

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE

CINQUIÈME SÉRIE

TOME XVI

FASCICULE 3

COMPACTIFICATION D'ESPACES TOPOLOGIQUES

par

RENÉ MOORS, Dr Sc.

*Assistant à l'Université de Liège*

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE DE BELGIQUE,  
DU PATRIMOINE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE ET  
DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA CULTURE

SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ :

UNIVERSITÉ

7, PLACE DU XX AOUT

LIÈGE, BELGIQUE

# COMPACTIFICATION D'ESPACES TOPOLOGIQUES

par

RENÉ MOORS, Dr Sc.  
*Assistant à l'Université de Liège*

## AVANT-PROPOS

On sait que Smirnov a associé bijectivement aux compactifications de Hausdorff d'un espace de Tychonoff  $E$  des relations, dites de proximité, définies dans l'ensemble des parties de  $E$  [S] (\*). Les travaux de Smirnov permettent donc d'étudier les compactifications séparées d'un espace topologique au moyen d'êtres mathématiques définis sur cet espace lui-même. Nous avons cherché à résoudre le même problème en nous affranchissant de l'axiome de Hausdorff. On constatera que la méthode que nous avons mise au point est essentiellement différente de celle de Smirnov et qu'elle englobe les compactifications habituellement rencontrées, notamment celle de Wallman.

Signalons que chaque chapitre de notre article est précédé d'un résumé introductif.

(\*) Les lettres entre crochets renvoient à la bibliographie à la fin de l'article.

## GÉNÉRALITÉS

Un espace topologique est formé d'un ensemble de points, symbolisé par une lettre majuscule droite, et un ensemble d'ouverts, symbolisé par une lettre majuscule ronde ou une lettre grecque. Par exemple, les espaces topologiques  $E$ ,  $\mathcal{T}$  ou  $H$ ,  $\theta$ . Souvent, il sera simplement désigné par l'ensemble de ses points, ou l'ensemble de ses ouverts. Si  $A$  est un ouvert de l'espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{T}$ , nous dirons parfois que  $A$  est un  $E$ -ouvert, ou un  $\mathcal{T}$ -ouvert. De même, lorsque ce sera nécessaire, nous parlerons de  $E$ -voisinages ou de  $\mathcal{T}$ -voisinages d'une partie de  $E$ .

Une extension d'un espace topologique  $E$  est un couple  $(f, H)$ , où  $H$  est un espace topologique, et  $f$  un homéomorphisme de  $E$  sur une partie dense de  $H$ . En fait, sauf mention explicite du contraire, nous supposerons être dans les conditions suivantes :  $E$  est un sous-espace dense non vide de l'espace topologique  $H$ , et nous sous-entendons que l'application  $f$  est l'application identique  $E \rightarrow H$ .

Un espace topologique sera qualifié de compact lorsque tous ses recouvrements ouverts incluent un sous-recouvrement fini. Une compactification est une extension compacte.

Nous dirons que l'extension  $(f, H)$  de  $E$  est uniponctuelle lorsque  $H - fE$  est réduit à un point ; de même, nous parlerons de compactifications uniponctuelles.

Si  $H$  est une extension de  $E$ , si  $A$  est une partie de  $E$ , nous désignerons respectivement par  $\bar{A}$  et  $\bar{A}^H$ , les adhérences de  $A$  dans  $E$  et  $H$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté quant à l'extension, nous poserons  $\bar{A}^H = \bar{A}$ .

La fin des démonstrations sera marquée par le signe  $\llcorner$ .

## CHAPITRE I

# TOPOLOGIES SUR LA RÉUNION DE DEUX ESPACES TOPOLOGIQUES

### Introduction

Considérons une topologie  $\mathcal{T}$  définie sur la réunion  $E$  de deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$ . Appelons respectivement  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$  et  $\mathcal{T}_3$  les topologies induites par  $\mathcal{T}$  sur  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_1 \cap E_2$ . Les topologies induites par  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sur  $E_1 \cap E_2$  coïncident évidemment avec  $\mathcal{T}_3$ .

Dans ce chapitre, nous allons nous donner deux espaces topologiques  $E_1$ ,  $\mathcal{T}_1$  et  $E_2$ ,  $\mathcal{T}_2$ , qui induisent la même topologie  $\mathcal{T}_3$  sur  $E_1 \cap E_2$ , et nous allons essayer de déterminer les topologies  $\mathcal{T}$  de  $E = E_1 \cup E_2$  qui induisent respectivement  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sur  $E_1$  et  $E_2$ .

Si l'un des deux espaces est vide, la réponse est évidente ; nous les supposons donc non vides.

### 1. Clans

Plaçons-nous dans les conditions du premier paragraphe de l'introduction. Considérons un ouvert  $A$  de  $\mathcal{T}_1$  ; appelons  $\mathcal{D}_A$  l'ensemble des traces sur  $E_2$  des ouverts de  $\mathcal{T}$  dont la trace sur  $E_1$  vaut  $A$ .

$$\forall A \in \mathcal{T}_1, \mathcal{D}_A = \{C \cap E_2 : C \in \mathcal{T} \text{ et } C \cap E_1 = A\}.$$

1.1. *La connaissance de  $\mathcal{T}_1$  et de la famille  $(\mathcal{D}_A)_{A \in \mathcal{T}_1}$  détermine  $\mathcal{T}$ .*

En effet, une partie  $C$  de  $E$  est ouverte si et seulement si c'est un ensemble de la forme  $C = A \cup B$ , où  $A$  appartient à  $\mathcal{T}_1$  et  $B$  à  $\mathcal{D}_A$ . (

1.2. *Axiomes des clans.*

Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_A$  est une partie *non vide* de  $\mathcal{T}_2$  qui vérifie les propriétés suivantes :

(D<sub>1</sub>) *L'intersection de toute famille finie non vide d'éléments de  $\mathcal{D}$  appartient à  $\mathcal{D}$ .*

(D<sub>2</sub>) *La réunion de toute famille non vide d'éléments de  $\mathcal{D}$  appartient à  $\mathcal{D}$ .*

En effet,  $A$  est la trace sur  $E_1$  d'un ouvert  $C$  de  $\mathcal{T}$  ;  $C \cap E_2$  appartient à  $\mathcal{D}$  qui n'est donc pas vide.

Considérons une famille finie non vide  $(B_i)$  d'éléments de  $\mathcal{D}$ . Chacun des ensembles  $C_i = A \cup B_i$  est contenu dans  $\mathcal{T}$  ; l'intersection  $C$  des  $C_i$  appartient aussi à  $\mathcal{T}$ .

La trace de  $C$  sur  $E_1$  est  $A$  ; sur  $E_2$ , elle vaut l'intersection des  $A_i$  ; cette dernière est donc contenue dans  $\mathcal{D}$ .

( $D_2$ ) se démontre d'une façon semblable. ((

*Définition des clans.*

Nous appellerons un *clan* sur  $E_2$ ,  $\mathcal{C}_2$  une partie non vide de  $\mathcal{C}_2$  qui vérifie les axiomes ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ).

## 2. Propriété de la famille $(\mathcal{D}_A)_{A \in \mathcal{C}_1}$

2.1. Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{C}_1$ , nous appellerons  $\mathcal{D}_A^*$  l'ensemble des ouverts de  $\mathcal{C}_2$  dont la trace sur  $E_1 \cap E_2$  vaut  $A \cap E_2$ .

Pour tout ouvert  $A$  de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{D}_A$  est inclus dans  $\mathcal{D}_A^*$ .

Considérons un ouvert  $B$  de  $\mathcal{D}_A$ , et montrons que sa trace sur  $E_1 \cap E_2$  vaut  $A \cap E_2$ .  $A \cup B$  appartient à  $\mathcal{C}$  ; les traces sur  $E_1$  et  $E_2$  de  $A \cup B$  sont respectivement  $A$  et  $B$ . Ainsi,

$$(A \cup B) \cap E_1 \cap E_2 = A \cap E_2 = B \cap E_1. (($$

2.2. Tout ouvert de  $B$  de  $\mathcal{C}_2$  appartient à un clan au moins de la famille.

$B$  est la trace sur  $E_2$  d'un ouvert  $C$  de  $\mathcal{C}$ . Si on pose  $A = C \cap E_1$ , on a  $B \in \mathcal{D}_A$ . ((

2.3. Appelons  $A$  et  $B$  les intersections respectives des familles finies non vides  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  et  $(B_i)_{i=1, \dots, n}$  d'ouverts respectivement de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Si, pour tout  $i$ ,  $B_i$  appartient à  $\mathcal{D}_{A_i}$ , alors  $B$  est contenu dans  $\mathcal{D}_A$ .

Pour tout  $i$ , les ensembles  $A_i \cup B_i$  appartiennent à  $\mathcal{C}$ . Appelons  $C$  leur intersection ;  $C$  appartient à  $\mathcal{C}$ ,  $C \cap E_1$  vaut  $A$ ,  $C \cap E_2$  vaut  $B$  ; donc  $B$  est un ouvert de  $\mathcal{D}_A$ . ((

*Corollaire.*

Si  $B$  est un ouvert du clan  $\mathcal{D}_A$ ,  $D$  un ouvert du clan  $\mathcal{D}_C$ , et si  $A$  est inclus dans  $C$ , alors  $B \cap D$  appartient à  $\mathcal{D}_A$ .

2.4. Appelons  $A$  et  $B$  les réunions respectives des familles  $(A_i)_{i \in I}$  et  $(B_i)_{i \in I}$  d'ouverts respectivement de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Si pour tout  $i$ ,  $B_i$  appartient à  $\mathcal{D}_{A_i}$ , alors  $B$  appartient à  $\mathcal{D}_A$ .

La démonstration est analogue à celle de 2.3. ((

*Corollaires.*

1) Si  $B$  appartient au clan  $\mathcal{D}_A$ , si  $D$  appartient au clan  $\mathcal{D}_C$ , alors  $A \subset C$  implique  $B \cup D \in \mathcal{D}_C$ .

2) Si  $B$  et  $C$  appartiennent à  $\mathcal{D}_A$ , si l'ouvert  $D$  de  $\mathcal{C}_2$  est tel que  $B \subset D \subset C$ , alors  $D \in \mathcal{D}_A$ .

En effet, par 2.2,  $D$  appartient à un clan  $\mathcal{D}_F$ ,  $F \in \mathcal{C}_1$ .  $D \cap C = D$  appartient à  $\mathcal{D}_{A \cap F}$  (2.3).  $D \cup A = D$  appartient à  $\mathcal{D}_{(A \cap F) \cup A}$ , donc à  $\mathcal{D}_A$  (2.4). ((

2.5. Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{C}_1$ , nous appellerons  $R_A$  la réunion des ouverts de  $\mathcal{D}_A$ .

$R_A$  est l'ouvert maximum de  $\mathcal{C}_2$  dont la réunion avec  $A$  appartient à  $\mathcal{C}$ .

2.6. Si  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $\mathcal{T}_1$ ,  $A \subset B$  implique  $R_A \subset R_B$ .

$R_A \cup A$  et  $R_B \cup B$  sont des ouverts de  $\mathcal{T}$ ; de même  $R_A \cup A \cup R_B \cup B = R_A \cup R_B \cup B$ . Ainsi  $R_A \cup R_B$  appartient à  $\mathcal{D}_B$ ; cet ensemble est donc inclus dans  $R_B$ ; de ce fait  $R_A \subset R_B$ . ((

2.7. Appelons  $A$  l'intersection d'une famille finie non vide  $(A_i)$  d'ouverts de  $\mathcal{T}_1$ ; on a  $R_A = \bigcap R_{A_i}$ .

1) Quel que soit  $i$ ,  $\bigcap R_{A_i} \in \mathcal{D}_A$  (2.3). Ainsi  $\bigcap R_{A_i} \subset R_A$ .

2) Quel que soit  $i$ ,  $A \subset A_i$ . Donc  $R_A \subset R_{A_i}$ , ainsi  $R_A \subset \bigcap R_{A_i}$ . Au total,  $R_A = \bigcap R_{A_i}$ . ((

2.8. Appelons  $A$  la réunion d'une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ouverts de  $\mathcal{T}_1$ ; chaque ensemble  $B$  de  $\mathcal{D}_A$  est de la forme  $B = \bigcup \{B_i : i \in I \text{ et } B_i \in \mathcal{D}_{A_i}\}$  si et seulement si  $R_A = \bigcup R_{A_i}$ .

1) Supposons que  $R_A = \bigcup R_{A_i}$ . Soit  $B \in \mathcal{D}_A$ , on a  $B \subset R_A$ . Pour chaque  $i$ ,  $B \cap R_{A_i}$  appartient à  $\mathcal{D}_{A_i}$  (2.3).  $\bigcup \{B \cap R_{A_i}\}$  est de la forme cherchée, et  $\bigcup \{B \cap R_{A_i}\} = B \cap (\bigcup R_{A_i}) = B \cap R_A = B$ .

2) Supposons que chaque  $B$  de  $\mathcal{D}_A$  soit de la forme indiquée. Considérons  $R_A$ . On a  $R_A = \bigcup \{B_i : i \in I \text{ et } B_i \in \mathcal{D}_{A_i}\}$ . Pour tout  $i$ ,  $B_i \subset R_{A_i}$ , donc  $R_A \subset \bigcup R_{A_i}$ .

Par 2.4, on voit que  $\bigcup R_{A_i}$  appartient à  $\mathcal{D}_A$ ; ainsi  $\bigcup R_{A_i} \subset R_A$ . Au total,  $R_A = \bigcup R_{A_i}$ . ((

3. Considérons deux espaces topologiques  $E_1, \mathcal{T}_1$  et  $E_2, \mathcal{T}_2$  qui induisent la même topologie sur  $E_1 \cap E_2$ ; appelons  $\Phi = (\mathcal{D}_A)_{A \in \mathcal{T}_1}$  une famille de clans sur  $E_2, \mathcal{T}_2$ , d'index  $\mathcal{T}_1$ .

On peut munir  $E = E_1 \cup E_2$  d'une topologie  $\mathcal{T}$  qui induit  $\mathcal{T}_1$  sur  $E_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sur  $E_2$ , et pour laquelle  $\Phi$  joue le rôle de la famille de clans considérée au paragraphe 2, si et seulement si  $\Phi$  vérifie les propriétés 2.1 à 2.4.

Ce qui précède montre que les conditions sont nécessaires; montrons qu'elles sont suffisantes.

Définissons comme suit la topologie  $\mathcal{T}$  sur  $E$ : une partie  $C$  de  $E$  est  $\mathcal{T}$ -ouverte si et seulement si elle est de la forme  $C = A \cup B$ , où  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}_1$  et  $B$  un ouvert de  $\mathcal{T}_2$  tel que  $B \in \mathcal{D}_A$ .

Montrons d'abord que  $\mathcal{T}$  est une topologie. Si  $(C_i)$  est une famille finie non vide d'éléments de  $\mathcal{T}$ , pour tout  $i$ , on peut trouver des ouverts  $A_i$  et  $B_i$ , respectivement de  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$ , tels que  $C_i = A_i \cup B_i$  et  $B_i \in \mathcal{D}_{A_i}$ . L'intersection  $B$  des  $B_i$  appartient au clan  $\mathcal{D}_A$  relatif à l'intersection  $A$  des  $A_i$  (2.3); on a, vu (2.1),  $\bigcap C_i = A \cup B$ , et ainsi toute intersection finie non vide d'ouverts de  $\mathcal{T}$  appartient à  $\mathcal{T}$ . En s'appuyant sur (2.4), on démontre que toute réunion d'ouverts de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{T}$ ; en particulier,  $\emptyset$  appartient à  $\mathcal{T}$ . Il reste à montrer que  $E$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ . L'ouvert  $E_2$  de  $\mathcal{T}_2$  appartient à un clan  $\mathcal{D}_A$  de  $\Phi$  (2.2); le clan  $\mathcal{D}_{E_1}$  de  $\Phi$  contient un ouvert  $B$  de  $\mathcal{T}_2$  (définition des clans);  $E_2 \cup B = E_2$  appartient à  $\mathcal{D}_{E_1}$  (2.4), donc  $E_1 \cup E_2$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{T}$  induit respectivement  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sur  $E_1$  et  $E_2$ . Soit l'ouvert  $C$  de  $\mathcal{T}$ ;  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  contiennent respectivement les ouverts  $A$  et  $B$  tels que  $C = A \cup B$  et  $B \in \mathcal{D}_A$ . On a  $C \cap E_1 = (A \cap E_1) \cup (B \cap E_1) = A$  et  $C \cap E_2 = (A \cap E_2) \cup (B \cap E_2) = B$  (2.1); donc les traces sur  $E_1$  et  $E_2$  d'un ouvert de  $\mathcal{T}$  appartiennent respectivement à  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$ . Si maintenant  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}_1$ ,

il existe un ouvert  $B$  contenu dans  $\mathcal{D}_A$ ;  $A \cup B$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$  dont la trace sur  $E_1$  vaut  $A$ . Ainsi, tout ouvert de  $\mathcal{T}_1$  est la trace sur  $E_1$  d'un ouvert de  $\mathcal{T}$ . En s'appuyant sur 2.1 et 2.2, on montrerait que tout ouvert de  $\mathcal{T}_2$  est la trace sur  $E_2$  d'un ouvert de  $\mathcal{T}$ .

La définition de la topologie  $\mathcal{T}$  sur  $E$  montre que  $\Phi$  est la famille de clans considérée au paragraphe 2. ((

*Remarque.*

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont disjoints, alors, pour tout ouvert  $A$  de  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{D}_A^* = \mathcal{T}_2$ , et la condition 2.1 est toujours satisfaite. C'est le cas particulier considéré dans un article antérieur ( $M_1$ ).

#### 4. Maximum et minimum

Considérons les espaces topologiques  $E_1, \mathcal{T}_1$  et  $E_2, \mathcal{T}_2$ , et appelons  $X$  l'ensemble des topologies  $\mathcal{T}$  sur  $E = E_1 \cup E_2$  qui induisent respectivement  $\mathcal{T}_1$  sur  $E_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sur  $E_2$ . Ordonnons  $X$  par l'inclusion de ses éléments.

4.1.  $X$  possède un maximum, dont  $(\mathcal{D}_A^*)_{A \in \mathcal{T}_1}$  est la famille de clans.

Pour le voir, il suffit de montrer que les ensembles  $\mathcal{D}_A^*$  sont des clans, et que  $(\mathcal{D}_A^*)$  vérifie les propriétés 2.1 à 2.4. C'est immédiat. ((

4.2. Deux topologies minimales.

Si l'espace  $E$  est un élément de tous ses recouvrements ouverts, nous dirons que  $E$  est *monocompact*.

Si l'espace  $E$  inclut deux ouverts non vides disjoints nous dirons que  $E$  est *réductible*. Nous le qualifierons d'*irréductible* dans le cas contraire.

*Si  $E_1$  et  $E_2$  sont disjoints, nous sommes dans un des cas 1 à 3 et dans un des cas 4 à 6 énumérés ci-après; les topologies décrites dans ces divers cas fournissent deux éléments minimaux de la classe  $X$ .*

1)  $E_1$  n'est pas monocompact.

Prenons pour ouverts de  $\mathcal{T}$ , d'une part, les ouverts de  $\mathcal{T}_1$ , et, d'autre part, les ouverts de  $\mathcal{T}_2$  réunis à  $E_1$ . C'est une topologie sur  $E$ ; elle induit  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  respectivement sur  $E_1$  et  $E_2$ . Montrons que  $\mathcal{T}$  est minimale. Supposons qu'une topologie  $\mathcal{T}'$  sur  $E$  soit strictement moins fine que  $\mathcal{T}$ .  $\mathcal{T}$  contient un ouvert  $C$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{T}'$ .

a) Supposons qu'un ouvert  $D$  de  $\mathcal{T}$  ait une trace non vide  $D \cap E_2$  sur  $E_2$ . Vu la définition de  $\mathcal{T}$ ,  $D$  est univoquement déterminé; il vaut  $E_1 \cup (D \cap E_2)$ . Comme  $\mathcal{T}'$  doit contenir un ouvert de  $\mathcal{T}$  dont la trace sur  $E_2$  est  $D \cap E_2$ ,  $D$  appartient à  $\mathcal{T}'$ . De ce fait,  $C \cap E_2$  est vide.

b) De même, si la trace  $D \cap E_1$ , sur  $E_1$ , d'un ouvert  $D$  de  $\mathcal{T}$  est différente de  $E_1$ , on voit que  $D = D \cap E_1$ , et que  $D$  appartient à  $\mathcal{T}'$ . On a donc  $C = E_1$ .

c)  $\mathcal{T}_1$  contient une famille  $\mathcal{A}$  d'ouverts distincts de  $E_1$  dont la réunion est  $E_1$ . En vertu de b), ces ouverts appartiennent à  $\mathcal{T}'$ , de même que leur réunion  $C = E_1$ !

2)  $E_1$  est monocompact et  $E_2$  est irréductible.

Prenons pour ouverts de  $\mathcal{T}$ , d'une part, les ouverts de  $\mathcal{T}_1$  distincts de  $E_1$ , et, d'autre part, les ouverts de  $\mathcal{T}_2$  réunis à  $E_1$ . C'est une topologie sur  $E$  qui induit respectivement  $\mathcal{T}_1$  et  $\mathcal{T}_2$  sur  $E_1$  et  $E_2$ .



Reprenons la démonstration précédente hormis le point c). On découvre que  $E_1$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$  !

3)  $E_1$  est *monocompact* et  $E_2$  est *réductible*.

Reprenons la définition de  $\mathcal{T}$  et la démonstration donnée en 1) ; remplaçons le point c) par le suivant :

c)  $E_2$  contient les ouverts disjoints  $B_1$  et  $B_2$ .  $B_1 \cup E_1$  et  $B_2 \cup E_1$  sont donc des ouverts de  $\mathcal{T}'(a)$ , de même que  $(B_1 \cup E_1) \cap (B_2 \cup E_1) = E_1 = C$  !

En permutant les rôles de  $E_1$  et  $E_2$ , on trouve encore les cas :

4)  $E_2$  n'est pas *monocompact*.

Les ouverts de  $\mathcal{T}$  sont, d'une part, les ouverts de  $\mathcal{T}_2$ , et, d'autre part, les ouverts de  $\mathcal{T}_1$  réunis à  $E_2$ .

5)  $E_2$  est *monocompact* et  $E_1$  est *irréductible*.

Les ouverts de  $\mathcal{T}$  sont les ouverts de  $\mathcal{T}_2$  distincts de  $E_2$ , et les réunions de  $E_2$  et des ouverts de  $\mathcal{T}_1$ .

6)  $E_2$  est *monocompact* et  $E_1$  est *irréductible*.

Les ouverts de  $\mathcal{T}$  sont les mêmes qu'au numéro 4). ((

*Toujours dans le cas où  $E_1$  et  $E_2$  sont disjoints, la classe possède un minimum si et seulement si  $E_1$  et  $E_2$  sont triviaux. Le minimum est la topologie triviale sur  $E$ .*

Soit le minimum  $\mathcal{T}$  ; supposons que l'ouvert  $B$  de  $\mathcal{T}_2$  soit distinct de  $\emptyset$  et de  $E_2$ . Il existe un ouvert  $C$  de  $\mathcal{T}$  dont la trace sur  $E_2$  est  $B$ .  $C$  doit être à la fois de la forme  $B \cup E_1$  et de la forme  $B$ . On aurait  $E_1 = \emptyset$  ! Donc  $E_2$  est trivial. De même,  $E_1$  est trivial. Le minimum est la topologie triviale sur  $E$ . ((

*Remarque.*

On peut se demander s'il existe d'autres éléments minimaux que ceux qui ont été donnés ci-dessus ; la réponse est affirmative ; montrons-le sur un exemple :

L'espace  $E_1$  est trivial et réduit à un point  $a$  ;  $E_2$  est discret, et possède deux points  $b$  et  $c$ . Voici quatre topologies minimales de la classe  $X$  ; les deux premières ont été décrites aux numéros 3) et 4).

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}.$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{b\}, \{c\}\}.$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{b\}, \{a, c\}\}.$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{c\}, \{a, b\}\}.$$

## CHAPITRE II

# EXTENSIONS D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE ASSOCIÉES A UNE FAMILLE DE TAMIS

### Introduction

Considérons une extension  $H, \theta$  de l'espace topologique  $E, \tau$ ; appelons  $I$  le complémentaire de  $E$  dans  $H$ , et désignons par  $\tau$  la topologie du sous-espace  $I$  de  $H$  ( $I = H - E$  et  $\tau = \{A \cap I : A \in \theta\}$ ).

Si  $i$  est un point de  $I$ , appelons  $\mathcal{U}_i$  l'ensemble des traces sur  $E$  des  $\theta$ -voisinages ouverts de  $i$ . Nous verrons que  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est une famille de filtres du lattis des ouverts de  $E$ ; un tel filtre sera appelé un tamis sur  $E$ .  $(\mathcal{U}_i)$  sera appelée la famille de tamis associée à l'extension  $H$ .

Nous allons nous donner l'espace topologique  $E, \tau$ , ainsi qu'une famille  $\Phi = (\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de tamis sur  $E$  (on suppose  $E \cap I = \emptyset$ ), nous chercherons quelles sont les topologies dont on peut munir  $H = E \cup I$  de telle façon que  $\Phi$  soit la famille associée à l'extension  $H$ . Nous étudierons ensuite les rapports qui existent entre  $\Phi$  et des axiomes de séparation qui seraient éventuellement vérifiés par  $H$ .

Nous allons avoir besoin dans ce chapitre, et dans le reste du travail, de quelques résultats de la théorie des lattis; nous les présentons au premier paragraphe.

### 1. Rappel de théorie des lattis

#### 1.1. Ensembles ordonnés.

Un ensemble ordonné  $E$  est un ensemble non vide muni d'une relation binaire  $\leq$  qui vérifie les propriétés suivantes :

Quel que soit l'élément  $a$  de  $E$ ,  $a \leq a$  (Réflexivité).

Quels que soient les éléments  $a$  et  $b$  de  $E$ ,  $a \leq b$  et  $b \leq a$  impliquent  $a = b$  (Antisymétrie).

Quels que soient les éléments  $a, b$ , et  $c$  de  $E$ ,  $a \leq b$  et  $b \leq c$  impliquent  $a \leq c$  (Transitivité).

Si deux éléments de  $E$  sont tels que  $a \leq b$ , nous dirons que  $a$  précède  $b$ , ou que  $b$  suit  $a$ . Si l'élément  $a$  de  $E$  précède l'élément  $b$ , nous écrirons  $a < b$  lorsque  $a$  et  $b$  sont distincts.

Si  $R$  est une relation d'ordre sur un ensemble  $E$ , la relation réciproque  $R^{-1}$  de  $R$  est aussi une relation d'ordre sur  $E$ . Lorsque nous parlerons d'une notion introduite par dualité à partir d'une notion définie sur  $E$ , nous voudrions parler de la notion introduite sur  $E$  muni de la relation d'ordre  $R^{-1}$ .

Nous dirons qu'une partie  $A$  de  $E$  est totalement ordonnée lorsque, pour tout couple d'éléments  $a$  et  $b$  de  $A$ , on a soit  $a \leq b$ , soit  $b \leq a$ . Nous dirons qu'un élément

$a$  de  $E$  est un majorant d'une partie  $A$  de  $E$  lorsque, pour tout élément  $b$  de  $A$ ,  $b \leq a$ . Si  $a$  appartient à  $A$ , nous dirons que c'est le maximum de  $A$  (le maximum est unique). Si la partie  $A$  de  $E$  possède un majorant minimum  $a$  (nous voulons dire que, dans l'ensemble des majorants,  $a$  est maximum pour l'ordre réciproque), alors nous dirons que  $a$  est le suprémum de  $A$ . Un élément maximal d'une partie  $A$  de  $E$  est un élément  $a$  de  $A$  tel qu'aucun élément  $b$  de  $A$  ne donne lieu à  $a < b$ . Par dualité, on définit les notions de minorant, minimum, infimum et minimal.

Nous dirons qu'un ensemble ordonné  $E$  est inductif lorsque toute partie totalement ordonnée de  $E$  possède un majorant.

