varphi(t)| \int_0^T g^{1/2}(t) \sup(1, e^{(1+\Lambda)t/2}) dt$$

$$\leqslant \sup_{[0,\,T]} |\varphi(t)|\, g^{1/2}(T) \int_0^T \sup(1, e^{(1+\Lambda)t/2}) dt,$$

d'où l'inégalité proposée.

Théorème d'existence

30. — *Il existe une fonction $\vec{u}_t$, solution du problème, qui vérifie les inégalités*

$$\|\vec{u}_\tau\|^2_{L_2(B_\tau)} \leqslant K(\tau) [\|\vec{u}_0\|^2_{L_2(B_0)} + \|\vec{f}_t\|^2_{L_2(C_T \cap \{\Omega = \times]0,\, \tau[\})},$$

$$\left\| \int^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \right\|^2_{L_2(B_T)} \leqslant (\sup_{[0,\,T]} |\varphi(t)| \int_0^T \sqrt{K(\tau)} d\tau)^2 \times$$

$$\times [\|\vec{u}_0\|^2_{L_2(B_0)} + \|\vec{f}_t\|^2_{L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0,\, +\infty[\})}],$$

où $\varphi(t) \in D(]-\infty, T[)$.

Notons que les fonctions, combinaisons linéaires finies de fonctions de $(V \cap N) \otimes D(E_1)$, vérifient les inégalités d'énergie.

Étant donnés $\vec{f}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$ et $\vec{u}_0 \in L_2^b$, en vertu du théorème de densité (§ 26), il existe une suite $\vec{u}_t^m$ de fonctions du type précédent telle que

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{A}(D)\vec{u}_t^m - D_t \vec{u}_t^m \xrightarrow[L_2[(\Omega \times]0,\, +\infty[) \supset C_T]{} \vec{f}_t \\ \vec{u}_0^m \xrightarrow[L_2(B_0)]{} \vec{u}_0 \end{array}\right\} \quad (I)$$

Montrons que $\vec{u}_t^m$ est une suite de A. Cauchy dans

$$L_2\{(\Omega \times]0, +\infty[) \cap C_T\}.$$

Pour le voir, il suffit d'appliquer l'inégalité d'énergie b) à

$$\vec{u}_t^p - \vec{u}_t^q$$

et de tenir compte de (I), la suite considérée est ainsi de A. CAUCHY dans $L_2(B_t)$ mais également dans $L_2[(\Omega \times]0, +\infty[) \cap C_T]$ car le second membre de l'inégalité d'énergie considérée peut être rendu indépendant de τ.

Soit $\vec{u}_t$ la limite dans $L_2(B_t)$ de $\vec{u}_t^m$, montrons que

$$\vec{u}_t^m \xrightarrow[L_2[(\Omega \times]0, +\infty[) \cap C_T]]{} \vec{u}_t.$$

En vertu de l'inégalité d'énergie b), nous avons

$$\| \vec{u}_t^p - \vec{u}_t^q \|^2_{L_2(B_t)} \leqslant K(T) [\| \vec{u}_0^p - \vec{u}_0^q \|^2_{L_2(B_0)} + \int_0^T \| [\mathscr{A}(D) - D_t] (\vec{u}_t^p - \vec{u}_t^q) \|^2_{L_2(B_t)} dt],$$

et, si $p \to +\infty$, vu (I),

$$\| \vec{u}_t - \vec{u}_t^q \|^2_{L_2(B_t)} \leqslant K(T) [\| \vec{u}_0 - \vec{u}_0^q \|^2_{L_2(B_0)} + \int_0^T \| \vec{f}_t - (\mathscr{A}(D) - D_t)\vec{u}_t^q \|^2_{L_2(B_t)} dt].$$

Il suffit alors de considérer l'intégrale de 0 à T de chaque membre et d'appliquer le théorème de H. LEBESGUE pour obtenir le résultat.

Montrons que, si $\vec{v}_t$ est une fonction construite par ce procédé dans l'ensemble de dépendance $C'_{T'}$ à l'aide de la suite $\vec{v}_t^m$, $\vec{u}_t = \vec{v}_t$ dans $C_T \cap C'_{T'} \cap (\Omega \times]0, +\infty[)$.

Il suffit de démontrer ce fait lorsque $C_T \subset C'_{T'}$. En effet, si c'est exact dans ce cas particulier, en considérant un ensemble de dépendance $C''_{T''}$ contenant $C_T \cup C'_{T'}$, alors, si $\vec{w}_t$ est la fonction construite dans $C''_{T''}$ à partir de $\vec{w}_t^m$, $\vec{w}_t = \vec{u}_t$ dans C_T et $\vec{w}_t = \vec{v}_t$ dans $C'_{T'}$ et, par conséquent, $\vec{u}_t = \vec{v}_t = \vec{w}_t$ dans $C_T \cap C'_{T'} \cap (\Omega \times]0, +\infty[)$, étant entendu que l'on ne considère que les intersections des ensembles de dépendance avec $\Omega \times]0, +\infty[$.

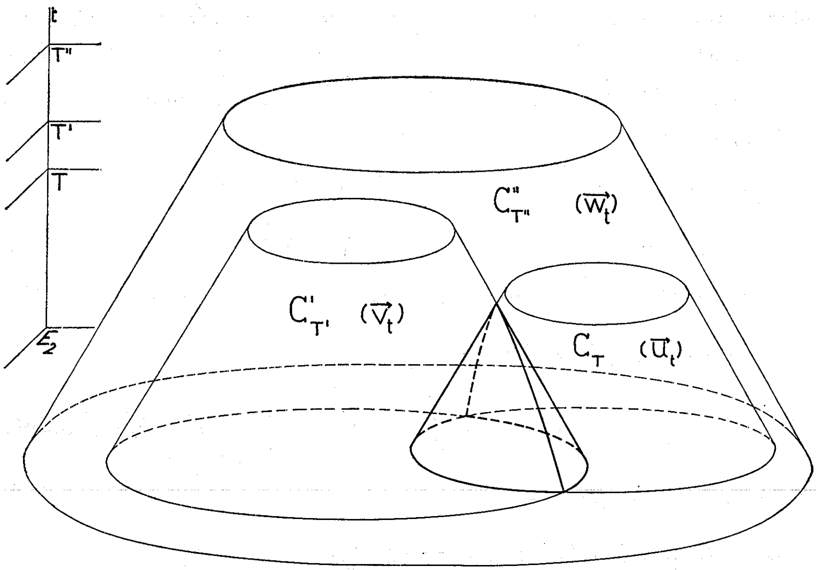

Figure avec $\Omega \subset E_2$.

Soit donc $C_T \subset C'_{T'}$.

La suite $\vec{v}_t^m$ converge évidemment vers $\vec{v}_t$ dans

$$L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0, +\infty[\})$$

pour tout $C_T \subset C'_{T'}$.

Considérons l'inégalité

$$\| \vec{u}_t - \vec{v}_t \| \leqslant \| \vec{u}_t - \vec{u}_t^m \| + \| \vec{v}_t - \vec{v}_t^m \| + \| \vec{u}_t^m - \vec{v}_t^m \|,$$

la norme étant celle de $L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0, +\infty[\})$.

Les deux premiers termes du second membre tendent vers 0 lorsque $m \to +\infty$.

La suite $\| \vec{u}_t^m - \vec{v}_t^m \|$ tend vers 0 en vertu de l'inégalité d'énergie, il suffit d'appliquer le raisonnement tenu dans la première partie de cette démonstration.

La fonction $\vec{u}_t$, ainsi construite, est définie de proche en proche dans $\Omega \times]0, +\infty[$ et $\in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$.

Montrons que $\vec{u}_t$ est solution du problème.

Considérons $\vec{v} \in V^c \cap N$, $\varphi(t) \in D(E_1)$ et l'expression

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t^m, \mathscr{A}^*(-D)\vec{v}\bar{\varphi}(t))dt + \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t^m, \vec{v}D_t\bar{\varphi}(t))dt.$$

Comme $\vec{u}_t^m \in V \cap N$ et $\vec{v} \in V^c \cap N$, vu la forme de $\vec{u}_t^m$, cette expression peut s'écrire

$$\int_0^{+\infty} ([\mathscr{A}(D) - D_t]\vec{u}_t^m, \vec{v}\bar{\varphi}(t))dt - (\vec{u}_0^m, \vec{v}\bar{\varphi}(0)),$$

en appliquant les théorèmes démontrés au § 19 et après intégration par parties par rapport à t.

Par passage à la limite, on obtient

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-D)\vec{v})\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})D_t\varphi(t)dt$$
$$= \int_0^{+\infty} (\vec{f}_t, \vec{v})\varphi(t)dt - (\vec{u}_0, \vec{v})\varphi(0),$$

pour tout $\varphi \in D(E_1)$ et tout $\vec{v} \in V^c \cap N$.

La fonction $\vec{u}_t$ satisfait donc à l'équation intervenant dans la seconde formulation du problème.

Montrons que

$$(E - P) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt \in V^b_{\dot{\Omega}_D}.$$

Puisque $\vec{u}_t^m$ converge dans $L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$ vers $\vec{u}_t$ et $\int_0^{+\infty} \vec{u}_t^m\varphi(t)dt \in V \cap N$ (cf. la forme de $\vec{u}_t^m$), tout sous-ouvert de $\Omega \times]0, +\infty[$ pouvant toujours être recouvert par l'ensemble de dépendance d'un ouvert ω_T, il suffit évidemment de montrer que

$$\mathscr{A}(D) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t^m\varphi(t)dt$$

est une suite de A. Cauchy dans $L_2(\omega)$, quel que soit ω.

On voit aisément que

$$\int_0^{+\infty} \{[\mathscr{A}(D) - D_t]\vec{u}_t^m\}\varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \mathscr{A}(D)\vec{u}_t^m\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \vec{u}_t^m D_t\varphi(t)dt$$
$$+ \vec{u}_0^m\varphi(0),$$

d'après la forme de $\vec{u}_t^m$. De plus, pour la même raison, l'opérateur $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ peut sortir du signe d'intégration dans le premier terme du second membre.

De là, nous déduisons les inégalités successives

$$\left\| \mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t^p - \vec{u}_t^q)\varphi(t)dt \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)}$$

$$\leqslant \left\| \int_0^{+\infty} (\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t)(\vec{u}_t^p - \vec{u}_t^q)\varphi dt \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)} + \left\| (\vec{u}_0^p - \vec{u}_0^q)\varphi(0) \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)}$$

$$+ \left\| \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t^p - \vec{u}_t^q)\mathrm{D}_t\varphi dt \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)},$$

$$\leqslant \mathrm{K}(\varphi) \int_{[\varphi]} \left\| (\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t)(\vec{u}_t^p - \vec{u}_t^q) \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)} dt + |\varphi(0)| \left\| \vec{u}_0^p - \vec{u}_0^q \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)}$$

$$+ \mathrm{K}(\mathrm{D}_t\varphi) \int_{[\varphi]} \left\| \vec{u}_t^p - \vec{u}_t^q \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)} dt,$$

qui montrent que la suite considérée est de A. CAUCHY dans $\mathrm{L}_2(\omega)$, avec $\mathrm{K}(\varphi) = \sup |\varphi|$ dans $]0, +\infty[$.

Pour obtenir les inégalités annoncées, il suffit d'appliquer les inégalités d'énergie b) et c) aux fonctions de la suite qui détermine $\vec{u}_t$ et de considérer la limite de chaque membre.

31. — Signalons un corollaire important du théorème d'existence.

La solution $\vec{u}_t$ est fortement continue dans $[0, +\infty[$.

Nous avons vu, au cours de la démonstration du théorème d'existence, que $\vec{u}_t^m$ convergeait dans L_2^b vers $\vec{u}_t$, nous déduisons aisément de la convergence dans $\mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, la convergence dans L_2^b uniforme dans $]0, \mathrm{T}[$ de $\vec{u}_t^m$ vers $\vec{u}_t$ pour tout T fini.

Considérons alors, avec la norme de $\mathrm{L}_2(\omega)$,

$$\left\| \vec{u}_{t+h} - \vec{u}_t \right\| \leqslant \left\| \vec{u}_{t+h} - \vec{u}_{t+h}^m \right\| + \left\| \vec{u}_t - \vec{u}_t^m \right\| + \left\| \vec{u}_{t+h}^m - \vec{u}_t^m \right\|$$
$$\leqslant 2 \sup_{]0, \mathrm{T}[} \left\| \vec{u}_t - \vec{u}_t^m \right\| + \left\| \vec{u}_{t+h}^m - \vec{u}_t^m \right\|.$$

Il suffit alors de choisir m de manière que le premier terme du dernier membre soit arbitrairement petit et, cet m étant fixé, de choisir h de manière à rendre l'autre terme arbitrairement petit.

Comme T est arbitraire, $\vec{u}_t$ est fortement continu dans $]0, +\infty[$.

La continuité en $0+$ est une conséquence de l'inégalité

$$\|\vec{u}_t - \vec{u}_0\| \leqslant \sup_{]0,\,T[} \|\vec{u}_t - \vec{u}_t^m\| + \|\vec{u}_t^m - \vec{u}_0^m\| + \|\vec{u}_0^m - \vec{u}_0\|.$$

Fixons m de manière que les termes extrêmes du second membre soient inférieurs à $\varepsilon/4$ ($\varepsilon > 0$ fixé). Cet m étant fixé, choisissons t de manière à rendre le second terme inférieur à $\varepsilon/2$, le théorème est donc démontré.

Ensemble d'action et support des solutions

32. — On appelle *cône d'action du point* (ou *de sommet*) (x_0, t_0), l'ensemble

$$\mathscr{C}(x_0, t_0) = \bigcap_{|\alpha| = 1} \{(x, t) : (x - x_0) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)(t - t_0) \geqslant 0\},$$

$\lambda_0(\alpha)$ étant défini au § 10.

Le cône d'action d'un point est évidemment fermé et convexe.

Étant donné un ensemble $\mathscr{E}$ quelconque de E_{n+1}, on appelle *ensemble d'action de* $\mathscr{E}$, l'ensemble

$$\mathscr{C}(\mathscr{E}) = \bigcup_{(x_0, t_0) \in \mathscr{E}} \mathscr{C}(x_0, t_0).$$

Entre les ensembles d'action et de dépendance, les relations

$$E_{t_0} \cap \mathscr{C}(\mathscr{E}) = \varnothing,$$
$$C(E_{t_0}) \cap \mathscr{E} = \varnothing,$$
$$C(E_{t_0}) \cap \mathscr{C}(\mathscr{E}) = \varnothing$$

s'entraînent mutuellement.

Montrons que les deux premières relations s'entraînent mutuellement.

Si la première de ces relations n'a pas lieu, il existe un point (x, t) de $\mathscr{E}$ dont le cône d'action contient $(x_0, t_0) \subset E_{t_0} \cap \mathscr{C}(\mathscr{E})$ et (x_0, t_0) satisfait à l'inégalité

$$(x_0 - x) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)(t_0 - t) \geqslant 0$$

quel que soit $\alpha(|\alpha| = 1)$, qui exprime également que $(x, t) \in C(x_0, t_0)$.

La seconde relation n'a donc pas lieu.

La proposition réciproque se démontre de la même manière.

Montrons que les première et troisième relations s'entraînent mutuellement.

Comme $\mathscr{E} \subset \mathscr{C}(\mathscr{E})$, si $E_{t_0} \cap \mathscr{C}(\mathscr{E}) \neq \varnothing$, alors $C(E_{t_0}) \cap \mathscr{C}(\mathscr{E}) \neq \varnothing$, en vertu de la première partie de cette démonstration.

Si $C(E_{t_0}) \cap \mathscr{C}(\mathscr{E}) \neq \varnothing$, il existe un point (x, t) commun au cône de dépendance d'un point $(x_0, t_0) \in E_{t_0}$ et au cône d'action d'un point $(y, \tau) \in \mathscr{E}$ et le point (x, t) satisfait aux inégalités

$$(x - x_0) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)\,(t - t_0) \leqslant 0,$$
$$(x - y) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)\,(t - \tau) \geqslant 0,$$

quel que soit $\alpha(|\,\alpha\,| = 1)$.

On en déduit que

$$(y - x_0) \times \alpha + \lambda_0(\alpha)\,(\tau - t_0) \leqslant 0$$

pour tout $\alpha(|\,\alpha\,| = 1)$.

Cette dernière inégalité exprime simultanément que

$$(y, \tau) \in C(x_0, t_0) \subset C(E_{t_0}),$$
$$(x_0, t_0) \in \mathscr{C}(y, \tau) \subset \mathscr{C}(\mathscr{E})$$

et les deux premières relations n'ont pas lieu.

Si (x_0, t_0) *et* $(x_1, t_1) \in E_{n+1}$, *on a toujours*

$$d[(x_0, t_0), \mathscr{C}(x_1, t_1)] = d[C(x_0, t_0), (x_1, t_1)],$$

où $d(A, B)$ *représente la distance entre les ensembles* A *et* B.

Démontrons que

$$d[(x_0, t_0), \mathscr{C}(x_1, t_1)] \geqslant d[C(x_0, t_0), (x_1, t_1)].$$

Soit (x, t) un point de $\mathscr{C}(x_1, t_1)$, qui réalise la distance de (x_0, t_0) à $\mathscr{C}(x_1, t_1)$.

Cette dernière distance est également celle de (x_1, t_1) au point

$$(x_1, t_1) + (x_0, t_0) - (x, t).$$

L'inégalité est alors immédiate puisque l'inégalité

$$[(x_1 + x_0 - x) - x_0] \times \alpha + \lambda_0(\alpha)\,[(t_1 + t_0 - t) - t_0] \leqslant 0,$$

pour tout $\alpha(|\,\alpha\,| = 1)$, exprime que $(x, t) \in \mathscr{C}(x_1, t_1)$ et $(x_1, t_1) + (x_0, t_0) - (x, t) \in C(x_0, t_0)$,

Un raisonnement semblable établit l'inégalité contraire entre les distances considérées.

Si $\mathscr{E} \in \mathrm{E}_n \times [0, +\infty[$ est fermé, alors $\mathscr{C}(\mathscr{E})$ est fermé.

Notons que, dans les hypothèses faites sur $\mathscr{E}$, on peut remplacer l'intervalle $[0, +\infty[$ par $[a, +\infty[$, quel que soit a borné.

Considérons $(x_0, t_0) \in \complement_{\mathrm{E}_{n+1}} \mathscr{C}(\mathscr{E})$ et montrons qu'il existe une boule de E_{n+1} centrée en ce point et contenue dans l'ensemble considéré.

En vertu d'une propriété précédente, on a

$$C(x_0, t_0) \cap \mathscr{E} = \varnothing.$$

Comme $\mathscr{E} \subset \mathrm{E}_n \times [0, +\infty[$, on peut évidemment se borner à considérer $t_0 \geqslant 0$ et remplacer $C(x_0, t_0)$ par

$$C(x_0, t_0) \cap \{\mathrm{E}_n \times [0, +\infty[\}.$$

Comme ce dernier ensemble est compact, on a

$$d[C(x_0, t_0), \mathscr{E}] = \delta > 0.$$

La proposition sera démontrée, si nous établissons que cela entraîne

$$d[(x_0, t_0), \mathscr{C}(\mathscr{E})] > 0.$$

Si cette dernière distance est nulle, on peut déterminer une suite $\{(x_m, t_m)\} \subset \mathscr{C}(\mathscr{E})$ telle que

$$d[(x_0, t_0), (x_m, t_m)] \leqslant 1/m.$$

Soit $(y_m, \tau_m) \subset \mathscr{E}$ le sommet d'un cône d'action contenant (x_m, t_m).

On a, à fortiori,

$$d[(x_0, t_0), \mathscr{C}(y_m, \tau_m)] \leqslant 1/m$$

et, en vertu du théorème précédent,

$$\begin{aligned} 0 < \delta = d[C(x_0, t_0), \mathscr{E}] &\leqslant d[C(x_0, t_0), (y_m, \tau_m)] \\ &= d[(x_0, t_0), \mathscr{C}(y_m, \tau_m)] \leqslant 1/m, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Venons-en aux propriétés du support des solutions.

Si $\vec{u}_t$ est solution du problème construite par le procédé précédent, alors

$$[\vec{u}_t] \subset \mathscr{C}([\vec{u}_0] \cup [\vec{f}_t]),$$

où $\vec{f}_t = 0$ si $t < 0$.

En particulier, si $[\vec{u}_0]$ *et* $[\vec{f}_t] \cap \{(x, t) : t = t_0\}$ *sont compacts quel que soit* t_0 *fixé, alors* $\vec{u}_t$*, en tant que fonction de* x*, est à support compact pour tout* t*.*

Comme $[\vec{u}_0] \cup [\vec{f}_t]$ est fermé et contenu dans $E_n \times [0, +\infty[$, le complémentaire dans E_{n+1} de son ensemble d'action est ouvert.

Montrons que $\vec{u}_t = 0$ pp. dans cet ouvert.

Quel que soit (y, τ) dans cet ouvert, il existe une boule à n dimensions

$$\{(x, t) : t = \tau + \eta, \ |x - y| \leqslant \varepsilon, \varepsilon \text{ et } \eta > 0\}$$

entièrement contenue dans cet ouvert et dont l'ensemble de dépendance contient

$$\beta = \{(x, t) : |(x, t) - (y, \tau)| \leqslant \inf(\varepsilon, \eta)\}$$

Comme l'ensemble de dépendance $C_{\tau+\eta}$ considéré ne rencontre pas $[\vec{u}_0] \cup [\vec{f}_t]$, en vertu des inégalités d'énergie, $\vec{u}_t$ est nul pp. dans B_t $(t \leqslant \tau + \eta)$, donc dans $C_{\tau+\eta}$ et en particulier dans β.

Ce qui établit le théorème.