### 1.2. Lemme de Zorn.

Un ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.

Dans un ensemble inductif, tout élément est suivi par un élément maximal.

### 1.3. Lattis.

Un inf-demi-lattis est un ensemble non vide  $L$ , muni d'une relation d'ordre pour laquelle toute paire d'éléments  $a$  et  $b$  possède un infimum  $a \wedge b$ . Par dualité, on définit la notion de sup-demi-lattis. Un lattis est un ensemble ordonné qui est à la fois un inf-demi-lattis et un sup-demi-lattis.

Un inf-demi-lattis  $L$  sera qualifié de complet lorsque toute partie non vide  $A$  de  $L$  admet un infimum  $\wedge A$ . On parlera de même de sup-demi-lattis complet et de lattis complet.

Notamment, l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties d'un ensemble  $E$ , ordonné par l'inclusion, est un lattis complet ; il en est de même pour l'ensemble  $\mathcal{T}$  des ouverts d'un espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{T}$ , ordonné par l'inclusion.

### 1.4. Filtrés.

Un filtre sur un inf-demi-lattis  $L$  est une partie non vide  $F$  de  $L$  qui vérifie les axiomes suivants :

(F<sub>1</sub>) Si  $a$  appartient à  $F$ , si  $b$  appartient à  $L$ , si  $a \leq b$ , alors  $b$  est un élément de  $F$ .

(F<sub>2</sub>) Si  $a$  et  $b$  appartiennent à  $F$ , alors  $a \wedge b$  appartient à  $F$ .

#### Exemples.

1)  $L$  est un filtre sur  $L$ , c'est le filtre total sur  $L$ .

2) Si  $a$  appartient à  $L$ , l'ensemble des éléments de  $L$  qui suivent  $a$  est un filtre [ $a$ ] sur  $L$  ; c'est la section finissante de  $a$  ou le filtre principal lié à  $a$ .

Une base de filtre sur un inf-demi-lattis  $L$  est une partie non vide  $B$  de  $L$  qui vérifie l'axiome suivant :

(B) Si  $a$  et  $b$  appartiennent à  $B$ , alors  $B$  contient un élément  $c$  tel que  $c \leq a$  et  $c \leq b$ .

L'ensemble des éléments d'un inf-demi-lattis  $L$  qui suivent les éléments d'une base de filtre sur  $L$  forme un filtre sur  $L$ .

Si l'intersection  $F$  d'une famille non vide de filtres sur un inf-demi-lattis  $L$  n'est pas vide, alors  $F$  est un filtre sur  $L$ .

Si  $A$  est une partie non vide de l'inf-demi-lattis  $L$ , l'ensemble  $\mathcal{B}$  des filtres sur  $L$  qui incluent  $A$  n'est pas vide car  $L$  appartient à  $\mathcal{B}$ . L'intersection  $F$  des éléments de  $\mathcal{B}$  n'est pas vide ; elle est appelée le filtre sur  $L$  engendré par  $A$ .  $F$  se compose des éléments de  $L$  qui suivent les infimums des parties finies non vides de  $A$ .

L'ensemble  $\mathcal{F}$  des filtres sur un inf-demi-lattis  $L$ , ordonné par l'inclusion, est un sup-demi-lattis complet avec maximum.

*Démonstration :*

Tout d'abord, le maximum de  $\mathcal{F}$  est le filtre total sur  $L$ . Considérons ensuite une famille non vide  $\mathcal{A}$  de filtres sur  $L$ ; appelons  $A$  la réunion des filtres de  $\mathcal{A}$ ; le filtre  $G$  engendré par  $A$  est le majorant minimum de  $\mathcal{A}$ . ((

L'intersection de tout ensemble non vide de filtres sur un inf-demi-lattis  $L$  est non vide si et seulement si  $L$  possède un maximum  $M$ .  $\{M\}$  est alors le filtre minimum de  $\mathcal{F}$ , et  $\mathcal{F}$  est un lattis complet.  $\{M\}$  est appelé le filtre trivial sur  $L$ .

### 1.5. Ultrafiltres, idéaux, idéaux maximaux.

Un filtre  $F$  sur un inf-demi-lattis  $L$  sera dit pur lorsqu'il sera distinct de  $L$ . Un filtre pur maximal sur  $L$  sera appelé un ultrafiltre sur  $L$ .

Si  $(F_i)$  est une famille non vide, totalement ordonnée de filtres sur un inf-demi-lattis  $L$ , la réunion  $F$  des  $F_i$  est un filtre sur  $L$ . Si  $L$  possède un minimum et si les  $F_i$  sont purs, alors  $F$  est pur.

Si l'inf-demi-lattis  $L$  possède un minimum, tout filtre pur sur  $L$  est inclus dans un ultrafiltre.

Les notions duales de filtre et ultrafiltre sont idéal et idéal maximal.

## 2. Tamis

Plaçons-nous dans les conditions du premier paragraphe de l'introduction au présent chapitre.

### 2.1. Axiomes des tamis.

Considérons une partie  $A$  de  $H$ , appelons  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_A$  l'ensemble des traces sur  $E$  des ouverts de  $\theta$  qui incluent  $A$ .

$$\mathcal{U} = \{B \cap E : A \subset B \in \theta\}.$$

Si  $h$  est un point de  $H$ , nous écrirons simplement  $\mathcal{U}_h$  au lieu de  $\mathcal{U}_{\{h\}}$ .

$\mathcal{U}$  est une partie non vide de  $\mathcal{T}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

(U<sub>1</sub>) Si un ouvert  $B$  de  $\mathcal{T}$  inclut un élément de  $\mathcal{U}$ , alors  $B$  appartient à  $\mathcal{U}$ .

(U<sub>2</sub>) L'intersection de deux éléments de  $\mathcal{U}$  est un élément de  $\mathcal{U}$ .

Il est clair que les éléments de  $\mathcal{U}$  appartiennent à  $\mathcal{T}$ ;  $E$  appartient à  $\mathcal{U}$ , qui n'est donc pas vide.

Un ouvert  $B$  de  $\mathcal{T}$  est la trace sur  $E$  d'un ouvert  $B'$  de  $\theta$ ; un ouvert  $C$  de  $\mathcal{U}$  est la trace sur  $E$  d'un ouvert  $C'$  de  $\theta$  qui inclut  $A$ .  $B' \cup C'$  est un ouvert de  $\theta$  qui inclut  $A$  et dont la trace sur  $E$  vaut  $B \cup C$ , elle est donc contenue dans  $\mathcal{U}$ . Si  $C$  est une partie de  $B$ , alors  $B \cup C = B$  appartient à  $\mathcal{U}$ .

Si  $B$  et  $C$  appartiennent à  $\mathcal{U}$ , ce sont les traces sur  $E$  de deux ouverts  $B'$  et  $C'$  de  $\theta$  qui incluent  $A$ .  $B' \cap C'$  est un ouvert de  $\theta$  qui inclut  $A$ , et dont la trace sur  $E$  vaut  $B \cap C$ ;  $B \cap C$  appartient donc à  $\mathcal{U}$ . ((

### 2.2. Définition des tamis.

Nous appellerons un *tamis* sur  $E$  une partie non vide  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{T}$  qui vérifie les axiomes (U<sub>1</sub>) et (U<sub>2</sub>). Un tamis sur  $E$  est un filtre du lattis  $\mathcal{T}$  des ouverts de  $E$ . Dans le lattis  $\mathcal{P}(E)$ , un tamis apparaît comme une base de filtre dont les éléments sont ouverts, et qui contient les intersections des paires de ses éléments.

2.3. Les tamis, ordonnées par l'inclusion, forment un lattis complet.

En effet, les tamis sont des filtres sur un inf-demi-lattis avec maximum.  $\mathcal{C}$  est le tamis maximum, nous l'appellerons le *tamis total* sur E ; le tamis minimum est le tamis  $\mathcal{P}$  réduit à E.  $\mathcal{P}$  sera appelé le *tamis trivial* sur E.

L'intersection N des ouverts d'un tamis  $\mathcal{U}$  sur E sera appelée le *noyau* de  $\mathcal{U}$  :  $N = \bigcap \{A \in \mathcal{U}\}$ .

La réunion U des ouverts de  $\mathcal{C}$  qui n'appartiennent pas à un tamis  $\mathcal{U}$  sur E sera appelée le *tampon* associé à  $\mathcal{U}$ .

$$U = \bigcup \{A \in \mathcal{C} \text{ -- } \mathcal{U}\}.$$

2.4. *Supertamis.*

Si un tamis  $\mathcal{U}$  contient l'ouvert  $\emptyset$  de E, alors  $\mathcal{U}$  est le tamis total  $\mathcal{C}$  sur E.

Nous qualifierons de *pur* un tamis sur E dont  $\emptyset$  n'est pas un ouvert. Un tamis pur maximal sera appelé un *supertamis* sur E. Un supertamis est un ultrafiltre du lattis des ouverts. Tout tamis pur sur E est inclus dans un supertamis sur E.

### 3. Propriétés de la famille $(\mathcal{U}_A)_{A \subset H}$

3.1. Si A est la réunion de la famille non vide  $(A_j)$  de parties de H, alors  $\mathcal{U}_A = \bigcap \mathcal{U}_{A_j}$ .

Considérons d'abord un ouvert B de  $\mathcal{C}$  contenu dans  $\mathcal{U}_A$ . Il existe un ouvert  $B'$  de  $\theta$  tel que  $B' \cap E = B$  et  $A \subset B'$ . Chacun des ensembles  $A_j$  est inclus dans  $B'$  ; donc B est un ouvert de chacun des  $\mathcal{U}_{A_j}$ .

Si B est maintenant un ouvert de l'intersection des  $\mathcal{U}_{A_j}$ , quel que soit j,  $\theta$  contient l'ouvert  $B'_j$  tel que  $B = B'_j \cap E$  et  $A_j \subset B'_j$ . A est contenu dans l'ouvert  $\bigcup B'_j$  de  $\theta$ , dont la trace sur E est B. Ainsi B appartient à  $\mathcal{U}_A$ .  $\llcorner$

3.2. Si A est l'intersection d'une famille non vide  $(A_j)$  de parties de H, alors  $\bigcup \mathcal{U}_{A_j} \subset \mathcal{U}_A$ .

Considérons un ouvert B de  $\bigcup \mathcal{U}_{A_j}$  ; il existe un indice k pour lequel B appartient à  $\mathcal{U}_{A_k}$ . Donc il existe un ouvert  $B'$  de  $\theta$  tel que  $B = B' \cap E$  et  $A_k \subset B'$ . On en déduit  $A \subset B'$ , ce qui montre que B est un ouvert de  $\mathcal{U}_A$ .  $\llcorner$

*Remarque.*

$\bigcup \mathcal{U}_{A_j}$  n'est généralement pas un tamis ; par surcroît, le tamis  $\mathcal{U}_A$  n'est généralement pas le tamis engendré par la famille  $\bigcup \mathcal{U}_{A_j}$  d'ouverts de E. Montrons-le sur des exemples.

Considérons un espace discret E, formé de deux points a et b. La réunion des tamis  $\mathcal{U}_a$  et  $\mathcal{U}_b$  n'est pas un tamis puisqu'elle ne contient pas l'intersection de ses éléments  $\{a\}$  et  $\{b\}$ .

Appelons maintenant E un espace trivial, formé encore de deux points a et b. Les tamis  $\mathcal{U}_a$  et  $\mathcal{U}_b$  coïncident avec le tamis trivial  $\mathcal{P}$  sur E. L'intersection de  $\{a\}$  et  $\{b\}$  est vide, et  $\mathcal{U}_\emptyset$  est le tamis total sur E, distinct de  $\mathcal{P}$ .

### 4. Famille de tamis associée à une extension

4.1. Nous dirons que la famille  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est la famille de tamis associée à l'extension H,  $\theta$  de E,  $\mathcal{C}$ .

La connaissance de la famille  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  est équivalente à celle de  $(\mathcal{U}_A)_{A \subset H}$ .

En effet, si A est une partie de H,  $\mathcal{U}_A = \bigcap \{\mathcal{U}_h : h \in A\}$ .  $\llcorner$

4.2.  $\mathcal{T}$  n'est pas un élément de  $(\mathcal{U}_i)$ .

En effet, si le point  $i$  de  $I$  est tel que  $\mathcal{U}_i = \mathcal{T}$ , il existe un ouvert  $A$  de  $\theta$  qui contient  $i$ , et dont la trace sur  $E$  est vide.  $E$  ne serait pas dense dans  $H$ .  $\llcorner$

## 5. Les ouverts $A'$

### 5.1. Définitions.

Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ , nous appellerons  $A'^H$ , ou simplement  $A'$ , l'ouvert maximum de  $\theta$  dont la trace sur  $E$  est  $A$ . C'est la réunion des ouverts de  $\theta$  dont la trace sur  $E$  est  $A$ , ou encore la réunion des ouverts de  $\theta$  dont la trace sur  $E$  est incluse dans  $A$ .

Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ , nous désignerons par  $I_A$  l'ensemble des points  $i$  de  $I$  pour lesquels  $A$  appartient à  $\mathcal{U}_i$ .

5.2. Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ , alors  $A' = A \cup I_A$ .

Établissons d'abord que  $A \cup I_A$  est un ouvert de  $\theta$ . Soit le point  $i$  de  $I_A$ ; on a  $A \in \mathcal{U}_i$ , il existe donc un ouvert  $A_i$  de  $\theta$  qui contient  $i$ , et dont la trace sur  $E$  est  $A$ . Si  $j$  est un point de  $A_i \cap I$ , alors  $A$  appartient à  $\mathcal{U}_j$ , et donc  $j$  appartient à  $I_A$ . Ainsi  $A \cup I_A = \cup \{A_i : i \in I_A\}$  est un ouvert de  $\theta$ .

Montrons maintenant que  $A' = A \cup I_A$ . On a évidemment  $A \cup I_A \subset A'$  et  $A = (A \cup I_A) \cap E = A' \cap E$ .

Si maintenant  $i$  est un point de  $I$  qui appartient à  $A'$ , on a  $A \in \mathcal{U}_i$ , donc  $i \in I_A$ .  $\llcorner$

*Corollaire.*

Si  $A$  est un ouvert de  $E$ , alors  $I_A$  est l'ouvert maximum de  $I$  dont la réunion avec  $A$  est ouverte dans  $H$ .

5.3. Si l'ouvert  $A$  de  $E$  est inclus dans l'ouvert  $B$  de  $E$ , alors  $A' \subset B'$ . Donc  $I_A \subset I_B$ .

En effet,  $B'$  est la réunion des ouverts de  $\theta$  dont la trace sur  $E$  est incluse dans  $B$ .  $\llcorner$

5.4. Si  $(A_k)$  est une famille finie non vide d'ouverts de  $E$ , alors  $(\cap A_k)' = \cap A'_k$ .  
Donc  $I_{\cap A_k} = \cap I_{A_k}$ .

$\cap A'_k$  est un ouvert de  $\theta$  dont la trace sur  $E$  vaut  $\cap A_k$ , donc  $\cap A'_k \subset (\cap A_k)'$ .

Si le point  $i$  de  $I$  appartient à  $(\cap A_k)'$ , il possède un  $\theta$ -voisinage ouvert  $A$  dont la trace sur  $E$  vaut  $\cap A_k$ . Cette trace est incluse dans chacun des  $A_k$ , ainsi  $i$  appartient à chaque  $A'_k$ , donc à leur intersection.  $\llcorner$

5.5. Dans ce paragraphe, nous allons établir quelques propriétés qui font intervenir les ouverts  $A'$  et les adhérences dans  $E$  et dans  $H$ .

1) Si  $A$  est une partie de  $E$ , alors  $\overline{A} \cap E = \bar{A}$ .

C'est le théorème 8.3 du chapitre II de [J<sub>1</sub>].  $\llcorner$

2) Si  $A$  est une partie de  $E$ ,  $(E - \bar{A})' = H - \overline{\bar{A}}$ .

$\overline{\bar{A}}$  est le plus petit fermé de  $H$  dont la trace sur  $E$  vaut  $\bar{A}$ , donc  $H - \overline{\bar{A}}$  est le plus grand ouvert de  $H$  dont la trace sur  $E$  vaut  $E - \bar{A}$ .  $\llcorner$

3) Si  $A$  est un ouvert de  $H$  dont  $B$  est la trace sur  $E$ , alors  $A$  est inclus dans  $\overline{\overline{B}}$ .

Supposons que  $A$  n'est pas inclus dans  $\overline{\overline{B}}$ .  $A \cap (H - \overline{\overline{B}})$  est un ouvert non vide de  $H$ ; sa trace sur  $E$  est vide! Car

$$A \cap E \cap (H - \overline{\overline{B}}) = B \cap (E - \overline{\overline{B}}) = B \cap (E - \overline{\overline{B}}) = \emptyset. \quad (\text{C})$$

4) Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ , alors  $A' \subset \overline{\overline{A}}$ .

C'est une conséquence du résultat précédent. (C)

5) Si  $B$  est la trace sur  $E$  d'un ouvert  $A$  de  $H$ , alors  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .

$\overline{\overline{B}}$  est un fermé qui inclut  $A$ , donc  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{B}}$ ;  $\overline{\overline{A}}$  est un fermé de  $H$  qui inclut  $B$ , donc  $\overline{\overline{B}} \subset \overline{\overline{A}}$ . (C)

6) Si  $A$  est un ouvert de  $H$  dont la trace sur  $E$  vaut  $B$ , alors  $\overline{\overline{A}} \cap E = \overline{\overline{B}}$ .

En effet,  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$  et  $\overline{\overline{B}} \cap E = \overline{\overline{B}}$ . (C)

7) Si  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $H$  dont les traces sur  $E$  sont égales, alors  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ .

Ces deux fermés valent en effet  $\overline{\overline{A \cap B}}$ . (C)

8) Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ ,  $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A}}$ .

C'est un cas particulier de 5). (C)

9) Si  $A$  est un ouvert de  $E$ ,  $(E - \overline{\overline{A}})' = H - \overline{\overline{A}}$ .

C'est une application de 2) et 8). (C)

10) Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ ,  $\overline{\overline{(E - \overline{\overline{A}})'}} \subset H - A'$ .

$(E - \overline{\overline{A}})' = H - \overline{\overline{A}}$  et  $A' \subset \overline{\overline{A}}$ ; donc  $(E - \overline{\overline{A}})' \subset H - A'$ . Or  $H - A'$  est fermé, donc  $\overline{\overline{(E - \overline{\overline{A}})'}} \subset H - A'$ . (C)

11) Si  $A$  est une partie de  $E$  et  $B$  un ouvert de  $\mathcal{T}$  tels que  $\overline{\overline{A}} \subset B'$ , alors  $\overline{\overline{(E - \overline{\overline{B}})'}}$  est inclus dans  $(E - \overline{\overline{A}})'$ .

$\overline{\overline{(E - \overline{\overline{B}})'}}$  est inclus dans  $H - B'$ ;  $\overline{\overline{A}}$  est inclus dans  $B'$ ; donc  $\overline{\overline{(E - \overline{\overline{B}})'}}$  est inclus dans  $H - \overline{\overline{A}}$ . Or  $H - \overline{\overline{A}}$  vaut  $(E - \overline{\overline{A}})'$ . (C)

12) Si  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $\mathcal{T}$  tels que  $\overline{\overline{A'}} \subset B'$ , alors  $\overline{\overline{(E - \overline{\overline{B}})'}} \subset (E - \overline{\overline{A}})'$ .

Cela résulte du fait que  $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A}}$ . (C)

13) Si  $B$  est la trace sur  $E$  de l'ouvert  $A$  de  $H$ ,  $E - \overline{\overline{A}} = E - \overline{\overline{B}}$ .

En effet,  $\overline{\overline{B}} \cap E = \overline{\overline{B}}$  et  $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$ . (C)

5.6. Si  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces de l'espace topologique  $H$  tels que  $E \subset F$ , alors, pour tout ouvert  $A$  de  $E$ ,  $A'^H \cap F = A'^F$ .

En effet, on a évidemment  $A'^H \cap F \subset A'^F$ , car  $A'^F$  inclut les ouverts de  $F$  dont

la trace sur  $E$  vaut  $A$ . D'autre part  $A'^F$  est la trace sur  $F$  d'un ouvert  $B$  de  $H$ . On a  $B \cap E = A$ , donc  $B \subset A'^H$ . Ainsi  $B \cap F = A'^F \subset A'^H \cap F$ . (

## 6. Extensions associées à une famille de tamis

Supposons que  $\Phi = (\mathcal{V}_j)_{j \in J}$  soit une famille non vide de tamis sur  $E$ ; nous dirons que l'extension  $H$ ,  $\theta$  de  $E$ ,  $\mathcal{T}$  est associée à la famille  $\Phi$  lorsqu'il existe une bijection  $f$  du complémentaire  $I$  de  $E$  dans  $H$  sur  $J$  telle que  $\mathcal{U}_i = \mathcal{V}_j$  chaque fois que  $j = fi$ .

Désormais, plus simplement, nous identifierons  $J$  et  $I$ , et nous nous placerons dans les conditions suivantes :  $E$ ,  $\mathcal{T}$  est donné, ainsi que la famille  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de tamis sur  $E$ ; on suppose que  $E \cap I = \emptyset$  et que le support de  $H$  est  $E \cup I$ .

### 6.1. Condition de densité.

Si  $(\mathcal{U}_i)$  contient un tamis égal à  $\mathcal{T}$ ,  $H$  ne peut être une extension de  $E$ , car  $\emptyset'$  serait un ouvert non vide de  $H$  qui ne rencontre pas  $E$ . Nous supposons en conséquence que  $\mathcal{T}$  n'appartient pas à la famille.

### 6.2. Ouvert caractéristique.

Nous appellerons *ouvert caractéristique* de  $E$  pour l'extension  $H$ ,  $\theta$ , le plus grand ouvert  $O$  de  $\theta$  qui est un ouvert de  $\mathcal{T}$ . Si  $V$  est la réunion des ouverts de  $\mathcal{T}$  qui n'appartiennent à aucun tamis de la famille  $(\mathcal{U}_i)$ , on a  $V \subset O \subset E$ .

Nous allons montrer que la classe  $X$  des extensions  $H$ ,  $\theta$  de  $E$ ,  $\mathcal{T}$  associées à une famille  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de tamis sur  $E$ , possède un maximum et un minimum, qui suffisent à déterminer  $X$ . Nous le ferons en trois temps : d'abord identifier le maximum  $\theta_U$  et le minimum  $\theta_u$ , ensuite, montrer que toute topologie de  $H$  comprise (au sens de l'inclusion) entre  $\theta_U$  et  $\theta_u$  est une extension de  $X$ .

6.3. *Le maximum de  $X$  est l'extension  $\theta_U$  dont les ouverts sont les ensembles de la forme  $A \cup B$ , où  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$  et  $B$  une partie de  $I_A$ .*

Montrons d'abord que  $\theta_U$  est une topologie sur  $H$ .

a) Considérons  $(A_j \cup B_j)$ , famille finie mais non vide d'éléments de  $\theta_U$ , telle que, pour chacun des indices, on ait  $A_j \in \mathcal{T}$  et  $B_j \subset I_{A_j}$ .

On a  $\bigcap A_j \in \mathcal{T}$  et  $\bigcap B_j \subset \bigcap I_{A_j} = I_{\bigcap A_j}$  (5.4).

Ainsi  $\bigcap (A_j \cup B_j) = (\bigcap A_j) \cup (\bigcap B_j)$  appartient à  $\theta_U$ .

b) Si  $(A_j \cup B_j)$  est maintenant une famille non vide d'éléments de  $\theta_U$ , pour un indice quelconque  $k$ , on a  $A_k \subset \bigcup A_j$ . Donc  $B_k \subset I_{\bigcup A_j}$  (5.3). Et donc  $\bigcup B_j \subset I_{\bigcup A_j}$ .

Ainsi  $\bigcup (A_j \cup B_j) = (\bigcup A_j) \cup (\bigcup B_j)$  appartient à  $\theta_U$ .

c)  $\emptyset \subset I \emptyset$ , donc  $\emptyset \in \theta_U$ . D'un autre côté,  $I \subset I_E$ , donc  $H \in \theta_U$ .

Il est clair que la famille de tamis associée à l'extension  $H$ ,  $\theta_U$  est  $(\mathcal{U}_i)$ . Montrons enfin que  $\theta_U$  est le maximum de  $X$ . Soit  $A$  un ouvert d'une extension  $H$ ,  $\theta$  associée à  $(\mathcal{U}_i)$ , on a  $A \cap E \in \mathcal{T}$  et  $A \cap I \subset I_{A \cap E}$ , donc  $(A \cap E) \cup (A \cap I) = A \in \theta_U$ . (

*Remarque.*

L'ouvert caractéristique de  $\theta_U$  est  $E$ ; la topologie induite par  $\theta_U$  sur  $I$  est discrète. Dans l'extension  $\theta_U$ , le clan  $\mathcal{D}_B$  lié à l'ouvert  $B$  de  $I$  est  $D_B = \mathcal{U}_B = \bigcap \{\mathcal{U}_i : i \in B\}$ .



6.4. Le minimum de  $X$  est l'extension  $\theta_u$  dont une base de topologie est formée par les ensembles de la forme  $A \cup I_A$ , où  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ .

Nous savons déjà que les ensembles  $A \cup I_A$ , où  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$  sont des ouverts dans toute extension de  $X$  (5.2). D'autre part, ces ensembles forment une base de topologie de  $H$ , car si  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{T}$ ,

$$(A \cup I_A) \cap (B \cup I_B) = (A \cap B) \cup (I_A \cap I_B) = (A \cap B) \cup I_{A \cap B} \quad (5.4).$$

Enfin,  $(\mathcal{U}_i)$  est la famille de tamis associée à  $H$ ,  $\theta_u$ . ((

#### Remarques.

Lorsque les ouverts  $A^H$ , où  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ , forment une base de topologie d'une extension  $H$  de  $E$ , nous dirons que  $H$  est le *minimum de sa classe*.

L'ouvert caractéristique  $O$  de  $\theta_u$  est l'ouvert  $V$  décrit en 6.2. La topologie  $\tau$  de  $I$  possède une base formée par les ensembles  $I_A$ , où  $A$  appartient à  $\mathcal{T}$ .

Si  $B$  est un ouvert de  $\tau$ , il existe des familles  $\mathcal{B}$  d'ouverts de  $\mathcal{T}$  pour lesquelles  $B = \cup \{I_A : A \in \mathcal{B}\}$ . Appelons  $Z$  l'ensemble de ces familles ; désignons simplement par  $\cup \mathcal{B}$  la réunion des éléments d'une famille  $\mathcal{B}$  de  $Z$ . Alors, les clans relatifs à l'extension  $\theta_u$  sont donnés par

$$\mathcal{D}_B = \{C = \cup \mathcal{B} : \mathcal{B} \in Z\}.$$

#### Démonstration.

$$C \in \mathcal{D}_B \Leftrightarrow C \cup B \in \theta_u \Leftrightarrow \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{T}, C \cup B = \cup \{A \cup I_A : A \in \mathcal{B}\} \\ \Leftrightarrow \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{T}, C = \cup \mathcal{B} \text{ et } B = \cup \{I_A : A \in \mathcal{B}\}. (($$

6.5. Une extension  $\theta$  est associée à la famille  $(\mathcal{U}_i)$  de tamis sur  $E$  si et seulement si elle est plus fine que  $\theta_u$  et moins fine que  $\theta_U$ .

Le rapprochement de 6.3 et 6.4 montre que la condition est nécessaire. Considérons maintenant une topologie  $\theta$  sur  $H$  comprise entre  $\theta_u$  et  $\theta_U$ , et montrons qu'elle est associée à  $(\mathcal{U}_i)$ . Soient  $i$  un point de  $I$  et  $A$  un ouvert de  $\mathcal{U}_i$ ,  $A$  est la trace sur  $E$  d'un ouvert de  $\theta$  qui contient  $i$ , à savoir  $A \cup I_A$ . Réciproquement, si  $A$  est la trace sur  $E$  d'un  $\theta$ -ouvert  $C$  qui contient  $i$ ,  $C$  est de la forme  $A \cup B$ , où  $B$  est une partie de  $I_A$  qui contient  $i$  ( $\theta$  est moins fine que  $\theta_U$ ). Ainsi  $A$  appartient à  $\mathcal{U}_i$ . ((

#### 6.6. Topologie de $I$ .

La topologie du sous-espace  $I$  de  $H$  est plus fine que la topologie dont une base groupe les ensembles de la forme  $I_A$ , où  $A$  appartient à  $\mathcal{T}$ .

6.7. Une extension  $\theta$  associée à  $(\mathcal{U}_i)$  est déterminée par la donnée d'une topologie  $\tau'$  sur  $I$ , plus fine que la topologie du paragraphe 6.4 (remarques), et par la donnée d'une famille  $(\mathcal{D}'_A)_{A \in \tau'}$ , de clans sur  $E$  qui vérifie les propriétés (I, 2.2. à 2.4) et les propriétés  $\mathcal{D}'_A \subset \mathcal{D}_A$ , pour tout  $A$  de  $\tau$ , si les  $\mathcal{D}'_A$  sont les clans relatifs à  $\theta_u$ .

#### 6.8. Le maximum et le minimum coïncident si et seulement si

a) chaque point de  $D$  possède un  $E$ -voisinage ouvert qui n'appartient à aucun tamis de  $(\mathcal{U}_i)$  ;

b) chaque tamis de  $(\mathcal{U}_i)$  contient un ouvert qui n'appartient à aucun autre tamis.

Si  $\theta_U$  et  $\theta_u$  coïncident, la topologie de  $I$  dans  $H$ ,  $\theta_u$  doit être discrète, ce qui implique b), et l'ouvert caractéristique de  $H$ ,  $\theta_u$  doit être  $E$ , ce qui implique a).

Supposons maintenant que les deux conditions soient réalisées. Considérons un ouvert  $C$  de  $\theta_U$ . Appelons respectivement  $A$  et  $B$  les intersections de  $C$  avec  $E$  et  $I$ . On a  $C = A \cup B$  et  $B \subset I_A$ . Soit  $j$  un point de  $B$ ,  $A$  est ouvert de  $\mathcal{U}_j$ ; la condition b) montre l'existence d'un ouvert  $A_j$  de  $\mathcal{T}$  contenu dans  $\mathcal{U}_j$  et dans ce tamis seulement.  $A \cap A_j$  est un ouvert de  $\mathcal{U}_j$  (axiome  $(U_2)$ ).  $A \cap A_j$  appartient uniquement à  $\mathcal{U}_j$ , sinon  $(U_1)$  montrerait que  $A_j$  appartient à un tamis  $\mathcal{U}_k$  distinct de  $\mathcal{U}_j$ .  $(A \cap A_j) \cup \{j\}$  est un ouvert de  $\theta_u$ ; de même  $\cup \{(A \cap A_j) \cup \{j\} : j \in B\}$ . La condition a) montre que l'ouvert caractéristique de  $\theta_u$  est  $E$ , ainsi  $C \cap E = A$  est un ouvert de  $\theta_u$ ; il en est de même de l'ouvert  $\cup \{(A \cap A_j) \cup \{j\} : j \in B\} \cup A = A \cup B = C$ .

Ainsi, tout ouvert de  $\theta_U$  est un ouvert de  $\theta_u$ .  $\llcorner$

6.9. *Tout fermé  $F$  de  $H$ ,  $\theta_u$  est l'intersection des adhérences dans  $H$  d'une famille de fermés de  $E$ .*

$F$  est l'intersection d'une famille d'ensembles de la forme  $H - A'$ , où  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$  (6.4 et 5.2). Or, si  $A$  appartient à  $\mathcal{T}$ ,  $H - A' = \overline{E - A}$ . En effet,  $A'$  est le plus grand ouvert de  $H$  dont la trace sur  $E$  vaut  $A$ , donc  $H - A'$  est le plus petit fermé de  $H$  dont la trace sur  $E$  vaut  $E - A$ . Ainsi, tout fermé de  $H$  est l'intersection des adhérences dans  $H$  d'une famille de fermés de  $E$ .  $\llcorner$

6.10. *Extensions uniponctuelles.*

Dans le cas où la famille  $(\mathcal{U}_i)$  est réduite à un seul tamis  $\mathcal{U}_i$ , les extensions de  $X$  sont uniponctuelles, et les résultats précédents peuvent être précisés [J<sub>2</sub>].

*Le maximum  $\theta_U$  de  $X$  est l'extension dont les ouverts sont, d'une part, les ouverts de  $\mathcal{T}$ , et, d'autre part, les réunions de  $i$  et des ouverts de  $\mathcal{U}_i$ . Les ouverts du minimum  $\theta_u$  de  $X$  sont les ouverts de  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$ , et les réunions de  $i$  et des éléments de  $\mathcal{U}_i$ .*

*Le maximum  $\theta_U$  coïncide avec le minimum  $\theta_u$  si et seulement si  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$  recouvre  $E$  (6.8).*

*Une extension  $\theta$  de  $X$  est complètement déterminée si on connaît son ouvert caractéristique  $O$ .*

En effet, soit  $A$  un ouvert de  $E$ ,  $A$  appartient à  $\theta$  si et seulement si  $A$  est inclus dans  $O$ ;  $A \cup \{i\}$  appartient à  $\theta$  si et seulement si  $A$  appartient à  $\mathcal{U}_i$ .  $\llcorner$

Appelons respectivement  $O_1$  et  $O_2$ , les ouverts caractéristiques de deux extensions  $\theta_1$  et  $\theta_2$  de  $X$ .

$\theta_1$  est plus fine que  $\theta_2$  si et seulement si  $O_1$  inclut  $O_2$ .

$i$  est fermé dans l'extension  $\theta$  de  $X$  si et seulement si  $\theta = \theta_U$ .

*Remarque.*

Les résultats précédents concernent les extensions uniponctuelles associées à un même tamis  $\mathcal{U}_i$  (\*); on trouve dans [J<sub>2</sub>] une étude générale des extensions uniponctuelles.

## 7. Axiomes de séparation

Cherchons les extensions  $H, \theta$  d'un espace topologique  $E, \mathcal{T}$  qui sont associées à une famille  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de tamis sur  $E$  et qui vérifient un axiome de séparation. Nous

(\*) Nous voulons dire « associées à une famille réduite à un seul  $\mathcal{U}_i$  ».

trouverons, d'une part des conditions de possibilité qui portent sur la topologie de  $E$  et sur la famille  $(\mathcal{U}_i)$  et, d'autre part, des conditions de réalisation sur la topologie  $\tau$  de  $I$  et sur les clans  $\mathcal{D}_A$ ,  $A \in \mathcal{T}$  qui déterminent l'extension.

Remarquons que les axiomes de Kolmogoroff, de Fréchet et de Hausdorff sont vérifiés par un espace topologique  $E$  si et seulement s'ils sont vérifiés par les ouverts d'une base déterminée de la topologie de  $E$ , au lieu des voisinages quelconques de points.

### 7.1. Axiome de Kolmogoroff.

7.1.1.  $H, \theta$  est de Kolmogoroff si et seulement si :

a)  $E, \mathcal{T}$  et  $I, \tau$  sont de Kolmogoroff ;

b) quels que soient les points  $x$  de  $E$  et  $i$  de  $I$ ,

$(\exists A \in \mathcal{U}_i, x \notin A)$  ou  $(\exists B \in \tau$  et  $A \in \mathcal{D}_B, i \notin B$  et  $x \in A)$ .

Montrons que les conditions sont nécessaires. Si  $H$  est de Kolmogoroff,  $E$  et  $I$  le sont aussi par hérédité. Soient  $i \in I$  et  $x \in E$  ; ou bien un ouvert  $C$  de  $\theta$  contient  $i$  mais pas  $x$ , ou bien un ouvert  $D$  de  $\theta$  contient  $x$  et non  $i$ . Dans la première hypothèse,  $A = C \cap E$  démontre la condition b) ; dans la seconde,  $A = D \cap E$  et  $B = D \cap I$  démontrent b).

Les conditions sont suffisantes. Considérons d'abord deux points distincts  $x$  et  $y$  de  $E$  ; l'un des points, par exemple  $x$ , possède un  $E$ -voisinage ouvert  $A$  qui ne contient pas  $y$ .  $A'$  est un voisinage de  $x$  dans  $H$  qui ne contient pas  $y$ . Si on considère deux points distincts  $i$  et  $j$  de  $I$ , l'un d'eux,  $i$  par exemple, possède un  $I$ -voisinage qui ne contient pas  $j$ . Ce voisinage est la trace sur  $I$  d'un voisinage de  $i$  dans  $H$  qui ne contient pas  $j$ . Soient enfin un point  $i$  de  $I$  et un point  $x$  de  $E$  ; ou bien un ouvert  $A$  de  $\mathcal{U}_i$  ne contient pas  $x$ , et  $A'$  montrera que  $\theta$  est de Kolmogoroff ; ou bien il existe un ouvert  $B$  de  $\tau$  et un ouvert  $A$  de  $\mathcal{D}_B$  tels que  $i \notin B$  et  $x \in A$  ; l'ouvert  $A \cup B$  de  $\theta$  démontre le théorème. (

7.1.2. Si l'extension minimum associée à une famille de tamis sur  $E$  est de Kolmogoroff, toutes les extensions de la classe sont de Kolmogoroff, et réciproquement.

7.1.3. L'extension minimum  $\theta_u$  associée à une famille  $(\mathcal{U}_i)$  de tamis sur  $E$  est de Kolmogoroff si et seulement si tous les tamis de la famille  $(\mathcal{U}_h)_{h \in H}$  sont distincts.

Supposons que  $\theta_u$  soit de Kolmogoroff. Si  $h$  et  $h'$  sont des points différents de  $H$ , il existe un ouvert  $A$  de  $\mathcal{T}$  tel que l'ouvert  $A'$  de  $\theta_u$  contienne, par exemple,  $h$  sans contenir  $h'$  ; on a  $A \in \mathcal{U}_h$  et  $A \notin \mathcal{U}_{h'}$ .

Supposons maintenant que la condition est vérifiée. Si  $h$  et  $h'$  sont des points distincts de  $H$ , il existe un ouvert  $A$  de  $\mathcal{T}$  contenu, par exemple, dans  $\mathcal{U}_h$  sans être contenu dans  $\mathcal{U}_{h'}$ . L'ouvert  $A'$  de  $\theta_u$  démontre que l'extension minimum est de Kolmogoroff. (

*Remarque.*

Dire que  $\mathcal{U}_x$  et  $\mathcal{U}_i$  sont distincts quels que soient  $x$  de  $E$  et  $i$  de  $I$ , revient à dire que le noyau de chacun des tamis  $\mathcal{U}_i$  est contenu dans le tampon qui lui est associé.

### 7.1.4. Extensions uniponctuelles de Kolmogoroff.

Soit  $E$  un espace de Kolmogoroff.

Une extension uniponctuelle associée à un tamis  $\mathcal{U}_i$  sur  $E$  est de Kolmogoroff

si et seulement si son ouvert caractéristique inclut le noyau de  $\mathcal{U}_i$ . Ainsi, le maximum  $\theta_{\mathcal{U}}$  est toujours de Kolmogoroff ; le minimum  $\theta_u$  l'est si et seulement si le tampon associé à  $\mathcal{U}_i$  inclut le noyau de  $\mathcal{U}_i$ . C'est sous cette dernière condition que toutes les extensions associées à  $\mathcal{U}_i$  sont de Kolmogoroff.

## 7.2. Axiome de Fréchet.

7.2.1.  $H, \theta$  est de Fréchet si et seulement si :

a)  $E, \mathcal{C}$  et  $I, \tau$  sont de Fréchet ;

b) quels que soient les points  $x$  de  $E$  et  $i$  de  $I$ ,

$$(\exists A \in \mathcal{U}_i, x \notin A) \text{ et } (\exists C \in \tau \text{ et } B \in \mathcal{D}_C, i \notin C \text{ et } x \in B).$$

7.2.2. Toutes les extensions de la classe  $X$  sont de Fréchet si et seulement si  $\theta_u$  est de Fréchet.

7.2.3. L'extension minimum  $\theta_u$  est de Fréchet si et seulement si les tamis de la famille  $(\mathcal{U}_h)_{h \in H}$  sont deux à deux incomparables.

### Remarque.

Dire que  $\mathcal{U}_x$  et  $\mathcal{U}_i$  sont incomparables quels que soient les points  $x$  de  $E$  et  $i$  de  $I$ , équivaut à dire que le noyau de chacun des tamis  $\mathcal{U}_i$  est vide et que le tampon qui lui est associé est  $E$ .

7.2.4. Si  $I$  est fini, la condition de l'énoncé 7.2.3 implique l'unicité de l'extension.

Montrons qu'on peut appliquer le résultat 6.8.

a) Soit un point  $x$  de  $E$  ; chaque fois qu'on considère un tamis  $\mathcal{U}_i$ ,  $x$  possède un voisinage ouvert  $A_i$ , non contenu dans  $\mathcal{U}_i$ .  $A = \bigcap \{A_i : i \in I\}$  est un voisinage de  $x$  qui n'est contenu dans aucun tamis  $\mathcal{U}_i$ .

b) Soit un tamis  $\mathcal{U}_i$  ; chaque fois que  $\mathcal{U}_j$  est différent de  $\mathcal{U}_i$ , celui-ci contient un ouvert  $A_j$  non contenu dans  $\mathcal{U}_j$ .  $A = \bigcap \{A_j : j \in I \text{ et } j \neq i\}$  est un ouvert de  $\mathcal{U}_i$  contenu dans ce tamis exclusivement. ((

7.2.5. Si  $E$  est fini et discret, il est sa seule extension de Fréchet.

Appelons  $H$  une extension de Fréchet de l'espace fini discret  $E$ . Supposons que  $i$  soit un point de  $H - E$ . Pour tout  $x$  de  $E$ , on peut trouver un ouvert  $A_x$  de  $H$  qui contient  $i$  mais non  $x$ .  $\bigcap \{A_x : x \in E\}$  est un ouvert non vide de  $H$  qui ne rencontre pas  $E$  ! ((

7.2.6. Extensions uniponctuelles de Fréchet.

Pour que l'espace  $E$  possède des extensions uniponctuelles de Fréchet, il est nécessaire que  $E$  soit infini (7.2.5) ; supposons-le. Appelons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des ouverts de  $E$  qui ont leur complémentaire fini.  $\mathcal{C}$  est un tamis sur  $E$  ; il est pur car  $E$  est infini.

Une extension uniponctuelle  $H, \theta$  associée à un tamis  $\mathcal{U}_i$  sur  $E$  est de Fréchet si et seulement si  $\theta$  est l'extension maximum  $\theta_{\mathcal{U}}$  associée à un tamis  $\mathcal{U}_i$  plus fin que  $\mathcal{C}$ .

Supposons d'abord que  $\theta$  soit de Fréchet, l'ouvert caractéristique de  $\theta$  est  $E$ , car  $\{i\}$  est un fermé de  $H$  ; ainsi  $\theta = \theta_{\mathcal{U}}$ . Une partie finie  $F$  de  $E$  est fermée dans  $H$ , donc  $E - F$  appartient à  $\mathcal{U}_i$ , et  $\mathcal{U}_i$  est plus fin que  $\mathcal{C}$ .

Si  $H, \theta$  est l'extension maximum associée à un tamis  $\mathcal{U}_i$  plus fin que  $\mathcal{C}$ , tous les points de  $H$  sont fermés, et  $H$  est de Fréchet. ((

### 7.3. Axiome de Hausdorff.

7.3.1.  $H, \theta$  est de Hausdorff si et seulement si :

a) quels que soient les points distincts  $i$  et  $j$  de  $I$ ,

$\exists (A, B \in \tau$  et  $C, D \in \mathcal{C}), i \in A, j \in B, A \cap B = \emptyset, C \in \mathcal{D}_A, D \in \mathcal{D}_B$  et  $C \cap D = \emptyset$  ;

b) quels que soient les points distincts  $x$  et  $y$  de  $E$ ,

$\exists (A, B \in \tau$  et  $C, D \in \mathcal{C}), x \in D, y \in C, C \cap D = \emptyset, C \in \mathcal{D}_A, D \in \mathcal{D}_B$  et  $A \cap B = \emptyset$  ;

c) quels que soient les points  $x$  de  $E$  et  $i$  de  $I$ ,

$\exists (A, B \in \tau$  et  $C, D \in \mathcal{C}), x \in D, i \in A, C \in \mathcal{D}_A, D \in \mathcal{D}_B, A \cap B = \emptyset$  et  $C \cap D = \emptyset$ .

Nous appellerons des *tamis séparés* deux tamis qui contiennent respectivement des ouverts disjoints.

7.3.2. Toutes les extensions associées à une famille  $(\mathcal{U}_i)$  de tamis sur  $E$  sont de Hausdorff si et seulement si les tamis de la famille  $(\mathcal{U}_h)_{h \in H}$  sont séparés deux à deux.

Nous dirons qu'un tamis  $\mathcal{U}$  sur  $E$  est *sans point adhérent* lorsque, pour tout point  $x$  de  $E$ , on peut trouver un élément  $A$  de  $\mathcal{U}$  auquel  $x$  n'adhère pas. Les tamis liés aux points de  $E$  sont deux à deux séparés si et seulement si  $E$  est de Hausdorff ; chaque tamis  $\mathcal{U}_i$  est séparé de chacun des tamis liés aux points de  $E$  si et seulement si les tamis  $\mathcal{U}_i$  sont sans point adhérent. Une autre forme de 7.3.2 est donc :

7.3.3. Toutes les extensions associées à une famille  $(\mathcal{U}_i)$  de tamis sur  $E$  sont de Hausdorff si et seulement si  $E$  est de Hausdorff et les tamis  $\mathcal{U}_i$  sont sans points adhérents et deux à deux séparés.

7.3.4. Les conditions de l'énoncé précédent sont celles sous lesquelles l'extension minimum  $\theta_u$  est de Hausdorff.

7.3.5. L'extension uniponctuelle associée à un tamis  $\mathcal{U}_i$  sur  $E$  est de Hausdorff si et seulement si  $E$  est de Hausdorff et  $\mathcal{U}_i$  sans point adhérent.

### 7.4. Extensions régulières.

7.4.1. Si  $H$  est une extension régulière de  $E$ , la topologie de  $H$  est le minimum de sa classe.

Il faut montrer que les ouverts  $A'$ , où  $A$  est un ouvert de  $E$ , forment une base de topologie de  $H$ . Considérons un  $H$ -voisinage ouvert  $B$  du point  $h$  de  $H$ .  $h$  possède un  $H$ -voisinage ouvert  $C$  dont l'adhérence  $\overline{C}$  est incluse dans  $B$ . On a  $C \cap E \in \mathcal{U}_h$ , donc  $h \in (C \cap E)'$  ; or ce dernier ouvert est inclus dans  $\overline{C}$ , donc dans  $B$  (5.5 4) et 5)). ((

7.4.2.  $H, \theta_u$  est régulier si et seulement si

$$\forall h \in H, \forall A \in \mathcal{U}_h, \exists B \in \mathcal{U}_h, (\forall h' \in H, A \notin \mathcal{U}_{h'} \Rightarrow E - \overline{B} \in \mathcal{U}_{h'}).$$

Supposons d'abord  $H$  régulier. Soient  $h$  un point de  $H$  et  $A$  un ouvert de  $\mathcal{U}_h$ .  $h$  possède un  $H$ -voisinage ouvert  $C$  tel que  $\overline{C} \subset A'$ . Posons  $C \cap E = B$ . Si  $h'$  est un point de  $H$  tel que  $A \notin \mathcal{U}_{h'}$ , on a  $h' \notin A'$ , d'où  $h' \in H - \overline{C}$  ; ainsi  $(H - \overline{C}) \cap E = E - \overline{B}$  appartient à  $\mathcal{U}_{h'}$ .

Supposons la condition réalisée. Soit  $C$  un  $H$ -voisinage du point  $h$  de  $H$ . Puisque

$H$  est muni de la topologie minimum  $\theta_u$ , il existe un ouvert  $A$  de  $E$  tel que  $h \in A' \subset C$ .  $A$  est un élément de  $\mathcal{U}_h$ ; appelons  $B$  l'ouvert de  $\mathcal{U}_h$  dont l'existence est prédite dans l'énoncé; montrons que l'adhérence dans  $H$  du voisinage  $B'$  de  $h$  est incluse dans  $A'$ . Si  $h'$  est un point qui n'appartient pas à  $A'$ , on a  $A \notin \mathcal{U}_{h'}$ ; d'où  $E - \bar{B} \in \mathcal{U}_{h'}$ ; et ainsi  $(E - \bar{B})'$  est un voisinage de  $h'$  qui ne rencontre pas  $B'$ . En effet,

$$(E - \bar{B})' \cap B' = ((E - \bar{B}) \cap B)' = \emptyset' = \emptyset \quad (5.4). \quad ($$

L'étude des extensions régulières sera poursuivie au chapitre IV.

## CHAPITRE III

# COMPACTIFICATION DES ESPACES TOPOLOGIQUES

### Introduction

Considérons une compactification  $H$  de l'espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{C}$ . Appelons  $\mathcal{H}$  l'ensemble des traces sur  $E$  des recouvrements ouverts finis de  $H$ .

Nous allons mettre en évidence trois propriétés de  $\mathcal{H}$  ; nous appellerons un compactifiant sur  $E$ , un objet  $\mathcal{K}$  qui vérifie ces propriétés.  $\mathcal{K}$  sera appelé le compactifiant sur  $E$  engendré par  $H$ . Nous montrerons que la connaissance d'un compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$  permet la construction d'une compactification  $K$  de  $E$  pour laquelle  $\mathcal{K}$  joue le rôle de l'ensemble  $\mathcal{H}$  introduit au premier paragraphe.  $K$  sera appelée la compactification de  $E$  engendrée par  $\mathcal{K}$ .

Nous chercherons la relation qui existe entre une compactification  $H$  de  $E$  et la compactification  $K$  engendrée par le compactifiant  $\mathcal{K}$  engendré par  $H$ . Nous décrirons les compactifications qui peuvent être engendrées par un compactifiant convenable.

Le paragraphe 4 sera consacré à une étude des compactifiants sur un espace topologique. Nous montrerons que les compactifiants, ordonnés par l'inclusion, forment un lattis complet. Nous introduirons la notion de compactifiant engendré par un ensemble de recouvrements ouverts finis ; puis nous nous pencherons sur la question suivante : on donne un ensemble non vide  $\Phi$  d'applications continues  $f$ , chacune de l'espace topologique  $E$  dans un espace topologique compact  $G_f$ . On cherche une compactification  $K$  de  $E$  telle que les applications  $f$  possèdent des prolongements continus  $f^* : K \rightarrow G_f$ .

Aux paragraphes 5 et suivants, nous déterminerons les conditions qu'il faut imposer à un compactifiant pour qu'il engendre une compactification qui vérifie des propriétés de séparation.

Au paragraphe 8, nous étudierons les compactifications uniponctuelles, et au paragraphe 9, nous obtiendrons quelques résultats sur les compactifications appartenant éventuellement à la classe des extensions associées à une famille de tamis.

Le paragraphe 10 sera consacré à l'étude de quelques compactifications courantes, et le paragraphe 11, aux compactifications des produits d'espaces topologiques.

### 1. Axiomes des compactifiants

Considérons une compactification  $H$  de l'espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{C}$ . Appelons  $\mathcal{H}$  l'ensemble des traces sur  $E$  des recouvrements ouverts finis de  $H$ .

1.1.  $\mathcal{H}$  est une partie non vide de l'ensemble  $\mathcal{F}$  des recouvrements ouverts finis de  $E$ .

En effet,  $\{E\}$  est un élément de  $\mathcal{H}$  et les éléments de  $\mathcal{H}$  appartiennent évidemment à  $\mathcal{F}$ . ((

1.2. Si un élément  $X$  de  $\mathcal{H}$  est logé dans une partie finie  $Y$  de  $\mathcal{T}$ , alors  $Y$  est un élément de  $\mathcal{H}$ .

Tout d'abord, lorsque nous disons qu'un ensemble  $X$  de parties de  $E$  est logé dans un ensemble  $Y$  de parties de  $E$ , nous voulons dire que tout élément de  $X$  est inclus dans un élément de  $Y$  au moins.

Soit  $X$  un élément de  $\mathcal{H}$  logé dans une partie finie  $Y$  de  $\mathcal{T}$ . Nous savons que, si l'ouvert  $A$  de  $\mathcal{T}$  est inclus dans l'ouvert  $B$  de  $\mathcal{T}$ , alors  $A' \subset B'$  (II, 5.3). On a donc

$$H = \cup \{A' : A \in X\} = \cup \{B' : B \in Y\}, \text{ et } Y \text{ est un élément de } \mathcal{H}. (($$

1.3. Si  $\{A_1, \dots, A_n\}$  et  $\{B_1, \dots, B_q\}$  sont des éléments de  $\mathcal{H}$ , alors tous les ensembles de la forme

$$\{A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{r-1}, B_{r+1}, \dots, B_q, A_j \cap B_r\}$$

sont des éléments de  $\mathcal{H}$ .

Soient les éléments  $X = \{A_1, \dots, A_n\}$  et  $\{B_1, \dots, B_q\}$  de  $\mathcal{H}$ , montrons que  $Z' = \{A'_1, \dots, B'_q, A'_j \cap B'_r\}$  recouvre  $H$ . Si le point  $h$  de  $H$  est contenu dans  $A'_j \cap B'_r$ , il est recouvert par  $Z'$ . Si  $h$  n'est pas contenu dans  $A'_j \cap B'_r$ , il n'est par exemple pas contenu dans  $A'_j$ ; dans ce cas, il existe un autre ouvert  $A'_i$  de  $X$  tel que  $h$  appartienne à  $A'_i$ , et  $h$  est encore recouvert par  $Z'$ . La trace de  $Z'$  sur  $E$  est  $Z$ . Ainsi  $Z$  appartient à  $\mathcal{H}$ . ((

#### 1.4. Compactifiant.

Nous dirons qu'un ensemble  $\mathcal{H}$  est un *compactifiant* sur l'espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{T}$  lorsque  $\mathcal{H}$  vérifie les trois propriétés précédentes. La définition est cohérente, car on voit que l'ensemble  $Y$  de la condition 1.2 et l'ensemble  $Z$  de la condition 1.3 sont des éléments de  $\mathcal{F}$ .

Un exemple de compactifiant est  $\mathcal{F}$  lui-même.

*Le recouvrement de  $E$  réduit à  $E$  appartient à tout compactifiant  $\mathcal{H}$ .*

En effet, par 1.1,  $\mathcal{H}$  n'est pas vide et un quelconque de ses éléments montre que  $\{E\}$  appartient à  $\mathcal{H}$  (1.2). ((

## 2. La compactification $K$

Considérons un espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{T}$  et un compactifiant  $\mathcal{H}$  sur  $E$ .

### 2.1. Recouvrements convenables.

Un recouvrement ouvert de  $E$  qui ne contient aucun recouvrement appartenant à  $\mathcal{H}$  sera qualifié de  *$\mathcal{H}$ -convenable* (ou simplement de convenable).

$E$  possède un recouvrement convenable si et seulement s'il se présente une des éventualités suivantes :  $E$  n'est pas compact ou  $\mathcal{H} \neq \mathcal{F}$ .