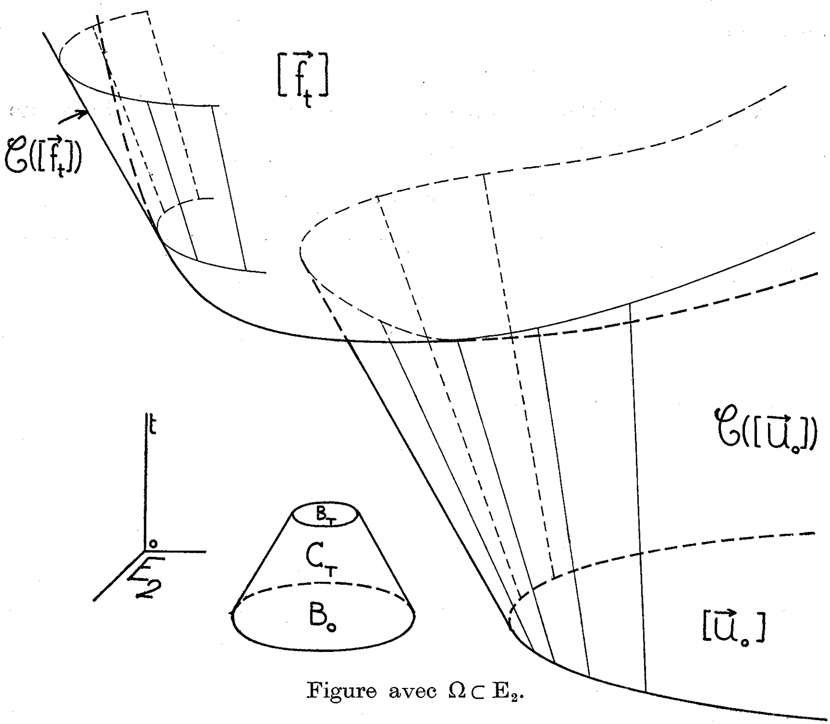

Figure avec $\Omega \subset E_2$.

Si $\vec{u}_0$ est à support compact et si $\vec{f}_t\delta_{[T_0, T_1]}(t)$ est à support compact quel que soit le compact $[T_0, T_1]$, *alors*

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt$$

est à support compact quel que soit $\varphi(t) \in D(E_1)$.

Si $[\varphi(t)] \subset [T_0, T_1]$, nous avons

$$\left\| \int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt \right\|_{L_2(\omega)} \leqslant \sup_{[0, +\infty[} |\varphi(t)| \int_0^{+\infty} \| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \delta_{[T_0, T_1]}(t)dt,$$

quel que soit ω.

Si $C(\omega_{T_1})$ ne rencontre ni $[\vec{u}_0]$ ni $[\vec{f}_t\delta_{[0, T_1]}(t)]$, le second membre de l'inégalité est nul. D'où le théorème.

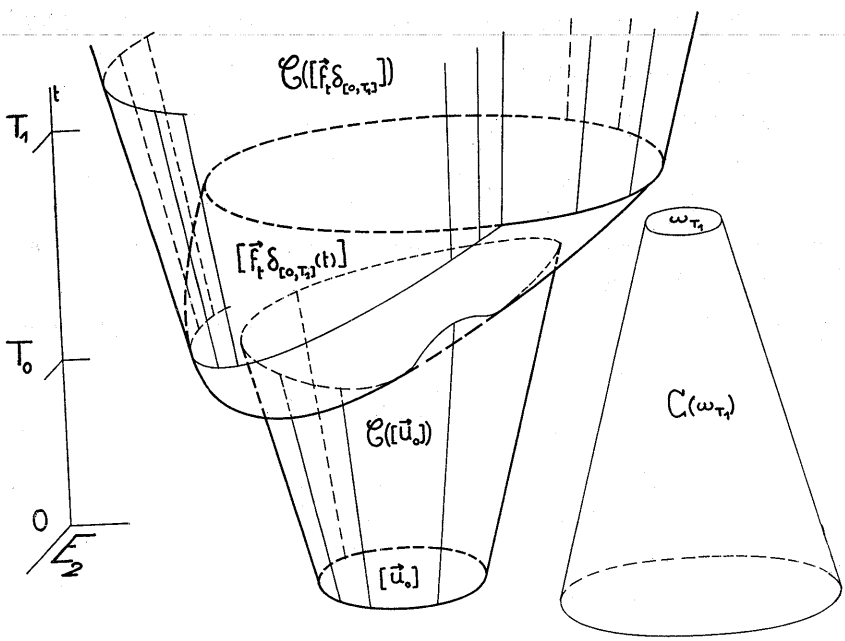

Figure avec $\Omega \subset E_2$.

Unicité de la solution

33. — Si $\vec{u}_t$ est la différence de deux solutions du problème, alors $\vec{u}_t$ est solution du problème caractérisé par les données au second membre et initiale nulles.

L'unicité de la solution est donc régie par le théorème suivant.

Si $\vec{u}_t$ est solution du problème posé avec les données nulles, alors $\vec{u}_t = 0$ pp. dans $\Omega \times]0, +\infty[$.

La fonction $\vec{u}_t$ vérifie donc l'égalité

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})\mathrm{D}_t\varphi(t)dt = 0,$$

pour tout $\vec{v} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$ et tout $\varphi(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$.

Soit $\vec{\mathrm{U}}_t$ une solution du problème relatif à l'opérateur $\mathscr{A}^*(-\mathrm{D}) + \mathrm{D}_t$ posé avec donnée au second membre nulle et donnée initiale $\vec{f}(x) \in \mathrm{L}_2^c$, construite par les procédés explicités dans le théorème d'existence.

Vu les théorèmes relatifs au support, le support de $\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t)dt$ est compact, $\varphi^*(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$.

Cela entraîne que

$$\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t)dt \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$$

puisque les fonctions de V^b à support compact sont dans V^c et $\mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}} = \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$.

Dans l'égalité vérifiée par $\vec{u}_t$, nous pouvons donc remplacer $\vec{v}$ par

$$\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t)dt.$$

Quel que soit $s \in \mathrm{E}_1$ et borné, nous pouvons remplacer $\varphi(t)$ par $\varphi(t-s)$ et $\varphi^*(t)$ par $\varphi^*(t+s)$ car ces fonctions restent dans $\mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$ par rapport à t.

Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt, \quad \int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt$$

sont indéfiniment fortement dérivables dans E_1 par rapport à s et, par exemple

$$\mathrm{D}_s^p \int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt = \int_0^{+\infty} \vec{u}_t\mathrm{D}_s^p\varphi(t-s)dt,$$

comme on le vérifie sans peine.

Après ces modifications, l'égalité de départ s'écrit

$$\left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt\right)$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\mathrm{D}_s\varphi(t-s)dt, \int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt\right).$$

Les deux membres de cette égalité s'annulent si $|s|$ est assez grand car l'un des supports $[\varphi(t-s)]$, $[\varphi^*(t+s)]$ ne rencontre pas $[0, +\infty[$.

Ils sont de plus dans $\mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$ car les deux facteurs sont indéfiniment fortement dérivables (cf. § 6).

Il vient ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ds \left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\mathrm{D}_s\varphi(t-s)dt, \int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt\right)$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} ds \left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt, \int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\mathrm{D}_s\varphi^*(t+s)dt\right),$$

en intégrant par parties.

Le premier membre s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\left(\mathscr{A}(\mathrm{D})\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt, \int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\mathrm{D}_s\varphi^*(t+s)dt\right),$$

puisque

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}.$$

Vu l'équation vérifiée par $\vec{\mathrm{U}}_t$, cette égalité entraîne que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \left(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt, \vec{f}\right)\varphi^*(s) = 0,$$

pour tout $\vec{f} \in L_2^c$ et tout $\varphi \in D(E_1)$, c'est-à-dire, puisque l'intégrant $\in C_\infty(E_1)$ comme fonction de s,

$$(\int_0^\infty \vec{u}_t \varphi(t - s)dt, \vec{f}) = 0,$$

pour toute valeur de s et en particulier pour $s = 0$ (d'où l'annulation de la moyenne pp. dans Ω). On en déduit que

$$(\vec{u}_t, \vec{f}) = 0$$

pour tout $\vec{f} \in L_2^c$, donc $\vec{u}_t = 0$ pp. dans $\Omega \times]0, +\infty[$.

Une propriété remarquable de la solution

34. — *Si $\vec{u}_t$ est solution du problème,*

et si
$$F(t) \in C_1(]a, b[) \cap C_0([a, b])$$
$$\vec{u}_t F(t),\ \vec{u}_t D_t F(t),\ \vec{f}_t F(t) \in L_1([a, b]\,;\, L_2^b),$$
si, de plus, $D_t F(t) \in C_0([a, b])$, *alors*

a)
$$\int_a^b \vec{u}_t F(t)dt \in V^b \cap N^{\mathrm{loc}},$$

b)
$$\mathscr{A}(D) \int_a^b \vec{u}_t F(t)dt + \int_a^b \vec{u}_t D_t F(t)dt = \int_a^b \vec{f}_t F(t)dt + \vec{u}_b F(b) - \vec{u}_a F(a),$$

$]a,b[$ étant un ouvert quelconque de $]0, +\infty[$ (si $]a, b[$ est borné, les hypothèses d'intégrabilité sont toujours vérifiées).

La démonstration de cette propriété est subordonnée à trois lemmes.

a) *Si* $F(t) \in C_0([a, b])$, *alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b F(s)\rho_\varepsilon(t - s)ds = \begin{Bmatrix} F(t) \\ F(t)/2 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

lorsque $\begin{Bmatrix} t \in]a, b[\\ t = a \text{ ou } b, \text{ si } b \text{ est fini} \\ t \notin [a, b] \end{Bmatrix}$, *$\rho_\varepsilon(t)$ étant la fonction introduite au* § 5.

Posons

$$\int_a^b F(s)\rho_\varepsilon(t-s)ds = (F\delta * \rho_\varepsilon)_t.$$

Si $t \notin [a, b]$, alors, pour ε assez petit, $(F\delta * \rho_\varepsilon)_t$ est identiquement nul car $[\rho_\varepsilon] = [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Si $t \in]a, b[$, considérons

$$\int_a^b [F(s) - F(t)]\rho_\varepsilon(t-s)ds.$$

Si ε est assez petit, $|F(s) - F(t)| \leqslant \eta(\varepsilon)$ puisque

$$s \in [\rho_\varepsilon(t-s)] \cap [a, b] \text{ et } F(s) \in C_0([a, b]).$$

Le module de cette intégrale est donc majoré par

$$\eta(\varepsilon)\int_b^a \rho_\varepsilon(t-s)ds$$

qui tend vers 0 si ε tend vers 0.

On en déduit le lemme car, si $\varepsilon \to 0$, à partir d'une valeur assez petite de ε, on a

$$\int_a^b \rho_\varepsilon(t-s)ds = 1,$$

et, si $t = a$ ou b, si b est fini, cette intégrale vaut $1/2$.

b) *Si* $\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$ *et est fortement continu dans* $[a, b]$, *alors*

$$\lim_{\substack{L_2^b \\ \varepsilon \to 0}} \int_a^b \vec{u}_s\rho_\varepsilon(t-s)ds = \begin{Bmatrix} \vec{u}_t \\ \vec{u}_t/2 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

lorsque $\begin{Bmatrix} t \in]a, b[\\ t = a \text{ ou } b, \text{ si } b \text{ est fini} \\ t \notin [a, b] \end{Bmatrix}$.

Considérons

$$\left\| \int_a^b (\vec{u}_s - \vec{u}_t)\rho_\varepsilon(t-s)ds \right\|_{L_2(\omega)}.$$

Cette expression est bornée par

$$\int_a^b \| \vec{u}_s - \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \rho_\varepsilon(t-s)ds.$$

Si $t \notin [a, b]$, alors pour ε assez petit, cette majorante est nulle.

Si $t \notin [a, b]$, cette majorante tend vers 0 avec ε vu la continuité forte de $\vec{u}_t$ dans $[a, b]$. La démonstration se termine comme dans le lemme précédent.

c) *Si* $[a, b]$ *est compact,* $F(t) \in C_0([a, b])$ *et* $\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, *alors*

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t(F\delta * \rho_\varepsilon)_t dt \underset{L^b}{\rightarrow} \int_a^b \vec{u}_t F(t)dt.$$

En effet,

$$\vec{u}_t(F\delta * \rho_\varepsilon)_t \in L_1([0, +\infty[\, ; L_2^b)$$

car

$$\| \vec{u}_t(F\delta * \rho_\varepsilon)_t \|_{L_2(\omega)} \leqslant \| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \sup_{[a,b]} | F(t) | \int_a^b \rho_\varepsilon(t-s)ds\delta_{[a-\varepsilon,\, b+\varepsilon]}(t)$$

$$\leqslant K \| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \delta_{[a-\varepsilon_0,\, b+\varepsilon_0]}(t) \in L_1([0, +\infty[),$$

puisque a, b et ε sont finis, K étant une constante.

De plus

$$\| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \left| \int_a^b F(s)\rho_\varepsilon(t-s)ds - F(t)\delta_{[a,b]}(t) \right|$$

converge pp. vers 0 en restant majoré par

$$\| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} 2 \sup_{[a,b]} | F(t) | \delta_{[a-\varepsilon_0,\, b+\varepsilon_0]}(t) \in L_1([0, \infty[),$$

lorsque ε tend vers 0.

Comme

$$\left\| \int_0^{+\infty} \vec{u}_t\left[\int_a^b F(s)\rho_\varepsilon(t-s)ds - F(t)\delta_{[a,b]}(t)\right]dt \right\|_{L_2(\omega)}$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} \| \vec{u}_t \|_{L_2(\omega)} \left| \int_a^b F(s)\rho_\varepsilon(t-s)ds - F(t)\delta_{[a,b]}(t) \right| dt,$$

il suffit d'appliquer le théorème de H. LEBESGUE pour obtenir le résultat.

Venons-en maintenant à la démonstration de la propriété annoncée.

Supposons d'abord $[a, b]$ compact.

Dans l'équation satisfaite par $\vec{u}_t$ (seconde formulation du problème), nous pouvons remplacer $\varphi(t)$ par $(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_t$.

Comme

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_t(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_t &= (\mathrm{F}\delta * \mathrm{D}_s\rho_\varepsilon)_t \\ &= -[\mathrm{F}(s)\rho_\varepsilon(t-s)]_{s=a}^{s=b} + [(\mathrm{D}_s\mathrm{F}) * \rho_\varepsilon]_t, \end{aligned}$$

on a

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})\mathrm{D}_t(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_t dt$$

$$= \{[(\vec{u}_t, \vec{v})\delta_{[0, +\infty[}(t)] * \rho_\varepsilon\}_a \mathrm{F}(a) - \{[(\vec{u}_t, \vec{v})\delta_{[0, +\infty[}(t)] * \rho_\varepsilon\}_b \mathrm{F}(b)$$
$$+ \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})[(\mathrm{D}_s\mathrm{F})\delta * \rho_\varepsilon]_t dt.$$

En tenant compte des résultats précédents, la relation considérée s'écrit

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\,(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_t dt + \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})\,[(\mathrm{D}_s\mathrm{F})\delta * \rho_\varepsilon]_t dt$$
$$= \left(\int_0^{+\infty} \vec{f}_t(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_t dt, \vec{v}\right) - (\vec{u}_0, \vec{v})\,(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_0$$
$$+ ([\vec{u}_t\delta_{[0, +\infty[}(t) * \rho_\varepsilon]_b, \vec{v})\mathrm{F}(b) - ([\vec{u}_t\delta_{[0, +\infty[}(t) * \rho_\varepsilon]_a, \vec{v})\mathrm{F}(a). \quad (*)$$

Appliquons les lemmes précédents aux termes des membres de cette égalité.

Si $a > 0$, $(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_0$ finit par s'annuler identiquement lorsque ε tend vers 0 et dans les autres termes, les produits de composition se remplacent par les fonctions composées avec ρ_ε.

Si $a = 0$, la somme des deuxièmes et quatrièmes termes du second membre converge vers

$$(\vec{u}_0, \vec{v})\mathrm{F}(0)$$

et, dans les autres termes, les produits de composition se remplacent encore par les fonctions composées avec ρ_ε.

On obtient ainsi

$$\int_a^b (\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\mathrm{F}(t)dt + \int_a^b (\vec{u}_t, \vec{v})\mathrm{D}_t\mathrm{F}(t)dt$$

$$= \int_a^b (\vec{f}_t, \vec{v})\mathrm{F}(t)dt - (\vec{u}_a\mathrm{F}(a), \vec{v}) + (\vec{u}_b\mathrm{F}(b), \vec{v}). \qquad (**)$$

Dans le cas de $[a, +\infty[$, on établit la formule précédente pour tout $[a, b]$ borné et on utilise la propriété suivante.

Si

$\vec{v}_t \in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, $\mathrm{G}(t) \in \mathrm{C}_0([a, +\infty[)$, $\vec{v}_t\mathrm{G}(t) \in \mathrm{L}_1([a, +\infty[\,; \mathrm{L}_2^b)$, *alors*

$$\lim_{\substack{\mathrm{L}_2^b \\ b \to +\infty}} \int_a^b \vec{v}_t\mathrm{G}(t)dt = \int_a^{+\infty} \vec{v}_t\mathrm{G}(t)dt.$$

Il suffit de constater que

$$\left\| \int_a^b \vec{v}_t\mathrm{G}(t)dt - \int_a^{+\infty} \vec{v}_t\mathrm{G}(t)dt \right\|_{\mathrm{L}_2(\omega)} \leqslant \int_b^{+\infty} \| \vec{v}_t \|_{\mathrm{L}_2(\omega)} \, |\mathrm{G}(t)| dt$$

et d'appliquer le théorème de H. Lebesgue au second membre.

Tout revient donc à substituer $+\infty$ à b dans la relation obtenue lorsque b est borné. On remarquera que $(\vec{u}_b, \vec{v})\mathrm{F}(b)$ tend vers 0 si $b \to +\infty$, car $\vec{u}_t\mathrm{F}(t)$ est intégrable dans $[a, +\infty[$.

La relation obtenue montre que

$$\int_a^b \vec{u}_t\mathrm{F}(t)dt \in \mathrm{V}^b$$

satisfait à la condition de Neumann locale et, en outre, puisque $\mathrm{D}(\Omega) \subset \mathrm{V}^c_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$, $\vec{u}_t$ satisfait à la relation proposée dans l'énoncé.

Montrons enfin que

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P}) \int_a^b \vec{u}_t\mathrm{F}(t)dt \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}.$$

Si $[a, b]$ est compact, nous savons que

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P}) \int_a^b \vec{u}_t(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_t dt \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}.$$

et nous connaissons la valeur de

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_{b}^{+\infty} \vec{u}_t(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_t dt$$

à partir de la relation ($*$) établie ci-dessus.

Cette relation montre que

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_{0}^{+\infty} \vec{u}_t(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_t dt \xrightarrow[\mathrm{L}_2^b]{} \mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_{a}^{b} \vec{u}_t \mathrm{F}(t) dt,$$

la valeur de cette limite étant obtenue à partir de la relation ($**$).

Il s'ensuit que

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P}) \int_{0}^{+\infty} \vec{u}_t(\mathrm{F}\delta * \rho_\varepsilon)_t dt \xrightarrow[\mathrm{V}(\omega)]{} (\mathrm{E} - \mathrm{P}) \int_{a}^{b} \vec{u}_t \mathrm{F}(t) dt$$

et cette limite est dans $\mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$.

Dans le cas de $[a, +\infty[$, on établit le résultat pour tout compact $[a, b] \subset [a, +\infty[$ et on raisonne de la manière précédente à partir de

$$\int_{a}^{b} \vec{u}_t \mathrm{F}(t) dt, \qquad \int_{a}^{+\infty} \vec{u}_t \mathrm{F}(t) dt,$$

de la relation ($**$) et de la relation écrite dans l'énoncé et établie ci-dessus.

Chapitre IV

PROBLÈMES STATIONNAIRES ET PROBLÈMES D'ÉVOLUTION

Opérateur de Green

35. — Considérons le problème posé avec le second membre nul.

On appelle *opérateur de* Green, l'opérateur H_t, qui, appliqué à la donnée initiale $\vec{u}_0$, donne la solution de ce problème :

$$H_t\vec{u}_0 = \vec{u}_t.$$

Propriétés de l'opérateur de Green

36. — *L'opérateur* $H_t \in B(L_2^b \to L_2^b)$ *pour tout* t (*).

C'est une conséquence de l'inégalité d'énergie qui s'écrit

$$\| H_t\vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_t)} \leqslant K(t) \| \vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_0)}.$$

Il est possible d'améliorer cette inégalité.

Considérons l'inégalité d'énergie a), elle entraîne

$$\| H_t\vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_t)} \leqslant \| \vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_0)} + \Lambda\int_0^t \| H_s\vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_s)} ds,$$

comme on le voit en reprenant la démonstration de l'inégalité d'énergie b) (§ 29, p. 57), où on se borne à ne considérer que la première majoration rencontrée, et en l'appliquant à la suite $\vec{u}_t^m$ définissant $H_t\vec{u}_0$.

(*) On représente par $B(L_2^b \to L_2^b)$ l'ensemble des opérateurs bornés agissant de L_2^b dans L_2^b.

Par un raisonnement semblable à celui tenu dans la démonstration de l'inégalité d'énergie b), on voit que l'on peut remplacer

$$\mathrm{K}(t) = \sup\,(1, e^{(1+\wedge)t})$$

par

$$\mathrm{K}'(t) = \sup\,(1, e^{\wedge t}),$$

dans l'inégalité d'énergie relative à $\mathrm{H}_t\vec{u}_0$.

37. — *Si l'opérateur* $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ *est à coéfficients réels, alors*

$$\overline{\mathrm{H}_t\vec{u}_0} = \mathrm{H}_t\overline{\vec{u}_0}.$$

Dans

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})\mathrm{D}_t\varphi(t)dt = (\vec{u}_0, \vec{v})\varphi(0),$$

nous pouvons, sans restriction supposer $\vec{v}$ et φ réels.