### 2.2. L'inclusion des recouvrements convenables est un ordre inductif.

Considérons une famille totalement ordonnée  $(\mathcal{A}_i)$  de recouvrements conve-



nables de  $E$ . L'ensemble  $\mathcal{A}$  des ouverts de  $E$  qui appartiennent à un, au moins, des éléments de la famille  $(\mathcal{A}_i)$  est un recouvrement convenable de  $E$ . Pour le voir, supposons qu'un élément  $X$  de  $\mathcal{K}$  soit inclus dans  $\mathcal{A}$ . Pour tout  $B$  de  $X$ , appelons  $i(B)$  un indice pour lequel  $B \in \mathcal{A}_{i(B)}$ .  $X$  serait une partie de  $\mathcal{A}_{\sup \{i(B) : B \in X\}}$  ! Ainsi,  $(\mathcal{A}_i)$  possède un majorant et l'ordre est inductif. ((

### 2.3. Recouvreages.

Un recouvrement convenable maximal sur  $E$  sera appelé un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$  (ou simplement un recouvrement). L'ensemble des recouvrements sur  $E$  sera noté  $J$ ;  $J$  n'est pas vide pour peu que  $E$  soit non compact ou que  $\mathcal{K}$  diffère de  $\mathcal{F}$ . Cela découle du résultat suivant :

2.4. Si  $E$  possède un recouvrement convenable  $\mathcal{A}$ , il possède un recouvrement  $a$  qui inclut  $\mathcal{A}$ .

2.5. Tout ouvert  $B$  inclus dans un élément  $A$  d'un recouvrement  $a$  est un ouvert de  $a$ .

Supposons que l'ouvert  $B$  soit inclus dans l'élément  $A$  du recouvrement  $a$ ; supposons que  $B$  n'appartienne pas à  $a$ . En vertu du caractère maximal de  $a$ , il existe des éléments  $A_1, \dots, A_n$  de  $a$  tels que  $\{B, A_1, \dots, A_n\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ . En vertu de 1.2,  $\{A, A_1, \dots, A_n\}$  serait un élément de  $\mathcal{K}$  inclus dans  $a$  ! ((

En particulier, toute intersection d'une famille finie non vide d'éléments d'un recouvrement  $a$  est un ouvert de  $a$ ;  $\emptyset$  fait partie de tout recouvrement.

2.6. Si  $a$  et  $b$  sont des éléments distincts de  $J$ ,  $a$  contient un ouvert de  $E$  non contenu dans  $b$  et vice-versa.

2.7. Considérons le recouvrement  $a$  sur  $E$  et les ouverts  $A$  et  $B$  de  $E$ ; on a  $A \cap B \in a$  si et seulement si  $A \in a$  ou  $B \in a$ .

Si, par exemple,  $A$  appartient à  $a$ , alors  $A \cap B$  appartient à  $a$  (2.5).

Si, maintenant, ni  $A$ , ni  $B$  ne sont des éléments de  $a$ , celui-ci contient les éléments  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_q$  tels que  $\{A, A_1, \dots, A_n\}$  et  $\{B, B_1, \dots, B_q\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ .

$\{A \cap B, A_1, \dots, B_q\}$  est un élément de  $\mathcal{K}$  qui montre que  $A \cap B$  n'est pas contenu dans  $a$  (1.3). ((

### 2.8. Les tamis $\mathcal{U}_a$ .

Quel que soit le recouvrement  $a$ ,  $\mathcal{U}_a = \mathcal{T} - a$  est un tamis pur sur  $E$ .

1)  $a$  ne contient pas  $E$ , car  $\{E\}$  appartient à  $\mathcal{K}$  (1.4). Donc  $E$  appartient à  $\mathcal{U}_a$  qui n'est donc pas vide.

2) Les éléments de  $\mathcal{U}_a$  sont évidemment des ouverts de  $\mathcal{T}$ .

3) Appelons  $A$  un élément de  $\mathcal{U}_a$  et  $B$  un ouvert de  $\mathcal{T}$  qui inclut  $A$ .  $a$  contient une famille finie d'ouverts  $A_1, \dots, A_n$  telle que  $\{A, A_1, \dots, A_n\}$  soit un élément de  $\mathcal{K}$ . Cet élément est logé dans la partie finie  $X = \{B, A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathcal{T}$ . Donc  $X$  appartient à  $\mathcal{K}$ , et ainsi  $B \in a$ .

4) Si  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $\mathcal{U}_a$ , ils n'appartiennent pas à  $a$ , pas plus que  $A \cap B$  (2.7). Donc  $A \cap B$  est contenu dans  $\mathcal{U}_a$ .

5)  $\emptyset$  fait partie de tout recouvrement, donc  $\mathcal{U}_a$  est pur. ((

### 2.9. La compactification $K$ .

Appelons,  $K$ ,  $\theta$  l'extension minimum (II, 6.4) de  $E$ ,  $\mathcal{T}$  associée à la famille  $(\mathcal{U}_a)_{a \in J}$  de tamis sur  $E$ . C'est bien une extension de  $E$  car les tamis  $\mathcal{U}_a$  sont purs, et  $E$  est donc dense dans  $K$ .

### 2.10. Les traces sur $E$ des recouvrements ouverts finis de $K$ sont les éléments de $\mathcal{K}$ .

Considérons un élément  $X$  de  $\mathcal{K}$ . Si  $a$  est un recouvrement sur  $E$ , il existe un ouvert  $A$  de  $X$  qui n'appartient pas à  $a$  (sinon  $a$  ne serait pas convenable).  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{U}_a$ ; de ce fait,  $a$  appartient à l'ouvert  $A'$  de  $K$ . Ainsi  $X$  est la trace sur  $E$  du recouvrement ouvert fini  $\{A' : A \in X\}$  de  $K$ .

Considérons maintenant la trace  $X$  sur  $E$  d'un recouvrement ouvert fini de  $K$ .  $X' = \{A' : A \in X\}$  est un recouvrement ouvert de  $K$ ; montrons que  $X$  n'est pas convenable. Dans le cas contraire, il existerait un recouvrement  $a$  incluant  $X$ . Aucun ouvert de  $X$  n'appartiendrait à  $\mathcal{U}_a$ , et  $X'$  ne recouvrirait pas  $K$ . Ainsi  $X$  inclut un élément de  $\mathcal{K}$  et appartient donc à  $\mathcal{K}$  (1.2).  $\llcorner$

### 2.11 $K$ est compact.

Les ouverts de la forme  $A'$ , où  $A$  est un ouvert de  $E$ , forment une base de topologie de  $K$ . Considérons une partie  $\{A\}$  de  $\mathcal{T}$  telle que  $\{A'\}$  recouvre  $K$ . Si  $\{A\}$  n'inclut pas d'élément de  $\mathcal{K}$ , elle est convenable, et il existe un recouvrement  $a$  qui inclut  $\{A\}$ . Aucun ouvert de  $\{A\}$  ne serait contenu dans  $\mathcal{U}_a$ , et  $\{A'\}$  ne recouvrirait pas  $K$ . Appelons  $\{A_1, \dots, A_n\}$  un élément de  $\mathcal{K}$  inclus dans  $\{A\}$ .  $\{A'_1, \dots, A'_n\}$  recouvre  $K$ . Nous avons donc démontré que tout recouvrement de  $K$  par des ouverts d'une base de topologie possède un sous-recouvrement fini, et ainsi,  $K$  est compact.  $\llcorner$

### 2.12. Les points de $J$ sont fermés dans $K$ .

Soit un recouvrement  $a$  de  $J$ . Si  $x$  est un point de  $E$ , il existe un ouvert  $A$  de  $a$  qui contient  $x$ .  $A'$  est un voisinage de  $x$  dans  $K$  qui ne contient pas  $a$ .

Si  $b$  est un point de  $J$ , distinct de  $a$ , il existe un ouvert  $B$  de  $a$  non contenu dans  $b$ .  $B'$  est un voisinage de  $b$  dans  $K$  qui ne contient pas  $a$ .  $\llcorner$

En particulier,  $J$  est de Fréchet.

### 2.13. Définitions.

Si  $H$  est une compactification de l'espace topologique  $E$ , l'ensemble des traces sur  $E$  des recouvrements ouverts finis de  $H$  est un compactifiant sur  $E$ ; nous l'appellerons le compactifiant engendré par  $H$ .

Si  $\mathcal{K}$  est un compactifiant sur l'espace topologique  $E$ , la compactification de  $E$  que nous venons de construire à partir de  $\mathcal{K}$  sera dite engendrée par  $\mathcal{K}$ .

## 3. Relation entre $H$ et $K$

Considérons une compactification  $H$  de l'espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{T}$ . Appelons  $\mathcal{K}$  le compactifiant engendré par  $H$ , et  $K$  la compactification engendrée par  $\mathcal{K}$ .

### 3.1. Une injection ouverte $f : K \rightarrow f(K) \subset H$ qui, restreinte à $E$ , est l'identité.

Désignons toujours par  $J$  l'ensemble des  $\mathcal{K}$ -recouvrements sur  $E$ . Considérons un recouvrement  $a$  de  $J$ .

$\{A^H : A \in a\}$  est un ensemble d'ouverts de  $H$  qui ne recouvre pas celui-ci.

Sinon, par la compacité de  $H$ , il contiendrait un sous-recouvrement fini dont la trace sur  $E$  serait un élément de  $\mathcal{H}$  inclus dans  $a$ .

Choisissons un point quelconque  $i$  de  $H - \cup \{A' : A \in a\}$ .  $i$  n'appartient pas à  $E$ , car  $a$  recouvre  $E$ . Aucun ouvert de  $\mathcal{U}_i$  n'appartient à  $a$ , sinon  $i$  appartiendrait à  $\cup \{A' : A \in a\}$ ; donc  $a$  est une partie de  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$ . On en conclut que  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$  recouvre  $E$ . Or  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$  est convenable, car  $\cup \{A' : A \in \mathcal{T} - \mathcal{U}_i\}$  ne contient pas  $i$ ; ne recouvre donc pas  $H$ ; et aucun élément de  $\mathcal{H}$  n'est donc inclus dans  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$ . Puisque  $a$  est maximal, on a  $a = \mathcal{T} - \mathcal{U}_i$ .

Définissons  $f : K \rightarrow H$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a \in J \subset K &\rightarrow i \in H - E; \\ x \in E \subset K &\rightarrow x \in E \subset H. \end{aligned}$$

$f$  est injective. En effet, si  $a$  et  $b$  sont des recouvrements distincts, on a  $a = \mathcal{T} - \mathcal{U}_{fa} \neq \mathcal{T} - \mathcal{U}_{fb} = b$ ; donc  $fa \neq fb$ .

Il reste à montrer que l'application  $f$ , réduite à  $f(K)$ , est ouverte. Pour le voir, démontrons que si  $A'^K$  est un ouvert de la base  $\{A'^K : A \in \mathcal{T}\}$  de topologie de  $K$ , on a  $f(A'^K) = A'^H \cap f(K)$ .

Considérons un point  $h$  de  $f(A'^K)$ . Il existe un point  $k$  (unique) de  $A'^K$  tel que  $h = fk$ . Si  $k$  appartient à  $E$ , on a  $k = fk = h \in A \subset A'^H \cap f(K)$ .

Si  $k$  est un recouvrement de  $J$ , alors  $A$  n'appartient pas à  $k$ , donc appartient à  $\mathcal{U}_h$ , et  $h$  est un point de  $A'^H \cap f(K)$ .

Considérons maintenant un point  $h$  de  $A'^H \cap f(K)$ . Il existe un point  $k$  de  $K$  tel que  $h = fk$ . On a  $A \in \mathcal{U}_{fk}$ . Si  $k$  appartient à  $E$ ,  $k = fk \in A \subset A'^K$ , et  $h \in f(A'^K)$ . Si  $k$  est un recouvrement de  $J$ , alors  $A \notin \mathcal{T} - \mathcal{U}_{fk} = k$ , donc  $k$  appartient à  $A'^K$ , et  $h$  est contenu dans  $f(A'^K)$ . ((

3.2.  $f$  est un homéomorphisme de  $K$  sur  $f(K)$  si  $H$  est le minimum de sa classe.

Si  $H$  est le minimum de sa classe, alors  $\{A'^H : A \in \mathcal{T}\}$  est une base de topologie de  $H$ . La formule

$$\begin{aligned} f^{-1}(A'^H) &= A'^K \text{ établit la continuité de } f, \text{ et par là, le théorème. En effet,} \\ f^{-1}(A'^H) &= f^{-1}f(A'^K) = A'^K, \text{ car } f \text{ est injective. ((} \end{aligned}$$

3.3.  $f$  est un homéomorphisme  $K \rightarrow H$  si et seulement si, d'une part les points de  $H - E$  sont fermés, et d'autre part,  $H$  est le minimum de sa classe.

Les conditions sont nécessaires. Supposons-les vérifiées; il nous suffit de prouver que  $f(K) = H$ . Pour le faire, nous allons montrer que si  $i$  est un point de  $H - E$ , alors  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$  est un recouvrement de  $J$ , et que, si  $i$  et  $j$  sont des points distincts de  $H - E$ , alors  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$  et  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_j$  sont distincts.

Soit  $i \in H - E$ , posons  $\mathcal{A}_i = \mathcal{T} - \mathcal{U}_i$ .

1)  $\mathcal{A}_i$  recouvre  $E$ . En effet,  $i$  est fermé dans  $H$ , donc il existe une partie  $\{A\}$  de  $\mathcal{T}$  telle que  $H - \{i\} = \cup \{A'^H\}$ .  $\{A\}$  est une partie de  $\mathcal{A}_i$  qui recouvre  $E$ .

2)  $\mathcal{A}_i$  est convenable. En effet, si l'on suppose que  $X$  est un élément de  $\mathcal{H}$  inclus dans  $\mathcal{A}_i$ , en se reportant à la définition de  $\mathcal{H}$ , on trouve que l'un des ouverts de  $X$  doit appartenir à  $\mathcal{U}_i$ .

3)  $\mathcal{A}_i$  est maximal. Pour le voir, montrons que, si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$  non contenu dans  $\mathcal{A}_i$ , il existe une famille finie  $A_1, \dots, A_n$  d'ouverts de  $\mathcal{A}_i$  telle que  $\{A, A_1, \dots, A_n\}$  soit un élément de  $\mathcal{H}$ .

$\{B'^H : B \in \mathcal{A}_i \text{ ou } B = A\}$  est un recouvrement ouvert de  $H$  qui possède un

sous-recouvrement fini  $\{A'^H, A_1'^H, \dots, A_n'^H\}$  où les ouverts  $A_1, \dots, A_n$  appartiennent à  $\mathcal{A}_i$ .  $\{A, A_1, \dots, A_n\}$  est l'élément cherché de  $\mathcal{H}$ .

4) Deux points distincts  $i$  et  $j$  de  $H - E$  donnent lieu à des ensembles  $\mathcal{A}_i$  et  $\mathcal{A}_j$  différents. On le voit, par exemple, par les relations suivantes :

$$\cup \{A'^H : A \in \mathcal{A}_i\} = H - \{i\} \text{ et } \cup \{A'^H : A \in \mathcal{A}_j\} = H - \{j\}. \quad (\text{C})$$

### 3.4. Conclusion.

Les compactifications d'un espace topologique  $E$  qui peuvent être engendrées par un compactifiant sont les compactifications  $H$  qui sont le minimum de leur classe et dans lesquelles les points de  $H - E$  sont fermés.

C'est le cas de la compactification de Wallman (5.3) d'un espace de Fréchet, des compactifications régulières  $H$  d'un espace topologique  $E$  dans lesquelles les points de  $H - E$  sont fermés (II, 7.4.1). Dans la dernière catégorie rentrent les compactifications de Hausdorff d'un espace de Tychonoff.

## 4. Étude des compactifiants

### 4.1. La relation « logé dans ».

4.1.1. Considérons un ensemble  $\mathcal{F}$  sur lequel est définie une relation binaire  $l$  réflexive et transitive. Appelons  $r$  la relation ( $XlY$  et  $YlX$ ) définie sur  $\mathcal{F}$ .

$r$  est une relation d'équivalence.

Si  $X$  appartient à  $\mathcal{F}$ , alors  $XlX$ , d'où  $XrX$ .

Si les éléments  $X$  et  $Y$  de  $\mathcal{F}$  sont tels que  $XrY$ , on a  $XlY$  et  $YlX$ , d'où  $YrX$ .

Si les éléments  $X, Y$  et  $Z$  de  $\mathcal{F}$  sont tels que  $XrY$  et  $YrZ$ , on a  $XlY, YlX, YlZ$  et  $ZlY$ . D'où, par la transitivité de  $l$ ,  $XlZ$  et  $ZlX$ . Ainsi  $XrZ$ . (C)

Appelons  $\mathcal{F}^*$  l'ensemble quotient de  $\mathcal{F}$  par l'équivalence  $r$ ; soit  $p$  la projection  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ . Si  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathcal{F}$ , écrivons  $(pX)l^*(pY)$  lorsque  $pX$  et  $pY$  contiennent respectivement les éléments  $Z$  et  $U$  tels que  $ZlU$ .

$XlY$  équivaut à  $(pX)l^*(pY)$ .

Par définition,  $XlY$  implique  $(pX)l^*(pY)$ . Supposons maintenant que  $(pX)l^*(pY)$ . Il existe  $Z$  et  $U$ , appartenant respectivement à  $pX$  et  $pY$ , tels que  $ZlU$ . On a  $XrZ$  et  $YrU$ , donc  $XlY$ . (C)

$l^*$  est une relation d'ordre.

$l^*$  est évidemment réflexive et transitive. Montrons que  $(pX)l^*(pY)$  et  $(pY)l^*(pX)$  entraînent  $pX = pY$ . On a  $XlY$  et  $YlX$ , d'où  $XrY$ , et ainsi  $pX = pY$ . (C)

4.1.2. Considérons l'ensemble  $\mathcal{F}$  des recouvrements ouverts finis de l'espace topologique  $E, \mathcal{T}$ . Si  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathcal{F}$ , nous écrirons  $XlY$  lorsque  $X$  est logé dans  $Y$ ; c'est-à-dire lorsque tout ouvert de  $X$  est inclus dans un ouvert de  $Y$ , au moins.

$l$  est une relation symétrique et transitive.

Conservons les notations  $r, \mathcal{F}^*, p, l^*$  du paragraphe précédent.

Un représentant caractéristique de  $pX$ .

Considérons un élément  $X$  de  $\mathcal{F}$ . Appelons  $X^*$  l'ensemble des ouverts de  $X$  qui ne sont strictement inclus dans aucun ouvert de  $X$ .  $X^*$  est un recouvrement

ouvert fini de  $E$ .  $X^*$  est une partie de  $X$ , donc  $X^* \in \mathcal{I}X$ ; d'autre part, tout ouvert de  $X$  est inclus dans un ouvert de  $X^*$ , donc  $X \in \mathcal{I}X^*$ . Au total,  $X^* \in \mathcal{I}X$  et  $X^*$  appartient à  $pX$ .

Montrons que, si  $Y$  appartient à  $pX$ , alors  $Y^* = X^*$ .  $Y^*$  appartient à  $pX$ , donc  $Y^* \in \mathcal{I}X^*$ . Appelons  $A$  un ouvert de  $X^*$ , puisque  $X^*$  est logé dans  $Y^*$ , il existe un ouvert  $B$  de  $Y^*$  tel que  $A$  soit inclus dans  $B$ . Il existe de même un ouvert  $C$  de  $X^*$  qui inclut  $B$ . Ainsi  $C$  inclut  $A$ . La définition de  $X^*$  impose  $C = A$ ; d'où  $C = B = A$ , et tout ouvert de  $X^*$  est un ouvert de  $Y^*$ . Finalement  $X^* = Y^*$ .

$(\mathcal{F}^*, \mathcal{I}^*)$  est un lattis avec maximum.

Appelons  $pX$  et  $pY$  deux éléments de  $\mathcal{F}^*$ ; montrons que  $p(X \cup Y)$  est le plus petit majorant de  $pX$  et  $pY$ . Puisque  $X$  et  $Y$  sont inclus dans  $X \cup Y$ ,  $X$  et  $Y$  sont logés dans  $X \cup Y$ , ainsi  $p(X \cup Y)$  majore  $pX$  et  $pY$ . Supposons que  $pZ$  majore  $pX$  et  $pY$ . Si  $A$  est un ouvert de  $X \cup Y$ , il existe un ouvert  $B$  de  $Z$  qui inclut  $A$ . Ainsi  $p(X \cup Y) \in \mathcal{I}^* pZ$ , et  $p(X \cup Y)$  est le plus petit majorant de  $pX$  et  $pY$ .

Appelons  $m(X, Y)$  l'élément de  $\mathcal{F}$  composé de toutes les intersections possibles d'un élément de  $X$  avec un élément de  $Y$ . Montrons que  $pm(X, Y)$  est le plus grand minorant de  $pX$  et  $pY$ .  $m(X, Y)$  est logé dans  $X$  et  $Y$ , donc  $pm(X, Y)$  minore  $pX$  et  $pY$ . Appelons  $pZ$  un élément de  $\mathcal{F}^*$  qui minore  $pX$  et  $pY$ . Si  $A$  est un ouvert de  $Z$ , il existe un ouvert  $B$  de  $X$  et un ouvert  $C$  de  $Y$  qui incluent  $A$ . On a  $A \subset B \cap C$ , donc  $Z$  est logé dans  $m(X, Y)$ , et  $pm(X, Y)$  est le plus grand minorant de  $pX$  et  $pY$ .

$p\{E\}$ , composé des recouvrements ouverts finis de  $E$  qui contiennent  $E$ , est le maximum de  $\mathcal{F}^*$ . ( $\llcorner$ )

4.2. Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des éléments d'un compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$ , alors  $\mathcal{K}$  contient un élément  $X$  logé dans chacun des  $X_i$ .

Appelons  $K$  la compactification de  $E$  engendrée par  $\mathcal{K}$ . Considérons un point  $k$  de  $K$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , il existe un ouvert  $A_i$  de  $X_i$  tel que  $k$  appartienne à  $A_i$ .  $k$  est un point de l'ouvert  $\bigcap \{A_i : i = 1, \dots, n\}$  de  $K$  dont la trace sur  $E$  vaut  $B_k = \bigcap A_i$ . Les ouverts  $B_k$  sont en nombre fini, puisque les  $X_i$  sont en nombre fini et comportent chacun un nombre fini d'éléments. L'ensemble  $X$  des ouverts  $B_k$  est un élément de  $\mathcal{K}$  logé dans chacun des  $X_i$ . ( $\llcorner$ )

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  recouvrement ouverts finis de  $E$ , nous appellerons  $m(X_1, \dots, X_n)$  l'ensemble des ouverts de  $E$  de la forme  $\bigcap \{A_i : i = 1, \dots, n ; A_i \in X_i\}$ .

4.3. Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des éléments d'un compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$ , alors  $m(X_1, \dots, X_n)$  appartient à  $\mathcal{K}$ .

En effet,  $m(X_1, \dots, X_n)$  est une partie finie de la topologie  $\mathcal{C}$  de  $E$ , et l'élément  $X$  de  $\mathcal{K}$  construit au paragraphe précédent est inclus, donc logé dans  $m(X_1, \dots, X_n)$ . ( $\llcorner$ )

4.4. Tout compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$  est saturé pour la relation  $r$ .

Cela résulte du deuxième axiome des compactifiants. ( $\llcorner$ )

4.5. Si  $\mathcal{K}$  est un compactifiant sur  $E$ ,  $p\mathcal{K}$  est un filtre sur  $\mathcal{F}^*$ .

$p\mathcal{K}$  est une partie non vide de  $\mathcal{F}^*$ .

Si  $pX$  et  $pY$  sont des éléments de  $p\mathcal{K}$ ,  $X$  et  $Y$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ , de même que  $m(X, Y)$ . Donc  $pm(X, Y)$  appartient à  $p\mathcal{K}$ .

Si  $pX$  est un élément de  $p\mathcal{K}$ , et si  $pY$  est un élément de  $\mathcal{F}^*$  tel que  $(pX)l^*(pY)$ , on a  $XlY$ ; d'où  $pY \in p\mathcal{K}$ . (

4.6. Si  $F$  est un filtre sur  $\mathcal{F}^*$ , alors  $p^{-1}F$  est un compactifiant sur  $E$ .

$F$  n'est pas vide, donc  $p^{-1}F$  est une partie non vide de  $\mathcal{F}$ .

Si l'élément  $X$  de  $p^{-1}F$  est logé dans l'élément  $Y$  de  $\mathcal{F}$ , alors  $pX$  appartient à  $F$ , et  $(pX)l^*(pY)$ . Donc  $pY$  appartient à  $F$ , et  $Y$  est contenu dans  $p^{-1}F$ .

Si  $X$  et  $Y$  appartiennent à  $p^{-1}F$ , il en est de même de  $m(X, Y)$ . Ce dernier ensemble est logé dans tous les ensembles dont la forme est donnée dans le troisième axiome des compactifiants. Cet axiome est donc vérifié. (

4.7. L'application  $p$  est une bijection de l'ensemble  $\mathcal{G}$  des compactifiants sur  $E$  sur l'ensemble  $\Phi$  des filtres sur  $\mathcal{F}^*$ .

Il suffit de montrer que deux compactifiants distincts  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  sur  $E$  ont des images différentes par  $p$ .  $\mathcal{K}_1$ , par exemple, contient un recouvrement ouvert fini de  $E$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{K}_2$ .  $pX$  appartient à  $p\mathcal{K}_1$ , mais non à  $p\mathcal{K}_2$ . (

4.8.1. L'ensemble des compactifiants sur un espace topologique  $E$  est un lattis complet.

Ordonnons par inclusion l'ensemble  $\mathcal{G}$  des compactifiants sur  $E$  et l'ensemble  $\Phi$  des filtres sur  $\mathcal{F}^*$ . La bijection  $p: \mathcal{G} \rightarrow \Phi$  respecte l'inclusion. L'ensemble des filtres sur un inf-demi-lattis avec maximum est un lattis complet; dès lors  $\Phi$  et  $\mathcal{G}$  sont des lattis complets. (

4.8.2. Minimum de  $\mathcal{G}$ .

Le minimum de  $\Phi$  est le filtre de  $\mathcal{F}^*$  réduit à  $p\{E\}$ ; ainsi  $\mathcal{M} = p^{-1}p\{E\}$  est le compactifiant minimum sur  $E$ ; nous l'appellerons le compactifiant de Papy sur  $E$ .  $\mathcal{M}$  se compose des recouvrements ouverts finis de  $E$  qui contiennent  $E$ .

Deux cas peuvent se présenter :

1)  $E$  est monocompact (I, 4.2).  $E$  n'a d'autre compactifiant que  $\mathcal{M}$ , ne possède pas de recouvrements, et la compactification engendrée par  $\mathcal{M}$  est  $E$  lui-même.

2)  $E$  n'est pas monocompact.  $E$  possède alors un unique  $\mathcal{M}$ -recouvrement  $a$  formé des ouverts distincts de  $E$ . On a  $\mathcal{U}_a = \mathcal{P} = \{E\}$ ; nous appellerons  $K$  la compactification de Papy de  $E$ . Notons que  $K$  n'est pas forcément la compactification pour laquelle  $K - E$  est de cardinal minimum; pour le voir, il suffit de considérer un espace  $E$  compact, mais non monocompact.

4.8.3. Maximum de  $\mathcal{G}$ .

$\mathcal{F}^*$  est le filtre maximum de  $\Phi$ ; ainsi  $p^{-1}\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$  est le compactifiant maximum sur  $E$ . Appelons  $W(E)$  la compactification de  $E$  engendrée par  $\mathcal{F}$ .

Deux fermés disjoints de  $E$  ont des adhérences disjointes dans  $W(E)$ .

Soient deux fermés disjoints non vides  $F$  et  $G$  de  $E$ .  $A = E - F$  et  $B = E - G$  sont des ouverts de  $\mathcal{T}$  dont la réunion est  $E$ . Si  $a$  est un recouvrement sur  $E$ , l'un au moins de ces ouverts, par exemple  $A$ , n'est pas contenu dans  $a$ . Alors,  $A'$  est un voisinage de  $a$  dans  $W(E)$  qui ne rencontre pas  $F$ . (

Toute application continue  $f$  de  $E$  dans un compact  $C$  de Hausdorff possède un prolongement continu  $f^*: K \rightarrow C$ .