En conjuguant les deux membres de cette égalité, nous déduisons que $\overline{\mathrm{H}_t\vec{u}_0}$ est la solution du problème correspondant à la donnée initiale $\overline{\vec{u}_0}$ et, par conséquent, la propriété vu le théorème d'unicité.

38. — *Si* $\vec{u}_0 \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$, *alors* $\mathrm{H}_t\vec{u}_0 \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$ *et*

$$\mathrm{H}_t[\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0] = \mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{H}_t\vec{u}_0$$

En vertu de la propriété établie au § 34, en considérant $\mathrm{F}(s) = \delta_{[0,\,t]}\,(s)$, on a

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_0^t \mathrm{H}_s[\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0]ds = \mathrm{H}_t[\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0] - \mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathrm{H}_t[\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0] = \mathscr{A}(\mathrm{D})\,\{\vec{u}_0 + \int_0^t \mathrm{H}_s[\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0]ds\}. \qquad \text{(I)}$$

D'où

$$[\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t]\,\{\vec{u}_0 + \int_0^t \mathrm{H}_s[\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0]ds\} = 0$$

et, puisque

$$[\vec{u}_0 + \int_0^t \mathrm{H}_s[\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0]ds]_0 = \vec{u}_0,$$

nous déduisons que

$$\vec{u}_0 + \int_0^t \mathrm{H}_s[\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0]ds$$

est une solution du problème posé avec second membre nul. Vu le théorème d'unicité, elle s'écrit $H_t\vec{u}_0$.

La relation (I) ci-dessus s'écrit

$$H_t\mathscr{A}(D)\vec{u}_0 = \mathscr{A}(D)H_t\vec{u}_0.$$

De plus, l'égalité

$$H_t\vec{u}_0 = \vec{u}_0 + \int_0^t H_s\mathscr{A}(D)\vec{u}_0 ds$$

entraîne que $H_t\vec{u}_0 \in V^b \cap N^{loc}$ et est fortement dérivable dans $]0, +\infty[$ (§ 5, § 31).

39. — *Dans les conditions du paragraphe précédent, on a*

$$D_tH_t\vec{u}_0 = \mathscr{A}(D)H_t\vec{u}_0,$$

où $D_tH_t\vec{u}_0$ *est la dérivée forte dans* $]0, +\infty[$, *fortement continue dans* $[0, +\infty[$.

C'est une conséquence immédiate du paragraphe précédent et des théorèmes rappelés à la fin de ce paragraphe.

40. — *Si* $\vec{u}_0, \mathscr{A}(D)\vec{u}_0, \mathscr{A}(D)^2\vec{u}_0, \ldots \in V^b \cap N^{loc}$, *alors*

$$D_t^pH_t\vec{u}_0 = \mathscr{A}^pH_t\vec{u}_0, \qquad D_t{}^pH_t\mathscr{A}^q\vec{u}_0 = D^{p+q}\vec{u}_0,$$

les dérivées étant des dérivées fortes dans $]0, +\infty[$.

Il suffit de reprendre les raisonnements tenus aux §§ 38 et 39, les données initiales étant successivement $\mathscr{A}^2u_0, \mathscr{A}^3u_0, \ldots$.

On a en effet

$$H_t\mathscr{A}^p\vec{u}_0 = \mathscr{A}H_t\mathscr{A}^{p-1}\vec{u}_0 = D_tH_t\mathscr{A}^{p-1}\vec{u}_0 = \ldots = D_t^pH_t\vec{u}_0.$$

41. — *L'ensemble* $\{H_t : t > 0\}$ *constitue un semi-groupe, c'est-à-dire que*

$$H_tH_{t'} = H_{t+t'}.$$

Soit $\vec{u}_0 \in V^b \cap N^{loc}$. Nous avons, en vertu de la propriété remarquable (§ 34),

$$H_tH_{t'}\vec{u}_0 = H_{t'}\vec{u}_0 + \mathscr{A}(D)\int_0^t H_sH_{t'}\vec{u}_0 ds$$

et

$$H_{t+t'}\vec{u}_0 = \vec{u}_0 + \mathscr{A}(D)\int_0^{t+t'} H_s\vec{u}_0 ds.$$

Le second membre de la dernière égalité peut s'écrire

$$\vec{u}_0 + \mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_0^{t'} \mathrm{H}_s\vec{u}_0 ds + \mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_{t'}^{t+t'} \mathrm{H}_s\vec{u}_0 ds$$

ou encore

$$\mathrm{H}_{t'}\vec{u}_0 + \mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_0^{t} \mathrm{H}_{s+t'}\vec{u}_0 ds.$$

Comme $\vec{u}_0 \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$, l'opérateur $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ peut se mettre sous le signe d'intégration. En prenant ensuite la dérivée forte, on obtient

$$\mathrm{D}_t\mathrm{H}_{t+t'}\vec{u}_0 = \mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{H}_{t+t'}\vec{u}_0$$

et, d'autre part,

$$[\mathrm{H}_{t+t'}\vec{u}_0]_{t=0} = \mathrm{H}_{t'}\vec{u}_0.$$

Il résulte de ces considérations que $\mathrm{H}_{t+t'}\vec{u}_0$ et $\mathrm{H}_t\mathrm{H}_{t'}\vec{u}_0$ sont des solutions du problème posé avec second membre nul et donnée initiale $\mathrm{H}_{t'}\vec{u}_0 \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$. Vu le théorème d'unicité, ces fonctions sont égales.

Si $\vec{u}_0 \in \mathrm{L}_2^b$, soit $\vec{u}_t^m$ une suite définissant $\mathrm{H}_t\vec{u}_0$, on a

$$\mathrm{H}_{t+t'}\vec{u}_0^m = \mathrm{H}_t\mathrm{H}_{t'}\vec{u}_0^m,$$

puisque $\vec{u}_0^m \in \mathrm{V} \cap \mathrm{N} \subset \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$.

En vertu de l'inégalité d'énergie, cette relation a lieu avec $\vec{u}_0$ au lieu de $\vec{u}_0^m$, ce qui démontre la propriété de semi-groupe.

Produit de composition par H_t

42. — On appelle *produit de composition* par H_t l'expression

$$(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t = \int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds.$$

Cette intégrale existe pour tout t borné car, en vertu de l'inégalité d'énergie

$$\| \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_{t-s})} \leqslant \sqrt{\mathrm{K}'(t-s)}\, \| \vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_0)}$$

ou encore, en considérant les définitions de B_{t-s} et B_0,

$$\| \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_t)} \leqslant \sqrt{\mathrm{K}'(t-s)}\, \| \vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_0)},$$

le dernier membre de cette inégalité étant intégrable localement dans $[0, +\infty[$, ainsi d'ailleurs que son carré, et

$$\left\| \int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds \right\|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_t)} \leqslant \int_0^t \sqrt{\mathrm{K}'(t-s)}\, \| \vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_s)} ds$$

$$\leqslant \sqrt{\mathrm{K}'(t)} \int_0^t \| \vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_s)} ds.$$

43. — *Si* $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ *est à coéfficients réels, alors*

$$\overline{(\mathrm{H}_s * f_s)_t} = (\mathrm{H}_s * \bar{f}_s)_t.$$

C'est une conséquence immédiate du § 37.

44. — *Si* $t \to 0+$, *alors* $(\mathrm{H}_s * f_s)_t \to 0$ *dans* L_2^b.

C'est une conséquence du théorème de H. Lebesgue appliqué en considérant les inégalités du § 42.

45. — *Le produit de composition par* H_t *est fortement continu dans* $[0, +\infty[$.

En effet,

$$\left\| \int_0^{t+h} \mathrm{H}_{t+h-s}\vec{f}_s ds - \int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds \right\|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_t)}$$

$$\leqslant \sup\left[\sqrt{\mathrm{K}'(t)}, \sqrt{\mathrm{K}'(t+h)}\right] \left| \int_t^{t+h} \| \vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_s)} ds \right|$$

$$+ \int_0^t \| (\mathrm{H}_{t+h-s} - \mathrm{H}_{t-s})\vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_t)}\, ds.$$

Les termes du second membre de cette inégalité tendent vers 0 en vertu du théorème de H. Lebesgue et de la continuité forte en t de $\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s$ $(t > s)$.

La continuité en $0+$ est établie au paragraphe précédent.

46. — *Si* $\vec{f}_t \in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, *alors* $(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t$ *est solution du problème posé avec second membre* $\vec{f}_t$ *et donnée initiale nulle.*

Soient $\vec{v} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$ et $\varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$.

Considérons

$$\int_0^{+\infty}(\int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds,\ \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty}(\int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds,\ \vec{v})\mathrm{D}_t\varphi(t)dt$$

$$= \int_0^{+\infty}dt\int_s^{+\infty}ds(\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s,\ \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\varphi(t) + \int_0^{+\infty}dt\int_s^{+\infty}ds(\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s,\ \vec{v})\mathrm{D}_t\varphi(t).$$

En vertu du théorème de G. Fubini, le second membre s'écrit

$$\int_0^{+\infty}ds\int_s^{+\infty}(\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s,\ \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty}ds\int_s^{+\infty}(\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s,\ \vec{v})\mathrm{D}_t\varphi(t)dt$$

Effectuons le changement de variables

$$t - s = u,$$

$$s = w,$$

régulier d'ordre infini entre les ouvert

$$\{(t, s) : t > s > 0\}, \qquad \{(u, w) : u > 0, w > 0\},$$

et dont le Jacobien vaut 1.

On obtient ainsi

$$\int_0^{+\infty}dw[\int_0^{+\infty}(\mathrm{H}_u\vec{f}_w,\ \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v})\varphi(u+w)du$$

$$+ \int_0^{+\infty}(\mathrm{H}_u\vec{f}_w,\ \vec{v})\mathrm{D}_u\varphi(u+w)du].$$

L'expression entre les crochets vaut

$$(\vec{f}_w,\ \vec{v})\varphi(w)$$

car $\mathrm{H}_u\vec{f}_w$ est la solution du problème posé avec second membre nul et donnée initiale $\vec{f}_w$.

L'expression de départ est donc égale à

$$\int_0^{+\infty}(\vec{f}_w,\ \vec{v})\varphi(w)dw,$$

pour tout $\vec{v} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$ et tout $\varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$.

Le théorème sera donc démontré si

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P})\int_0^{+\infty}(\mathrm{H}_s * f_s)_t\varphi(t)dt \in \mathrm{V}^b{}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}.$$

C'est une conséquence de la remarque précisant le théorème du § 19, p. 38 ; on a en effet

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P}) \int_0^{+\infty} (\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t \varphi(t) dt \in \mathrm{V}^b,$$

$$(\mathrm{E} - \mathrm{P})\,(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t \in \mathrm{V}^b{}_{\dot{\Omega}\mathrm{D}},$$

$$(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t \in \mathrm{L}_2^b\,(\Omega \times\,]0, +\infty[),$$

$$\mathscr{A}(\mathrm{D})\,(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t \in \mathrm{L}_2^b\,(\Omega \times\,]0, +\infty[),$$

vu la définition de H_t et la propriété remarquable (§ 34).

47. — *Si* $\vec{f}_t \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}$, *alors* $(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}$ *et est faiblement dérivable dans* $]0, +\infty[$.

Nous avons vu (§ 38) que si $\vec{f}_t \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$, alors

$$\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}.$$

Ceci correspond en effet à la solution du problème posé avec la donnée initiale $\vec{\mathrm{U}}_0 = \vec{f}_s \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$ et le second membre nul.

On a donc

$$(\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v}) = (\mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s, \vec{v}),$$

pour tout $\vec{v} \in \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$, ou encore

$$(\int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v}) = (\int_0^t \mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds, \vec{v})$$

et

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds = \int_0^t \mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds,$$

puisque $\mathrm{D}(\Omega) \subset \mathrm{V}^c \cap \mathrm{N}$.

En vertu de la propriété démontrée au § 34 appliquée à $\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s$, on déduit que

$$(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}.$$

L'égalité vérifiée par $(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t$ se maintient évidemment si nous remplaçons $\vec{v}$ par $\vec{\Phi} \in \mathrm{D}(\Omega)$. Vu ce qui précède, nous déduisons l'existence de la dérivée faible par rapport à t dans $]0, +\infty[$ et sa valeur

$$\mathrm{D}_t(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t = \mathscr{A}(\mathrm{D})\,(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t - \vec{f}_t,$$

48. — Les considérations précédentes nous permettent d'affirmer que *la solution du problème de* D — N, *posé avec second membre* $\vec{f}_t$ *et donnée initiale* $\vec{u}_0$, *s'écrit*

$$\mathrm{H}_t\vec{u}_0 + (\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t.$$

Si $\vec{u}_0$ *et* $\vec{f}_t \in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$, *cette solution* $\in \mathrm{V}^b \cap \mathrm{N}^{\mathrm{loc}}$, *est faiblement dérivable et*

$$[\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t]\,[\mathrm{H}_t\vec{u}_0 + (\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t] = \vec{f}_t.$$

Problème de Dirichlet-Neumann global

49. — Le *problème de* D — N *global* relatif à l'opérateur $\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t$ est le problème de D — N caractérisé par

a) *la donnée au second membre* $\vec{f}_t \in \mathrm{L}_2^{\mathrm{loc}}\ ([0, +\infty[\ ; \mathrm{L}_2)$,

b) *la donnée initiale* $\vec{u}_0 \in \mathrm{L}_2$,

Ω étant un ouvert connexe de E_n.

Remarquons que, si Ω est borné, le problème est toujours un problème global.

Le théorème suivant caractérise la solution d'un tel problème.

La solution $\vec{u}_t$ *du problème global est telle que*

a) $$\vec{u}_t \in \mathrm{L}_2^{\mathrm{loc}}\ ([0, +\infty[\ ; \mathrm{L}_2),$$

ce qui entraîne en particulier que

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt \in \mathrm{L}_2,$$

pour tout $\varphi(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$,

b) $$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt \in \mathrm{V}_{\mathrm{E-P},\,\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}},$$

pour tout $\varphi(t) \in \mathrm{D}(\mathrm{E})_1$,

c) $$\Big(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt,\ \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\vec{v}\Big) + \Big(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\mathrm{D}_t\varphi(t)dt,\ \vec{v}\Big)$$

$$= \Big(\int_0^{+\infty} \vec{f}_t\varphi(t)dt,\ \vec{v}\Big) - (\vec{u}_0\varphi(0),\ \vec{v}),$$

pour tout $\vec{v} \in \mathrm{V} \cap \mathrm{N}$ *et tout* $\varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$,

d) $\quad \| \vec{u}_\tau \|^2_{L_2} \leqslant K(\tau) \| \vec{u}_0 \|^2_{L_2} + \| \vec{f}_t \|^2_{L_2(\Omega \times]0, T[)},$

pour tout $T > 0$ *fini,* $T > \tau$,

$$\text{e)} \quad \left\| \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \right\|^2_{L_2} \leqslant (\sup_{[0, T]} | \varphi(t) | \int_0^T K(\tau) d\tau)^2 \times$$
$$\times (\| \vec{u}_0 \|^2_{L_2} + \| \vec{f}_t \|^2_{L_2(\Omega \times]0, T[)}),$$

où T *est tel que* $\varphi(t) \in D(]-\infty, T[)$.

Les résultats a), d) et e) s'obtiennent en appliquant le théorème de B. Levi aux premiers membres des inégalités obtenues dans le théorème d'existence (§ 30), en considérant une suite d'ensembles de dépendance C_T^m de $\{ (x, T) : x \in \omega_m \}$, T étant choisi tel que $[\varphi(t)] \subset]-\infty, T[$ et ω_m étant une suite d'ouverts emboités dont l'union recouvre Ω.

La relation c) est vérifiée pour tout $\vec{v} \in V^c \cap N$, puisque $\vec{u}_t$ est solution du problème. Vu la densité de $V^c \cap N$ dans $V \cap N$ et la continuité du produit scalaire de L_2, la relation c) est vraie pour tout $\vec{v} \in V \cap N$.

On déduit de c) que la moyenne de $\vec{u}_t$ est dans V.

Comme $V \cap V^b_{\dot{\Omega}_D} = V_{\dot{\Omega}_D}$, le résultat b) s'ensuit.

50. — Le théorème précédent montre que le problème de D — N global consiste à déterminer $\vec{u}_t \in L_2^{loc}([0, +\infty[\,; L_2)$ tel que $\vec{u}_t$ satisfasse aux conclusions b) et c) du théorème précédent, $\vec{f}_t$ et $\vec{u}_0$ étant donnés respectivement dans $L_2^{loc}([0, +\infty[\,; L_2)$ et L_2, ou, ce qui est équivalent, tel que

$$\text{a)} \qquad \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \in V \cap N,$$

$$\text{b)} \quad \mathscr{A}(D) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \vec{u}_t D_t \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \vec{f}_t \varphi(t) dt - \vec{u}_0 \varphi(0),$$

pour tout $\varphi(t) \in D(E_1)$, les données répondant aux mêmes conditions que ci-dessus.

La solution, du problème global possède évidemment toutes les propriétés démontrées dans les chapitres précédents. On peut cependant préciser ces propriétés en substituant partout L_2, V et N respectivement à

$$L_2^{\left\{ {b \atop c} \right\}} \quad , \quad V^{\left\{ {b \atop c} \right\}} \quad , \quad N^{loc}$$

et Ω à ω.

Remarquons en particulier que le théorème d'annulation (§ 25) est un théorème d'unicité de la solution du problème global.

Notons enfin que *l'opérateur* $H_t \in B(L_2 \to L_2)$ *et*

$$\| H_t \vec{u}_0 \|_{L_2} \leqslant K'(t) \| \vec{u}_0 \|_{L_2}.$$

51. — Dans la suite, nous ne considérons que le problème global.

Les propriétés invoquées seront toujours les propriétés précisées comme nous l'indiquons à la fin du paragraphe précédent.

Problème stationnaire relatif à l'opérateur $-\mathscr{A}(D)+z, z\in C$

52. — Le problème de D — N relatif à l'opérateur $-\mathscr{A}(D) + z$ consiste à déterminer $\vec{u} \in V \cap N$ tel que

$$(-\mathscr{A}(D) + z)\vec{u} = \vec{u}_0,$$

$\vec{u}_0$ étant donné dans L_2 et $\mathrm{Re}\, z > k = \sup(0, \Lambda/2)$, Λ étant la plus grande des valeurs propres de $A + A^*$.

Si elle existe, la solution de ce problème est unique.

En effet, puisque $\vec{u} \in V \cap N$, nous avons

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\, z \| \vec{u} \|^2 &= (z\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, z\vec{u}) \\ &= (\vec{u}_0 + \mathscr{A}(D)\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}_0 + \mathscr{A}(D)\vec{u}) \\ &= (\vec{u}_0, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}_0) + (\mathscr{A}(D)\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \mathscr{A}(D)\vec{u}) \\ &= (\vec{u}_0, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}_0) + ((A + A^*)\vec{u}, \vec{u}). \end{aligned}$$

On a donc l'inégalité

$$2\,\mathrm{Re}\, z \| \vec{u} \|^2 \leqslant 2 \| \vec{u}_0 \| \| \vec{u} \| + \Lambda \| \vec{u} \|^2,$$

d'où

$$\| \vec{u} \| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\, z - k} \| u_0 \|,$$

si $\mathrm{Re}\, z > k$, ce qui entraîne l'annulation de $\vec{u}$ lorsque $\vec{u}_0 = 0$ et l'unicité de la solution.

53. — Nous prouvons l'existence de la solution de ce problème en la construisant à partir de la solution du problème d'évolution relatif à $\mathscr{A}(\mathrm{D}) - \mathrm{D}_t$.

Nous définissons l'*opérateur* G_z pour $\mathrm{Re}\, z > k$ en posant

$$\mathrm{G}_z\vec{u}_0 = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\mathrm{H}_t\vec{u}_0 dt.$$

L'intégrale (évidemment à valeur dans L_2) *ci-dessus existe et*

$$\mathrm{G}_z \in \mathrm{B}(\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2).$$

En effet,

$$\| e^{-zt}\mathrm{H}_t\vec{u}_0 \| \leqslant e^{-\mathrm{Re}\, zt} \| \mathrm{H}_t\vec{u}_0 \| \leqslant e^{-(\mathrm{Re}\, z - k)t} \| \vec{u}_0 \| \in \mathrm{L}_1([0, +\infty[)$$

et

$$\| \mathrm{G}_z\vec{u}_0 \| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\, z - k} \| \vec{u}_0 \|.$$

L'opérateur G_z *donne la solution du problème considéré.*

En effet, en vertu de la propriété remarquable § 34 (insistons sur le fait qu'il s'agit de la propriété modifiée en fonction du problème global), la fonction $\mathrm{G}_z\vec{u}_0 \in \mathrm{V} \cap \mathrm{N}$ et

$$\mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{G}_z\vec{u}_0 - z\, \mathrm{G}_z\vec{u}_0 = -\vec{u}_0,$$

ce qui démontre la proposition.

54. — *Considéré comme agissant de* L_2 *dans* $\mathrm{V} \cap \mathrm{N}$,

$$\mathrm{G}_z \in \mathrm{B}(\mathrm{L}_2 \to \mathrm{V} \cap \mathrm{N}).$$

On a en effet

$$\| (-\mathscr{A}(\mathrm{D}) + z)\mathrm{G}_z\vec{u}_0 \| = \| \vec{u}_0 \|,$$

dont on déduit successivement

$$\| \mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{G}_z\vec{u}_0 \| \leqslant \left(\frac{|z|}{\mathrm{Re}\, z - k} + 1\right) \| \vec{u}_0 \|$$

et

$$\| \mathrm{G}_z\vec{u}_0 \|_{\mathrm{V}} \leqslant \frac{\sqrt{(|z| + \mathrm{Re}\, z - k)^2 + 1}}{\mathrm{Re}\, z - k} \| \vec{u}_0 \|.$$

55. — *Si* $\vec{u}_0 \in \mathrm{V} \cap \mathrm{N}$, *alors*

$$(-\mathscr{A}(\mathrm{D}) + z)\mathrm{G}_z\vec{u}_0 = \mathrm{G}_z(-\mathscr{A}(\mathrm{D}) + z)\vec{u}_0.$$

En effet, sous cette hypothèse, $e^{-zt}\mathrm{H}_t\vec{u}_0 \in \mathrm{V} \cap \mathrm{N}$ (§ 38) et

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) \int_0^{+\infty} e^{-zt}\mathrm{H}_t\vec{u}_0 dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\mathrm{H}_t\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0 = \mathrm{G}_z\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0.$$

56. — *Si* $\mathrm{Re}\, z$ *et* $\mathrm{Re}\, z' > k$,

$$\mathrm{G}_z - \mathrm{G}_{z'} = -(z - z')\mathrm{G}_z\mathrm{G}_{z'}.$$

En particulier $\mathrm{G}_z\mathrm{G}_{z'} = \mathrm{G}_{z'}\mathrm{G}_z$.

Quel que soit $\vec{u}_0 \in \mathrm{L}_2$, on a

$$\mathrm{G}_z\vec{u}_0 = \mathrm{G}_z(-\mathscr{A}(\mathrm{D}) + z')\mathrm{G}_{z'}\vec{u}_0,$$

et comme $\mathrm{G}_{z'}\vec{u}_0 \in \mathrm{V} \cap \mathrm{N} \subset \mathrm{V}$, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_z\vec{u}_0 &= (-\mathscr{A}(\mathrm{D}) + z')\mathrm{G}_z\mathrm{G}_{z'}\vec{u}_0\\ &= -\mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{G}_z\mathrm{G}_{z'}\vec{u}_0 + z'\mathrm{G}_z\mathrm{G}_{z'}\vec{u}_0.\end{aligned}$$

Or

$$-\mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{G}_z\mathrm{G}_{z'}\vec{u}_0 = \mathrm{G}_{z'}\vec{u}_0 - z\,\mathrm{G}_z\mathrm{G}_{z'}\vec{u}_0,$$

d'où la propriété.

57. — *Considéré comme agissant de* L_2 *dans* $\mathrm{V} \cap \mathrm{N}$, *l'opérateur* G_z *est holomorphe à gauche dans* $\{z : \mathrm{Re}\, z > k\}$.

Montrons que $(\mathrm{G}_z\vec{f}, \vec{g})_\mathrm{V}$ est une fonction holomorphe de z, dans l'ouvert précisé ci-dessus, quels que soient $\vec{f}$ et $\vec{g}$ respectivement dans L_2 et $\mathrm{V} \cap \mathrm{N}$.

Il suffit de montrer que

$$\left| \frac{1}{h} [(\mathrm{G}_{z+h}\vec{f}, \vec{g})_\mathrm{V} - (\mathrm{G}_z\vec{f}, \vec{g})_\mathrm{V}] + (\mathrm{G}^2\vec{f}, \vec{g})_\mathrm{V} \right| \to 0$$

lorsque $h \to 0$.

Vu le paragraphe précédent, l'expression considérée s'écrit

$$\left| -(\mathrm{G}_{z+h}\mathrm{G}_z\vec{f}, \vec{g})_\mathrm{V} + (\mathrm{G}_z^2\vec{f}, \vec{g})_\mathrm{V} \right| = \left| (\mathrm{G}_z[\mathrm{G}_z - \mathrm{G}_{z+h}]\vec{f}, \vec{g})_\mathrm{V} \right|$$

et est bornée par

$$\frac{\sqrt{(|z| + \mathrm{Re}\, z - k)^2 + 1}}{\mathrm{Re}\, z - k} |h| \, \|\mathrm{G}_z\mathrm{G}_{z+h}\vec{f}\| \, \|\vec{g}\|_\mathrm{V},$$

$$\frac{\sqrt{(|z|+\operatorname{Re} z-k)^2+1}}{\operatorname{Re} z-k}\,|h|\,\frac{1}{\operatorname{Re} z-k}\,\frac{1}{\operatorname{Re}(z+h)-k}\,\|\vec{f}\|\,\|\vec{g}\|\,\mathrm{v},$$

qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0 dans C.

58. — *L'opérateur* $G_z \in C_\infty(\{z : \operatorname{Re} z < k\})$.

C'est une propriété des opérateurs holomorphes d'un espace de HILBERT dans un autre (éventuellement lui-même) [12, livre I : VII et VIII].

A partir du résultat du § 56, nous déduisons que

$$D_z G_z = -G_z^2$$

et, par récurrence,

$$D_z^p G_z = (-1)^p\, p!\, G_z^{p+1}.$$

59. — *L'expression* $\operatorname{Re}(G_z\vec{u}_0, \vec{u}_0)$ *est positive pour tout* $\vec{u}_0 \in L_2$.

En effet, considérons

$$\begin{aligned}(G_z\vec{u}_0, \vec{u}_0) + (\vec{u}_0, G_z\vec{u}_0) &= (G_z\vec{u}_0, [-\mathscr{A}(D) + z]G_z\vec{u}_0)\\ &\quad + ([-\mathscr{A}(D) + z]G_z\vec{u}_0, G_z\vec{u}_0)\\ &\geqslant (2\operatorname{Re} z - \Lambda)\,\|G_z u_0\|^2,\end{aligned}$$

puisque $G_z\vec{u}_0 \in V \cap N$.

60. — *L'opérateur* G_z *n'est pas hermitien.*

En effet,

$$(G_z\vec{f}, \vec{g}) = (G_z\vec{f}, [-\mathscr{A}(D)+z]G_z\vec{g}) = ([\mathscr{A}(D)-(A+A^*)+\bar{z}]G_z\vec{f}, G_z g),$$

puisque $G_z\vec{f}$ et $G_z\vec{g} \in V \cap N$.

De là la proposition puisque $G_z\vec{f}$ n'est pas solution de

$$[\mathscr{A}(D) + (A + A)^* + \bar{z}]\vec{u} = \vec{f}.$$

Remarquons qu'il découle de la démonstration précédente que l'opérateur G_z^* adjoint à G_z associe à toute fonction de L_2 la solution du problème relatif à l'opérateur

$$-\mathscr{A}^*(-D) + \bar{z}.$$

Définition de l'opérateur G_z indépendamment de l'opérateur H_t

61. — Nous démontrons l'existence de la solution du problème stationnaire considéré ci-dessus (§ 52) abstraction faite de toute étude du problème d'évolution relatif à $\mathscr{A}(D) - D_t$.

L'ensemble

$$\{\vec{u}_0 : \vec{u}_0 = [-\mathscr{A}(D) + z]\vec{u},\ \vec{u} \in V \cap N\}$$

est fermé dans L_2.

Soit $\vec{u}_0^p$ une suite de A. CAUCHY dans L_2 d'éléments de la forme

$$\vec{u}_0^p = (-\mathscr{A}(D) + z)\vec{u}^p,\ \vec{u}^p \in V \cap N.$$

Il suffit d'appliquer à $\vec{u}^p$ les raisonnements des §§ 52 et 54 pour constater que cette suite de A. CAUCHY dans V.

Comme $V \cap N$ est fermé dans V, on a

$$\lim_{L_2} \vec{u}_0^p = (-\mathscr{A}(D) + z) \lim_{V} \vec{u}^p,$$

avec $\lim\limits_{V} \vec{u}^p \in V \cap N$.

62. — *L'ensemble précédent coïncide avec* L_2.

Il suffit de montrer que toute fonction de L_2 orthogonale à tous les éléments de cet ensemble est nulle, puisque cet ensemble est fermé dans L_2.

Soit $\vec{v} \in L_2$ tel que

$$(\vec{v}, (\mathscr{A}(D) - z)\vec{u}) = 0,$$

pour tout $\vec{u} \in V \cap N$.

Comme $D(\Omega) \subset V \cap N$, alors

$$\mathscr{A}^*(-D)\vec{v} = \bar{z}\,\vec{v}$$

et

$$(\vec{v}, \mathscr{A}(D)\vec{u}) = (\mathscr{A}^*(-D)\vec{v}, \vec{u})$$

pour tout $\vec{u} \in V \cap N$.

On en déduit que $\vec{v} \in V$ et satisfait à la condition de NEUMANN, en reprenant le début de la démonstration du théorème de densité (§ 26) où l'on remplace respectivement

$$\int_0^T \vec{f}_t \varphi(t) dt, \qquad \int_0^T \vec{f}_t D_t \varphi(t) dt, \qquad \vec{g}\varphi(0)$$

par $\vec{v}$, $z\vec{v}$ et 0.

Nous avons alors en particulier

$$(\vec{v}, (\mathscr{A}(D) - z)\vec{v}) = 0$$

ou encore

$$2 \operatorname{Re} z \, \| \vec{v} \|^2 = ((A + A^*)\vec{v}, \vec{v})$$

vu la valeur de $\mathscr{A}(D)\vec{v}$.

Comme $\operatorname{Re} z > \Lambda/2$, il s'ensuit que $\vec{v} = 0$.

63. — Il résulte de ce qui précède que *tout élément* $\vec{u}_0 \in L_2$ *s'écrit de manière unique*

$$\vec{u}_0 = (-\mathscr{A}(D) + z)\vec{u}, \; \vec{u} \in V \cap N.$$

L'opérateur $(-\mathscr{A}(D) + z)$ *agissant de* $V \cap N$ *dans* L_2 *admet donc un inverse agissant de* L_2 *dans* $V \cap N$.

Nous définissons *l'opérateur* G_z *comme l'inverse de* $(-\mathscr{A}(D)+z)$.

L'opérateur G_z possède toutes les propriétés démontrées précédemment : le théorème d'unicité (§ 52) montre que $G_z \in B(L_2 \rightarrow L_2)$ et donne une majoration de la norme de G_z ; toutes les autres démonstrations (§§ 54 à 60) restent inchangées.

CHAPITRE V

OPÉRATEURS MATRICIELS DE DÉRIVATION HYPERBOLIQUES DU SECOND ORDRE

Opérateurs matriciels de dérivation

64. — On appelle *opérateur matriciel de dérivation hyperbolique du second ordre* tout opérateur de la forme

$$L(D, D_t) = D_t^2 + AD_t + B + [\mathscr{A}^*(-D) + C]\mathscr{A}(D),$$

où $\mathscr{A}(D)$ est un opérateur différentiel du premier ordre à coëfficients constants, A et B deux matrices carrées constantes et C une matrice constante de même forme que $\mathscr{A}^*(-D)$.

Notons que si $\mathring{\mathscr{A}}^*(-x)\,\mathring{\mathscr{A}}(x)$ est hermitien défini négatif et possède des valeurs propres distinctes pour tout $x \in E_n$ et $\neq 0$, on retrouve des opérateurs totalement hyperboliques de la théorie classique [6].

65. — Les espaces V considérés dans la suite seront toujours associés à $\mathscr{A}(D)$.

Nous dirons qu'une fonction $\vec{u}$ satisfait à la *condition de* NEUMANN relative à $L(D, D_t)$, si

$$([\mathscr{A}^*(-D) + C]\mathscr{A}(D)\vec{u}, \vec{v}) = (\mathscr{A}(D)\vec{u}, [\mathscr{A}(D) + C^*]\vec{v}),$$

pour tout $\vec{v} \in V_{\dot{\Omega}_D}$, avec la décomposition habituelle de $\dot{\Omega}$.

Remarquons que cette relation est équivalente à

$$(\mathscr{A}^*(-D)\,\mathscr{A}(D)\vec{u}, \vec{v}) = (\mathscr{A}(D)\vec{u}, \mathscr{A}(D)\vec{v}).$$

Cette condition, vérifiée chaque fois que $\vec{v}$ est à support compact dans Ω, généralise visiblement la condition de NEUMANN qui devient

$$\mathring{\mathscr{A}}^*(-\vec{n})\,\mathscr{A}(D)\vec{u} = 0 \text{ sur } \dot{\Omega}_N,$$

lorsque les conditions d'application de la formule de GREEN sont remplies, $\vec{n}$ étant la normale à $\dot{\Omega}$ en $x \in \dot{\Omega}$.

66. — Si nous considérons l'opérateur adjoint à $L(D, D_t)$, à savoir

$$L^*(-D, -D_t) = D_t^2 - A^*D_t + B^* + \mathscr{A}^*(-D)\,[\mathscr{A}(D) + C^*],$$

la condition de NEUMANN relative à cet opérateur s'écrit

$$(\mathscr{A}^*(-D)\,[\mathscr{A}(D) + C^*]\vec{u}, \vec{v}) = ([\mathscr{A}(D) + C^*]u, \mathscr{A}(D)\vec{v}),$$

ou encore

$$\begin{aligned}&([\mathscr{A}^*(-D) + C]\,[\mathscr{A}(D) + C^*]\vec{u}, \vec{v})\\ &= ([\mathscr{A}(D) + C^*]\vec{u}, [\mathscr{A}(D) + C^*]\vec{v}),\end{aligned}$$

pour tout $\vec{v} \in V_{\dot{\Omega}_D}$.

Nous qualifierons cette relation de *condition de* NEUMANN *adjointe,* étant entendu qu'il s'agit de la condition de NEUMANN relative à l'opérateur adjoint à $L(D, D_t)$.

De même, le problème relatif à cet opérateur sera appelé problème adjoint.

Il est évident que $L^*(-D, -D_t)$ est du type $L(D, D_t)$ et les espaces V coïncident.

Si $\vec{u}$ satisfait à la relation généralisant la condition de NEUMANN uniquement lorsque $\vec{v} \in V^c_{\dot{\Omega}_D}$, nous dirons que $\vec{u}$ satisfait à la *condition de* NEUMANN *locale.* Il est évident qu'il suffit, dans ce cas, de considérer

$$\vec{u} \in V^b,$$

$$\mathscr{A}^*(-D)\mathscr{A}(D)\vec{u} \in L_2^b.$$

67. — Donnons deux exemples importants d'opérateurs $\mathscr{A}(D)$ engendrant des opérateurs hyperboliques du second ordre.

On obtient

a) *l'opérateur des ondes* à partir de

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}_{x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{D}_{x_n} \end{bmatrix}.$$

L'opérateur des ondes s'écrit

$$\mathrm{D}_t^2 + a\mathrm{D}_t + b - (\mathrm{D}_{x_1}^2 + \ldots + \mathrm{D}_{x_n}^2) + a_1\mathrm{D}_{x_1} + \ldots + a_n\mathrm{D}_{x_n},$$

$a_1, \ldots, a_n$, a et b étant des constantes ; il est visiblement totalement hyperbolique.

La condition de NEUMANN, lorsque la formule de GREEN est applicable, s'écrit

$$-\vec{n} \times (\mathrm{D}_{x_1}u, \ldots, \mathrm{D}_{x_n}u) = 0$$

sur $\dot{\Omega}_{\mathrm{N}}$,

b) *l'opérateur de l'élasticité* en considérant

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \left[\begin{array}{ccccc} \sqrt{2\mathrm{G}b}\ \mathrm{D}_{x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \sqrt{2\mathrm{G}b}\ \mathrm{D}_{x_n} \\ \hdashline \sqrt{2\mathrm{G}}\ \mathrm{D}_{x_1} & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \sqrt{2\mathrm{G}}\ \mathrm{D}_{x_n} \\ \hdashline & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \underset{(\text{col. } k)}{\sqrt{\mathrm{G}}\mathrm{D}_{x_i}} & \cdot & \underset{(\text{col. } i)}{\sqrt{\mathrm{G}}\mathrm{D}_{x_k}} & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}\right]$$

G et b étant des constantes positives.

L'opérateur de l'élasticité s'écrit

$$\mathrm{D}_t^2 + \mathrm{A}\mathrm{D}_t + \mathrm{B} - \mathrm{G}(\Delta + (2b + 1)\ \mathrm{grad\ div}) + \sqrt{\mathrm{G}}\Big(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{C}_{ijk}\mathrm{D}_{x_j}\Big),$$

où le dernier terme représente une matrice carrée par son élément d'indices i, k.

Cet opérateur est totalement hyperbolique. En effet,

$$\mathring{\mathscr{A}}^*(-x)\mathring{\mathscr{A}}(x) = -[G\,|\,x\,|^2\,E + G(2b+1)\,(x_i x_j)],$$

où $(x_i x_j)$ désigne la matrice dont l'élément commun à la i^e ligne et à la j^e colonne est $x_i x_j$, $x \in E_n$.

Les valeurs propres de cette matrice sont

$$\lambda_1(x) = -G\,|\,x\,|^2, \quad \lambda_2(x) = -G(2b+2)\,|\,x\,|^2.$$

La condition de Neumann classique s'écrit alors

$$-G[(2b+1)\vec{n}\operatorname{div}\vec{u} + \sum_{i=1}^{n} n_i\,(\operatorname{grad} u_i + D_{x_i}\vec{u})] = 0\;;$$

ce qui correspond à l'annulation de la tension élastique sur $\dot{\Omega}_N$.

Comparaison des systèmes du premier et du second ordre

68. — Le problème de D — N classique consiste à déterminer une fonction $\vec{u}_t$ telle que

$$L(D, D_t)\vec{u}_t = \vec{f}_t,\ t > 0,$$

$$\lim_{t \to 0} \vec{u}_t = \vec{u}_0,$$

$$\lim_{t \to 0} D_t\vec{u}_t = \vec{u}_1,$$

et satisfaisant à la condition de Dirichlet sur $\dot{\Omega}_D$ et à la condition de Neumann sur $\dot{\Omega}_N$, $\vec{f}_t$, $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$ étant donnés.

Nous allons montrer que ce problème ne peut être résolu par les méthodes habituelles de passage à un système hyperbolique du premier ordre « équivalent » et en appliquant à ce système la théorie relative aux opérateurs hyperboliques du premier ordre développée dans les chapitres précédents.

En choisissant par exemple comme nouvelle fonction inconnue

$$\vec{U}_t = \begin{pmatrix} D_t\vec{u}_t \\ \mathscr{A}(D)\vec{u}_t \\ \vec{u}_t \end{pmatrix},$$

le système $L(D, D_t)\vec{u}_t = \vec{f}_t$ est formellement équivalent à

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -A-D_t & -\mathscr{A}^*(-D)-C & -B \\ \hline \mathscr{A}(D) & -D_t & 0 \\ \hline E & 0 & -D_t \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} D_t\vec{u}_t \\ \hline \mathscr{A}(D)\vec{u}_t \\ \hline \vec{u}_t \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\vec{f}_t \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right].$$

Le problème de D — N se pose à partir du choix d'un projecteur P satisfaisant à certaines conditions (§ 9), dans le cas présent

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{Bmatrix} 0 \\ E \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \begin{Bmatrix} E \\ 0 \end{Bmatrix} \end{bmatrix},$$

E désignant une matrice identité dont la dimension correspond aux dimensions des sous-matrices intervenant dans la décomposition de l'opérateur du premier ordre considéré.

Il consiste à déterminer $\vec{U}_t$, solution du système différentiel, tel que

$$\lim_{t \to 0} \vec{U}_t = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \mathscr{A}(D)\vec{u}_0 \\ \vec{u}_0 \end{bmatrix},$$

avec, ou bien

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathscr{A}(D)\vec{u}_t \\ \begin{Bmatrix} \vec{u}_t \\ 0 \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \in V_{\dot{\Omega}_D},$$

$$\mathring{\mathscr{A}}(\vec{n})\mathscr{A}(D)\vec{u}_t = 0 \text{ sur } \dot{\Omega}_N,$$

ou bien

$$\begin{bmatrix} D_t\vec{u}_t \\ 0 \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{u}_t \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \in V_{\dot{\Omega}_D},$$

$$\mathring{\mathscr{A}}(\vec{n})D_t\vec{u}_t = 0 \text{ sur } \dot{\Omega}_N.$$

La condition de NEUMANN classique s'obtient donc en considérant

$$P = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{Bmatrix} 0 \\ E \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

et la condition de DIRICHLET,

$$\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

qui ne satisfait pas aux conditions imposées (§ 9).

Les conditions de D — N ne sont donc pas obtenues à partir du même projecteur ; la condition de DIRICHLET n'est pas obtenue à partir d'un projecteur convenable : les problèmes mixtes de D — N et le problème de DIRICHLET ne peuvent donc pas être traités par cette méthode.

Dans le cas du problème de NEUMANN ($\dot{\Omega}_D = \varnothing$) posé sous la forme généralisée (§ 21), en plus des hypothèses imposées à la solution, seul le cas où $\vec{u}_0 \in V^b$ est envisagé car, si

$$\vec{U}_t \underset{L_2^b}{\rightarrow} \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_0 \end{bmatrix}$$

lorsque $t \rightarrow 0$, alors

$$\vec{u}_t \underset{V^b}{\rightarrow} \vec{u}_0$$

lorsque $t \rightarrow 0$ et nécessairement $\vec{u}_2 = \mathscr{A}(D)\vec{u}_0$.

Notons encore que si on choisit comme nouvelle inconnue

$$\vec{U}_t = (D_t\vec{u}_t, D_{x1}\vec{u}_t, \ldots, D_{xn}\vec{u}_t, \vec{u}_t),$$

on obtient un opérateur de la forme

$$\mathscr{H}D_t + \left[\begin{array}{c|c} & B^*(D) \\ \hline B(D) & \end{array}\right] + K,$$

où K et $\mathscr{H}$ sont des matrices constantes, mais où $\mathscr{H}$ peut être singulier (cas de l'élasticité).

Plus généralement, le choix d'une nouvelle fonction inconnue dépendant des dérivées de $\vec{u}_t$ modifie les conditions du problème relatif à l'opérateur du second ordre (cf. paragraphe suivant), notamment lorsqu'on impose à cette nouvelle fonction d'appartenir à $L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, alors que dans la formulation adoptée on impose seulement

$$\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$$

et les conditions aux limites locales aux moyennes temporelles de $\vec{u}_t$.