Montrons qu'on peut appliquer le théorème 19.10 de [K]. Seule la condition (a) est à vérifier ; si A et B sont des parties de E telles que les adhérences de  $fA$  et  $fB$  soient disjointes dans C, A et B ont des adhérences disjointes dans E, donc dans  $W(E)$ . ((

*Toute réunion finie d'ouverts d'un  $\mathcal{F}$ -recouvreage a appartient à a.*

Si la réunion porte sur un ensemble vide d'ouverts, on a  $\emptyset \in a$ . Considérons maintenant les ouverts  $A_1, \dots, A_n$  de a. Supposons que l'ouvert  $A = \cup A_i$  n'appartienne pas à a. Il existerait un ensemble fini d'ouverts  $B_1, \dots, B_q$  de a tels que  $\{A, B_1, \dots, B_q\}$  appartienne à  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire recouvre E.  $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_q\}$  est une partie de a qui appartient à  $\mathcal{F}$  ! ((

*Si A et B sont des ouverts de E, dans  $W(E)$ , on a  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ .*

On sait que  $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$  (II, 5.3). Soit le recouvreage a n'appartenant pas à  $A' \cup B'$  ; A et B appartiennent à a ; il en est de même de  $A \cup B$  ; donc a n'appartient pas à  $(A \cup B)'$ . ((

#### 4.9. Compactifiant engendré par une famille $\mathcal{R}$ de recouvrements ouverts finis\*

Considérons une famille  $\mathcal{R}$  de recouvrements ouverts finis de l'espace topologique E,  $\mathcal{T}$ . Appelons  $\mathcal{K}(\mathcal{R})$  l'intersection des compactifiants sur E qui incluent  $\mathcal{R}$ . C'est un compactifiant sur E que nous dirons être engendré par  $\mathcal{R}$ .

$\mathcal{K}(\mathcal{R})$  est l'ensemble  $\mathcal{K}$  des recouvrements ouverts finis de E dans lesquels est logé un recouvrement ouvert fini de la forme  $m(X_1, \dots, X_n)$ , où  $X_1, \dots, X_n$  appartiennent à  $\mathcal{R}$ .

$\mathcal{K}(\mathcal{R})$  est l'image réciproque par p du filtre sur  $\mathcal{F}^*$  engendré par les éléments  $pX$  de  $\mathcal{F}^*$ , où X appartient à  $\mathcal{R}$ . C'est donc bien  $\mathcal{K}$ . ((

*Cas où  $\mathcal{R}$  est réduit à un seul recouvrement ouvert fini X de E,  $\mathcal{T}$ .*

1)  $\mathcal{K}(\mathcal{R})$  est l'ensemble  $\mathcal{K}$  des recouvrements ouverts finis de E dans lesquels X est logé.

$\mathcal{K}(\mathcal{R})$  est l'image réciproque par p du filtre sur  $\mathcal{F}^*$  lié à  $pX$ , c'est donc  $\mathcal{K}$ . ((

2) Les recouvrements sur E sont les ensembles  $a(B) = \{A \in \mathcal{T} : B \not\subset A\}$ , où B est un ouvert non monocompact de  $X^*$ .

Considérons un recouvreage a sur E ;  $X^*$  contient un ouvert B qui n'est inclus dans aucun ouvert de a. B ne peut être monocompact, car dans ce cas, il contiendrait un point x dont tous les voisinages incluent B ; comme a recouvre x, a contiendrait un ouvert incluant B. On a  $a \subset a(B)$ , donc  $a(B)$  est un recouvrement de E.  $a(B)$  est convenable, donc  $a = a(B)$ .

Réciproquement, soit B un ouvert non monocompact de  $X^*$ ,  $a(B)$  recouvre B, d'autre part, les ouverts de  $X^*$  distincts de B appartiennent à  $a(B)$ . Donc  $a(B)$  recouvre E.  $a(B)$  est convenable.  $a(B)$  est maximal. Deux ouverts distincts B et C de  $X^*$  donnent lieu à des recouvrements distincts  $a(B)$  et  $a(C)$ , en effet,  $B \not\subset a(B)$ ,  $C \not\subset a(C)$ ,  $B \in a(C)$  et  $C \in a(B)$ . ((

#### 3) Conclusion.

Deux cas se présentent :

a) Les ouverts de  $X^*$  sont monocompacts, alors  $E = K$ .

b) Certains ouverts  $B_1, \dots, B_n$  de  $X^*$  ne sont pas monocompacts, les recouvrements sur E sont les ensembles  $a_i = \{A \in \mathcal{T} : B_i \not\subset A\}$ .

Les  $\mathcal{U}_{a_i}$  sont les tamis liés aux ouverts  $B_1, \dots, B_n$ .

Cas où  $\mathcal{R}$  comporte un nombre fini d'éléments  $X_1, \dots, X_n$ .

$\mathcal{K}(\mathcal{R})$  est l'ensemble  $\mathcal{K}$  des recouvrements ouverts finis de  $E$  dans lesquels  $m(X_1, \dots, X_n)$  est logé.

$m(X_1, \dots, X_n)$  appartient à  $\mathcal{K}(\mathcal{R})$ ;  $\mathcal{K}$  est un compactifiant;  $\mathcal{R}$  est une partie de  $\mathcal{K}$ , donc  $\mathcal{K}(\mathcal{R}) = \mathcal{K}$ . ( Nous sommes ramenés à l'étude du cas où  $\mathcal{R}$  comporte un seul élément.

*Exemple.*

$E$  est l'intervalle ouvert  $]0, 1[$  de la droite numérique. Deux recouvrements ouverts finis sont donnés :

$$X_1 = \{]0, \frac{4}{5}[, ]\frac{3}{5}, 1[\} \text{ et } X_2 = \{]0, \frac{2}{5}[, ]\frac{1}{5}, 1[, ]\frac{3}{5}, 1[\}.$$

$$m(X_1, X_2) = \{]0, \frac{2}{5}[, ]\frac{1}{5}, \frac{4}{5}[, ]\frac{3}{5}, \frac{4}{5}[, ]\frac{3}{5}, 1[, \emptyset\}.$$

$$(m(X_1, X_2))^* = \{]0, \frac{2}{5}[, ]\frac{1}{5}, \frac{4}{5}[, ]\frac{3}{5}, 1[\}.$$

$K$  est la réunion de  $E$  et d'un ensemble formé de trois points  $a, b$  et  $c$  qui n'appartiennent pas à  $E$ . La topologie de  $K$  comprend les ouverts  $A$  de  $E$  auxquels on adjoint  $a, b$  ou  $c$  lorsqu'ils contiennent respectivement les ouverts

$$]0, \frac{2}{5}[, ]\frac{1}{5}, \frac{4}{5}[ \text{ ou } ]\frac{3}{5}, 1[.$$

4.10. Considérons un ensemble non vide  $\Phi$  d'applications continues  $f$ , chacune de l'espace topologique  $E, \tau$  dans un espace topologique  $G_f$ . Pour tout  $f$  de  $\Phi$ , soit  $\mathcal{H}_f$  un compactifiant sur  $G_f$ . Si  $X$  est un élément de  $\mathcal{H}_f$ , son image réciproque par  $f$  est un recouvrement ouvert fini de  $E$ ; appelons  $\mathcal{R}$  l'ensemble de ces images réciproques :

$$\mathcal{R} = \{f^{-1}X : f \in \Phi \text{ et } X \in \mathcal{H}_f\}.$$

Soit  $\mathcal{K}$  le compactifiant engendré par  $\mathcal{R}$  :  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{R})$ .

*Description de  $\mathcal{K}$ .*

$\mathcal{K}$  est l'ensemble des recouvrements ouverts finis de  $E$  dans lesquels est logé un élément de la forme

$$Y = m(f_1^{-1}X_1, \dots, f_n^{-1}X_n), \text{ où, pour tout } i = 1, \dots, n, \\ f_i \text{ appartient à } \Phi \text{ et } X_i \text{ à } \mathcal{H}_{f_i}.$$

Si les espaces  $G_f$  et les compactifiants  $\mathcal{H}_f$  coïncident ( $\forall f \in \Phi, G_f = G$  et  $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}$ ), alors, dans  $X_1, \dots, X_n$ , est logé un élément  $X$  de  $\mathcal{H}$  (4.2).

$Z = m(f_1^{-1}X, \dots, f_n^{-1}X)$  est logé dans  $Y$ , et  $\mathcal{K}$  apparaît comme l'ensemble des recouvrements ouverts finis de  $E$  dans lesquels est logé un élément de la forme  $Z$ .

Si  $\Phi$  ne contient qu'une application  $f$ , alors  $\mathcal{K}$  est l'ensemble des recouvrements ouverts finis de  $E$  dans lesquels est logé un élément de la forme  $f^{-1}X$ , où  $X$  appartient à  $\mathcal{H}_f$ .

*Prolongement des applications  $f$ .*

Appelons  $K$  la compactification de  $E$  engendrée par  $\mathcal{K}$ , et  $H_f$  la compactification de  $G_f$  engendrée par  $\mathcal{H}_f$ . Considérons un  $\mathcal{K}$ -recouvrement  $a$  sur  $E$ ; soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des ouverts  $A$  de  $G_f$  pour lesquels  $f^{-1}A$  appartient à  $a$ .  $\emptyset$  est un ouvert



de  $\mathcal{A}$  qui n'est donc pas vide. Montrons que l'ensemble  $\mathcal{B} = \{A^{\text{H}_f} : A \in \mathcal{A}\}$  ne recouvre pas  $\text{H}_f$ ; dans le cas contraire,  $\mathcal{B}$  inclurait un sous-recouvrement fini  $X'$  dont la trace  $X$  sur  $G_f$  appartiendrait à  $\mathcal{H}_f$  (2.10).  $f^{-1}X$  serait un élément de  $\mathcal{K}$  inclus dans  $a$  ! Appelons  $b$  un point de  $\text{H}_f$  qui n'est pas recouvert par  $\mathcal{B}$ . Définissons un prolongement  $f^* : K \rightarrow \text{H}_f$  de  $f$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f^*x &= fx \text{ lorsque } x \in E; \\ f^*a &= b \text{ lorsque } a \in K - E. \end{aligned}$$

*Remarque.*

$f^*$  n'est généralement pas définie de manière unique.

*Si  $\Phi$  est réduit à une application  $f$ , alors  $f^*$  est continue.*

Considérons un point  $k$  de  $K$  et un voisinage  $A$  de  $f^*k$ , il existe un ouvert  $B$  de  $G_f$  tel que  $f^*k \in B^{\text{H}_f} \subset A$ .  $f^{-1}B$  est un ouvert de  $E$ ; montrons d'abord que  $(f^{-1}B)^{\text{K}}$  est un voisinage de  $k$ , puis ensuite que son image par  $f^*$  est incluse dans  $B^{\text{H}_f}$ , donc dans  $A$ .

Si  $k$  appartient à  $E$ ,  $(f^{-1}B)^{\text{K}}$  est un voisinage de  $k$ ; supposons que  $k$  soit un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$ , et que  $k$  n'appartienne pas à  $(f^{-1}B)^{\text{K}}$ . On a  $f^{-1}B \in k$ , d'où  $f^*k \notin B^{\text{H}_f}$ , par la définition de  $f^*$  !

Si le point  $x$  de  $E$  appartient à  $(f^{-1}B)^{\text{K}}$ ,  $f^*x$  appartient à  $B^{\text{H}_f}$ ; supposons que  $a$  soit un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$  qui appartient à  $(f^{-1}B)^{\text{K}}$  et dont l'image  $f^*a$  n'est pas dans  $B^{\text{H}_f}$ .  $f^{-1}B$  n'est pas un ouvert de  $a$ ; il existe donc des ouverts  $A_1, \dots, A_n$  de  $a$  tels que  $X = \{f^{-1}B, A_1, \dots, A_n\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .  $\mathcal{H}_f$  contient un élément  $Y$  dont l'image réciproque par  $f$  est logée dans  $X$ .  $f^*a$  appartient à un ouvert  $C^{\text{H}_f}$ , où  $C$  appartient à  $Y$ . Si  $f^{-1}C$  est inclus dans l'un des ouverts  $A_i$ , alors il appartient à  $a$ , et la définition de  $f^*a$  est en défaut, donc  $f^{-1}C$  est inclus dans  $f^{-1}B$ ; de ce fait,  $C^{\text{H}_f}$  est une partie de  $B^{\text{H}_f}$ , et  $f^*a$  appartient à  $A$ . ((

*Si  $f$  est une application de  $\Phi$  pour laquelle  $\text{H}_f$  est régulier, alors  $f^*$  est continue.*

Considérons un point  $k$  de  $K$  et un voisinage  $A$  de  $f^*k$ ; il existe un ouvert  $B$  de  $G_f$  tel que  $f^*k \in B^{\text{H}_f} \subset A$ . Il existe un ouvert  $C$  de  $G_f$  tel que  $f^*k \in C^{\text{H}_f} \subset \overline{C} \subset B^{\text{H}_f}$ . Montrons que  $(f^{-1}C)^{\text{K}}$  est un voisinage de  $k$  dont l'image par  $f^*$  est incluse dans  $B^{\text{H}_f}$ , donc dans  $A$ .

Si  $k$  appartient à  $E$ , alors  $(f^{-1}C)^{\text{K}}$  est un voisinage de  $k$ . Supposons que  $k$  soit un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$ , et que  $k$  n'appartienne pas à  $(f^{-1}C)^{\text{K}}$ .  $f^{-1}C$  serait un élément de  $k$ , et  $f^*k$  n'appartiendrait pas à  $C^{\text{H}_f}$  !

Si le point  $x$  de  $E$  appartient à  $(f^{-1}C)^{\text{K}}$ , alors  $f^*x$  appartient à  $C$ , donc à  $B^{\text{H}_f}$ ; supposons que  $a$  soit un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$  qui appartient à  $(f^{-1}C)^{\text{K}}$ , et dont l'image par  $f^*$  n'est pas dans  $B^{\text{H}_f}$ .  $f^*a$  appartient à  $\text{H}_f - \overline{C}$ ,  $f^{-1}(G_f - \overline{C})$  n'est donc pas un ouvert de  $a$ . L'ouvert  $(f^{-1}C)^{\text{K}} \cap (f^{-1}(G_f - \overline{C}))^{\text{K}}$  de  $K$  serait non vide (il contient  $a$ ), bien qu'il ne rencontre pas  $E$  ! ((

*Remarque.*

La démonstration n'utilise que le fait que  $f^{-1}\mathcal{H}_f$  est inclus dans  $\mathcal{K}$ . On peut démontrer le théorème précédent en s'appuyant sur le théorème 19.10 de [K].

*Si  $f$  est une application de  $\Phi$  pour laquelle  $\text{H}_f$  est de Hausdorff, alors  $f^*$  est continue et unique.*

Un compact de Hausdorff est régulier, donc  $f^*$  est continue. Supposons que  $f_1^*$  et  $f_2^*$  sont des prolongements distincts de  $f$ .  $K$  contient un point  $k$  pour lequel

$f_1^*k \neq f_2^*k$ . Soient A et B respectivement des voisinages ouverts disjoints de  $f_1^*k$  et  $f_2^*k$  dans  $H_f$ .  $f_1^{-1}A \cap f_2^{-1}B$  est un voisinage ouvert de  $k$  dans  $K$  qui ne rencontre pas  $E$  ! (

#### 4.11. Deux relations d'ordre.

Si  $K_1$  et  $K_2$  sont des compactifications de  $E$  engendrées respectivement par les compactifiants  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ , nous écrirons  $K_1 R K_2$  lorsque  $\mathcal{K}_2$  est une partie de  $\mathcal{K}_1$ . C'est une relation d'ordre (lue « supérieur à »).

Une autre relation s'obtient en écrivant  $K_1 \geq K_2$  lorsqu'il existe une application continue  $f : K_1 \rightarrow K_2$ , identique sur  $E$ . Montrons que  $\geq$  est une relation d'ordre.  $\geq$  est évidemment réflexive et transitive. Si l'on établit que la relation  $K_1 \geq K_2$  entraîne la relation  $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_1$ , on en conclura que  $\geq$  est antisymétrique (II, 1.1). Considérons un élément  $X$  de  $\mathcal{K}_2$ ; posons  $X' = \{A^{K_2} : A \in X\}$ .  $X'$  est un recouvrement ouvert fini de  $K_2$ .  $f^{-1}X'$  est un recouvrement ouvert fini de  $K_1$  dont la trace sur  $E$  est  $X$ , ainsi  $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_1$ . (

*La relation  $\geq$  est incluse dans la relation  $R$ .*

## 5. Compactifications de Fréchet

Si  $E$  possède des compactifications de Fréchet, il est de Fréchet par hérédité. Dans ce paragraphe, nous supposons que  $E$  est de Fréchet. Appelons  $\mathcal{G}$  l'ensemble des recouvrements ouverts finis de  $E$  qui contiennent un ouvert de complémentaire fini.

5.1. *Le compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$  engendre une compactification  $K$  de Fréchet si et seulement si  $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ .*

1) Supposons que  $K$  est de Fréchet, et considérons un élément  $X$  de  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire un recouvrement ouvert  $\{A, A_1, \dots, A_n\}$  de  $E$  qui contient un ouvert  $A$  de complémentaire fini.  $B = A \cup (K - E)$  est un ouvert de  $K$ , car son complémentaire est fini (on a même  $B = A'$ ). Les ouverts  $A_i$  sont les traces sur  $E$  d'ouverts  $B_i$  de  $K$ .  $\{B, B_1, \dots, B_n\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $K$  dont la trace sur  $E$  est  $X$ . Ainsi  $X$  appartient à  $\mathcal{K}$  (2.10).

2) Supposons que  $\mathcal{G}$  soit une partie de  $\mathcal{K}$ . Nous savons que les points de  $K - E$  sont fermés dans  $K$  (2.12). Soit maintenant un point  $x$  de  $E$ ;  $E - \{x\}$  n'est élément d'aucun recouvrement sur  $E$ , donc  $(E - \{x\})' = K - \{x\}$ , et tout point  $x$  de  $E$  est fermé dans  $K$ . (

*Définition.*

Nous dirons que le compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$  est de Fréchet lorsque  $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ .

5.2.  *$\mathcal{G}$  est le compactifiant de Fréchet minimum sur  $E$ .*

On vérifie que  $\mathcal{G}$  est un compactifiant sur  $E$ , donc le compactifiant de Fréchet minimum sur  $E$  pour l'inclusion dans  $\mathcal{F}$ . (

La compactification de  $E$  construite à partir de  $\mathcal{G}$  est donc sa compactification de Fréchet  $R$ -minimum.

*Deux cas se présentent :*

1)  $E$  n'est pas la réunion de ses ouverts de complémentaire infini.  $\mathcal{G}$  est alors

l'unique compactifiant de Fréchet sur  $E$ ; celui-ci n'admet pas de recouvrements, et il est sa seule compactification de Fréchet engendrée par un compactifiant.

2)  $E$  est la réunion de ses ouverts de complémentaire infini. Ces ouverts forment le seul  $\mathcal{G}$ -recouvrement  $a$  sur  $E$ .  $\mathcal{U}_a$  est formé des ouverts de  $E$  de complémentaire fini.  $K$  est obtenu en adjoignant un point  $a$  à  $E$ ; une base de topologie de  $K$  est formée des ouverts de  $E$  dont le complémentaire est infini et des autres ouverts de  $E$  auxquels on adjoint  $a$ .

5.3.  $\mathcal{F}$  est le compactifiant maximum de Fréchet sur  $E$ .

$W(E)$  est la compactification de Fréchet  $R$ -maximum de  $E$  (4.8.3).

A partir de 4.8.3 et de (II, 3.8), le théorème 26.6 de [K] permet de voir que  $W(E)$  est homéomorphe à la compactification de Wallman de  $E$ .

5.4. Remarque — Compactifications de Kolmogoroff.

Si  $\mathcal{K}$  est un compactifiant sur  $E$ , les tamis  $\mathcal{U}_a$ , où  $a$  est un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$ , sont deux à deux distincts. Ils sont aussi différents des tamis  $\mathcal{U}_x$  liés aux points  $x$  de  $E$ . En effet, si  $a$  est un recouvrement sur  $E$ , et  $x$  un point de  $E$ ,  $a$  contient un voisinage ouvert  $A$  de  $x$ .  $A$  appartient à  $\mathcal{U}_x$ , sans appartenir à  $\mathcal{U}_a$ . Ainsi, la compactification  $K$  engendrée par  $\mathcal{K}$  est de Kolmogoroff si et seulement si  $E$  est de Kolmogoroff (II, 7.1.3).

## 6. Compactifications régulières

6.1. Toute compactification régulière  $K$  de  $E$  pour laquelle les points de  $K - E$  sont fermés dans  $K$  est engendrée par un compactifiant.

Ce fut déjà énoncé en 3.4. (

6.2. Axiomes des compactifiants réguliers.

Considérons une compactification régulière  $H$  d'un espace topologique  $E$ . Appelons  $\mathcal{K}$  le compactifiant engendré sur  $E$  par  $H$ .

(R<sub>1</sub>) Si  $\{A_1, \dots, A_n\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ , il existe un ouvert  $B$  de  $E$  tel que  $\{B, A_2, \dots, A_n\}$  et  $\{A_1, E - \overline{B}\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ .

$\{A'_1, \dots, A'_n\}$  est un recouvrement ouvert de  $H$  dont la trace sur  $E$  est  $\{A_1, \dots, A_n\}$ . Soit  $h$  un point de  $A'_1$ .  $H$  est régulier, il existe donc un ouvert  $C_h$  de  $H$  tel que  $h \in C_h \subset \overline{C_h} \subset A'_1$ . Les ouverts  $C_h$  et les ouverts  $A'_i$ , où  $i > 1$ , forment un recouvrement ouvert de  $H$  dont on peut extraire un sous-recouvrement fini  $C_1, \dots, C_q, A'_2, \dots, A'_n$ . Posons  $D = \cup C_j$  et  $B = D \cap E$ .  $\{B, A_2, \dots, A_n\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ .  $\overline{D} = \overline{\cup C_j} = \cup \overline{C_j}$  est inclus dans  $A'_i$ . Donc  $\{A'_1, H - \overline{D}\}$  recouvre  $H$ , ainsi  $\{A_1, E - \overline{B}\}$  appartient à  $\mathcal{K}$  (II, 5.5.2) et 6)). (

(R<sub>2</sub>) Si  $A$  est un  $E$ -voisinage ouvert du point  $x$  de  $E$ , alors, il existe un voisinage ouvert  $B$  de  $x$  tel que  $\{A, E - \overline{B}\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .

$A'$  est un voisinage de  $x$  dans  $H$ . Dans  $H$ , il existe un voisinage ouvert  $C$  de  $x$  dont l'adhérence est incluse dans  $A'$ . Posons  $C \cap E = B$ ;  $x$  appartient à  $B$ .  $\{A', H - \overline{C}\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $H$  dont la trace  $\{A, E - \overline{B}\}$ , sur  $E$ , appartient à  $\mathcal{K}$ . (

*Définition.*

Nous dirons qu'un compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$  est régulier lorsqu'il vérifiera  $(R_1)$  et  $(R_2)$ .

*Remarques.*

Le fait pour un espace topologique de posséder un compactifiant qui vérifie  $(R_2)$  implique que cet espace soit régulier (6.4.1).

Si, en outre,  $(R_1)$  est vérifié, alors  $E$  est complètement régulier. En effet, le résultat suivant montre que  $E$  possède une compactification régulière, donc complètement régulière.

6.2. Si  $\mathcal{K}$  est un compactifiant régulier sur  $E$ , alors la compactification  $K$  de  $E$  engendrée par  $\mathcal{K}$  est régulière.

Considérons un voisinage  $A$  d'un point  $k$  de  $K$ . Puisque  $K$  est le minimum de sa classe, il existe un ouvert  $B$  de la topologie  $\mathcal{C}$  de  $E$  tel que  $k \in B' \subset A$ . Supposons tout d'abord que  $k$  appartient à  $E$ ; en vertu de  $(R_2)$ , il existe un voisinage ouvert  $C$  de  $k$  tel que  $\{B, E - \bar{C}\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .  $C$  est un voisinage de  $k$  dans  $E$  dont l'adhérence est incluse dans  $B$ . Montrons que  $\bar{C}'$  est inclus dans  $B'$ , donc dans  $A$ . Supposons qu'un point  $k'$  de  $K$  appartienne à  $\bar{C}'$ , sans appartenir à  $B'$ .  $k'$  n'appartient forcément pas à  $E$ , et est donc un recouvrement sur  $\bar{E}$ .  $B$  est un élément de  $k'$ ,  $E - \bar{C}$  n'est donc pas un élément de  $k'$ , et on a  $k' \in (E - \bar{C})'$ . Or de  $(E - \bar{C}) \cap C = \emptyset$ , on tire  $(E - \bar{C})' \cap C' = \emptyset$  et  $k'$  n'adhère pas à  $C'$ !

Supposons maintenant que  $k$  soit un recouvrement sur  $E$ .  $B$  n'est pas un élément de  $k$ . Il existe donc un nombre fini d'éléments  $A_1, \dots, A_n$  de  $k$  tels que  $\{B, A_1, \dots, A_n\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ . En vertu de  $(R_1)$ , on peut trouver  $C$  dans  $\mathcal{C}$  tel que  $\{C, A_1, \dots, A_n\}$  et  $\{B, E - \bar{C}\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ .  $C$  n'appartient pas à  $k$ , donc  $C'$  est un voisinage de  $k$ ; d'autre part,  $\bar{C}$  est inclus dans  $B$ . A partir d'ici, on montrera que  $\bar{C}'$  est inclus dans  $B'$ , donc dans  $A$ . ((

6.3. Étude des compactifiants qui vérifient  $(R_1)$ .

6.3.1. L'axiome  $(R_1)$  est équivalent à l'axiome suivant qui a l'avantage de faire jouer le même rôle à tous les éléments de  $\{A_1, \dots, A_n\}$ .

$(R'_1)$  Si  $X = \{A_1, \dots, A_n\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ , il existe un élément  $Y = \{B_1, \dots, B_n\}$  de  $\mathcal{K}$  tel que, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\{A_i, E - \bar{B}_i\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .

Évidemment,  $(R'_1)$  entraîne  $(R_1)$ . On démontre  $(R'_1)$  à partir de  $(R_1)$  par récurrence. ((

Observons que  $Y$  est logé dans  $X$ .

6.3.2. Si le compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$  est engendré par un ensemble  $\mathcal{R}$  de recouvrements ouverts finis sur  $E$ , si, pour tout élément  $\{A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathcal{R}$ , il existe un élément  $\{B_1, \dots, B_n\}$  de  $\mathcal{K}$  tel que, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\{A_i, E - \bar{B}_i\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ , alors  $\mathcal{K}$  vérifie  $(R_1)$ .

Soit un élément  $X = \{A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathcal{K}$ , montrons qu'il existe un ouvert  $B$  de  $E$  tel que  $\{B, A_2, \dots, A_n\}$  et  $\{A, E - \bar{B}\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ . Il existe une famille finie d'éléments  $X_j = \{A_1^j, \dots, A_{n_j}^j\}$  de  $\mathcal{R}$  ( $j = 1, \dots, q$ ) tels que  $Y = m(X_1, \dots, X_n)$  soit logé dans  $X$  (4.9).

Par hypothèse, il existe des recouvrements ouverts finis  $Y_j = \{B_1^j, \dots, B_{n_j}^j\}$  de  $\mathcal{K}$  tels que, pour tous  $j = 1, \dots, q$  et  $k = 1, \dots, n_q$ ,  $\{A_k^j, E - \bar{B}_k^j\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .  $Z = m(Y_1, \dots, Y_q)$  est logé dans  $Y$ .

Considérons un élément  $C$  de  $Y$ ; il existe une famille d'indices  $k_j$  compris entre 1 et  $n_j$ , où  $j = 1, \dots, q$  tels que  $C = \cap \{A_{k_j}^j : j = 1, \dots, q\}$ . Pour tout  $j$ ,  $\{A_{k_j}^j, E - \bar{B}_{k_j}^j\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . En appliquant les deux derniers axiomes des compactifiants, on voit que  $\{\cap A_{k_j}^j, \cup (E - \bar{B}_{k_j}^j)\} = \{C, E - \cap \bar{B}_{k_j}^j\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . Ce dernier recouvrement est logé dans  $\{C, E - \overline{\cap \bar{B}_{k_j}^j}\}$  qui appartient donc aussi à  $\mathcal{K}$ . Posons  $D = \cap B_{k_j}^j$ , on voit que pour tout élément  $C$  de  $Y$ , on peut trouver un ouvert  $D$  de  $Z$  tel que  $\{C, E - \bar{D}\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .

Considérons maintenant l'ouvert  $A_1$  de  $X$ . Si aucun élément de  $Y$  n'est inclus dans  $A_1$ , posons  $B = \emptyset$ ;  $U = \{B, A_2, \dots, A_n\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ , car  $Y$  est logé dans  $U$ , et  $\{A, E - \bar{B}\} = \{A, E\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . Dans le cas contraire, appelons  $C_1, \dots, C_r$  les ouverts de  $Y$  qui sont inclus dans  $A_1$ . Pour tout  $h = 1, \dots, r$ , on peut trouver un ouvert  $D_h$  de  $Z$  tel que  $\{C_h, E - \bar{D}_h\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ . Posons  $B = \cup D_h$ .  $\{B, A_2, \dots, A_n\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ , car  $Z$  est logé dans ce recouvrement ouvert fini de  $E$ . Pour tout  $h$ ,  $\{C_h, E - \bar{D}_h\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ , de même que  $\{\cup C_h, \cap \{E - \bar{D}_h\}\} = \{\cup C_h, E - \cup \bar{D}_h\} = \{\cup C_h, E - \overline{\cup D_h}\} = \{\cup C_h, E - \bar{B}\}$ . Ce dernier recouvrement est logé dans  $\{A_1, E - B\}$ , qui appartient donc à  $\mathcal{K}$ . ((

6.3.3. *Les compactifiants sur un espace topologique  $E$  qui vérifient  $(R_1)$  constituent un sous-sup-demi-lattis-complet du lattis des compactifiants sur  $E$ .*

Considérons une famille non vide  $(\mathcal{K}_i)$  de compactifiants sur  $E$  qui vérifient  $(R_1)$ ; en vertu de 6.3.2, le compactifiant  $\mathcal{K} = \mathcal{K} (\cup \mathcal{K}_i)$  vérifie  $(R_1)$ . ((

6.3.4. *Les compactifiants sur  $E$  qui vérifient  $(R_1)$ , ordonnés par inclusion, forment un lattis complet.*

Soit  $(\mathcal{K}_i)$  une famille non vide de compactifiants sur  $E$  qui vérifient  $(R_1)$ . Appelons  $\mathcal{K}$  le compactifiant sur  $E$  engendré par la réunion des compactifiants qui vérifient  $(R_1)$  et qui sont inférieurs à tout  $\mathcal{K}_i$ .  $\mathcal{K}$  vérifie  $(R_1)$  (6.3.2); montrons que  $\mathcal{K}$  est inclus dans tout  $\mathcal{K}_j$  de  $(\mathcal{K}_i)$ . Si  $X$  est un élément de  $\mathcal{K}$ , il existe une famille finie  $X_1, \dots, X_n$  de recouvrements ouverts finis de  $E$ , appartenant respectivement à des compactifiants  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$  inférieurs aux  $\mathcal{K}_i$ , tels que  $Y = m(X_1, \dots, X_n)$  soit logé dans  $\bar{X}$  (4.9).  $X_1, \dots, X_n$  appartiennent à  $\mathcal{K}_j$ , de même que  $Y$  (4.3) et donc  $\bar{X}$ . ((

*Remarque.*

Rien ne prouve que les compactifiants sur  $E$  qui vérifient  $(R_1)$  constituent un sous-lattis-complet du lattis des compactifiants.

6.3.5. *Les compactifiants qui vérifient  $(R_1)$  sont engendrés par leurs éléments qui comportent deux ouverts.*

Soit un élément  $X = \{A_1, \dots, A_n\}$  d'un compactifiant  $\mathcal{K}$  qui vérifie  $(R_1)$ . On peut trouver un élément  $\{B_1, \dots, B_n\}$  de  $\mathcal{K}$  tel que, pour tout  $i$ ,  $Y_i = \{A_i, E - \bar{B}_i\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$  ( $R'_1$ ). Montrons que  $X$  appartient à tout compactifiant qui con-

tient les  $Y_i$ . En appliquant plusieurs fois le troisième axiome des compactifiants aux  $Y_i$ , on voit que  $Z = \{A_1, \dots, A_n, \cap (E - \overline{B}_i)\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . Or

$$\cap (E - \overline{B}_i) = E - \cup \overline{B}_i = E - \cup \overline{B}_i = E - \overline{E} = \emptyset.$$

Donc  $Z$  est logé dans  $X$  qui appartient à  $\mathcal{K}$ . ((

### 6.3.6. Cas particulier.

Appelons  $T$  l'intervalle  $[0, 1]$  de la droite numérique, et  $\mathcal{K}_T$  l'ensemble des recouvrements ouverts finis de  $T$ .

$\mathcal{K}_T$  est engendré par l'ensemble  $\mathcal{R}$  de ses recouvrements ouverts de la forme  $\{[0, a[, ]b, 1]\}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux points de  $T$  tels que  $a > b$ .

Considérons un élément  $X$  de  $\mathcal{K}_T$  et un point  $x$  de  $T$ .  $x$  appartient à un élément  $A_x$  de  $X$ .

1) Si  $x = 0$ ,  $T$  contient les points  $c_0$  et  $d_0$  tels que  $0 < c_0 < d_0$  et  $[0, d_0[ \subset A_0$ . Posons  $B_0 = [0, c_0]$  et  $C_0 = [0, d_0[$ .

2) Si  $x = 1$ ,  $T$  contient deux points  $a_1$  et  $b_1$  tels que  $a_1 < b_1 < 1$  et  $]a_1, 1] \subset A_1$ . Posons  $B_1 = [b_1, 1]$  et  $C_1 = ]a_1, 1[$ .

3) Si  $x \in ]0, 1[$ ,  $T$  contient les points  $a_x, b_x, c_x$  et  $d_x$  tels que  $a_x < b_x < x < c_x < d_x$  et  $]a_x, d_x[ \subset A_x$ . Posons  $B_x = [b_x, c_x]$  et  $C_x = ]a_x, d_x[$ .

Un nombre fini  $B_{x_1}, \dots, B_{x_n}$  d'intervalles  $B_x$  recouvrent  $T$ . Remarquons que  $B_0$  et  $B_1$  sont parmi ceux-ci. Posons  $X_0 = \{C_0, T - B_0\}$  et  $X_1 = \{C_1, T - B_1\}$ ; ce sont des éléments de  $\mathcal{R}$ . Si  $x_n \in ]0, 1[$ , posons  $Y_n = \{[0, d_{x_n}[, ]c_{x_n}, 1]\}$  et  $Z_n = \{[0, b_{x_n}[, ]a_{x_n}, 1]\}$ ; ce sont de nouveau des éléments de  $\mathcal{R}$ .

$$\{]a_{x_n}, d_{x_n}[, ]c_{x_n}, 1[, [0, b_{x_n}[ \}$$

appartient à  $\mathcal{K}(\mathcal{R})$  (1.3); de même que  $X_{x_n} = \{C_{x_n}, T - B_{x_n}\}$  (1.2). En appliquant plusieurs fois le troisième axiome des compactifiants à  $X_{x_1}, \dots, X_{x_n}$ , on trouve que  $\{\cap (T - B_{x_i}), C_{x_1}, \dots, C_{x_n}\}$  appartient à  $\mathcal{K}(\mathcal{R})$ . Or  $\cap (T - B_{x_i}) = \emptyset$ ; nous avons finalement construit un élément  $\{C_{x_1}, \dots, C_{x_n}\}$  de  $\mathcal{K}(\mathcal{R})$  logé dans  $X$ . Ainsi  $\mathcal{K}_T = \mathcal{K}(\mathcal{R})$ . ((

6.3.7. Considérons un ensemble  $\Phi$  d'applications continues  $f$  chacune de l'espace topologique  $E$  dans un espace topologique  $G_f$ . Pour tout  $f$  de  $\Phi$ , soit  $\mathcal{K}_f$  un compactifiant sur  $G_f$  qui vérifie  $(R_1)$ . Appelons  $\mathcal{K}$  le compactifiant sur  $E$  introduit au paragraphe 4.10.

$\mathcal{K}$  vérifie  $(R_1)$ .

$\mathcal{K}$  est engendré par les ensembles de la forme  $f^{-1}X$ , où  $f$  appartient à  $\Phi$ , et où  $X$  appartient à  $\mathcal{K}_f$ . Appuyons-nous sur 6.3.2. Si  $X = \{A_1, \dots, A_n\}$  appartient à  $\mathcal{K}_f$ , il existe un élément  $\{B_1, \dots, B_n\}$  de  $\mathcal{K}_f$  tel que, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\{A_i, G_f - \overline{B}_i\}$  appartienne à  $\mathcal{K}_f$  (6.3.1).  $\{f^{-1}B_1, \dots, f^{-1}B_n\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ ; pour tout  $i$ ,  $\{f^{-1}A_i, f^{-1}(G_f - \overline{B}_i)\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . Or  $f^{-1}(G_f - \overline{B}_i) = E - f^{-1}\overline{B}_i$ , et  $f^{-1}\overline{B}_i \subset f^{-1}B_i$ , donc, pour tout  $i$ ,  $\{f^{-1}A_i, E - \overline{f^{-1}B}_i\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . ((

6.3.8. Considérons une application continue  $f$  de l'espace topologique  $E$  dans l'intervalle  $T = [0, 1]$  de la droite numérique. Soit  $D$  une partie dense de  $T$ . Appelons  $f^*$  l'application qui associe à un nombre  $d$  de  $D$  l'ouvert  $f^*d = f^{-1}[0, d[$  de  $E$ .

Si  $d$  et  $d'$  sont des nombres de  $D$  tels que  $d < d'$ , alors  $\overline{f^*d} \subset f^*d'$ .

En effet,  $f^{-1}[0, d[ \subset f^{-1}[0, d'] \subset f^{-1}[0, d'[$ . ((

Si  $x$  appartient à  $f^{-1}[0, 1[$ , alors  $fx = \inf_T \{d \in D : x \in f^*d\}$ .

$D$  contient un nombre  $d$  tel que  $fx < d < 1$ , on a  $x \in f^*d$ , et l'infimum existe. Si l'élément  $d$  de  $D$  est inférieur à  $fx$ ,  $x$  n'appartient pas à  $f^*d$ , donc l'infimum est supérieur ou égal à  $fx$ . Si le nombre  $d$  de  $D$  est strictement supérieur à  $fx$ ,  $x$  appartient à  $f^*d$ ; l'infimum est donc inférieur ou égal à  $d$ . Au total, l'infimum vaut  $fx$ . ((

6.3.9. Considérons une application  $f^*$  d'une partie dense  $D$  de  $T$  dans la topologie  $\tau$  de  $E$  qui vérifie la première propriété du paragraphe précédent. Définissons une application  $f$  de  $E$  dans  $T$  de la manière suivante :

$$x \in E \text{ et } \{d \in D : x \in f^*d\} \neq \emptyset \rightarrow fx = \inf \{d \in D : x \in f^*d\},$$

$$x \in E \text{ et } \{d \in D : x \in f^*d\} = \emptyset \rightarrow fx = 1.$$

$f$  est continue.

Soit un point  $x_0$  de  $E$ ; posons  $y_0 = fx_0$ ; soit  $\varepsilon > 0$ . Il faut trouver un voisinage  $A$  de  $x_0$  pour tout  $x$  duquel,  $|fx - y_0| < \varepsilon$ .

Si  $y_0 < 1$ , soit  $d$  un point de  $D$  tel que  $y_0 < d < y_0 + \varepsilon$ . Si  $y_0 > 0$ , soit  $d'$  un point de  $D$  tel que  $y_0 - \varepsilon < d' < y_0$ .

Si  $y_0 = 0$ , le voisinage  $B = f^*d$  convient; si  $y_0 = 1$ , prenons  $C = E - \overline{f^*d'}$ ; dans les autres cas, il suffit de prendre  $A = B \cap C$ . ((

6.3.10. Si  $\Phi$  est un ensemble non vide d'applications continues  $f$  de l'espace topologique  $E$  dans  $T = [0, 1]$ , nous désignerons par  $\mathcal{K}(\Phi)$  le compactifiant sur  $E$  engendré par l'ensemble des images réciproques par les applications  $f$  d'éléments de  $\mathcal{K}_T$  (4.10).

Si  $\mathcal{K}$  est un compactifiant sur  $E$  qui vérifie  $(R_1)$ , alors il existe un ensemble  $\Phi$  d'applications continues  $E \rightarrow T$  tel que  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Phi)$ .

$\mathcal{K}$  est engendré par ses éléments qui comportent deux ouverts (6.3.5). Après avoir construit l'ensemble  $\Phi$ , il nous suffira de montrer que  $\mathcal{K}(\Phi)$  est inclus dans  $\mathcal{K}$  et que les paires de  $\mathcal{K}$  appartiennent à  $\mathcal{K}(\Phi)$ .

Considérons l'élément  $\{A, B\}$  de  $\mathcal{K}$ . Appelons  $r_0, r_1, \dots$  les nombres rationnels de  $T$ , supposés numérotés sans répétition d'une manière telle que  $r_0 = 0$  et  $r_1 = 1$ . Si  $r$  est un nombre rationnel de  $T$ , nous appellerons  $i(r)$  le nombre entier positif tel que  $r = r_{i(r)}$ .

Nous allons construire successivement des ouverts  $A_1, A_2, \dots$  de  $E$  qui vérifient les propriétés suivantes :

1) Pour tout entier  $i > 0$ ,  $\{A_i, B\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ .

2) Pour tous entiers  $i$  et  $j > 0$ ,  $r_i < r_j$  entraîne  $\{A_j, E - \overline{A_i}\} \in \mathcal{K}$ , donc  $\overline{A_i} \subset A_j$ .

Posons  $A_1 = A$ , on a  $\{A_1, B\} \in \mathcal{K}$ . Les deux propriétés précédentes sont vérifiées, la seconde étant d'ailleurs sans objet.

Supposons avoir construit les ouverts  $A_1, \dots, A_{n-1}$  qui vérifient les propriétés 1) et 2), et montrons qu'on peut leur adjoindre un ouvert  $A_n$  tel que la nouvelle famille vérifie encore les propriétés. La construction des  $A_i$  pourra alors se faire par récurrence. Considérons  $r_n$ , il existe deux indices  $p$  et  $q$  compris entre 0 et  $n - 1$  tels que

$$r_p = \sup \{r_i : i < n \text{ et } r_i < r_n\};$$

$$r_q = \inf \{r_i : i < n \text{ et } r_n < r_i\}.$$

Supposons  $r_p$  nul,  $\{A_q, B\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ ; en vertu de  $(R_1)$ , on peut trouver

$A_n$  tel que  $\{A_n, B\}$  et  $\{A_q, E - \overline{A_n}\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ . Les ouverts  $A_1, \dots, A_n$  vérifient 1). Supposons que les indices  $i$  et  $j$ , compris entre 1 et  $n$ , donnent lieu à  $r_i < r_j$ . Si  $i$  et  $j$  sont strictement inférieurs à  $n$ , alors  $\{A_j, E - \overline{A_i}\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ .  $j$  ne peut valoir  $n$ , car  $r_p = 0$ . Si  $i$  vaut  $n$ , alors  $j$  est supérieur ou égal à  $q$ ; donc  $A_q \subset A_j$ ; et ainsi l'élément  $\{A_q, E - \overline{A_n}\}$  de  $\mathcal{K}$  est logé dans  $\{A_j, E - \overline{A_n}\}$  qui appartient à  $\mathcal{K}$ .

Supposons  $r_p$  non nul,  $\{A_q, E - \overline{A_n}\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . Il existe un ouvert  $A_n$  de  $E$  tel que  $\{A_n, E - \overline{A_p}\}$  et  $\{A_q, E - \overline{A_n}\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ . On vérifie que  $A_1, \dots, A_n$  satisfont 1) et 2).

Au total, pour tout rationnel  $r_i$  de  $]0, 1[$ , nous avons construit un ouvert  $A_i$ , de telle sorte que  $r_i < r_j$  entraîne  $\overline{A_i} \subset A_j$ ; on peut alors définir une application continue  $f: E \rightarrow T$  telle que, pour tout rationnel  $r_i$  de  $]0, 1[$ ,  $A_i = f^{-1}[0, r_i[$ .  $f$  dépend évidemment de l'élément  $\{A, B\}$  de  $\mathcal{K}$  et de l'ouvert  $A$  de celui-ci.

Pour tout réel  $a$  de  $]0, 1[$ ,  $X = \{f^{-1}[0, a[, B\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . En effet, il existe un rationnel  $r_i$  tel que  $0 < r_i < a$ .  $\{A_i, B\}$  est logé dans  $X$  et appartient à  $\mathcal{K}$ .

Pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $[0, 1]$  tels que  $a < b$ ,  $Y = \{f^{-1}[0, b[, f^{-1}a, 1]\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . En effet, appelons  $r_i$  et  $r_j$  deux rationnels tels que  $a < r_i < r_j < b$ ,  $\{f^{-1}[0, r_j[, E - \overline{f^{-1}[0, r_i[}\}$  appartient à  $\mathcal{K}'$  et est logé dans  $Y$ .

Montrons que l'ensemble  $\Phi$  de toutes les applications  $f$  qui peuvent être construites comme nous venons de le faire, démontre le théorème.

Il faut d'abord montrer que l'image réciproque par une application  $f$  de  $\Phi$  d'un recouvrement ouvert fini de  $T$  appartient à  $\mathcal{K}$ . Il suffit de le montrer pour un élément de la forme  $\{[0, b[, [a, 1]\}$ , où  $a$  et  $b$  sont des points de  $T$  tels que  $a < b$  (6.3.6). C'est acquis.

Montrons finalement que les paires de  $\mathcal{K}$  appartiennent à  $\mathcal{K}(\Phi)$ . Soit l'élément  $Z = \{A, B\}$  de  $\mathcal{K}$ . Appelons  $f$  l'application de  $\Phi$  construite à partir de l'ouvert  $A$  de  $Z$ .

$U = \{f^{-1}[0, \frac{1}{2}[, f^{-1}[\frac{1}{3}, 1]\}$  appartient à  $\mathcal{K}(\Phi)$ . D'une part,  $f^{-1}[0, \frac{1}{2}[,$  est inclus dans  $A$ , car  $\frac{1}{2} < 1$  implique  $\overline{A_{i(1/2)}} = \overline{f^{-1}[0, \frac{1}{2}[} \subset A_1 = A$ ; d'autre part,  $f^{-1}[\frac{1}{3}, 1] \subset E - f^{-1}[0, \frac{1}{4}[ \subset B$  (car  $\{f^{-1}[0, \frac{1}{4}[, B\}$  recouvre  $E$ ). Au total,  $U$  est logé dans  $Z$ , qui appartient donc à  $\mathcal{K}(\Phi)$ .  $\llcorner$

*Remarque.*

Si  $f$  est l'application construite à partir de l'ouvert  $A$  de l'élément  $\{A, B\}$  de  $\mathcal{K}$ , on a  $f(E - A) = 1$  et  $f(E - B) = 0$ .

### 6.3.11. Minimum et maximum.

Le compactifiant  $\mathcal{M}$  introduit en 4.8.2 est le compactifiant minimum qui vérifie  $(R_1)$ .

Si  $\Phi$  est l'ensemble des applications continues  $E \rightarrow T$ , alors  $\mathcal{S} = \mathcal{K}(\Phi)$  est le compactifiant maximum sur  $E$  qui vérifie  $(R_1)$ .

Toute application continue  $E \rightarrow T$  possède un prolongement continu unique  $K \rightarrow T$ , si  $K$  désigne la compactification engendrée par  $\mathcal{S}$  (4.10).



Nous appellerons  $\mathcal{S}$  le *compactifiant de Stone-Čech* sur  $E$ .

Maximum et minimum coïncident lorsque toutes les applications continues  $E \rightarrow T$  sont constantes.

6.3.12. Si  $\mathcal{K}$  est un compactifiant sur  $E$  qui vérifie  $(R_1)$ , alors les tamis  $\mathcal{U}_a$  sont séparés deux à deux.

Considérons deux  $\mathcal{K}$ -recouvrements  $a$  et  $b$  sur  $E$ .  $a$  contient un ouvert  $A$  qui n'appartient pas à  $b$ . De ce fait,  $b$  contient des ouverts  $B_1, \dots, B_n$  de  $E$  tels que  $\{A, B_1, \dots, B_n\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ . Il existe un ouvert  $B$  de  $E$  tel que  $\{B, B_1, \dots, B_n\}$  et  $\{A, E - \bar{B}\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ .  $E - \bar{B}$  et  $B$  sont des ouverts disjoints qui appartiennent respectivement à  $\mathcal{U}_a$  et  $\mathcal{U}_b$ . ((

6.4. *Compactifiants qui vérifient  $(R_2)$ .*

6.4.1.  $E$  possède un compactifiant qui vérifie  $(R_2)$  si et seulement s'il est régulier.

1) Soit  $\mathcal{K}$  un compactifiant sur  $E$  qui vérifie  $(R_2)$ . Appelons  $A$  un voisinage ouvert du point  $x$  de  $E$ .  $x$  possède un voisinage ouvert  $B$  tel que  $\{A, E - \bar{B}\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ . On a  $\bar{B} \subset A$ .

2) Supposons maintenant que  $E$  soit régulier. L'ensemble  $\mathcal{F}$  des recouvrements ouverts finis de  $E$  est un compactifiant qui vérifie  $(R_2)$ . En effet, si  $A$  est un voisinage ouvert du point  $x$  de  $E$ ,  $x$  possède un voisinage ouvert  $B$  tel que  $\bar{B} \subset A$ .  $\{A, E - \bar{B}\}$  appartient à  $\mathcal{F}$ . ((

6.4.2. Considérons une compactification  $K$  de  $E$  engendrée par un compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$  qui vérifie  $(R_2)$ .

Si  $F$  est un fermé compact de  $E$ , alors  $F$  est un fermé de  $K$ .

Montrons que  $(E - F)' = K - F$ . Soit un  $\mathcal{K}$ -recouvrement  $a$  sur  $E$ . Appelons  $x$  un point de  $F$ ;  $a$  contient un voisinage ouvert  $A_x$  de  $x$ . Il existe un voisinage ouvert  $B_x$  de  $x$  dans  $E$  tel que  $\{A_x, E - \bar{B}_x\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .  $a$  appartient à  $(E - \bar{B}_x)'$ . Un nombre fini  $B_1, \dots, B_n$  d'ouverts  $B_x$  recouvre  $F$ .  $a$  appartient à l'ouvert

$$\begin{aligned} \cap \{(E - \bar{B}_i)'\} &= (\cap (E - \bar{B}_i))' \\ &= (E - \cup \bar{B}_i)' = (E - \overline{\cup B_i})'. \end{aligned}$$

Or  $F$  est inclus dans  $\overline{\cup B_i}$ , donc  $E - \overline{\cup B_i}$  est une partie de  $E - F$ , ainsi  $a$  appartient à  $(E - F)'$ . ((

*Corollaire.*

Si le recouvrement ouvert fini  $X$  de  $E$  possède un élément de complémentaire compact, alors  $X$  appartient à tout compactifiant qui vérifie  $(R_2)$ .

6.4.3. *Compactifiant d'Alexandroff.*

Appelons  $\mathcal{A}$  l'ensemble des recouvrements ouverts finis de  $E$  dont un élément au moins a son complémentaire compact.

$\mathcal{A}$  est un compactifiant sur  $E$ .

$\{E\}$  appartient à  $\mathcal{A}$ , qui n'est donc pas vide.

Vérifions que, si un élément  $X$  de  $\mathcal{A}$  est logé dans un élément  $Y$  de  $\mathcal{F}$ , alors  $Y$  appartient à  $\mathcal{A}$ .  $X$  contient un ouvert  $A$  dont le complémentaire est compact;

Y contient un ouvert B qui inclut A. Le complémentaire de B est un fermé du compact  $E - A$ , il est donc compact.

Montrons finalement que, si X et Y sont des éléments de  $\mathcal{A}$ , il en est de même de  $Z = m(X, Y)$ . X et Y contiennent respectivement les ouverts A et B de complémentaire compact.  $A \cap B$  est un élément de  $Z$  dont le complémentaire est compact, donc Z appartient à  $\mathcal{A}$ . Z est logé dans tous les éléments de  $\mathcal{F}$  de la forme indiquée dans le troisième axiome des compactifiants. Cet axiome est donc vérifié. (

Nous appellerons  $\mathcal{A}$  le *compactifiant d'Alexandroff* sur E.

*Recouvrement du compactifiant d'Alexandroff.*

Appelons « *compactification d'Alexandroff* » de E, la compactification engendrée par  $\mathcal{A}$ .

Si E est compact, alors  $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ , et E ne possède aucun recouvrement ; il est sa propre compactification d'Alexandroff.

Supposons E non compact. Un ouvert de complémentaire compact ne peut appartenir à un  $\mathcal{A}$ -recouvrement. L'ensemble  $a$  des ouverts de complémentaire compact recouvre E. C'est un recouvrement convenable ; c'est donc le seul  $\mathcal{A}$ -recouvrement. Le tamis  $\mathcal{U}_a$  se compose des ouverts de complémentaire compact. K est la réunion de E et  $a$  ; les ouverts de E auxquels on adjoint  $a$  lorsque leur complémentaire est compact forment une base de topologie de K.

6.4.4. Si E est régulier,  $\mathcal{F}$  est le compactifiant maximum sur E qui vérifie  $(R_2)$ .

6.4.5. Un espace régulier E possède un compactifiant minimum qui vérifie  $(R_2)$  si et seulement si E est localement compact ; le minimum est le compactifiant d'Alexandroff sur E.

Avant de démontrer le théorème, commençons par donner une définition et voir quelques lemmes.

*Définition.*

Nous dirons qu'un espace topologique E est localement compact lorsque tout point de E possède un voisinage compact.

Si H est une extension compacte régulière de E, si  $H - E$  est fini, alors E est localement compact.

Appelons F la réunion des fermés de  $H - E$  ; c'est un fermé de H. Si  $x$  est un point de E, il possède, dans E, un voisinage ouvert A tel que  $\overline{A'}$  soit inclus dans  $H - F$  (II, 7.4.1). Montrons que  $\overline{A'} \cap E = \overline{A}$  (II, 5.5.6) est un E-voisinage compact de  $x$ . Si les ouverts  $C_i$  de E recouvrent  $\overline{A}$ , les ouverts  $C'_i$  recouvrent  $\overline{A'}$  ; sinon  $\overline{A'} \cap (H - \cup C'_i)$  serait un fermé de  $H - E$  non inclus dans F. On peut trouver un recouvrement ouvert fini de  $\overline{A'}$  par des ouverts  $C'_i$ , donc trouver un recouvrement fini de  $\overline{A}$  par des  $C_i$ . (

Si H est une compactification uniponctuelle régulière de E, alors le compactifiant  $\mathcal{K}$  engendré par H est le compactifiant d'Alexandroff sur E.

On sait que  $\mathcal{A}$  est inclus dans  $\mathcal{K}$  (corollaire de 6.4.2). Soit maintenant l'élément X de  $\mathcal{K}$ . Il existe un élément A de X tel que  $H - E$  soit inclus dans  $A'$ .  $E - A$  est compact. (

*Démonstration de 6.4.5.*

1) Supposons que  $E$  soit régulier et localement compact. On sait que le compactifiant d'Alexandroff  $\mathcal{A}$  sur  $E$  est inclus dans tout compactifiant qui vérifie  $(R_2)$ . Montrons que  $\mathcal{A}$  vérifie  $(R_2)$ . Soit le voisinage ouvert  $A$  du point  $x$  de  $E$ . Appelons  $C$  un voisinage compact de  $x$ . Il existe un voisinage ouvert  $B$  de  $x$  tel que  $\overline{B}$  soit inclus dans  $A \cap C$ ;  $\overline{B}$  est compact.  $X = \{A, E - \overline{B}\}$  recouvre  $E$ , et  $E - \overline{B}$  a son complémentaire compact; ainsi  $X$  appartient à  $\mathcal{A}$ , qui vérifie  $(R_2)$ .