En comparant les conditions aux limites relatives aux opérateurs des premier et second ordres, les conditions aux limites imposées à la nouvelle fonction font intervenir directement des dérivées de $\vec{u}_t$, alors que seules des dérivées des moyennes temporelles de $\vec{u}_t$ interviennent dans le problème posé au second ordre.

Position du problème de Dirichlet-Neumann pour l'opérateur $L(D, D_t)$

69. — Soit Ω un ouvert connexe de E_n. Donnons-nous

a) *la donnée au second membre* ou second membre

$$\vec{f}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[),$$

b) *les données initiales* $\vec{u}_0(x)$ et $\vec{u}_1(x) \in L_2^b$.

Le problème de D — N, posé pour l'opérateur $L(D, D_t)$ dans l'ouvert Ω, consiste à déterminer $\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$ tel que

a) $$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \in V_{\mathring{\Omega}_D}^b$$

et satisfasse à la condition de Neumann locale et

b) $$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t D_t^2 \varphi(t) dt - A \int_0^{+\infty} \vec{u}_t D_t \varphi(t) dt + B \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt + [\mathscr{A}^*(-D) + C]\mathscr{A}(D) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \vec{f}_t \varphi(t) dt + [\vec{u}_1 + A\vec{u}_0]\varphi(0) - \vec{u}_0 D_t \varphi(0),$$

pour tout $\varphi(t) \in D(E_1)$.

Posé dans les conditions précédentes, ce problème peut aussi être formulé de la manière suivante. Il consiste à déterminer $\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$ tel que

$$\text{a)} \qquad \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \in V^b_{\dot{\Omega}_D}$$

et

$$\text{b)} \quad \Big(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t D^2\varphi(t)dt - A\int_0^{+\infty} \vec{u}_t D_t\varphi(t)dt + B\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt, \vec{v}\Big)$$
$$+ \Big(\mathscr{A}(D)\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt, [\mathscr{A}(D) + C^*]v\Big)$$
$$= \Big(\int_0^{+\infty} \vec{f}_t\varphi(t)dt + [\vec{u}_1 + A\vec{u}_0]\varphi(0) - \vec{u}_0 D_t\varphi(0), \vec{v}\Big),$$

pour tout $\vec{v} \in V_{\dot{\Omega}_D}$ et tout $\varphi(t) \in D(E_1)$.

Montrons l'équivalence de ces deux formulations.

Considérons la première formulation.

Comme tous les termes figurant dans l'égalité b) sont dans L_2^b, moyennant la condition de Neumann locale, la solution $\vec{u}_t$ satisfait aux conditions imposées dans la seconde formulation.

De l'égalité b) (2e formulation), nous déduisons l'existence dans L_2^b de

$$[\mathscr{A}^*(-D) + C]\,\mathscr{A}(D)\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt$$

et l'égalité

$$\Big([\mathscr{A}^*(-D) + C]\,\mathscr{A}(D)\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt, \vec{v}\Big)$$
$$= \Big(\mathscr{A}(D)\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt, [\mathscr{A}(D) + C^*]\vec{v}\Big)$$

pour tout $\vec{v} \in V^c_{\dot{\Omega}_D}$, ce qui exprime que $\vec{u}_t$ satisfait à la condition de Neumann locale.

Moyennant ce résultat, comme $D(\Omega) \in V^c_{\dot{\Omega}_D}$, nous constatons que $\vec{u}_t$ vérifie les conditions imposées dans la première formulation.

Interprétation physique

70. — Le théorème suivant montre que la solution, si elle existe, est la généralisation naturelle de la solution ordinaire de

$$L(D, D_t)\vec{u}_t = \vec{f}_t$$

telle que $\vec{u}_t$ se réduise à $\vec{u}_0$ et $D_t\vec{u}_t$ à $\vec{u}_1$ lorsque $t = 0$.

Si $\vec{u}_t \in C_2(\Omega \times]0, +\infty[)$ *est une solution du problème et si, pour* $t \to 0+$, *on a*

$$\lim \vec{u}_t \in L_1^{\mathrm{loc}},$$

$$\lim D_t\vec{u}_t \in L_1^{\mathrm{loc}},$$

alors

$$L(D, D_t)\vec{u}_t = \vec{f}_t$$

pp. dans $\Omega \times]0, +\infty[$ *et* $\lim \vec{u}_t = \vec{u}_0$, $\lim D_t\vec{u}_t = \vec{u}_1$ *pp. dans* Ω.

En effet, d'après la première formulation et vu les hypothèses satisfaites par $\vec{u}_t$, on a

$$\int_0^{+\infty} D^2\vec{u}_t\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} AD_t\vec{u}_t\varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} B\vec{u}_t\varphi(t)dt$$

$$+ \int_0^{+\infty} [\mathscr{A}^*(-D) + C]\,\mathscr{A}(D)\vec{u}_t\varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \vec{f}_t\varphi(t)dt$$

$$+ [\vec{u}_1 + A\vec{u}_0 - \lim D_t\vec{u}_t - \lim A\vec{u}_t]\varphi(0) - [\vec{u}_0 - \lim \vec{u}_t]D_t\varphi(0),$$

quel que soit $\varphi(t) \in D(E_1)$.

Si $\varphi(t) \in D(]0, +\infty[)$, alors $\varphi(0) = D_t\varphi(0) = 0$ et

$$L(D, D_t)\vec{u}_t = \vec{f}_t$$

pp. dans $\Omega \times]0, +\infty[$.

En tenant compte de ce résultat, si $\varphi(t) \in D(E_1)$ avec $\varphi(0) = 0$ et $D_t\varphi(0) \neq 0$, alors $\lim \vec{u}_t = \vec{u}_0$ pp. dans Ω.

On déduit alors immédiatement que $\lim D_t\vec{u}_t = \vec{u}_1$ pp. dans Ω.

Théorème de densité

71. — Désignons par N l'ensemble des fonctions de $V_{\dot{\Omega}_D}$ qui satisfont à la condition de Neumann.

A toute fonction $\vec{u}(x)\varphi(t) \in \mathrm{N} \otimes \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$, associons

$$\Theta[\vec{u}\varphi] = \begin{bmatrix} \mathrm{L}(\mathrm{D}, \mathrm{D}_t)\vec{u}\varphi(t) \\ \vec{u}\varphi(0) \\ \vec{u}\mathrm{D}_t\varphi(0) \end{bmatrix},$$

élément de $\mathrm{L}_2(\Omega \times]0, \mathrm{T}[) \times \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}} \times \mathrm{L}_2$, quel que soit $\mathrm{T} > 0$.

L'ensemble $\Theta[\vec{u}\varphi]$ *constitue un système total dans*

$$\mathscr{L} = \mathrm{L}_2(\Omega \times]0, \mathrm{T}[) \times \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}} \times \mathrm{L}_2,$$

muni du produit scalaire

$$\left(\begin{bmatrix} \vec{u}_t \\ \vec{u}_0 \\ \vec{u}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vec{v}_t \\ \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \end{bmatrix}\right)_{\mathscr{L}} = (\vec{u}_t, \vec{v}_t)_{\mathrm{L}_{2\mathrm{L}_2(\Omega\times]0,\mathrm{T}[)}} + (\vec{u}_0, \vec{v}_0)_\mathrm{V} + (\vec{u}_1, \vec{v}_1),$$

quel que soit $\mathrm{T} > 0$ *borné.*

Soit $(\vec{f}_t, \vec{f}_0, \vec{f}_1) \in \mathscr{L}$ et orthogonal dans $\mathscr{L}$ à tout $\Theta[\vec{u}\varphi]$, $\vec{u}\varphi \in \mathrm{N} \otimes \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$.

a) Montrons que $\vec{f}_t$ est nul.

Considérons $\varphi \in \mathrm{D}(]0, +\infty[)$, il s'ensuit que

$$\left(\int_0^\mathrm{T} [\vec{f}_t\mathrm{D}_t^2\bar{\varphi} + \mathrm{A}^*\vec{f}_t\mathrm{D}_t\bar{\varphi}]dt, \vec{u}\right)$$

$$+ \left(\int_0^\mathrm{T} \vec{f}_t\bar{\varphi}dt, \{[\mathscr{A}^*(-\mathrm{D}) + \mathrm{C}]\,\mathscr{A}(\mathrm{D}) + \mathrm{B}\}\vec{u}\right) = 0$$

pour tout $\vec{u} \in \mathrm{N}$.

Comme $\varphi(t) \in \mathrm{D}(]0, +\infty[)$, $\varphi(t - s) \in \mathrm{D}(]0, +\infty[)$ si $s \geqslant 0$, nous pouvons remplacer $\varphi(t)$ par $\varphi(t - s)$ dans la relation précédente.

Posons

$$\vec{f}_\varphi^s = \int_0^\mathrm{T} \vec{f}_t\bar{\varphi}(t - s)dt.$$

Cette fonction est visiblement localement intégrable en s dans $[0, +\infty[$, quel que soit $\varphi \in \mathrm{D}(]0, +\infty[)$, et indéfiniment fortement dérivable en s dans $]0, +\infty[$ avec

$$\vec{f}^{\,s}_{\mathrm{D}_t^p\varphi} = (-1)^p\mathrm{D}_p^s\vec{f}_\varphi^s.$$

La relation de départ s'écrit alors

$$(D_s^2\vec{f}_\varphi^s - A^*D_s\vec{f}_\varphi^s, \vec{u}) + (\vec{f}_\varphi^s, \{[\mathscr{A}^*(-D) + C]\mathscr{A}(D) + B\}\vec{u}) = 0. \quad (*)$$

Nous allons choisir un $\vec{u}$ particulier de manière à montrer l'annulation de $\vec{f}_t$.

Soit $\vec{U}_\varphi^s$ l'élément (unique) de $V_{\dot{\Omega}_D}$ tel que

$$(\vec{U}_\varphi^s, \vec{v})_V = (-D_s\vec{f}_\varphi^s + A^*\vec{f}_\varphi^s, \vec{v})$$

quel que soit $\vec{v} \in V_{\dot{\Omega}_D}$.

On déduit aisément que la condition imposée à $\vec{U}_\varphi^s$ entraîne que $\vec{U}_\varphi^s \in N$ et

$$\{[\mathscr{A}^*(-D) + C]\mathscr{A}(D) + B\}\vec{U}_\varphi^s = -D_s\vec{f}_\varphi^s + A^*\vec{f}_\varphi^s + [C\mathscr{A}(D) + B - E]\vec{U}_\varphi^s.$$

Montrons que $\vec{U}_\varphi^s$ et $\mathscr{A}(D)\vec{U}_\varphi^s$ sont fortement dérivables en s dans $]0, +\infty[$ et

$$D_s\begin{Bmatrix}1\\ \mathscr{A}(D)\end{Bmatrix}\vec{U}_\varphi^s = \begin{Bmatrix}1\\ \mathscr{A}(D)\end{Bmatrix}\vec{U}^s_{-D_t\varphi} = \begin{Bmatrix}1\\ \mathscr{A}(D)\end{Bmatrix}\vec{U}^s_{D_s\varphi}.$$

On a en effet, vu la définition de $\vec{U}_\varphi^s$,

$$\| (1/h)(\vec{U}_\varphi^{s+h} - \vec{U}_\varphi^s) - \vec{U}^s_{D_s\varphi} \|_V^2$$

$$= \left(\frac{1}{h}[-D_{s+h}\vec{f}^{s+h} + D_s\vec{f}^s] + D_s\vec{f}^s_{D_s\varphi} + A^*\left[\frac{1}{h}(\vec{f}^{s+h} - \vec{f}^s) - \vec{f}^s_{D_s\varphi}\right], \frac{1}{h}[\vec{U}_\varphi^{s+h} - \vec{U}_\varphi^s] - \vec{U}^s_{D_s\varphi}\right)$$

$$\leqslant \| (1^{\text{er}} \text{ facteur du } 2^{\text{d}} \text{ membre}) \| \, \|(1/h)(\vec{U}_\varphi^{s+h} - \vec{U}_\varphi^s) - \vec{U}^s_{D_s\varphi}\|$$

$$\leqslant \| (1^{\text{er}} \text{ facteur du } 2^{\text{d}} \text{ membre}) \| \, \|(1/h)(\vec{U}_\varphi^{s+h} - \vec{U}_\varphi^s) - \vec{U}^s_{D_s\varphi}\|_V,$$

ce qui démontre la dérivabilité forte des éléments considérés puisque $\vec{f}_\varphi^s$ est fortement dérivable.

Compte tenu des propriétés de $\vec{U}_\varphi^s$, la relation $(*)$ ci-dessus devient

$$-(\vec{f}_\varphi^s, D_s\vec{f}_\varphi^s) - (D_s\vec{U}_\varphi^s, \vec{U}_\varphi^s)_V = -(\vec{f}_\varphi^s, [C\mathscr{A}(D) + B - E]\vec{U}_\varphi^s - A^*\vec{f}_\varphi^s)$$

et, en considérant le double de la partie réelle de chaque membre, elle entraîne l'inégalité

$$-D_s(\|\vec{f}_\varphi^s\|^2 + \|\vec{U}^s\|_V^2) \leqslant 2\{\|\vec{f}_\varphi^s\| \, \|[C\mathscr{A}(D) + B - E]\vec{U}_\varphi^s\| + (\Lambda/2)\|\vec{f}_\varphi^s\|^2\},$$

où $(\Lambda/2)$ est la plus grande des valeurs propres de $-(A + A^*)$.

Le second membre de cette inégalité est majoré par

$$2 \| \vec{f}^s_\varphi \| [(\Lambda/2) \| \vec{f}^s_\varphi \| + \mathscr{C} \| \mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{\mathrm{U}}^s_\varphi \| + \mathscr{B} \| \vec{\mathrm{U}}^s_\varphi \|]$$
$$\leqslant (k/2) \| \vec{f}^s_\varphi \| (\| \vec{f}^s_\varphi \| + \| \vec{\mathrm{U}}^s_\varphi \|_{\mathrm{V}}),$$

où $\mathscr{C} = \| \mathrm{C} \|_{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2}$, $\mathscr{B} = \| \mathrm{B} \|_{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2}$, $k/2 = \sup (\Lambda, 2\mathscr{C}, 2\mathscr{B})$.

Comme

$$a(a + b) \leqslant (a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$$

si a et b sont positifs, nous obtenons finalement l'inégalité

$$- \mathrm{D}_s(\| \vec{f}^s_\varphi \|^2 + \| \vec{\mathrm{U}}^s_\varphi \|^2_{\mathrm{V}}) \leqslant k(\| \vec{f}^s_\varphi \|^2 + \| \vec{\mathrm{U}}^s_\varphi \|^2_{\mathrm{V}}).$$

En posant $\mathrm{U}_s = \| \vec{f}^s_\varphi \|^2 + \| \vec{\mathrm{U}}^s_\varphi \|^2_{\mathrm{V}}$, cette inégalité s'écrit

$$- \mathrm{D}_s\mathrm{U}_s \leqslant k\mathrm{U}_s.$$

En reprenant le raisonnement tenu à la fin du théorème d'annulation (§ 25), on déduit que cette inégalité entraîne $\mathrm{U}_0 = 0$ et en particulier $\vec{f}_t = 0$ pp. dans $\Omega \times]0, \mathrm{T}[$.

b) Montrons l'annulation de $\vec{f}_0$ pp. dans Ω.

Soit $\varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$ tel que $\mathrm{D}_t\varphi(0) = 0$ et $\varphi(0) \neq 0$.

Vu le a) ci-dessus, le produit scalaire de départ s'écrit

$$\varphi(0)\,(\vec{f}_0, \vec{u})_{\mathrm{V}} = 0,$$

pour tout $\vec{u} \in \mathrm{N}$.

Soit $\vec{v}$ l'élément unique de $\mathrm{V}_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}}$ tel que

$$(\vec{v}, \vec{w})_{\mathrm{V}} = (\vec{f}_0, \vec{w}),$$

pour tout $\vec{w} \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}}$.

Cette fonction $\vec{v}$ est visiblement dans N.

Substituons $\vec{f}_0$ à $\vec{w}$ dans la condition imposée à $\vec{v}$.

Compte tenu de la relation de départ, cette condition entraîne que $\| \vec{f}_0 \| = 0$ et $\vec{f}_0 = 0$ pp. dans Ω.

c) L'annulation de $\vec{f}_1$ est alors immédiate.

Ensemble de dépendance et inégalités d'énergie

72. — Les considérations relatives aux ensembles de dépendance sont exactement les mêmes qu'au premier ordre (§ 27). La fonction $\lambda_0(x)$ est, dans le cas présent, définie par

$$\lambda_0(x) = \sup_{i=1 \dots N} \lambda_i(x),$$

$\lambda_i(x)$ étant tel que $dtm[\mathring{\mathscr{A}}^*(x)\mathring{\mathscr{A}}(x) - \lambda_i^2(x)\mathrm{E}] = 0$, $|x| = 1$.

73. — Établissons les *inégalités d'énergie* relatives à $\mathrm{L}(\mathrm{D}, \mathrm{D}_t)$. Les notations et conventions d'écriture sont celles du § 29.

a) *Si* $\vec{u}_t \in \mathrm{N}$ *et est 2 fois fortement dérivable dans* $]0, +\infty[$, *si* $\vec{u}_t$, $\mathrm{D}_t\vec{u}_t$, $\mathrm{D}_t^2\vec{u}_t$, $\mathscr{A}(\mathrm{D})u_t$, $\mathrm{L}(\mathrm{D}, \mathrm{D}_t)\vec{u}_t \in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$ *ainsi que* $\mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{D}_t\vec{u}_t$, *avec* $\vec{u}_t$, $\mathrm{D}_t\vec{u}_t$, $\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_t$ *fortement continus dans* $[0, +\infty[$ *et* $\mathscr{A}(\mathrm{D})u_t$ *fortement dérivable dans* $]0, +\infty[$, *alors*

$$\| \mathrm{D}_\tau\vec{u}_\tau \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_\tau)} + \| \vec{u}_\tau \|^2_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_\tau)} \leqslant \| \mathrm{D}_\tau\vec{u}_0 \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_0)} + \| \vec{u}_0 \|^2_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_0)}$$

$$+ 2\mathrm{R}e(\mathrm{L}(\mathrm{D}, \mathrm{D}_t)\vec{u}_t, \mathrm{D}_t\vec{u}_t)_{\mathrm{L}_2(\mathrm{C}_\mathrm{T} \cap \{\Omega \times]0, \tau[\})} + \Lambda \int_0^\mathrm{T} [\| \mathrm{D}_t\vec{u}_t \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}t)} + \| \vec{u}_t \|^2_{\mathrm{V}(\mathrm{B}t)}]$$

où $\vec{u}_0$, $\mathrm{D}_t\vec{u}_0$ *et* $\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0$ *sont les limites dans* L_2^b *de* $\vec{u}_t$, $\mathrm{D}_t\vec{u}_t$ *et* $\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_t$ *et où* $\Lambda/4$ *majore la plus grande des valeurs propres de* $-(\mathrm{A} + \mathrm{A}^*)/2$ *et* $\| \mathrm{C} \|_{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2}$, $\| \mathrm{B} - \mathrm{E} \|_{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2}$ *lorsque ces deux matrices ne sont pas simultanément nulles, la plus grande des valeurs propres de* $-(\mathrm{A} + \mathrm{A}^*)/4$ *si* $\mathrm{C} = 0$ *et* $\mathrm{B} - \mathrm{E} = 0$. (*)

b) *Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on a encore l'inégalité*

$$\| \mathrm{D}_\tau u_\tau \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_\tau)} + \| \vec{u}_\tau \|^2_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_\tau)} \leqslant \mathrm{K}(\tau)[\| \mathrm{D}_t\vec{u}_0 \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_0)} + \| \vec{u}_0 \|^2_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_0)}$$
$$+ \| \mathrm{L}(\mathrm{D}, \mathrm{D}_t)\vec{u}_t \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{C}_\mathrm{T} \cap \{\Omega \times]0, \tau[\})}],$$

où $\mathrm{K}(t) = \sup(1, e^{(\Lambda+1)t})$.

(*) Si C est une matrice rectangulaire à M lignes et N colonnes, la notation précise de « $\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2$ » est « $(\mathrm{L}_2)^\mathrm{N} \to (\mathrm{L}_2)^\mathrm{M}$ » dans $\| \mathrm{C} \|_{\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2}$.

c) *Si* $\vec{u}_t$ *satisfait aux conditions précédentes, alors*

$$\left\| \int_0^{+\infty} \mathrm{D}_t\vec{u}_t\varphi(t)dt \right\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_\mathrm{T})} + \left\| \int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt \right\|^2_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_\mathrm{T})}$$

$$\leqslant (\sup_{[0,\,\mathrm{T}]} |\,\varphi(t)\,| \int_0^{\mathrm{T}} \sqrt{\mathrm{K}(\tau)}d\tau)^2 \Big[\| \mathrm{D}_t\vec{u}_0 \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_0)} + \| \vec{u}_0 \|^2_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_0)}$$

$$+ \int_0^{\mathrm{T}} \| \mathrm{L}(\mathrm{D},\, \mathrm{D}_t)\vec{u}_t \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_t)}dt\Big],$$

pour tout $\varphi(t) \in \mathrm{D}(]-\infty,\, \mathrm{T}[)$.

Notons que les fonctions combinaisons linéaires finies de fonctions de $\mathrm{N} \otimes \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$ satisfont aux hypothèses requises pour vérifier ces inégalités.

Considérons la fonction $\alpha_\varepsilon(x, t)$ introduite au § 29.

Vu le second lemme de ce paragraphe 29 et puisque $\mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$ est fermé dans V, alors, *si* $\vec{u}_t \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$ *pour tout t,* $\alpha_\varepsilon\vec{u}_t \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$ *pour tout t.*

Passons à la démonstration de ces inégalités.

a) Démontrons l'inégalité a).

Considérons l'expression

$$\int_0^\tau ([\mathrm{D}_t^2 + \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D}) + \mathrm{E}]\vec{u}_t,\, \alpha_\varepsilon\mathrm{D}_t\vec{u}_t)dt$$

$$+ \int_0^\tau (\alpha_\varepsilon\mathrm{D}_t\vec{u}_t,\, [\mathrm{D}_t^2 + \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D}) + \mathrm{E}]\vec{u}_t)dt.$$

Elle peut s'écrire

$$\int_0^\tau (\mathrm{D}^2\vec{u}_t,\, \alpha_\varepsilon\mathrm{D}_t\vec{u}_t)dt + \int_0^\tau (\alpha_\varepsilon\mathrm{D}_t\vec{u}_t,\, \mathrm{D}^2\vec{u}_t)dt$$

$$+ \int_0^\tau (\mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_t,\, \alpha_\varepsilon\mathrm{D}_t\vec{u}_t)dt + \int_0^\tau (\alpha_\varepsilon\mathrm{D}_t\vec{u}_t,\, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_t)dt$$

$$+ \int_0^\tau (\vec{u}_t,\, \alpha_\varepsilon\mathrm{D}_t\vec{u}_t)dt + \int_0^\tau (\alpha_\varepsilon\mathrm{D}_t\vec{u}_t,\, \vec{u}_t)dt$$

et, des hypothèses de dérivabilité forte et $\vec{u}_t \in \mathrm{N}$, on déduit que $\mathrm{D}_t\vec{u}_t \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$ avec $\mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{D}_t\vec{u}_t = \mathrm{D}_t\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_t$ et l'égalité

$$2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau([\mathrm{D}_t^2+\mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D})+\mathrm{E}]\vec{u}_t,\ \alpha_\varepsilon \mathrm{D}_t\vec{u}_t)dt$$

$$=[(\mathrm{D}_t\vec{u}_t,\ \alpha_\varepsilon \mathrm{D}_t\vec{u}_t)]_0^\tau+[(\vec{u}_t,\ \alpha_\varepsilon\vec{u}_t)]_0^\tau+[(\mathscr{A}\vec{u}_t,\ \alpha_\varepsilon\mathscr{A}\vec{u}_t)]_0^\tau$$

$$-\int_0^\tau[(\mathrm{D}_t\vec{u}_t,\ \mathrm{D}_t\vec{u}_t\,.\,\mathrm{D}_t\alpha_\varepsilon)+(\vec{u}_t,\ \vec{u}_t\mathrm{D}_t\alpha_\varepsilon)+(\mathscr{A}\vec{u}_t,\ \mathscr{A}\vec{u}_t\,.\,\mathrm{D}_t\alpha_\varepsilon)]dt$$

$$+\ 2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau(\mathscr{A}\vec{u}_t,\ \mathring{\mathscr{A}}\ (\mathrm{grad}\ \alpha_\varepsilon)\mathrm{D}_t\vec{u}_t)dt.$$

Montrons que la somme des deux derniers termes du second membre est positive. En explicitant $\mathrm{D}_t\alpha_\varepsilon$ et grad α_ε, l'intégrant correspondant à ces termes s'écrit

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\sum_{p=1}^{\mathrm{M}}\left\{\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\mathrm{N}}[1-\prod_{k=1}^{\mathrm{M}}h_\varepsilon(a_{ik})]\prod_{\substack{k=1\\ k\neq p}}^{\mathrm{M}}h_\varepsilon(a_{jk})\mathrm{D}_{a_{jp}}h_\varepsilon(a_{jp})\ \times\right.$$

$$\times\left(\lambda_0(\alpha_{p,m})[|\,\mathrm{D}_t\vec{u}_t\,|^2+|\,\vec{u}_t\,|^2+|\,\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_t\,|^2]\right.$$

$$\left.\left.-\ 2\,\mathrm{Re}\,(\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_t\times\mathring{\mathscr{A}}(\alpha_{p,m})\mathrm{D}_t\vec{u}_t)]\right)\right\}.$$

Vu la définition de $\lambda_0(\alpha_{p,m})$, on a

$$|\,\mathring{\mathscr{A}}(\alpha_{p,m})\ \mathrm{D}_t\vec{u}_t\,|^2\leqslant|\,\lambda_0(\alpha_{p,m})\mathrm{D}_t\vec{u}_t\,|^2.$$

Si $\lambda_0(\alpha_{p,m})=0$, les termes correspondants dans l'intégrant considéré ci-dessus sont nuls.

Si $\lambda_0(\alpha_{p,m})\neq 0$ (donc >0), alors le dernier facteur figurant dans les termes de l'intégrand est supérieur ou égal à

$$\frac{1}{\lambda_0(\alpha_{p,m})}\,[|\,\mathring{\mathscr{A}}(\alpha_{p,m})\mathrm{D}_t\vec{u}_t-\lambda_0(\alpha_{p,m})\ \mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_t\,|^2+|\,\lambda_0(\alpha_{p,m})\vec{u}_t\,|^2],$$

qui est une quantité positive.

Comme $\tau>0$, la somme considérée est positive.

En supprimant cette expression dans la dernière égalité écrite ci-dessus, on obtient l'inégalité

$$(\mathrm{D}_\tau\vec{u}_\varepsilon,\ \alpha_\varepsilon(x,t)\mathrm{D}_\tau\vec{u}_\tau)+(\vec{u}_\tau,\ \alpha_\varepsilon(x,\tau)\vec{u}_\tau)+(\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_\tau,\ \alpha_\varepsilon(x,\tau)\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_\tau)$$

$$\leqslant(\mathrm{D}_t\vec{u}_0,\ \alpha_\varepsilon(x,0)\mathrm{D}_t\vec{u}_0)+(\vec{u}_0,\ \alpha_\varepsilon(x,0)\vec{u}_0)+(\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0,\ \alpha_\varepsilon(x,0)\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0)$$

$$+\ 2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau([\mathrm{D}_t^2+\mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D})+\mathrm{E}]\vec{u}_t,\ \alpha_\varepsilon(x,t)\mathrm{D}_t\vec{u}_t)dt.$$

On procède alors comme au premier ordre (§ 29) et on obtient

$$\| D_\tau \vec{u}_\tau \|^2_{L_2(B_\tau)} + \| \vec{u}_\tau \|^2_{V(B_\tau)} \leqslant \| D_t \vec{u}_0 \|^2_{L_2(B_0)} + \| \vec{u}_0 \|^2_{V(B_0)}$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau ([D_t^2 + \mathscr{A}^*(-D)\mathscr{A}(D) + E]\vec{u}_t . D_t\vec{u}_t)_{L_2(B_0)} dt$$

Établissons enfin la première inégalité d'énergie.

L'opérateur $L(D, D_t)$ peut s'écrire

$$D_t^2 + \mathscr{A}^*(-D)\mathscr{A}(D) + E + AD_t + B - E + C\mathscr{A}(D)$$

et l'intégrale figurant dans le second membre de l'inégalité précédente devient

$$\int_0^\tau (L(D, D_t)\vec{u}_t, D_t\vec{u}_t)_{L_2(B_t)} dt - \int_0^\tau (AD_t\vec{u}_t, D_t\vec{u}_t)_{L_2(B_t)} dt$$

$$- \int_0^\tau ([B - E]\vec{u}_t, D_t\vec{u}_t)_{L_2(B_t)} dt - \int_0^\tau (C\mathscr{A}(D)\vec{u}_t, D_t\vec{u}_t)_{L_2(B_t)} dt.$$

La partie réelle de la somme des trois derniers termes est majorée par

$$2K \int_0^\tau [\| D_t\vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)} + \| \vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)}] dt,$$

où K est une constante qui majore la plus grande des valeurs propres de $-(A + A^*)/2$, $\| C \|_{L_2 \to L_2}$, $\| B - E \|_{L_2 \to L_2}$.

Remarquons que, si $B = E$ et $C = 0$, le facteur 2 disparaît de cette majoration.

L'inégalité annoncée s'obtient immédiatement.

b-c) Pour obtenir les deux autres inégalités on procède comme au premier ordre à partir de l'inégalité précédente.

Théorème d'existence de la solution dans le cas particulier où la donnée initiale $\vec{u}_0 \in V^b_{\Omega_D}$

74. — *Il existe une solution du problème* $\vec{u}_t \in V^b_{\Omega_D}$ *et fortement dérivable dans* $]0, +\infty[$, *qui vérifie les inégalités*

$$\| D_t\vec{u}_t \|^2_{L_2(B_t)} + \| \vec{u}_t \|^2_{V(B_t)} \leqslant K(t) \| \vec{u}_1 \|^2_{L_2(B_o)} + \| \vec{u}_0 \|^2_{V(B_o)} + \| \vec{f}_\tau \|^2_{L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0, t[\})},$$

$$\| \int_0^{+\infty} D_t\vec{u}_t\varphi(t)dt \|^2_{L_2(B_t)} + \| \int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t)dt \|^2_{V(B_T)}$$

$$\leqslant (\sup_{[0,T]} | \varphi(t) | \int_0^T \sqrt{K(t)}dt)^2 [\| \vec{u}_1 \|^2_{L_2(B_0)} + \| \vec{u}_0 \|^2_{V(B_0)} + \int_0^T \| \vec{f}_t \|^2_{L_2(B_t)}dt],$$

pour tout $\varphi(t) \in D(]-\infty, T[)$ $(\vec{u}_0 \in V^b_{\dot{\Omega}_D})$.

a) Montrons d'abord l'existence d'une solution.

Considérons $\vec{u}^m_t$ combinaison linéaire finie de fonctions de $N \otimes D(E_1)$ et l'expression

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}^m, \vec{v}D^2\overline{\varphi} - A^*\vec{v}D_t\overline{\varphi} + B^*\vec{v}\overline{\varphi})dt + \int_0^{+\infty} (\mathscr{A}(D)\vec{u}^m_t, [\mathscr{A}(D) + C^*]\vec{v}\overline{\varphi})dt$$

où $\varphi(t) \in D(E_1)$ et $\vec{v} \in V^c_{\dot{\Omega}_D}$.

En intégrant le premier terme par parties et puisque $\vec{u}^m_t \in N$, elle devient

$$\int_0^{+\infty} (L(D, D_t)\vec{u}^m_t \,.\, \varphi(t), \vec{v})dt + ([D_t\vec{u}^m_0 + A\vec{u}^m_0]\varphi(0), \vec{v}) + (\vec{u}^m_0 D_t\varphi(0), \vec{v})$$

Vu la forme de $\vec{u}^m_t$, le calcul précédent se justifie aisément.

De plus

$$\int_0^{+\infty} \mathscr{A}(D)\vec{u}^m_t\varphi(t)dt = \mathscr{A}(D) \int_0^{+\infty} \vec{u}^m_t\varphi(t)dt.$$

Si $\vec{u}^m_t$ est tel que la suite $\Theta[\vec{u}^m_t]$ converge dans

$$L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0, +\infty[\}) \times V(B_0) \times L_2(B_0)$$

vers $(\vec{f}_t, \vec{u}_0, \vec{u}_1)$, données du problème, on déduit de l'inégalité d'énergie b) que $\vec{u}^m_t$ est une suite de A. Cauchy dans $V(B_t)$ pour tout $t \leqslant T$.

Soit $\vec{u}_t$ sa limite. Il est évident que $\vec{u}_t \in V^b_{\dot{\Omega}_D}$.

De la même inégalité, on déduit

$$\int_0^T \| \vec{u}_t - \vec{u}_t^m \|^2_{V(B_t)}\, dt \leqslant K(T)T[\| \vec{u}_1 - D_t\vec{u}_0^m \|^2_{L_2(B_0)} + \| \vec{u}_0 - \vec{u}_0^m \|^2_{V(B_0)}$$

$$+ \int_0^T \| \vec{f}_t - L(D, D_t)\vec{u}_t^m \|^2_{L_2(B_t)} dt.$$

Les suites $\vec{u}_t^m$ et $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t^m$ sont donc de A. CAUCHY dans $L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0, +\infty[\})$ et convergent respectivement vers $\vec{u}_t$ et $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t$. Il suffit en effet d'appliquer le théorème de H. LEBESGUE au premier membre de la dernière inégalité.

Si $\vec{v}_t$ est la fonction construite de cette manière dans l'ensemble de dépendance $C'_{T'}$, le raisonnement tenu pour les opérateurs du premier ordre (§ 30) et appliqué cette fois en considérant

$$\int_0^T \| \vec{u}_t - \vec{v}_t \|^2_{V(B_t)} dt$$

au lieu de

$$\int_0^T \| \vec{u}_t - \vec{v}_t \|^2_{L_2(B_t)} dt,$$

montre que $\vec{u}_t = \vec{v}_t$ dans $C_T \cap C'_{T'}$.

La fonction $\vec{u}_t$ est ainsi définie dans $\Omega \times]0, +\infty[$.

Montrons que

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \in V^b_{\dot{\Omega}_D}.$$

pour tout $\varphi(t) \in D(E_1)$.

Soient ω et C_T un ensemble de dépendance contenant

$$\omega \times ([\varphi] \cap]0, +\infty[).$$

Si $\vec{u}_t^m$ définit $\vec{u}_t$ dans C_T, en appliquant l'inégalité d'énergie c) à $\vec{u}_t^p - \vec{u}_t^q$, on voit que la suite

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t^m \varphi(t) dt$$

est une suite de A. CAUCHY dans $V(B_T)$ donc dans $V(\omega)$, $\omega \subset B_T$, et dans $V_{\dot{\Omega}_D \cap \dot{\omega}}(\omega)$ qui est fermé dans $V(\omega)$.

En égalant les deux formes de l'expression de départ et en passant à la limite sur m, ce qui est permis puisque $\vec{v}$ et φ sont à support compact, on constate que $\vec{u}_t$ est solution du problème (seconde formulation).

b) Montrons que la solution ainsi construite est fortement dérivable dans $]0, +\infty[$ et satisfait aux inégalités annoncées.

Si $\vec{u}_t^m$ définit une solution du problème dans C_T, l'inégalité d'énergie b) montre que $D_t\vec{u}^m$ est une suite de A. Cauchy dans $L_2(B_t)$ pour tout $t \leqslant T$, et dans $L_2(C_T \cap \{\Omega \times]0, +\infty[\})$, les deux limites étant égales. Soit $\vec{v}_t$ la limite commune.

On montre que $\vec{v}_t$ est défini dans $\Omega \times]0, +\infty[$ et est dans $L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$ par le raisonnement habituel (§ 30).

En considérant la limite dans L_2^b de chaque membre de

$$\int_0^t D_s\vec{u}_s^m ds = \vec{u}_t^m - \vec{u}_0^m,$$

on déduit que $\vec{v}_t$ est la dérivée faible de $\vec{u}_t$.

Cette dérivée est forte car $\vec{v}_t$ est fortement continu dans $]0, +\infty[$ comme on le voit en considérant

$$\begin{aligned} \| \vec{v}_{t+h} - \vec{v}_t \|_{L_2(\omega)} &\leqslant \| \vec{v}_{t+h} - D_t\vec{u}_{t+h}^m \|_{L_2(\omega)} + \| \vec{v}_t - D_t\vec{u}_t^m \|_{L_2(\omega)} \\ &\quad + \| D_t\vec{u}_{t+h}^m - D_t\vec{u}_t^m \|_{L_2(\omega)} \\ &\leqslant 2 \sup_{[0, T]} \| \vec{v}_t - D_t\vec{u}_t^m \|_{L_2(\omega)} + \| D_t\vec{u}_{t+h}^m - D_t\vec{u}_t^m \|_{L_2(\omega)} \end{aligned}$$

et en remarquant que le second membre de l'inégalité d'énergie peut être rendu indépendant de τ en y substituant T à τ, T étant tel que t et $t + h \in]0, T[$.

On obtient les inégalités proposées en passant à la limite sur m dans les inégalités d'énergie b) et c).

75. — Le théorème précédent a un corollaire important qu donne des propriétés de dérivabilité de la solution du problème particulier construite par le procédé décrit ci-dessus.

Cette solution $\vec{u}_t$ *est fortement dérivable dans* $]0, +\infty[$, $\vec{u}_t$, $D_t\vec{u}_t$ *et* $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t$ *sont fortement continus dans* $[0, +\infty[$ *et* $\vec{u}_t$, $D_t\vec{u}_t$ *et* $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t$ *convergent dans* L_2^b *vers* $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\mathscr{A}(D)\vec{u}_0$ *respectivement.*

On a déjà vu que $D_t\vec{u}_t$ était fortement continu dans $]0, +\infty[$.

Comme $\vec{u}_t$ et $D_t\vec{u}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, on déduit que $\vec{u}_t$ est fortement continu dans $]0, +\infty[$.

On montre que $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t$ est fortement continu dans $]0, +\infty[$ à partir de l'inégalité d'énergie b), il suffit de reprendre la démonstration de la continuité forte de $\vec{v}_t$ (§ 74, b) ci-dessus) en y substituant $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t$ à $\vec{v}_t$.

La continuité en $0+$ de $\vec{u}_t$, $D_t\vec{u}_t$, $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t$ se démontre de la même manière en remplaçant $t + h$ par h, et respectivement $\vec{u}_t$, $D_t\vec{u}_t$, $\mathscr{A}(D)\vec{u}_t$ par $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\mathscr{A}(D)\vec{u}_0$ et t par 0 dans les inégalités à la base de la démonstration de la continuité et en considérant $h \to 0+$.

Support des solutions de ce problème particulier

76. — Les théorèmes relatifs au support sont les mêmes que ceux concernant les opérateurs du premier ordre (§ 32) ; il convient cependant d'ajouter ,dans le cas présent, les mêmes hypothèses sur $\vec{u}_1$ que celles faites sur $\vec{u}_0$ dans ces théorèmes.

Unicité de la solution du problème général

77. — Si $\vec{u}_t$ est la différence de deux solutions éventuelles du problème, alors $\vec{u}_t$ est solution du problème posé avec second membre et données initiales nuls. L'unicité est alors régie par le théorème suivant.

Si $\vec{u}_t$ est solution du problème posé avec second membre et données initiales nuls, alors $\vec{u}_t = 0$ pp. dans $\Omega \times]0, +\infty[$.

Soit $\vec{U}_t$ la solution du problème adjoint à $L(D, -D_t)$ posé avec $\vec{f}_t = 0$, $\vec{u}_0 = 0$ et $\vec{u}_1 = \vec{u}_1(x) \in L_2^c$, construite par le procédé exposé dans le théorème d'existence ($\vec{u}_0 = 0 \in V^b_{\dot{\Omega}_D}$).

Le support de

$$\int_0^{+\infty} \vec{U}_t \varphi^*(t)\,dt$$

est donc compact et cette intégrale est dans $V^c_{\dot{\Omega}_D} \subset V^b_{\dot{\Omega}_D}$, $\varphi^* \in D(E_1)$.

Considérons

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t-s)dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t \varphi^*(t+s)dt$$

indéfiniment fortement dérivables sous le signe par rapport à s.

La relation vérifiée par $\vec{u}_t$ reste valable si on remplace $\varphi(t)$ par $\varphi(t-s)$ car φ est à support compact.

Comme

$$\mathrm{D}_t^p \varphi(t-s) = (-1)^p \mathrm{D}_s^p \varphi(t-s)$$

et puisque

$$\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t \varphi^*(t+s)dt \in \mathrm{V}^c_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}},$$

nous avons

$$\Big(\int_0^{+\infty} u_t \mathrm{D}^2\varphi(t-s)dt + \mathrm{A}\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \mathrm{D}_s\varphi(t-s)dt + \mathrm{B}\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt,$$

$$\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t \varphi^*(t \pm s)dt\Big)$$

$$= -\Big(\mathscr{A}(\mathrm{D})\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt, [\mathscr{A}(\mathrm{D}) + \mathrm{C}^*]\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt\Big).$$

Les deux membres de cette égalité s'annulent si $|s|$ est assez grand car une des deux distributions

$$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt$$

et ses dérivées s'annulent.

Nous avons donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\Big(\mathrm{D}_s^2\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt + \mathrm{A}\mathrm{D}_s\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt + \mathrm{B}\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt,$$

$$\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt\Big)$$

$$= -\int_0^{+\infty} ds\Big(\mathscr{A}(\mathrm{D})\int_0^{+\infty} \vec{u}_t\varphi(t-s)dt, [\mathscr{A}(\mathrm{D}) + \mathrm{C}^*]\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t\varphi^*(t+s)dt$$

et, en intégrant par parties le premier membre de cette égalité, celui-ci s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\Big(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t-s)dt,$$

$$\int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t \mathrm{D}_t^2 \varphi^*(t+s)dt - \mathrm{A}^* \int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t \mathrm{D}_t \varphi^*(t+s)dt + \mathrm{B}^* \int_0^{+\infty} \vec{\mathrm{U}}_t \varphi^*(t+s)dt\Big)$$

Vu l'équation vérifiée par $\vec{\mathrm{U}}_t$, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\Big(\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t-s)dt, \vec{u}_1\Big)\varphi^*(s) = 0,$$

quel que soit $\vec{u}_1 \in \mathrm{L}_2^c$ et pour tout φ et tout $\varphi^* \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$, c'est-à-dire, puisque l'intégrant $\in \mathrm{C}_\infty(\mathrm{E}_1)$ comme fonction de s,

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{u}_1)\varphi(t-s)dt = 0,$$

pour toute valeur de s, dès lors $\vec{u}_t = 0$ pp. dans $\Omega \times]0, +\infty[$.

Opérateur de Green et existence de la solution du problème général

78. — On appelle *opérateur de* Green du problème de D — N relatif à l'opérateur $\mathrm{L}(\mathrm{D}, \mathrm{D}_t)$, l'opérateur H_t qui, à la donnée initiale $\vec{u}_1$, associe la solution $\mathrm{H}_t\vec{u}_1$ du problème posé avec $\vec{f}_t = 0$ et $\vec{u}_0 = 0$.