2) Supposons que  $\mathcal{K}$  soit le compactifiant minimum sur  $E$  qui vérifie  $(R_2)$ . Appelons  $K$  la compactification engendrée par  $\mathcal{K}$ .

*Montrons d'abord que  $E$  possède au plus un  $\mathcal{K}$ -recouvreage.*

Supposons que  $a$  et  $b$  soient des  $\mathcal{K}$ -recouvreages distincts sur  $E$ . Appelons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des recouvrements  $X$  de  $\mathcal{K}$  qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall A \in X, (a \in A' \leftrightarrow b \in A').$$

Appelons  $\mathcal{K}'$  le compactifiant engendré par  $\mathcal{R}$ . Remarquons que,  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathcal{R}$ ,  $m(X, Y)$  appartient à  $\mathcal{R}$  également;  $\mathcal{K}'$  est donc l'ensemble des recouvrements ouverts finis de  $E$  dans lesquels est logé un élément de  $\mathcal{R}$ .

$\mathcal{K}'$  vérifie  $(R_2)$ . En effet : Considérons un voisinage ouvert  $A$  du point  $x$ , dans  $E$ . Il existe des éléments  $C_1$  et  $C_2$  respectivement de  $a$  et  $b$  tels que  $x$  appartienne à  $C_1$  et  $C_2$ , donc à  $C_1 \cap C_2$ . Il existe un voisinage ouvert  $B$  de  $x$  tel que  $X = \{C_1 \cap C_2, E - \overline{B}\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ . Montrons que  $X$  appartient à  $\mathcal{K}'$ ,  $C_1 \cap C_2$  appartient à  $a$  et à  $b$ , donc ni  $a$  ni  $b$  n'appartiennent à  $(C_1 \cap C_2)'$ ;  $E - \overline{B}$  n'appartient ni à  $a$  ni à  $b$ , donc  $a$  et  $b$  sont des points de  $(E - \overline{B})'$ .

$\mathcal{K}'$  est inclus dans  $\mathcal{K}$ .

$\mathcal{K}'$  est distinct de  $\mathcal{K}$ . En effet :  $a$  contient un ouvert  $A$  non contenu dans  $b$ ;  $b$  contient des éléments  $B_1, \dots, B_n$  tels  $X = \{A, B_1, \dots, B_n\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ . Montrons qu'aucun élément de  $\mathcal{R}$  ne peut être logé dans  $X$ , donc que  $X$  appartient à  $\mathcal{K} - \mathcal{K}'$ . Supposons que l'élément  $Y = \{C_1, \dots, C_q\}$  de  $\mathcal{R}$  soit logé dans  $X$ . Si l'ouvert  $C_i$  de  $Y$  est inclus dans  $A$ , on a  $C_i \in a$ , donc  $a \notin C_i'$ , et donc  $b \notin C_i'$ . Si l'ouvert  $C_i$  est inclus dans un ouvert  $B_j$ , on a  $C_i \in b$ , donc  $b \notin C_i'$ . Au total,  $\{C_1', \dots, C_q'\}$  ne recouvre pas  $\mathcal{K}$ .

Finalement  $E$  possède au plus un  $\mathcal{K}$ -recouvreage. Si  $E$  ne possède aucun recouvreage, il est localement compact. Supposons que  $E$  possède un recouvreage  $a$ . Si  $x$  est un point de  $E$ , il possède un  $E$ -voisinage ouvert  $A$  qui appartient à  $a$ . Appelons  $B$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $E$  tel que  $\{A, E - \overline{B}\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .  $E - \overline{B}$  n'appartient pas à  $a$ , donc  $a$  appartient à  $(E - \overline{B})'$ .  $\overline{B}$  est donc un fermé de  $K$ ; c'est un voisinage compact de  $x$  dans  $E$ .  $E$  est localement compact. (

6.4.6. *Si  $\mathcal{K}$  est un compactifiant sur  $E$  qui vérifie  $(R_2)$ , alors les tamis  $\mathcal{U}_a$  sont sans point adhérent.*

Considérons un  $\mathcal{K}$ -recouvreage  $a$  sur  $E$ , et un point  $x$  de  $E$ .  $a$  contient un voisinage ouvert  $A$  de  $x$ . Il existe un ouvert  $B$  de  $\mathcal{U}_x$  tel que  $\{A, E - \overline{B}\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .  $E - \overline{B}$  est un ouvert de  $\mathcal{U}_a$  auquel  $x$  n'adhère pas. (

## 6.5. Étude des compactifiants réguliers.

6.5.1. Considérons un compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$  qui vérifie  $(R_1)$ . Appelons  $K$  la compactification engendrée par  $\mathcal{K}$ , et  $\Phi$  l'ensemble des restrictions à  $E$  des applications continues  $K \rightarrow T$ .

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Phi).$$

Il existe un ensemble d'applications continues  $\Phi'$  de  $E$  dans  $T$  tel que  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Phi')$  (6.3.10). Les applications de  $\Phi'$  possèdent un prolongement continu  $K \rightarrow T$  (4.10). Donc  $\Phi'$  est inclus dans  $\Phi$ , et  $\mathcal{K}(\Phi') = \mathcal{K}$  est inclus dans  $\mathcal{K}(\Phi)$ .

Soit  $f$  une application de  $\Phi$ ; appelons  $f^*$  un prolongement continu  $K \rightarrow T$  de  $f$ . Si  $X$  est un élément de  $\mathcal{K}_T$ ,  $f^{*-1}X$  est un recouvrement ouvert fini de  $K$ ; sa trace  $f^{-1}X$ , sur  $E$ , est un élément de  $\mathcal{K}$ . Or  $\mathcal{K}(\Phi)$  est engendré par les éléments  $f^{-1}X$  de  $\mathcal{K}$ . Ainsi  $\mathcal{K}(\Phi)$  est inclus dans  $\mathcal{K}$ . (

6.5.2. *Toujours dans les conditions de 6.5.1,  $\mathcal{K}$  vérifie  $(R_2)$  si et seulement si, pour tout voisinage  $A$  d'un point quelconque  $x$  de  $E$ , il existe une application continue  $f$  de  $\Phi$  telle que  $fx = 0$  et  $f(E - A) = 1$ .*

1) Supposons que  $\mathcal{K}$  vérifie  $(R_2)$ . Soit  $A$  un voisinage ouvert du point  $x$  de  $E$ . Il existe un voisinage ouvert  $B$  de  $x$  tel que  $\{A, E - \bar{B}\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ . Il existe une application  $f$  de  $\Phi$  telle que  $f(E - A) = 1$  et  $f\bar{B} = fx = 0$  (Remarque de 6.3.10).

2) Supposons l'existence des applications. Appelons  $A$  un voisinage de  $x$ . Il existe une application continue  $f$  de  $\Phi$  telle que  $f(E - A) = 1$  et  $fx = 0$ . Posons  $B = f^{-1}[0, \frac{1}{4}[$ .  $B$  est un voisinage de  $x$ .

$$\{f^{-1}[0, \frac{1}{2}[, f^{-1}[\frac{1}{3}, 1]\} = \{f^{-1}[0, \frac{1}{2}[, E - f^{-1}[0, \frac{1}{3}[$$

appartient à  $\mathcal{K}$ , et est logé dans  $\{A, E - \bar{B}\}$ . (

6.5.3. *L'espace topologique  $E$  possède un compactifiant régulier  $\mathcal{K}$  si et seulement s'il est complètement régulier.*

La condition est nécessaire (6.2).

Supposons que  $E$  soit complètement régulier. Appelons  $\Phi$  l'ensemble des applications continues  $E \rightarrow T$ .  $\mathcal{S} = \mathcal{K}(\Phi)$  est régulier (6.3.7 et 6.5.2). (

*Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que  $E$  est complètement régulier*

6.5.4. *Maximum et minimum.*

*Si  $\Phi$  désigne l'ensemble des applications continues  $E \rightarrow T$ , alors  $\mathcal{S} = \mathcal{K}(\Phi)$  est le compactifiant régulier maximum sur  $E$ .*

*$E$  possède un compactifiant régulier minimum si et seulement s'il est localement compact; le minimum est le compactifiant d'Alexandroff sur  $E$ .*

1) Supposons d'abord  $E$  localement compact;  $\mathcal{A}$  est le compactifiant minimum sur  $E$  qui vérifie  $(R_2)$  (6.4.5). Si nous montrons que  $\mathcal{A}$  vérifie  $(R_1)$ , la condition sera suffisante.

Considérons un élément  $\{A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathcal{A}$ , cherchons un ouvert  $B$  de  $E$  tel que  $\{B, A_2, \dots, A_n\}$  et  $\{A_1, E - \bar{B}\}$  appartiennent à  $\mathcal{A}$ .

*Premier cas.*  $E - A_1$  est compact. Si  $x$  est un point de  $E - A_1$ , il existe un indice  $i > 1$  tel que  $x$  appartienne à  $A_i$ .  $x$  possède un voisinage ouvert  $B_x$ , d'adhérence compacte incluse dans  $A_i$ .

Un nombre fini  $B_{x_1}, \dots, B_{x_n}$  de ces ouverts recouvre  $E - A_1$ . Posons  $B = E - \overline{\cup B_{x_j}}$ .  $X = \{B, A_2, \dots, A_n\}$  recouvre  $E$ ; le complémentaire de  $B$  dans  $E$

est compact, donc  $X$  appartient à  $\mathcal{A}$ .  $\{A, \cup B_{x_j}\}$  appartient à  $\mathcal{A}$ , et  $\cup B_{x_j}$  est inclus dans  $E - \overline{E - \cup B_{x_j}}$ ; ainsi  $\{A, E - \overline{B}\}$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

*Second cas.*  $E - A_2$ , par exemple, est compact; posons  $C = E - \cup \{A_i : i > 1\}$ .  $C$  est compact, car c'est un fermé du compact  $E - A_2$ .  $C$  est inclus dans  $A_1$ . Soit  $x$  un point de  $C$ ,  $x$  possède un voisinage ouvert  $B_x$  d'adhérence compacte incluse dans  $A_1$ . Un nombre fini  $B_{x_1}, \dots, B_{x_q}$  de ces ouverts recouvre  $C$ . Posons  $B = \cup B_{x_j}$ .  $\{B, A_2, \dots, A_n\}$  recouvre  $E$ , et appartient à  $\mathcal{A}$ . De même,  $\{A_1, E - \overline{B}\}$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

2) Supposons que l'espace  $E$  possède un compactifiant régulier minimum  $\mathcal{K}$ . Appelons  $K$  la compactification engendrée par  $\mathcal{K}$ . Montrons d'abord que  $E$  possède au plus un  $\mathcal{K}$ -recouvrement. Supposons que  $a$  et  $b$  sont des recouvrements distincts sur  $E$ . Appelons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des recouvrements  $X$  de  $\mathcal{K}$  qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall A \in X, (a \in A' \leftrightarrow b \in A').$$

Appelons  $\mathcal{K}'$  le compactifiant engendré par  $\mathcal{R}$ . On sait que  $\mathcal{K}'$  vérifie  $(R_2)$  (6.4.5); montrons qu'il vérifie  $(R_1)$ . Il suffit de vérifier  $(R_1)$  pour les éléments de  $\mathcal{R}$  (6.3.2). Soit l'élément  $\{A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathcal{R}$ . Posons  $C = K - \cup \{A'_i : i > 1\}$ .

*Premier cas.*  $a$  appartient à  $A'_1$ ;  $b$  appartient donc à  $A'_1$ .  $K - A'_1$  et  $\{a, b\} \cup C$  sont des fermés disjoints de l'espace normal  $K$ . Ils possèdent, dans  $K$ , des voisinages ouverts disjoints  $F$  et  $G$ . Posons  $G \cap E = B$ .  $\{G, A'_2, \dots, A'_n\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $K$  dont la trace  $X = \{B, A_2, \dots, A_n\}$  sur  $E$  appartient à  $\mathcal{K}$ .  $\{a, b\}$  est inclus dans  $G$ , donc dans  $B'$ ; ainsi  $X$  appartient à  $\mathcal{R}$ , donc à  $\mathcal{K}'$ .  $\overline{B'} = \overline{G}$  (II, 5.5.7) est inclus dans  $K - F$ , donc dans  $A'_1$ . Ainsi  $\{A'_1, K - \overline{B'}\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $K$  dont la trace  $Y = \{A_1, E - \overline{B}\}$  sur  $E$  appartient à  $\mathcal{K}$ .  $a$  et  $b$  appartiennent à  $B'$ ;  $B \cap (E - \overline{B})$  est vide, donc  $B' \cap (E - \overline{B})'$  est vide.  $a$  et  $b$  n'appartiennent donc ni l'un, ni l'autre à  $(E - \overline{B})'$ .  $Y$  appartient à  $\mathcal{R}$ , donc à  $\mathcal{K}'$ .

*Deuxième cas.*  $a$  n'appartient pas à  $A'_1$ ;  $b$  n'appartient pas non plus à  $A'_1$ . Il existe un ouvert  $B$  de  $E$  tel que  $X = \{B, A_2, \dots, A_n\}$  et  $Y = \{A_1, E - \overline{B}\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ .  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas à  $B'$ , ils appartiennent à  $(E - \overline{B})'$ ; ainsi  $X$  et  $Y$  sont des éléments de  $\mathcal{R}$ , donc de  $\mathcal{K}'$ .

A partir d'ici, on peut montrer que  $\mathcal{K}$  n'est pas minimum.

$E$  est localement compact puisqu'il possède une compactification régulière  $K$  pour laquelle  $K - E$  est fini. ((

6.5.5. Soient les compactifiants  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  sur l'espace topologique  $E$ ; supposons  $\mathcal{K}_2$  régulier; appelons  $K_1$  et  $K_2$  respectivement les compactifications de  $E$  engendrées par  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$ .  $K_1RK_2$  équivaut à  $K_1 \geq K_2$ .

On sait que  $K_1 \geq K_2$  implique  $K_1RK_2$  (4.11); supposons  $K_1RK_2$ , c'est-à-dire  $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_1$ .

Appelons  $f$  l'application identique  $E \rightarrow E$ .  $f$  est une application continue de  $E$  dans l'espace compact régulier  $K_2$  telle que  $f^{-1}\mathcal{K}_2$  soit inclus dans  $\mathcal{K}_1$ . On sait que  $f$  possède un prolongement continu  $f^* : K_1 \rightarrow K_2$  (4.10). On a donc  $K_1 \geq K_2$ . ((

## 7. Compactifications de Hausdorff

Toute compactification de Hausdorff d'un espace topologique est engendrée par un compactifiant.

7.1. *La compactification  $K$  d'un espace  $E$ , engendrée par un compactifiant  $\mathcal{K}$ , est de Hausdorff si et seulement si, d'une part  $E$  est de Hausdorff, et, d'autre part  $\mathcal{K}$  est régulier.*

Supposons que  $K$  soit de Hausdorff ;  $E$  est séparé, par hérédité.  $\mathcal{K}$  est régulier, puisque  $K$  l'est.

Supposons les conditions vérifiées. Les tamis  $\mathcal{U}_a$ , où  $a$  sont les  $\mathcal{K}$ -recouvrements sur  $E$ , sont séparés deux à deux (6.3.12) et sans point adhérent (6.4.6) ; ainsi  $K$  est de Hausdorff (II, 7.3.4). ((

*Remarque.*

Les conditions de l'énoncé imposent à  $E$  d'être de Tychonoff.

7.2. *Maximum.*

Appelons  $\Phi$  l'ensemble des applications continues de l'espace de Tychonoff  $E$  dans l'intervalle  $T$ .  $\mathcal{S} = \mathcal{K}(\Phi)$  est le compactifiant maximum de  $E$  qui engendre une compactification de Hausdorff.

*La compactification  $K$  de  $E$  engendrée par  $\mathcal{S}$  est la compactification de Stone-Čech de  $E$ .*

En effet, c'est un compact de Hausdorff dans lequel  $E$  est dense, et toute application continue  $E \rightarrow T$  possède un prolongement continu  $K \rightarrow T$  (4.10). On peut appliquer le théorème 27.5 de [K]. ((

7.3. *Un espace  $E$  de Hausdorff possède un compactifiant minimum qui engendre une compactification de Hausdorff si et seulement s'il est localement compact ; le minimum est le compactifiant d'Alexandroff.*

7.4. *Coïncidence du maximum et du minimum.*

Supposons que  $E$  soit séparé localement compact.

*Les compactifiants d'Alexandroff  $\mathcal{A}$  et de Stone-Čech  $\mathcal{S}$  sur  $E$  coïncident sous la condition suivante :*

*Si  $F$  et  $G$  sont des fermés disjoints de  $T$ , si  $f$  est une application continue  $E \rightarrow T$ , alors l'un des ensembles  $f^{-1}F$ ,  $f^{-1}G$  est compact.*

1) Supposons la condition vérifiée. On sait que  $\mathcal{A}$  est inclus dans  $\mathcal{S}$ . Montrons que  $\mathcal{S}$  est inclus dans  $\mathcal{A}$ .  $\mathcal{S}$  est engendré par ses recouvrements ouverts qui comportent deux éléments (6.3.5). Il suffit donc de montrer que tout élément  $X = \{A, B\}$  de  $\mathcal{S}$  appartient à  $\mathcal{A}$ . Il existe une application continue  $f : E \rightarrow T$  telle que  $f(E - A) = 0$  et  $f(E - B) = 1$  (6.3.10). L'un des ensembles  $f^{-1}\{0\}$ ,  $f^{-1}\{1\}$  est compact, supposons par exemple que ce soit  $f^{-1}\{0\}$ .  $E - A$  est un fermé du compact  $f^{-1}\{0\}$ , il est donc compact, et  $X$  appartient à  $\mathcal{A}$ .

2) Supposons que le maximum et le minimum coïncident. Considérons deux fermés disjoints  $F$  et  $G$  de  $T$  ; soit  $f$  une application continue  $E \rightarrow T$ .

$$X = \{f^{-1}(T - F), f^{-1}(T - G)\}$$

appartient à  $\mathcal{S}$ , donc à  $\mathcal{A}$ . L'un des ouverts de  $X$ , par exemple  $f^{-1}(T - F)$ , a son complémentaire compact. Or  $E - f^{-1}(T - F) = f^{-1}F$ . ((

### 7.5. Lien avec les relations de proximité.

Considérons un espace  $E$ ,  $\mathcal{T}$  de Tychonoff. On sait que l'ensemble des compactifications de Hausdorff de  $E$  est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des relations de proximité qu'on peut définir sur  $E$  et qui sont compatibles avec sa topologie [S, théorème 10]. Il en est de même pour l'ensemble des compactifiants réguliers sur  $E$ .

Soit une compactification de Hausdorff  $H$  de  $E$ ; appelons  $\delta$  la relation de proximité induite par  $H$  sur  $E$ , et appelons  $\mathcal{K}$  le compactifiant sur  $E$  engendré par  $H$ . Nous allons voir comment on peut obtenir  $\delta$  à partir de  $\mathcal{K}$  et vice-versa.

*Construction de  $\delta$  à partir de  $\mathcal{K}$ .*

Appelons  $\bar{\delta}$  la négation de  $\delta$ .

Si  $A$  et  $B$  sont des parties de  $E$ ,  $A\bar{\delta}B$  équivaut à  $\{E - \bar{A}, E - \bar{B}\} \in \mathcal{K}$ .

$H$  possède une seule relation de proximité compatible avec sa topologie, à savoir :

$$X\bar{\delta}Y = \bar{\bar{X}} \cap \bar{\bar{Y}} = \emptyset \text{ [S, théorème 1].}$$

Si  $A$  et  $B$  sont des parties de  $E$  telles que  $A\bar{\delta}B$ , alors,  $\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = \emptyset$ . Les ouverts  $H - \bar{\bar{A}}$  et  $H - \bar{\bar{B}}$  recouvrent  $H$ , et leurs traces sur  $E$  sont  $E - \bar{A}$  et  $E - \bar{B}$ . Ainsi  $\{E - \bar{A}, E - \bar{B}\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ .

Réciproquement, si  $\{E - \bar{A}, E - \bar{B}\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ ,  $\bar{\bar{A}}$  et  $\bar{\bar{B}}$  sont des fermés disjoints de  $H$ , et donc  $A\bar{\delta}B$ . ((

*Construction de  $\mathcal{K}$  à partir de  $\delta$ .*

La partie finie  $\{A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathcal{T}$  est un élément de  $\mathcal{K}$  si et seulement s'il existe un recouvrement  $\{B_1, \dots, B_n\}$  de  $E$  tel que, pour tout  $i$ ,  $B_i\bar{\delta}E - A_i$ .

1) Considérons l'élément  $\{A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathcal{K}$ ;  $\{A'_1, \dots, A'_n\}$  est un recouvrement ouvert de  $H$ . Les ensembles  $H - A'_1$  et  $H - \cup \{A'_i : i \neq 1\}$  sont des fermés disjoints de  $H$ . Ils possèdent, dans  $H$ , les voisinages ouverts disjoints respectifs  $C$  et  $D_1$ . D'une part  $\bar{\bar{D}}_1 \cap (H - A'_1) = \emptyset$ , d'autre part  $\{D_1, A'_2, \dots, A'_n\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $H$ . Appelons  $B_1$  la trace de  $D_1$  sur  $E$ , on a  $\{B_1, A_2, \dots, A_n\} \in \mathcal{K}$  et  $B_1\bar{\delta}(E - A_1)$ .

En répétant successivement pour  $A_2, \dots$  la construction qui vient d'être faite pour  $A_1$ , on finira par trouver un recouvrement de  $E$  qui répond aux conditions de l'énoncé (en prime, ce sera un élément de  $\mathcal{K}$ ).

2) Considérons la partie finie  $X = \{A_1, \dots, A_n\}$  de  $\mathcal{T}$  pour laquelle il existe un recouvrement  $\{B_1, \dots, B_n\}$  de  $E$  tel que, pour tout  $i$ ,  $B_i\bar{\delta}E - A_i$ .

Quel que soit  $i$ ,  $\bar{\bar{B}}_i \cap \bar{\bar{E}} - \bar{\bar{A}}_i = \emptyset$ , donc  $\bar{\bar{B}}_i \subset H - \bar{\bar{E}} - \bar{\bar{A}}_i$ . On a

$$\cup \bar{\bar{B}}_i = \bar{\bar{\cup B}}_i = \bar{\bar{E}} = H = \cup H - \bar{\bar{E}} - \bar{\bar{A}}_i.$$

Ainsi  $\{H - \overline{E - A_i}\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $H$  ; sa trace sur  $E$  est  $X$  qui est donc un élément de  $\mathcal{K}$ . ((

## 8. Compactifications uniponctuelles

8.1. Si  $H$  est une compactification uniponctuelle de l'espace non compact  $E$ , alors  $H$  est engendrée par un compactifiant.

Appuyons-nous sur 3.4.

Appelons  $a$  le point de  $H - E$ .  $a$  est fermé dans  $H$ , sinon tout recouvrement ouvert de  $E$  serait la trace sur  $E$  d'un recouvrement ouvert de  $H$ , et  $E$  serait compact.  $H$  est le minimum de sa classe, car les conditions de (II, 6.8) sont réunies, et la classe de  $H$  est un singlet. ((

8.2. La compactification  $K$  engendrée par le compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$  est uniponctuelle si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) Chaque élément  $X$  de  $\mathcal{K}$  contient un ouvert  $A$  de complémentaire compact tel que  $\forall Y \in \mathcal{F}, A \in Y \Rightarrow Y \in \mathcal{K}$  ;

b)  $E$  n'est pas compact, ou bien  $\mathcal{K}$  est distinct de  $\mathcal{F}$ .

1) Supposons que  $\mathcal{K}$  engendre une compactification uniponctuelle. Appelons  $a$  le recouvrement de  $K - E$ . Soit  $X$  un élément de  $\mathcal{K}$  ; il existe un ouvert  $A$  de  $X$  tel que  $A'$  contienne  $a$ .  $K - A' = E - A$  est compact. Si l'élément  $Y$  de  $\mathcal{F}$  contient  $A$ , il est la trace sur  $E$  d'un recouvrement ouvert fini de  $K$ , et  $Y$  appartient à  $\mathcal{K}$ .

Supposons que  $E$  soit compact et que  $\mathcal{K} = \mathcal{F}$ .  $a$  est un recouvrement ouvert de  $E$  qui possède un sous-recouvrement fini  $X$ .  $X$  appartient à  $\mathcal{K}$ , donc  $a$  ne serait pas convenable.

2) Supposons les conditions vérifiées. Si  $E$  n'est pas compact, il possède un recouvrement ouvert  $\mathcal{R}$  qui n'inclut pas de sous-recouvrement fini.  $\mathcal{R}$  est  $\mathcal{K}$ -convenable. De même, si  $\mathcal{K}$  diffère de  $\mathcal{F}$ ,  $E$  possède un recouvrement ouvert  $\mathcal{K}$ -convenable. Ainsi  $E$  possède un  $\mathcal{K}$ -recouvrement  $a$ . Montrons qu'il est unique. Appelons  $b$  un  $\mathcal{K}$ -recouvrement distinct de  $a$ .  $b$  contient un ouvert  $B$  qui n'appartient pas à  $a$ .  $a$  contient des ouverts  $B_1, \dots, B_n$  tels que  $X = \{B, B_1, \dots, B_n\}$  appartienne à  $\mathcal{K}$ .  $X$  contient un ouvert  $A$  de complémentaire compact tel que

$$\forall Y \in \mathcal{F}, (A \in Y \Rightarrow Y \in \mathcal{K}).$$

Supposons que  $A$  appartienne à  $a$ . Un nombre fini d'éléments  $A_1, \dots, A_q$  de  $a$  recouvre  $E - A$ .  $Y = \{A, A_1, \dots, A_q\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ , et  $a$  n'est pas convenable. De même, si on suppose que  $A$  appartient à  $b$ , on démontrera que  $b$  n'est pas convenable. Au total,  $E$  possède un et un seul  $\mathcal{K}$ -recouvrement et la compactification engendrée par  $\mathcal{K}$  est uniponctuelle. ((

*Remarque.*

Appelons  $a$  le recouvrement d'un compactifiant  $\mathcal{K}$  qui engendre une compactification uniponctuelle.  $\mathcal{U}_a$  est l'ensemble des ouverts  $A$  de  $E$  dont le complémentaire est compact, et qui vérifient la propriété suivante :  $\forall X \in \mathcal{F}, (A \in X \Rightarrow X \in \mathcal{K})$ .

8.3. L'espace topologique  $E$  possède un compactifiant minimum qui engendre une compactification uniponctuelle si et seulement s'il n'est pas monocompact.  $\mathcal{M}$  est le compactifiant en question.

Pour le voir, il suffit de se reporter à 4.8.2. ((



Si  $E$  n'est pas compact,  $\mathcal{A}$  est son compactifiant maximum qui engendre une compactification uniponctuelle.

## 9. Compactifications dans une classe d'extensions

Considérons la classe  $\mathcal{G}$  des extensions de l'espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{T}$  associées à la famille  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  de tamis sur  $E$ . Appelons  $H = E \cup I$  le support des extensions (\*); appelons respectivement  $H$ ,  $\theta_u$  et  $H$ ,  $\theta_U$  le minimum et le maximum de  $\mathcal{G}$ .

9.1.  $\mathcal{G}$  contient des compactifications si et seulement si  $H$ ,  $\theta_u$  est compact.

Appelons  $\mathcal{K}$  l'ensemble des recouvrements ouverts finis  $X$  de  $E$  tels que tout tamis  $\mathcal{U}_i$  contienne au moins un ouvert de  $X$ .  $\mathcal{K}$  est un compactifiant sur  $E$ . Si  $H$ ,  $\theta$  est une extension quelconque de  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{K}$  est tout simplement l'ensemble des traces sur  $E$  des recouvrements ouverts finis de  $H$ ,  $\theta$ .