Nous savons que $\mathrm{H}_t\vec{u}_1 \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$ et satisfait à l'inégalité

$$\| \mathrm{D}_t\mathrm{H}_t\vec{u}_1 \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_t)} + \| \mathrm{H}_t\vec{u}_1 \|^2_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_t)} \leqslant \mathrm{K}(t) \| \vec{u}_1 \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_0)}.$$

En reprenant, mutatis mutandis, les considérations du § 36, on voit que l'on peut améliorer cette inégalité en remplaçant

$$\mathrm{K}(t) = \sup\,(1, e^{(\Lambda+1)t})$$

par

$$\mathrm{K}'(t) = \sup\,(1, e^{\Lambda t}).$$

79. — Posons par définition

$$(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t = \int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds$$

lorsque $\vec{f}_t \in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$.

Vu le paragraphe précédent, pour presque tout s, $\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$ pour tout t. De plus

$$\| \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s \|_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_t)} \leqslant \sqrt{\mathrm{K}'(t-s)}\, \| \vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_s)},$$

donc $\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s$ et $\mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s \in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$. Il s'ensuit que

$$\int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$$

et

$$\| \int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds \|_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_t)} \leqslant \int_0^t \| \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s \|_{\mathrm{V}(\mathrm{B}_t)} ds$$

$$\leqslant \sqrt{\mathrm{K}'(t)} \int_0^t \| \vec{f}_s \|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{B}_s)} ds,$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt \int_0^t \mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s ds \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$$

puisque nous pouvons toujours choisir un ensemble de dépendance $\mathrm{C_T}$ de manière que $[\varphi] \subset]-\infty, \mathrm{T}[$.

80. — *Si* $\vec{f}_t \in \mathrm{L}_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, *alors*

$$(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t$$

est solution du problème posé avec second membre $\vec{f}_t$ *et données initiales nulles.*

Nous savons déjà que

$$\int_0^{+\infty} (\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t \varphi(t) dt \in \mathrm{V}^b_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}.$$

Considérons le premier membre de l'équation intervenant dans la seconde formulation du problème (§ 69) et remplaçons y $\vec{u}_t$ par $(\mathrm{H}_s * \vec{f}_s)_t$. Nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} dt [\int_0^t (\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s, \vec{v})\mathrm{D}_t^2\varphi(t)ds - \int_0^t (\mathrm{AH}_{t-s}\vec{f}_s, \vec{v})\mathrm{D}_t\varphi(t)ds$$

$$+ \int_0^t (\mathrm{BH}_{t-s}\vec{f}_s, \vec{v})\varphi(t)ds + \int_0^t (\mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{H}_{t-s}\vec{f}_s, [\mathscr{A}(\mathrm{D}) + \mathrm{C}^*]\vec{v})\varphi(t)ds.$$

En vertu du théorème de G. Fubini, nous avons

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^t \dots ds = \int_0^{+\infty} ds \int_s^{+\infty} \dots dt.$$

Après cette permutation de signes d'intégration, effectuons le changement de variables

$$t - s = u,$$
$$s = w,$$

régulier d'ordre infini entre les ouverts

$$\{(s, t) : t > s > 0\} \qquad \text{et} \qquad \{(u, w) : u > 0, w > 0\}.$$

Nous obtenons de la sorte

$$\int_0^{+\infty} dw \, [\int_0^{+\infty} (\mathrm{H}_u\vec{f}_w, \vec{v})\mathrm{D}_u^2\varphi(u + w)du + \int_0^{+\infty} (\mathrm{AH}_u\vec{f}_w, \vec{v})\mathrm{D}_u\varphi(u + w)du$$

$$+ \int_0^{+\infty} (\mathrm{BH}_u\vec{f}_w, \vec{v})\varphi(u + w)du$$

$$+ \int_0^{+\infty} (\mathscr{A}(\mathrm{D})\mathrm{H}_u\vec{f}_w, [A(\mathrm{D}) + \mathrm{C}^*]\vec{v})\varphi(u + w)du].$$

Vu la définition de H_t, cette expression vaut

$$\int_0^{+\infty} (\vec{f}_w, \vec{v})\varphi(w)dw$$

pour tout $\vec{v} \in \mathrm{V}^c_{\Omega_\mathrm{D}}$ et tout $\varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{E}_1)$, ce qui démontre le théorème.

81. — *Si* $\vec{u}_0 \in \mathrm{L}_2^b$, *alors*

$$\mathrm{H}_t(\mathrm{A}\vec{u}_0) + \mathrm{D}_t\mathrm{H}_t\vec{u}_0$$

est solution du problème posé avec $\vec{f}_t = 0$ *et* $\vec{u}_1 = 0$.

Il est évident que, substitué dans le premier membre de l'équation intervenant dans la seconde formulation du problème, le terme $\mathrm{H}_t(\mathrm{A}\vec{u}_0)$ donne au second membre $(\mathrm{A}\vec{u}_0, \vec{v})\varphi(0)$.

Considérons la distribution

$$\int_0^{+\infty} D_t H_t \vec{u}_0 \psi(t) dt\ ;$$

$\psi(t) \in D(E_1)$.

Montrons que

$$\int_0^{+\infty} D_t H_t \vec{u}_0 \psi(t) dt = -\int_0^{+\infty} H_t \vec{u}_0 D_t \psi(t) dt$$

pour tout $\psi \in D(E_1)$.

Quels que soient $\psi \in D(E_1)$ et $\vec{f} \in L_2^c$, on a

$$\int_0^{+\infty} (D_t H_t \vec{u}_0, \vec{f}) \psi(t) dt = \Big[(H_t \vec{u}_0, \vec{f}) \psi \Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (H_t \vec{u}_0, \vec{f}) D_t \psi dt$$

et comme $H_t \vec{u}_0 \to 0$ dans L_2^b lorsque $t \to 0+$ (§ 93) et ψ est à support compact, le terme intégré est nul.

De là l'égalité, vu la définition de l'intégrale dans L_2^b.

Vu la définition de H_t et l'égalité précédente, la distribution considérée est dans $V^b_{\dot{\Omega}_D}$ et $D_t H_t \vec{u}_0$, substitué dans le premier membre de l'équation du problème, donne au second membre $-(\vec{u}_0, \vec{v}) D_t \varphi(0)$.

82. — *La solution du problème posé avec second membre* $\vec{f}_t \in L_2(\Omega \times]0, +\infty[)$ *et données initiales* $\vec{u}_0$ *et* $\vec{u}_1 \in L_2^b$ *s'écrit*

$$\vec{u}_t = (H_s * \vec{f}_s)_t + H_t(\vec{u}_1 + A\vec{u}_0) + D_t H_t \vec{u}_0$$

et vérifie les inégalités

$$\| \vec{u}_t \|_{L_2(B_t)}$$

$$\leqslant \sqrt{K'(t)}\, [\| \vec{u}_1 \|_{L_2(B_0)} + (1+a) \| \vec{u}_0 \|_{L_2(B_0)} + \int_0^t \| \vec{f}_\tau \|_{L_2(B_\tau)} d\tau],$$

$$\Big\| \int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \Big\|_{V(B_T)}$$

$$\leqslant \int_0^T \sqrt{K'(t)dt} \Big\{ \sup_{[0,T]} |\varphi(t)| \Big[\| \vec{u}_1 \|_{L_2(B_0)} + a \| \vec{u}_0 \|_{L_2(B_0)}$$

$$+ \int_0^T \| \vec{f}_t \|_{L_2(B_t)} dt \Big] + \sup_{[0,T]} | D_t \varphi(t) | \, \| \vec{u}_0 \|_{L_2(B_0)} \Big\},$$

où a majore la norme de A *dans* $B(L_2 \to L_2)$ *et pour tout* $\varphi(t) \in D(]-\infty, T[)$.

L'expression de $\vec{u}_t$ s'obtient directement en considérant les résultats des paragraphes précédents.

Quant aux inégalités, on les obtient en appliquant à chaque terme de l'expression de $\vec{u}_t$ les inégalités des paragraphes 78 et 79 et en tenant compte de l'égalité des distributions considérée au paragraphe 81.

On déduit des théorèmes précédents que *la solution* $\vec{u}_t$ *est fortement continue dans* $[0, +\infty[$.

La solution s'exprime en effet comme une somme de trois termes fortement continus dans $[0, +\infty[$.

Remarquons enfin que, vu les inégalités ci-dessus, les théorèmes relatifs au support de $\vec{u}_t$ obtenus lorsque $\vec{u}_0 \in V^b_{\dot{\Omega}_D}$ restent vrais lorsque $\vec{u}_0 \in L^b_2$. On remarquera d'ailleurs que les trois termes de l'expression de $\vec{u}_t$ ci-dessus satisfont aux hypothèses requises pour vérifier les théorèmes relatifs au support.

Une propriété remarquable de la solution du problème posé avec $\vec{u}_0 \in V^b_{\dot{\Omega}_D}$

83. — *Si* $\vec{u}_t$ *est solution du problème posé avec* $\vec{u}_0 \in V^b_{\dot{\Omega}_D}$, *si* $F(t) \in C_2(]a, b[) \cap C_0([a, b])$, $D_tF(t)$, $D^2_tF(t) \in C_0([a, b])$ *et* $\vec{u}_tF(t)$, $\vec{u}_tD_tF(t)$, $\vec{u}_tD^2_tF(t)$, $\vec{f}_tF(t) \in L_1(]a, b[\,; L^b_2)$ *(ces quatres dernières conditions sont toujours remplies si* $[a, b]$ *est compact), alors*

a) $$\int_a^b \vec{u}_tF(t)dt \in V^b_{\dot{\Omega}_D}$$

et satisfait à la condition de Neumann *locale,*

b) $$\int_a^b \vec{u}_tD^2_tF(t)dt - A\int_a^b \vec{u}_tD_tF(t)dt + B\int_a^b \vec{u}_tF(t)dt + [\mathscr{A}^*(-D) + C]\mathscr{A}(D)\int_a^b \vec{u}_tF(t)dt$$

$$= \int_a^b \vec{f}_tFdt - (D_b\vec{u}_b + A\vec{u}_b)F(b) + (D_a\vec{u}_a + A\vec{u}_a)F(a) - \vec{u}_aD_aF(a) + \vec{u}_bD_bF(b),$$

où on suppose que la limite dans L_2^b *lorsque* $t \to +\infty$ *de* $D_t\vec{u}_t F(t)$ *existe, si* $b = +\infty$,

c) *si, de plus,* $D_t\vec{u}_t F(t)$ *et* $D_t\vec{u}_t D_t F(t) \in L_1(]a, b[\,; L_2^b)$, $D_t\vec{u}_t$ *étant la dérivée forte de* $\vec{u}_t$ *dans* $]0, +\infty[$, *alors*

$$- \int_a^b D_t\vec{u}_t D_t F(t)dt + \int_a^b A(D_t\vec{u}_t)F(t)dt + \int_a^b \vec{u}_t F(t)dt$$
$$+ [\mathscr{A}^*(-D) + C]\mathscr{A}(D) \int_a^b \vec{u}_t F(t)dt$$
$$= \int_a^b \vec{f}_t F(t)dt + D_a\vec{u}_a F(a) - D_b\vec{u}_b F(b).$$

Nous faisons appel aux lemmes démontrés dans le § 34 dont nous adoptons les notations.

En supposant $[a, b]$ compact et en remarquant que

$$D_t(F\delta * \rho_\varepsilon)_t = - [F(s)\rho_\varepsilon(t-s)]_{s=a}^{s=b} + [(D_sF)\delta * \rho_\varepsilon]_t$$

et $$D_t^2(F\delta * \rho_\varepsilon)_t = [F(s)D_s\rho_\varepsilon(t-s)]_{s=a}^{s=b} - [(D_sF)\rho_\varepsilon(t-s)]_{s=a}^{s=b} + \\ + [(D_s^2F)\delta * \rho_\varepsilon)_t,$$

la relation satisfaite par $\vec{u}_t$ (seconde formulation du problème) devient, après substitution de $(F\delta * \rho_\varepsilon)_t$ à $\varphi(t)$,

$$\int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})[(D_s^2F)\delta * \rho_\varepsilon]_t dt - \int_0^{+\infty} (A\vec{u}_t, \vec{v})[(D_sF)\delta * \rho_\varepsilon]_t dt$$
$$+ \int_0^{+\infty} (B\vec{u}_t, \vec{v})\,(F\delta * \rho_\varepsilon)_t dt$$
$$+ (\mathscr{A}(D) \int_0^{+\infty} \vec{u}_t (F\delta * \rho_\varepsilon)_t dt, [\mathscr{A}(D) + C^*]\vec{v})$$
$$= \int_0^{+\infty} (\vec{f}_t, \vec{v})\,(F\delta * \rho_\varepsilon)_t dt + (\vec{u}_1 + A\vec{u}_0, \vec{v})\,(F\delta * \rho_\varepsilon)_0$$
$$- (\vec{u}_0, \vec{v})\,[D_t(F\delta * \rho_\varepsilon)_t]_0$$
$$- \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})F(b)D_b\rho_\varepsilon(t-b)dt + \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})F(a)D_a\rho_\varepsilon(t-a)dt$$
$$+ \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})\rho_\varepsilon(t-b)D_bF(b)dt - \int_0^{+\infty} (\vec{u}_t, \vec{v})\rho_\varepsilon(t-a)D_aF(a)dt$$
$$- \int_0^{+\infty} (A\vec{u}_t, \vec{v})F(b)\rho_\varepsilon(t-b)dt + \int_0^{+\infty} (A\vec{u}_t, \vec{v})F(a)\rho_\varepsilon(t-a)dt.$$

Le troisième terme du second membre peut s'écrire

$$(\vec{u}_0, \vec{v})\,[\int_a^b F(s) D_s \rho_\varepsilon(t-s)\,ds]_{t=0}$$

et, après intégration par parties,

$$(\vec{u}_0, \vec{v})\{F(b)\rho_\varepsilon(-b) - F(a)\rho_\varepsilon(-a) - [(D_s F)\delta * \rho_\varepsilon]_{t=0}\}.$$

La somme des quatrième et cinquième termes du second membre peut s'écrire

$$F(b)\int_0^{+\infty}(\vec{u}_t, \vec{v}) D_t \rho_\varepsilon(t-b)\,dt - F(a)\int_0^{+\infty}(\vec{u}_t, \vec{v}) D_t \rho_\varepsilon(t-a)\,dt$$

et, en intégrant par parties,

$$F(b)\,[-(\vec{u}_0, \vec{v})\rho_\varepsilon(-b) - \int_0^{+\infty}(D_t\vec{u}_t, \vec{v})\rho_\varepsilon(t-b)\,dt]$$

$$-F(a)\,[-(\vec{u}_0, \vec{v})\rho_\varepsilon(-a) - \int_0^{+\infty}(D_t\vec{u}_t, \vec{v})\rho_\varepsilon(t-a)\,dt].$$

La somme des termes que nous venons de considérer vaut donc, après simplification des termes opposés,

$$-(\vec{u}_0, \vec{v})\,[(D_s F)\delta * \rho_\varepsilon]_0 - F(b)\,[(D_t\vec{u}_t, \vec{v})\delta_{[0,\,+\infty[}(t) * \rho_\varepsilon]_b$$
$$+ F(a)\,[(D_t\vec{u}_t, \vec{v})\delta_{[0,\,+\infty[}(t) * \rho_\varepsilon]_a$$

Comme $\vec{u}_0 \in V^b_{\dot{\Omega}_D}$, on a (§§ 74 et 19)

$$\mathscr{A}(D)\int_0^{+\infty}\vec{u}_t(F\delta * \rho_\varepsilon)_t\,dt = \int_0^{+\infty}\mathscr{A}(D)\vec{u}_t(F\delta * \rho_\varepsilon)_t\,dt.$$

Moyennant ces résultats, en appliquant les lemmes du § 34 la relation considérée devient, si $\varepsilon \to 0$,

$$\int_a^b(\vec{u}_t, \vec{v}) D_t^2 F\,dt - \int_a^b(A\vec{u}_t, \vec{v}) D_t F\,dt + \int_a^b(B\vec{u}_t, \vec{v}) F\,dt$$
$$+ (\int_a^b \mathscr{A}(D)\vec{u}_t F\,dt, [\mathscr{A}(D) + C^*]\vec{v})$$
$$= \int_a^b(\vec{f}_t, \vec{v}) F\,dt + (\vec{u}_1 + A\vec{u}_0, \vec{v}) \lim_{\varepsilon\to 0}(F\delta * \rho_\varepsilon)_0$$
$$-(\vec{u}_0, \vec{v}) \lim_{\varepsilon\to 0}[(D_s F)\delta * \rho_\varepsilon]_0$$
$$-F(b)\,(D_b\vec{u}_b, \vec{v}) + F(a) \lim_{\varepsilon\to 0}[(D_t\vec{u}_t, \vec{v})\delta_{[0,\,+\infty[}(t) * \rho_\varepsilon]_a$$

$$+ D_bF(b)\,(\vec{u}_b, \vec{v}) - D_aF(a) \lim_{\varepsilon \to 0} [(\vec{u}_t, \vec{v})\delta_{[0, +\infty[}(t) * \rho_\varepsilon]_a$$

$$- F(b)\,(A\vec{u}_b, \vec{v}) + F(a) \lim_{\varepsilon \to 0} [(A\vec{u}_t, \vec{v})\delta_{[0, +\infty[}(t) * \rho_\varepsilon]_a$$

Si $a > 0$, les deuxième et troisième termes du second membre sont nuls, dans les autres les limites se remplacent par les valeurs en a des premiers facteurs des produits de composition considérés.

Si $a = 0$, la somme des deuxième, cinquième et dernier terme du second membre vaut $(\vec{u}_t + A\vec{u}_0, \vec{v})\,F(0)$; celle des troisième et septième, $-(\vec{u}_0, \vec{v})\,D_tF(0)$, en vertu du lemme b) § 34.

Dans le cas de $b = +\infty$, on établit le résultat précédent pour tout compact $[a, b] \subset [a, +\infty[$ et on utilise la propriété démontrée au § 34 : si $\vec{v}_t \in L_2^b(\Omega \times]0, +\infty[)$, $G(t) \in C_0([a, +\infty[)$, $\vec{v}_tG(t) \in L_1(]a, +\infty[\,;\, L_2^b)$, alors

$$\lim_{\substack{L_2^b \\ b \to +\infty}} \int_a^b \vec{v}_tG(t)dt = \int_a^{+\infty} \vec{v}_tG(t)dt.$$

Tout revient donc à substituer $+\infty$ à b dans la relation obtenue ci-dessus ; remarquons que

$$\lim_{b \to +\infty} \left\{ \begin{matrix} F(b)\,(A\vec{u}_b, \vec{v}) \\ F(b)\,(D_b\vec{u}_b, \vec{v}) \end{matrix} \right\} = 0,$$

ces fonctions étant intégrables dans $[a, +\infty[$.

Il est aisé alors d'obtenir le résultat b) annoncé et de voir que la condition de NEUMANN est remplie par l'intégrale considérée.

Le fait que

$$\int_a^b \vec{u}_tF(t)dt \in V^b_{\dot{\Omega}_D}$$

est une conséquence du dernier théorème du § 19 et des propriétés de $\vec{u}_t$ et $F(t)$ (§ 74).

La dernière partie du théorème s'obtient immédiatement en intégrant une fois par parties les termes de

$$\int_a^b (\vec{u}_t, \vec{v})D^2F(t)dt - \int_a^b (A\vec{u}_t, \vec{v})D_tF(t)dt.$$

CHAPITRE VI

PROBLÈMES STATIONNAIRES ET PROBLÈMES D'ÉVOLUTION

Problème de Dirichlet-Neumann global

84. — Le problème de D — N global est le problème caractérisé par

a) *la donnée au second membre* $\vec{f}_t \in L_2^{loc}([0, +\infty[\, ; L_2)$,

b) *les données initiales* $\vec{u}_0$ et $\vec{u}_1 \in L_2$,

Ω étant un ouvert connexe de E_n.

Si Ω est borné, le problème est donc toujours global.

La solution du problème global est caractérisée par le théorème suivant.

Si $\vec{u}$ est solution du problème global, alors

a) $$\vec{u}_t \in L_2^{loc}([0, +\infty[\, ; L_2),$$

b) $$\int_0^{+\infty} \vec{u}_t \varphi(t) dt \in V_{\dot{\Omega}_D},$$

pour tout $\varphi(t) \in D(E_1)$,

c) $\vec{u}_t$ *satisfait à l'équation du problème pour tout* $\vec{v} \in V_{\dot{\Omega}_D}$ (§ 87 : *seconde formulation* b)),

d) $\vec{u}_t$ *satisfait aux inégalités écrites dans le théorème d'existence* (§ 82) *où on substitue* Ω *à* B_t *et* B_0 *et* $\Omega \times]0, t[$ *à* $C_T \cap \{\Omega \times]0, t[\}$.

Les résultats a), b) et d) s'obtiennent en appliquant le théorème de B. Levi aux premiers membres des inégalités obtenus au § 82 valables pour tout ensemble de dépendance de la suite des ensembles de dépendance C_T^m de

$$\{ (x, T) : x \in \omega_m \},$$

T étant choisi tel que $[\varphi(t)] \subset]-\infty. T[$ et ω_m une suite d'ouverts emboités dont l'union recouvre Ω.

La relation c) est valable pour tout $\vec{v} \in V^c_{\dot{\Omega}_D}$ puisque $\vec{u}_t$ est solution du problème. Comme tous les facteurs à gauche dans les produits scalaires considérés sont dans L_2 et comme $V^c_{\dot{\Omega}_D}$ est dense dans $V_{\dot{\Omega}_D}$, la relation c) est vraie si $\vec{v} \in V_{\dot{\Omega}_D}$, vu la continuité du produit scalaire de L_2.

85. — Dans la suite, seul le problème global sera considéré.

La solution de ce problème possède évidemment toutes les propriétés démontrées jusqu'à présent : ces propriétés se précisent si on reprend les démonstrations en substituant L_2 à L^b_2 et L^c_2 et V à V^b et V^c.

Désormais, lorsque nous ferons appel à une de ces propriétés, nous sous-entendrons toujours qu'il s'agit de la propriété modifiée dans le sens que nous venons de préciser.

Problème stationnaire relatif à $L(D, z)$, $z \in C$

86. — Le problème de D — N stationnaire consiste à déterminer $\vec{u} \in N$ et tel que

$$L(D, z)\vec{u} = \vec{u}_0,$$

$\vec{u}_0 \in L_2$, $\mathrm{Re}\, z > k = \sup(0, \Lambda/2)$, Λ étant défini au § 73, a).

Montrons que, *si elle existe, la solution du problème stationnaire est unique.*

Considérons

$$2\,\mathrm{Re}\, z(\|\vec{u}\|^2 + \|\mathscr{A}(D)\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2)$$
$$= (\vec{u}, z\vec{u}) + (z\vec{u}, \vec{u}) + (\mathscr{A}(D)\vec{u}, z\mathscr{A}(D)\vec{u}) + (z\mathscr{A}(D)\vec{u}, \mathscr{A}(D)\vec{u})$$
$$+ (z\vec{u}, z^2\vec{u}) + (z^2\vec{u}, z\vec{u}).$$

Comme $\vec{u} \in N$, les troisième et quatrième termes du second membre s'écrivent

$$(\mathscr{A}^*(-D)\mathscr{A}(D)\vec{u}, z\vec{u}) + (z\vec{u}, \mathscr{A}^*(-D)\mathscr{A}(D)\vec{u}).$$

Vu l'équation vérifiée par $\vec{u}$, l'expression de départ vaut

$$2 \operatorname{Re} (\vec{u}_0 - Az\vec{u} - (B - E)\vec{u} - C\mathscr{A}(D)\vec{u}, z\vec{u}),$$

qui est majoré par

$$2 \| \vec{u}_0 \| \| z\vec{u} \| + k(\| z\vec{u} \| + \| \vec{u} \| + \| \mathscr{A}(D)\vec{u} \|) \| z\vec{u} \|$$
$$\leqslant 2(\| \vec{u}_0 \| + k\sqrt{\| z\vec{u} \|^2 + \| \vec{u} \|^2 + \| \mathscr{A}(D)\vec{u} \|^2}) \| z\vec{u} \|$$
$$\leqslant 2(\| \vec{u}_0 \| + k\sqrt{\| z\vec{u} \|^2 + \| \vec{u} \|^2 + \| \mathscr{A}(D)\vec{u} \|^2}) \sqrt{\| z\vec{u} \|^2 + \| \vec{u} \|^2 + \| \mathscr{A}(D)\vec{u} \|^2},$$

d'où

$$2 \operatorname{Re} z\sqrt{\| z\vec{u} \|^2 + \| \vec{u} \|^2 + \| \mathscr{A}(D)u \|^2} \leqslant 2(\| \vec{u}_0 \| + k\sqrt{\| z\vec{u} \|^2 + \| \vec{u} \|^2 + \| \mathscr{A}(D)u \|^2})$$

et

$$\| \vec{u} \|_V \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re} z - k} \| \vec{u}_0 \|_{L_2},$$

ce qui entraîne visiblement l'unicité.

87. — Nous démontrons l'existence de la solution de ce problème d'abord en la construisant à partir de la solution du problème global d'évolution relatif à l'opérateur $L(D, D_t)$.

Nous définissons l'opérateur G_z pour $\operatorname{Re} z > k$ en posant

$$G_z\vec{u}_0 = \int_0^{+\infty} e^{-zt} H_t\vec{u}_0 dt, \quad \vec{u}_0 \in L_2.$$

L'opérateur $G_z \in B(L_2 \to V_{\dot{\Omega}_D})$.

En effet

$$\| G_z\vec{u}_0 \|_V \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re} z\, t} \| H_t\vec{u}_0 \|_V dt$$
$$\leqslant \| \vec{u}_0 \| \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} z - k)t}\, dt$$
$$= \frac{1}{\operatorname{Re} z - k} \| \vec{u}_0 \|.$$

Vu la propriété remarquable (§ 83), on a

a) $G_z\vec{u}_0 \in V_{\dot{\Omega}_D}$ et satisfait à la condition de NEUMANN,

b) $L(D, z)G_z\vec{u}_0 = \vec{u}_0$.

La fonction $G_z\vec{u}_0$ *est donc la solution unique du problème de* $D - N$ *stationnaire relatif à l'opérateur* $L(D, z)$.

88. — *Si* $\vec{u}_0 \in N$, *alors* $L(D, z)G_z\vec{u}_0 = G_zL(D, z)\vec{u}_0$.

En effet, $L(D, z)\vec{u}_0 \in L_2$ et, si $\vec{u}$ est solution dans N de $L(D, z)\vec{u} = L(D, z)\vec{u}_0$, évidemment $\vec{u} = \vec{u}_0$, et vu l'unicité de cette solution, elle s'écrit $G_zL(D, z)\vec{u}_0$.

89. — *Si* $\mathrm{Re}\, z$ *et* $\mathrm{Re}\, z'$ *sont* $> k$, *alors*

$$G_z - G_{z'} = -(z^2 - z'^2)G_zG_{z'} - (z - z')G_zAG_{z'},$$

ce qui entraîne $G_zG_{z'} = G_{z'}G_z$ *lorsque* $A = aE$, *a étant un scalaire.*

On a en effet

$$G_z\vec{u}_0 = G_zL(D, z')G_{z'}\vec{u}_0 = G_z[L(D, z) + (z'^2 - z^2) + A(z' - z)]G_{z'}\vec{u}_0,$$

et, comme $G_{z'}\vec{u}_0 \in N$,

$$\begin{aligned} G_z\vec{u}_0 &= L(D, z)G_zG_{z'}\vec{u}_0 - (z^2 - z'^2)G_zG_{z'}\vec{u}_0 - (z - z')G_zAG_{z'}\vec{u}_0 \\ &= G_{z'}\vec{u}_0 - (z^2 - z'^2)G_zG_{z'}\vec{u}_0 - (z - z')G_zAG_{z'}\vec{u}_0. \end{aligned}$$

90. — Comme dans le cas des opérateurs du premier ordre (§§ 57 et 58), on montre que

— *l'opérateur* $G_z \in B(L_2 \to V_{\dot{\Omega}_D})$ *est holomorphe à gauche dans* $\{z : \mathrm{Re}\, z > k\}$.

— $G_z \in C_\infty(\}z : \mathrm{Re}\, z > k\})$.

Vu la propriété démontrée ci-dessus, on déduit aisément que

$$D_zG_z = -2\, z\, G_z^2 - G_zAG_z,$$

les dérivées d'ordre supérieur s'obtenant en appliquant les règles de dérivation classiques en s'abstenant de permuter les opérateurs dans les produits.

91. — *L'opérateur* G_z *n'est pas hermitien.*

En effet, si $\vec{f}$ et $\vec{g} \in L_2$,

$$(G_z\vec{f}, \vec{g}) = (G_z\vec{f}, L(D, z)G_z\vec{g})$$

$$= ([\bar{z}^2 + A^*\bar{z} + B^* + \mathscr{A}^*(-D)\mathscr{A}(D)]G_z\vec{f}, \vec{g}) + (C^*G_z\vec{f}, \mathscr{A}(D)G_z\vec{g}).$$

Si nous n'imposons pas de condition supplémentaire à $L(D, z)$, il est impossible d'exprimer le second membre de l'égalité précédente sous forme d'un produit scalaire avec $G_z\vec{g}$ comme facteur à droite.

Si C^*, donc C, est nul, il s'ensuit que l'opérateur G_z^* adjoint à G_z associé à toute fonction $\vec{f} \in L_2$ la solution du problème de $D - N$ relatif à $L(-D, \bar{z})$: si de plus A et B sont hermitiens et z réel, alors G_z est hermitien.

Définition de l'opérateur G_z indépendamment de l'opérateur H_t

92. — Nous allons montrer qu'il existe une solution (unique) du problème de $D - N$ stationnaire à $L(D, z)$ lorsque $\operatorname{Re} z > k$.

L'ensemble

$$\{\vec{u}_0 : \vec{u}_0 = L(D, z)\vec{u}, \vec{u} \in N\}$$

est fermé dans L_2.

Soit $\vec{u}_0^p$ une suite de A. Cauchy dans L_2 d'éléments de la forme

$$\vec{u}_0^p = L(D, z)\vec{u}^p, \vec{u}^p \in N.$$

On a

$$\| \vec{u}^p \|_V \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re} z - k} \| \vec{u}_0^p \|$$

et $\vec{u}^p$ est une suite de A. Cauchy dans V.

Considérons

$$L(D, z)u^p = [z^2 + zA + B + \mathscr{A}^*(-D)\mathscr{A}(D) + C\mathscr{A}(D)]\vec{u}^p.$$

On a l'inégalité

$$\begin{aligned} &\| \mathscr{A}^*(-D)\mathscr{A}(D)\vec{u}^p \| \\ &\leqslant \| L(D, z)\vec{u}^p \| + \| (z^2 + Az + B)\vec{u}^p \| + \| C\mathscr{A}(D)u^p \| \\ &\leqslant \| \vec{u}_0^p \| + \mathscr{C}(|z|, K) \| \vec{u}_0^p \|_V \\ &\leqslant \left[1 + \frac{\mathscr{C}(|z|, K)}{\operatorname{Re} z - k}\right] \| \vec{u}_o^p \| \end{aligned}$$

où $K = \sup (\| B \|_{L_2 \to L_2}, \| C \|_{L_2 \to L_2}, \| A \|_{L_2 \to L_2})$ et $\mathscr{C}(|z|, K)$ une fonction de $|z|$ et K facile à déterminer.

La suite $\vec{u}^p$ est donc de A. CAUCHY dans l'espace

$$\mathscr{N} = \{ \vec{u} : \vec{u}, \mathscr{A}(\mathrm{D})u, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u} \in \mathrm{L}_2 \}$$

qui, muni du produit scalaire

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\mathrm{V}} + (\mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}, \mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{v}),$$

est visiblement un espace de HILBERT.

Montrons que N est un sous-espace linéaire fermé de $\mathscr{N}$.

La linéarité de N est évidente.

Si $\vec{u}^p$ est une suite de A. CAUCHY dans $\mathscr{N}$ (donc dans V) d'éléments de N, il s'ensuit que

$$(\mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}^p, \vec{v}) = (\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}^p, \mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{v})$$

pour tout $\vec{v} \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}}$.

Si $\vec{u} = \lim\limits_{\mathscr{N}} \vec{u}^p$, vu la continuité du produit scalaire de L_2, $\vec{u}$ satisfait à la condition de NEUMANN.

Il reste à montrer que $\vec{u} \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}}$, ce qui est évident puisque la norme de $\mathscr{N}$ majore la norme de V.

De là, on déduit

$$\lim_{\mathrm{L}_2} \vec{u}_0^p = \mathrm{L}(\mathrm{D}, z) \lim_{\mathscr{N}} \vec{u}^p,$$

ce qui établit le théorème.

93. — *L'ensemble précédent coïncide avec* L_2.

Nous allons démontrer ce théorème en établissant la densité de cet ensemble dans L_2.

Soit $\vec{v} \in \mathrm{L}_2$ tel que

$$(\vec{v}, \mathrm{L}(\mathrm{D}, z)\vec{u}) = 0$$

pour tout $\vec{u} \in \mathrm{N}$.

Soit $\vec{u}_0 \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}}$ tel que

$$(\vec{u}_0, w)_{\mathrm{V}} = ([\bar{z} + \mathrm{A}^*]\vec{v}, w)$$

pour tout $w \in \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_{\mathrm{D}}}$.

Il est évident que $\vec{u}_0 \in \mathrm{N}$ et

$$\mathscr{A}^*(-\mathrm{D})\mathscr{A}(\mathrm{D})\vec{u}_0 + \vec{u}_0 = \bar{z}\,\vec{v} + \mathrm{A}^*\vec{v}\,;$$

nous en déduisons que

$$\mathrm{L}(\mathrm{D}, z)\vec{u}_0 = z(z + \mathrm{A})\vec{u}_0 + (\bar{z} + \mathrm{A}^*)\vec{v} + [\mathrm{C}\mathscr{A}(\mathrm{D}) + \mathrm{B} - \mathrm{E}]\vec{u}_0.$$

En substituant $\vec{u}_0$ à $\vec{u}$ dans la relation de départ, nous obtenons
$(\vec{v}, z[z + \mathrm{A}]\vec{u}_0) + (\vec{v}, [\bar{z} + \mathrm{A}^*]\vec{v}) + (\vec{v}, [\mathrm{C}\mathscr{A}(\mathrm{D}) + \mathrm{B} - \mathrm{E}]\vec{u}_0) = 0.$

Le premier terme du premier membre de cette égalité peut s'écrire

$$\bar{z}([\bar{z} + \mathrm{A}^*]\vec{v}, \vec{u}_0) = \bar{z}(\vec{u}_0, \vec{u}_0)_\mathrm{V}$$

et la relation devient

$$\bar{z} \| \vec{u}_0 \|_\mathrm{V}^2 + z \| \vec{v} \|^2 = -(\vec{v}, [\mathrm{C}\mathscr{A}(\mathrm{D}) + \mathrm{B} - \mathrm{E}]\vec{u}_0) - (\vec{v}, \mathrm{A}^*\vec{v}).$$

En considérant le double de la partie réelle de chaque membre, nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\, z(\| \vec{u}_0 \|_\mathrm{V}^2 + \| \vec{v} \|^2) &\leqslant \| \vec{v} \|\, k(\| \vec{u}_0 \|_\mathrm{V} + \| \vec{v} \|) \quad (*) \\ &\leqslant 2k\,(\| \vec{u}_0 \|_\mathrm{V}^2 + \| \vec{v} \|^2), \end{aligned}$$

qui entraîne visiblement l'annulation de $\vec{u}_0$ et de $\vec{v}$ puisque

$$\mathrm{Re}\, z > k.$$

Définition et propriétés de G_z

94. — Les théorèmes précédents et le théorème d'unicité établissent que tout élément $\vec{u}_0$ de L_2 s'écrit de manière unique $\mathrm{L}(\mathrm{D}, z)\vec{u}$, $\vec{u} \in \mathrm{N}$. L'opérateur $\mathrm{L}(\mathrm{D}, z)$ agissant de N dans L_2 admet donc un inverse agissant de L_2 dans N.

Nous définissons G_z comme *l'inverse de* $\mathrm{L}(\mathrm{D}, z)$.

Considéré comme agissant de L_2 *dans* $\mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}}$ (resp. *dans* N), G_z *est borné.*

C'est un corollaire immédiat des théorèmes d'unicité et de fermeture établis ci-dessus.

95. — *L'opérateur* $\mathrm{G}_z \in \mathrm{B}(\mathrm{L}_2 \to \mathrm{V}_{\dot{\Omega}_\mathrm{D}})$ [resp. $\mathrm{B}(\mathrm{L}_2 \to \mathrm{N})$] *est holomorphe à gauche dans*

$$\{z : \mathrm{Re}\, z > k\}.$$

(*) Si $a, b > 0$, alors $a(a + b) \leqslant (a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$.

Cette proposition sera établie si

$$\lim_{h\to 0} \frac{(G_{z+h}\vec{u}, \vec{v}) - (G_z\vec{u}, \vec{v})}{h}$$

existe, les produits scalaires étant de V (resp. de N), $\vec{u} \in L_2$, $\vec{v} \in V_{\dot{\Omega}_D}$ (resp. N).

L'opérateur G_z possède évidemment la propriété démontrée au § 89.

Considérons

$$\left| \frac{1}{h} [(G_{z+h}\vec{u}, \vec{v}) - (G_z\vec{u}, \vec{v})] + ([2zG_z^2 + G_zAG_z]\vec{u}, \vec{v}) \right|$$

$$= |([- hG_{z+h}G_z - 2z(G_{z+h} - G_z)G_z - (G_{z+h} - G_z)AG_z]\vec{u}, \vec{v})| \; (\S\, 89)$$

$$= |([- hG_{z+h}G_z + 2zh(h + 2z)G_{z+h}G_z^2 + 2zhG_{z+h}AG_z^2$$
$$+ h(h + 2z)G_{z+h}G_zAG_z + hG_{z+h}AG_zAG_z]\vec{u}, \vec{v})|$$

$$\leqslant |h|\, C(h) \,\|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|_V \text{ [resp. } |h|\, C'(h)\, \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|_{\mathcal{N}}],$$

où $C(h)$ (resp. $C'(h)$) est une fonction de h bornée lorsque h est borné, vu la majoration de la norme de G_z dans $B(L_2 \to V_{\dot{\Omega}})_D$ (resp. $B(L_2 \to N)$) (§ 94).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Baser-O. Fleischman : Propagation of Weak Hydromagnetic Discontinuities. *The Physics of fluids*, Vol. 2, Nr 4, 1959, pp. 366-378.

[2] A. Boigelot : Méthodes spectrales dans les problèmes aux limites de la physique mathématique. *Mém. Soc. R. Sc. Liège*, 5, Tome II, 1959.

[3] F. Bureau : Les séries de fonctions fondamentales et les problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. *Acta math.*, 89, pp. 1-43, 1953.

[4] F. Bureau : Quelques questions de géométrie suggérées par la théorie des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques. C.B.R.M. *Colloque de Géométrie Algébrique*, pp. 155-176, 1949.

[5] H. O. Cordes : Boundary Problems Regardless of Types. *Lecture Notes, Univ. of California*, 1960.

[6] R. Courant-D. Hilbert : Methods of Mathematical Physics, II, Partial Differential Equations. *Intersciences* 1962.

[7] C. R. Deprima : Uniquess Theory of Linear Hyperbolic Partial Diff. Equations. *N. Y. University*, 1948.

[8] A. Friedmann : Mixed Problems for Hyperbolic Systems. *Applied Math. & Statistics Laboratories, Stanford Univ., Tech. Rep.*, No. 105, 1962.

[9] K. O. Friedrichs : Differential Forms on Riemannian Manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. VIII, Nr 4, 1955.

[10] K. O. Friedrichs : Symmetric Hyperbolic Linear Differential Equations *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. VII, Nr 2, 1954.

[11] K. O. Friedrichs : Symmetric Positive Linear Differential Equations. *Comm. Pure Applied Math.*, Vol. XI, Nr 3, pp. 333-418, 1958.

[12] H. G. Garnir : Les problèmes aux limites de la physique mathématique. *Birkhäuser, Bâle*, 1958.

[13] H. G. Garnir : Fonctions de variables réelles. *Gauthier-Villars, Paris et Librairie Universitaire, Louvain*, 1963.

[14] H. G. Garnir : *Analyse Mathématique*. Cours développé de Calcul Intégral. *Édition ronéotypée, Liège*, 1960.

[15] H. G. Garnir : *Algèbre*. Calcul Matriciel. *Éd. ronéotypée, Liège*, 1960.

[16] H. G. Garnir : *Analyse Mathématique*. Fonctions d'une variable complexe. *Éd. ronéotypée, Liège*, 1960.

[17] H. G. GARNIR-J. GOBERT : Le problème de DIRICHLET-NEUMANN pour les opérateurs métahormonique, des ondes et de la diffusion par la methode des fonctions propres (3 communications). *Bull. Soc. R. Sc. Liège*, nº 6, 1957, pp. 279-289 ; nº 1-2, 1958, pp. 17-27 ; nº 5-6, 1958, pp. 119-127.

[18] J. GOBERT : Opérateurs matriciels de dérivation elliptiques et problèmes aux limites. *Mém. Soc. R. Sc. Liège*, 5, Tome VI, 1961.

[19] E. HILLE-R. S. PHILLIPS : Functional Analysis and Semi-Groups. *Amer. Math. Soc. Colloquium Publ.*, Vol. XXXI, 1957.

[20] P. D. LAX : Asymptotic Solutions of Oscillatory Initial Value Problems. *Duke Math. J.*, Vol. 24, pp. 627-646, 1957.

[21] P. D. LAX-R. S. PHILLIPS : Local Boundary Conditions for Dissipative Symmetric Linear Differential Operators. *Comm. P. Appl. Math.*, Vol. XIII, nº 3, pp. 427-455, 1960.

[22] M. G. LIGHTHILL : Studies on Magneto-hydrodynamic Waves and other anisotropic Waves Motions. *Royal Aircraft Establishement (Farnborough) Tech. Mem.*, No : DIR. I, 1960.

[23] J. L. LIONS : Problèmes aux limites en théorie des distributions. *Acta Math.*, 94, pp. 13-153, 1955.

[24] J. L. LIONS : Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. *Springer*, 1961.

[25] E. MAGENES-G. STAMPACCHIA : I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. *Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa*, Série III, Vol. XII, Fasc. III, 1958, pp. 247-358.

[26] R. S. PHILLIPS : Dissipative Hyperbolic Systems. *Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. 86, Nº 1, pp. 109-173, 1957.

[27] R. S. PHILLIPS : Dissipative Operators and Hyperbolic Systems of Partial Differential Equations. *Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. 90, Nº 2, pp. 193-254, 1959.

[28] L. SARASON : On Weak and Strong Solutions of Boundary Value Problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. XV, Nº 3, pp. 237-288, 1962.

[29] L. SCHWARTZ : Théorie des distributions. T. 1, 2. *Hermann, Paris*, 1957.

[30] C. WILCOX : Mathematical Fundations of Diffraction Theory. *Math. Research Center, U. S. Army*, Tech. Summ. Rep. nº 256, 1961. Univ. Wisconsin, Madison, W.

[31] C. WILCOX : Initial-Boundary Value Problems for Linear Hyperbolic Partial Differential Equations of the Second Order. *Ibid.*, nº 301, 1962.

[32] C. WILCOX : The Domain of Dependence Inequality and Initial-Boundary Value Problems for Symmetric Hyperbolic Systems. *Ibid.*, nº 333, 1962.

TABLE DES MATIÈRES