9.2.  $H$ ,  $\theta_u$  est compact si et seulement si tous les tamis  $\mathcal{U}_a$ , où  $a$  est un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$ , appartient à  $(\mathcal{U}_i)$ .

1) Supposons la condition vérifiée. Considérons un recouvrement ouvert  $\{A'\}$  de  $H$ ,  $\theta_u$  par des ouverts de la base  $\{B' : B \in \mathcal{T}\}$  de topologie de  $H$ ,  $\theta_u$ .  $\{A'\}$  n'est pas convenable, sinon il existerait un  $\mathcal{K}$ -recouvrement  $a$  qui contiendrait  $\{A'\}$ , et  $\{A'\}$  ne recouvrirait pas l'ensemble non vide des points  $i$  de  $I$  pour lesquels  $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_i$ . Ainsi, il existe un élément  $X$  de  $\mathcal{K}$  inclus dans  $\{A'\}$ .  $\{B' : B \in X\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $H$ ,  $\theta_u$  inclus dans  $\{A'\}$ .

2) Supposons que  $H$ ,  $\theta_u$  soit compact. Appelons  $a$  un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$ .  $\{A' : A \in a\}$  ne recouvre pas  $H$ . Donc il existe un point  $i$  de  $I$  tel que  $a \cap \mathcal{U}_i = \emptyset$ , donc tel que  $a \subset \mathcal{T} - \mathcal{U}_i$ . Ainsi  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$  recouvre  $E$ ; or  $\mathcal{T} - \mathcal{U}_i$  est convenable; donc  $a = \mathcal{T} - \mathcal{U}_i$ , et  $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_i$ . ((

9.3. Si  $H$ ,  $\theta_u$  est compact et si  $I$ , considéré comme sous-espace d'une extension  $H$ ,  $\theta$  de  $\mathcal{G}$ , est compact, alors  $H$ ,  $\theta$  est compact.

Appelons  $\mathcal{R}$  un recouvrement ouvert de  $H$ ,  $\theta$ . Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{R}$ , posons  $fA = (A \cap E)'$ .  $\{fA : A \in \mathcal{R}\}$  est un recouvrement ouvert de  $H$ ,  $\theta_u$  qui contient donc un sous-recouvrement fini  $\{fA_1, \dots, fA_n\}$ . D'autre part,  $I$  possède un recouvrement fini  $\{B_1, \dots, B_q\}$  par des ouverts de  $\mathcal{R}$ .  $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_q\}$  est un recouvrement ouvert fini de  $H$ ,  $\theta$  inclus dans  $\mathcal{R}$ . ((

9.4. Toutes les extensions de  $\mathcal{G}$  sont compactes si et seulement si  $H$ ,  $\theta_U$  est compact.

9.5.  $H$ ,  $\theta_U$  est compact si et seulement si, d'une part  $H$ ,  $\theta_u$  est compact, et, d'autre part,  $I$  est fini.

1) Si  $H$ ,  $\theta_U$  est compact,  $H$ ,  $\theta_u$  est évidemment compact. Le recouvrement ouvert  $\{E \cup \{i\} : i \in I\}$  de  $H$ ,  $\theta_U$  doit posséder un sous-recouvrement fini, donc  $I$  est fini.

2) Si les conditions sont vérifiées,  $H$ ,  $\theta_U$  est compact en vertu de 9.3. ((  
Nous dirons qu'une partie  $A$  de l'extension  $H$ ,  $\theta$  de  $\mathcal{G}$  vérifie la propriété  $P(\theta)$

(\*) On suppose  $E \cap I = \emptyset$ .

lorsque  $A \cap E$  appartient à  $\mathcal{C}$ , que  $A \cap I$  est inclus dans  $I_{A \cap E}$  et que  $H - A$  est un compact de  $H, \theta$ .

9.6. Si  $H, \theta$  est une compactification de  $\mathcal{G}$ , si  $A \subset H$  vérifie  $P(\theta)$ , alors  $H$ , muni de la topologie  $\theta_1$  engendrée par les ouverts de  $\theta$  auxquels on adjoint  $A$ , est une compactification de  $\mathcal{G}$ .

$H$ , muni de la topologie  $\theta_1$ , est une extension de  $\mathcal{G}$ .

$\mathcal{B} = \{X : \exists Y \in \theta, X = Y \text{ ou } X = Y \cap A\}$  est une base de topologie de  $H, \theta_1$ . Considérons un recouvrement  $\mathcal{R}$  de  $H$  par des ouverts de  $\mathcal{B}$ . Pour tout ouvert  $X$  de  $\mathcal{B}$ , appelons  $fX$  un ouvert de  $\theta$  tel que  $X = fX$  ou  $X = (fX) \cap A$ .  $\{fX : X \in \mathcal{R}\}$  est un recouvrement de  $H$  par des ouverts de  $\theta$ ; il possède un sous-recouvrement fini  $\{fX_1, \dots, fX_n\}$ .  $\{X_1, \dots, X_n\}$  est un recouvrement fini de  $A$  par des ouverts de  $\mathcal{R}$ . Les ouverts de  $\mathcal{R}$  qui rencontrent  $H - A$  forment un recouvrement de celui-ci par des ouverts de  $\theta$ ; ce recouvrement possède un sous-recouvrement fini  $\{X_{n+1}, \dots, X_{n+q}\}$ . Au total,  $\{X_1, \dots, X_{n+q}\}$  est un sous-recouvrement fini de  $\mathcal{R}$ . ((

9.7.  $H, \theta_u$  est la seule extension compacte de  $\mathcal{G}$  si et seulement si toute partie  $A$  de  $H$  qui vérifie  $P(\theta_u)$  est un ouvert de  $\theta_u$ .

1) Supposons que  $\mathcal{G}$  contienne une compactification  $H, \theta$  distincte de  $H, \theta_u$ .  $\theta$  contient un ouvert  $A$  qui n'appartient pas à  $\theta_u$ ;  $A$  vérifie  $P(\theta_u)$ .

2) Si  $H$  inclut une partie  $A$  qui vérifie  $P(\theta_u)$  sans être ouverte dans  $\theta_u$ , alors, par 9.6, on peut construire une compactification de  $\mathcal{G}$  distincte de  $H, \theta_u$ . ((

*Exemple.*

Toute compactification de Hausdorff d'un espace topologique de Tychonoff est minimum dans sa classe  $\mathcal{G}$ ; elle est la seule extension compacte de  $\mathcal{G}$ .

9.8. Le maximum et le minimum de  $\mathcal{G}$  coïncident et sont compacts si et seulement si, d'une part  $I$  est fini, et, d'autre part,  $\theta_u$  peut être engendré par un compactifiant.

1) Supposons que  $\theta_u$  et  $\theta_V$  sont des topologies compactes de  $H$  qui coïncident.  $I$  est fini et ses points sont fermés dans  $H, \theta_V$ , donc dans  $H, \theta_u$ . Ainsi,  $H, \theta_u$  peut s'obtenir à partir d'un compactifiant.

2) Supposons les conditions vérifiées, et appuyons-nous sur (II, 6.8). Considérons un point  $x$  de  $E$ ; tout point  $i$  de  $I$  est fermé dans  $H, \theta_u$ , donc il existe un ouvert  $A_i$  de  $E$  tel que  $A_i$  contienne  $x$  sans contenir  $i$ .  $\bigcap \{A_i : i \in I\}$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $E$  qui n'appartient à aucun tamis de  $(\mathcal{U}_i)$ .

Si, maintenant  $i$  et  $j$  sont des points distincts de  $I$ , il existe un ouvert  $A_j$  de  $\mathcal{U}_i$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{U}_j$ .  $\bigcap \{A_j : j \in I \text{ et } j \neq i\}$  est un ouvert de  $\mathcal{U}_i$  qui n'appartient à aucun autre tamis de  $(\mathcal{U}_i)$ . ((

*Exemple.*

Toute compactification  $H$  de Hausdorff d'un espace de Tychonoff  $E$ , pour laquelle  $H - E$  est fini, appartient à une classe réduite à un seul élément.

9.9. Si  $\mathcal{G}$  possède une compactification maximum  $H, \theta$ , alors les ouverts de  $\theta$  sont les parties de  $H$  qui vérifient  $P(\theta_u)$ .

Tout d'abord, un ouvert de  $H, \theta$  vérifie  $P(\theta_u)$ . Si, d'autre part, on possède

une partie  $A$  de  $H$  qui vérifie  $P(\theta_u)$ , on sait construire une compactification de  $\mathcal{G}$  dont  $A$  est un ouvert ; ainsi  $A$  appartient à  $\theta$ .  $\llcorner$

## 10. Etude de quelques compactifications

### 10.1. Compactification d'Alexandroff, de Stone-Čech, de Wallman.

La nécessité nous a contraint d'étudier précédemment ces compactifications.

### 10.2. Droite numérique achevée.

#### 10.2.1. Définition.

On obtient la droite numérique achevée  $\bar{\mathbb{R}}$  à partir de la droite numérique  $\mathbb{R}$  en adjoignant à  $\mathbb{R}$  deux points distincts  $-\infty$  et  $+\infty$  qui ne lui appartiennent pas. On prolonge à  $\bar{\mathbb{R}}$  l'ordre de  $\mathbb{R}$  en posant  $-\infty < a < +\infty$ , pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}$ . On munit  $\bar{\mathbb{R}}$  de la topologie engendré par l'ensemble des intervalles des formes suivantes :  $]a, b[$ ,  $[-\infty, b[$ ,  $]a, +\infty[$ , où  $a$  et  $b$  sont des points de  $\mathbb{R}$ .

Les intervalles de la forme  $[-\infty, a[$  (respectivement  $]a, +\infty[$ ), où  $a$  appartient à  $\mathbb{R}$  forment un système fondamental de voisinages de  $-\infty$  (respectivement de  $+\infty$ ).

#### 10.2.2. Description de $\mathcal{K}_{\bar{\mathbb{R}}}$ .

Appelons  $\mathcal{K}_{\bar{\mathbb{R}}}$  le compactifiant sur  $\mathbb{R}$  engendré par  $\bar{\mathbb{R}}$ . Considérons un homéomorphisme croissant  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$ . Définissons un prolongement  $f^* : \bar{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]$  de  $f$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\rightarrow f^*x = fx ; \\ -\infty &\rightarrow 0 ; \\ +\infty &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

$f^*$  est un homéomorphisme  $\bar{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]$  [ $B_2$  : Chapitre 4, paragraphe 4, n° 2, proposition 2].

Nous avons décrit en 6.3.6 les recouvrements ouverts finis de l'intervalle  $[0, 1]$  ; nous en déduisons que le compactifiant  $\mathcal{K}_{\bar{\mathbb{R}}}$  sur  $\mathbb{R}$  est engendré par l'ensemble des recouvrements ouverts de  $\mathbb{R}$  de la forme  $\{ ]-\infty, a[ , ]b, +\infty[ \}$ , où  $a$  et  $b$  sont des points de  $\mathbb{R}$  tels que  $a > b$ .

10.2.3. Si le compactifiant régulier  $\mathcal{K}$  sur  $\mathbb{R}$  possède exactement deux recouvrements, alors il coïncide avec  $\mathcal{K}_{\bar{\mathbb{R}}}$ .

Il faut montrer que, si  $K = \{x, y\} \cup \mathbb{R}$  est une extension compacte séparée de  $\mathbb{R}$  (où  $x$  et  $y$  n'appartiennent pas à  $\mathbb{R}$ ), alors  $K$  est homéomorphe à  $\bar{\mathbb{R}}$ .

Tout intervalle borné  $A = ]a, b[$  de  $\mathbb{R}$  est ouvert dans  $K$ .

Montrons que  $A'^K = A$  ; supposons le contraire ; supposons, par exemple que  $x$  appartient à  $A'$ .  $B = [a, b]$  est compact, c'est donc un fermé de  $K$ .  $(K - B) \cap A'$  est un ouvert non vide de  $K$  qui ne rencontre pas  $\mathbb{R}$  !

Considérons deux  $K$ -voisinages ouverts disjoints  $C$  et  $D$  respectivement de  $x$  et  $y$ . L'ensemble  $F = K - (C \cup D)$  est compact, puisque c'est un fermé de  $K$  ; il appartient à  $\mathbb{R}$ , donc il est borné. Appelons  $G = [c, d]$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$  qui inclut  $F$ .  $G$  est fermé dans  $K$ .  $K - G$  est un ouvert de  $K$  qui contient  $x$  et  $y$ .  $\{ ]-\infty, c[ \cap C, ]-\infty, c[ \cap D \}$  est un recouvrement de  $]-\infty, c[$  par des ouverts

disjoints. Puisque  $] - \infty, c[$  est connexe, on a par exemple  $] - \infty, c[ \cap D = \emptyset$ . D'où  $] - \infty, c[ \cap C = ] - \infty, c[ \setminus d$ ,  $+ \infty[ \cap D$  n'est pas vide, sinon  $\{y\}$  serait un ouvert de  $K$  qui ne rencontre pas  $R$ . Ainsi  $]d, + \infty[ \cap C$  est vide, et  $\{x\} \cup ] - \infty, c[$  est un ouvert de  $K$ .

Les ensembles de la forme  $\{x\} \cup ] - \infty, e[$ , où  $e$  appartient à  $R$ , sont  $K$ -ouverts.

Si  $e$  est inférieur à  $c$ , c'est évident, car on peut refaire le raisonnement précédent en remplaçant  $c$  par  $e$ . Si  $e$  est supérieur à  $c$ , on écrira

$$\{x\} \cup ] - \infty, e[ = \{x\} \cup ] - \infty, c[ \cup ]c - 1, e[.$$

De même, les ensembles de la forme  $\{y\} \cup ]e, + \infty[$ , où  $e$  appartient à  $R$ , sont des ouverts de  $K$ .

Définissons comme suit une bijection  $f : K \rightarrow \bar{R}$  :

$$a \in R \subset K \rightarrow a \in \bar{R} ;$$

$$x \in K \rightarrow - \infty \in \bar{R} ;$$

$$y \in K \rightarrow + \infty \in \bar{R}.$$

$f$  est un homéomorphisme.

Il suffit de montrer que  $f$  est continue [J<sub>1</sub>, Chap. VI, n° 6.3], donc que tout générateur de la topologie de  $R$  dont la forme est donnée en 10.2.1, a une image réciproque ouverte par  $f$ . C'est acquis. ((

10.2.4. Les seuls compactifiants réguliers sur  $R$  qui possèdent un nombre fini de recouvrements sont  $\mathcal{H}_{\bar{R}}$  et  $\mathcal{A}$  (compactifiant d'Alexandroff).

Il suffit de montrer qu'il est impossible de trouver une compactification séparée  $K$  de  $R$  pour laquelle  $K - R$  est fini et comporte plus de deux points. Supposons le contraire. Appelons  $x_1, \dots, x_n$  ( $n > 2$ ) les points de  $K - R$ . On peut trouver  $nK$ -ouverts disjoints  $A_i$  qui contiennent respectivement les points  $x_i$ , sans contenir d'autre point de  $K - R$ .  $F = K - (\cup A_i)$  est fermé, donc compact dans  $K$ .  $F$  est inclus dans  $R$ , donc il est borné. On peut trouver un intervalle borné  $G = [a, b]$  de  $R$  qui inclut  $F$ .  $G$  est compact, c'est donc un fermé de  $K$ .

Posons  $D = ] - \infty, a[ \cup ]b, + \infty[$ . Les ouverts disjoints  $A_i \cap D$  recouvrent  $D$  ; or  $D$  ne possède que deux composantes connexes ; ainsi, l'un des ouverts, par exemple  $D \cap A_1$ , est vide.  $\{x_1\} = (K - G) \cap A_1$  est un ouvert non vide de  $K$  qui ne rencontre pas  $R$  ! ((

10.2.5. Remarque : Si  $n$  est supérieur à 1, le seul compactifiant régulier sur  $R^n$  qui possède un nombre fini de recouvrements est le compactifiant d'Alexandroff  $\mathcal{A}$ .

Il suffit de montrer qu'il est impossible que  $R^n$  ( $n < 1$ ) possède une compactification séparée  $K$  pour laquelle  $K - R^n$  est fini et comporte plus d'un point. Supposons le contraire, appelons  $x_1, \dots, x_p$  ( $p > 1$ ) les points de  $K - R^n$ . On peut trouver  $p$  ouverts disjoints  $A_i$  de  $K$  qui contiennent respectivement les points  $x_i$ , sans contenir d'autres points de  $K - R^n$ .  $F = K - (\cup A_i)$  est fermé, donc compact dans  $K$ .  $F$  est inclus dans  $R^n$ , donc il est borné. On peut trouver une boule fermée  $B$  de rayon  $r$ , centrée sur l'origine qui inclut  $F$ .  $B$  est compacte, donc c'est un fermé de  $K$ . Posons  $D = R^n - B$ . Les ouverts disjoints  $A_i \cap D$  recouvrent  $D$  ; or  $D$  est connexe ; ainsi l'un des ouverts, par exemple  $A_1 \cap D$ , est vide.  $\{x_1\} = (K - B) \cap A_1$  est un ouvert non vide de  $K$  qui ne rencontre pas  $R^n$  ! ((

### 10.3. Espaces projectifs réels.

On peut considérer l'espace projectif réel  $P_n$  à  $n$  dimensions comme une com-

compactification de l'espace numérique réel  $\mathbb{R}^n$  à  $n$  dimensions. Nous allons décrire le compactifiant sur  $\mathbb{R}^n$  qui engendre  $P_n$ . Plus précisément, nous allons partir d'une boule ouverte  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ , finie, non vide, centrée sur l'origine  $0$ , et nous allons construire un compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $B$  qui engendre une compactification  $K$  homéomorphe à  $P_n$ . Appelons  $\mathcal{T}$  la topologie de  $B$ .

Soit  $S$  la frontière de  $B$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Si  $A$  est une partie de  $B$ , nous appellerons  $1A$  l'ensemble des points  $x$  de  $S$  qui possèdent un voisinage  $V$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que la trace sur  $B$  de  $V \cup (-V)$  soit incluse dans  $A$ .  $1A$  est un ouvert de  $S$ ; pour tout couple de parties  $A$  et  $C$  de  $B$ , on a  $1(A \cap C) = (1A) \cap (1C)$ .

### 10.3.1. Le compactifiant $\mathcal{K}$ .

$\mathcal{K}$  sera l'ensemble des recouvrements ouverts finis  $X$  de  $B$  pour lesquels  $\cup \{1A : A \in X\} = S$ .

Le recouvrement de  $B$  réduit à  $B$  montre que  $\mathcal{K}$  n'est pas vide. Si  $X$  est un élément de  $\mathcal{K}$ , logé dans le recouvrement ouvert fini  $Y$  de  $B$ ,  $Y$  appartient à  $\mathcal{K}$ . Supposons que  $X = \{A_1, \dots, A_n\}$  et  $Y = \{B_1, \dots, B_q\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ ; montrons que  $Z = \{A_1 \cap B_1, A_2, \dots, A_n, B_2, \dots, B_q\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ .  $Z$  recouvre  $B$ . Soit  $x$  un point de  $S$ ; si  $x$  appartient à  $1A_1$  et  $1B_1$ , alors il appartient à  $1(A_1 \cap B_1)$ ; si, par exemple,  $x$  n'appartient pas à  $1A_1$ , il existe un ouvert  $A_p$  de  $X$  tel que  $x \in 1A_p$ . Au total,  $\cup \{1A : A \in Z\} = S$ .

### 10.3.2. Identification des recouvrements.

Pour tout point  $x$  de  $S$ , posons  $a_x = \{A \in \mathcal{T} : x \notin 1A\}$ .

$a_x$  est un recouvrement ouvert de  $B$  parce qu'il contient les boules ouvertes  $A$  de  $\mathcal{T}$  dont l'adhérence dans  $\mathbb{R}^n$  ne rencontre pas  $S$ .

$a_x$  est évidemment convenable. On a  $a_x = a_{-x}$ .

*Si  $a$  est un recouvrement convenable, il est inclus dans un  $a_x$ .*

Supposons le contraire, pour chaque point  $x$  de  $S$ , on pourrait trouver un ouvert  $A_x$  de  $a$  tel que  $x$  appartienne à  $1A_x$ . Par suite de la compacité de  $S$ , le recouvrement ouvert de  $S$  par les  $1A_x$  contient un sous-recouvrement fini  $\{1B_i\}$  de  $S$ .

Tout point  $x$  de  $S$  possède, dans  $\mathbb{R}^n$ , un voisinage  $V_x$  dont la trace sur  $B$  est incluse dans un  $B_i$ . L'ensemble  $C = B - \cup V_x$  est fermé, et borné dans  $\mathbb{R}^n$ , donc il est compact; de plus, il contient l'ensemble  $B - \cup B_i$ . Le recouvrement  $a$  de  $C$ , dans  $\mathbb{R}^n$ , contient un sous-recouvrement fini  $\{C_j\}$ . La partie finie  $\{B_i\} \cup \{C_j\}$  de  $a$  est un élément de  $\mathcal{K}$ , et  $a$  n'est pas convenable! (

*Si  $x$  et  $y$  sont des points distincts non antipodiques de  $S$ ,  $a_x$  est différent de  $a_y$ .*

Dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe quatre boules ouvertes  $V_x, V_y, V_{-x}, V_{-y}$ , non vides, de même rayon, deux à deux disjointes, et de centres respectifs  $x, y, -x, -y$ . Posons  $A = (V_y \cup V_{-y}) \cap B$ ; on a  $A \in a_x$  et  $A \notin a_y$ . (

*Si, à  $a_x$ , on adjoint un ouvert  $A$  de  $\mathcal{T}$  non contenu dans  $a_x$ , le nouveau recouvrement  $\mathcal{R}$  obtenu n'est pas convenable.*

On a d'abord  $x \in 1A$  et  $-x \in 1A$ ; le paragraphe précédent montre ensuite que, pour tout  $y$  distinct de  $x$  et  $-x$ ,  $a_x$  contient un ouvert  $A_y$  tel que  $y$  appartienne à  $1A_y$ . A partir d'ici, nous savons comment construire un élément de  $\mathcal{K}$  inclus dans  $\mathcal{R}$ . (

Les trois résultats précédents montrent que les recouvrements sur  $B$  sont les ensembles  $a_x = a_{-x}$ .

Les tamis  $\mathcal{U}_{a_x}$ .

Les ouverts de  $\mathcal{U}_{a_x}$  sont les ouverts  $A$  de  $B$  tels que  $x \in 1A$ .

### 10.3.3. $K$ et $P_n$ sont homéomorphes.

Appelons  $K$  la compactification de  $B$  engendrée par  $\mathcal{K}$ . Soit  $\bar{B}$  l'adhérence de  $B$  dans  $\mathbb{R}^n$ ; appelons  $P$  l'espace quotient de  $\bar{B}$  selon l'équivalence  $r$  qui identifie les points antipodiques de  $S$ .  $P$  est homéomorphe à  $P_n$ ; nous allons montrer que  $K$  est homéomorphe à  $P$ .  $p$  sera la projection  $\bar{B} \rightarrow P$ .

Désignons par  $f$  l'application  $K \rightarrow P$  définie comme suit :

$$\begin{aligned}x \in B \subset K &\rightarrow fx = px \in P; \\a_x \in K - B &\rightarrow fa_x = px \in P.\end{aligned}$$

$f$  est une bijection; montrons que  $f$  est un homéomorphisme. Il suffit de montrer que  $f$  est continue [ $J_1$ , Chapitre VI, n° 6.3].

Considérons un ouvert  $A$  de  $P$ . Soit  $k$  un point de  $f^{-1}A$ , montrons que  $k$  possède un  $K$ -voisinage inclus dans  $f^{-1}A$ . Supposons d'abord que  $k$  appartienne à  $B$ ;  $(f^{-1}A) \cap B = (p^{-1}A) \cap B$  est un voisinage de  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $k$  possède un voisinage  $C$  inclus dans  $(f^{-1}A) \cap B$ , dont l'adhérence ne rencontre pas  $S$ .  $C$  est un voisinage ouvert de  $k$  dans  $K$  inclus dans  $f^{-1}A$ .

Supposons maintenant que  $k$  appartienne à  $K - B$ . Il existe un point  $x$  de  $S$  tel que  $k = a_x$ .  $p^{-1}A$  est un voisinage de  $x$  dans  $\bar{B}$ .  $p^{-1}A$  est saturé pour  $r$ ; dans  $\mathbb{R}^n$ , il existe donc une boule ouverte  $C$ , centrée sur  $x$ , non vide, telle que  $(C \cup (-C)) \cap \bar{B}$  soit inclus dans  $p^{-1}A$ . Posons  $D = (C \cup (-C)) \cap B$ . C'est un ouvert de  $B$ ;  $1D$  vaut  $(C \cup (-C)) \cap S$ .  $D'$  est un voisinage de  $a_x$ , inclus dans  $f^{-1}A$ . (

## 11. Compactification des produits

Considérons une famille  $(E_i)_{i \in I}$  d'espaces topologiques non vides, et soit  $H$  une compactification de l'espace produit  $\prod E_i$ .

Quand existe-t-il des compactifications  $H_i$ , respectivement des espaces  $E_i$ , telles qu'il existe un homéomorphisme de  $\prod H_i$  sur  $H$  qui, réduit à  $\prod E_i$ , soit l'identité? Nous allons répondre à cette question dans le cas où  $H$  est une compactification engendrée par un compactifiant sur  $\prod E_i$ .

11.1. Considérons la famille  $(E_i)$  d'espaces topologiques non vides, et supposons qu'à chacun d'entre eux soit associée une compactification  $H_i$ . Voyons quand  $\prod H_i$  est une compactification de  $\prod E_i$  engendrée par un compactifiant. Faisons d'abord abstraction de la compacité des espaces  $H_i$ .

### 11.1.1. $\prod H_i$ est une extension de $\prod E_i$ .

Nous devons montrer que  $\prod E_i$  est dense dans  $\prod H_i$ . Soit un ouvert non vide  $A$  de  $\prod H_i$ .  $A$  inclut un ouvert  $B$  de la forme  $B = \prod B_i$ , où, pour tout  $i$ ,  $B_i$  est un ouvert non vide de  $H_i$ , distinct de  $H_i$  pour un nombre fini d'indices. Pour tout  $i$ ,  $B_i$  rencontre  $E_i$ ; choisissons  $x_i$  dans  $B_i \cap E_i$ .  $(x_i)$  est un point de  $\prod E_i$  qui appartient à  $B$ , donc à  $A$ . (

11.1.2. Si, pour tout  $i$  de  $I$ ,  $A_i$  est un ouvert de  $E_i$ , distinct de  $E_i$  pour un nombre fini d'indices, alors  $\Pi A'_i = (\Pi A_i)'$ .

$\Pi A'_i$  est un ouvert de  $\Pi H_i$  dont la trace sur  $\Pi E_i$  est  $\Pi A_i$ , donc  $\Pi A'_i$  est inclus dans  $(\Pi A_i)'$ . Supposons maintenant que  $(x_i)$  soit un point de  $(\Pi A_i)'$ . Il existe une famille d'ouverts  $B_i$ , respectivement de  $H_i$ , distincts de  $H_i$  pour un nombre fini d'indices, tels que  $(x_i) \in \Pi B_i \subset (\Pi A_i)'$ . Pour tout  $i$ ,  $B_i$  est un voisinage ouvert de  $x_i$  dans  $H_i$ , dont la trace sur  $E_i$  est incluse dans  $A_i$ .  $x_i$  appartient donc à  $A'_i$ , et  $(x_i)$  appartient à  $\Pi A'_i$ . (

11.1.3. Les ouverts  $B'$ , où  $B$  est un ouvert de  $\Pi E_i$ , forment une base de topologie de  $\Pi H_i$  si et seulement si, pour tout  $i$ , les ouverts  $A'$  de  $H_i$ , où  $A$  est un ouvert de  $E_i$ , forment une base de topologie de  $H_i$ .

1) Supposons que, pour tout  $i$ , les ouverts  $A'$ , où  $A$  est un ouvert de  $E_i$ , forment une base de topologie de  $H_i$ . Considérons un voisinage  $C$  d'un point  $x = (x_i)$  de  $\Pi H_i$ . Pour tout  $i$ , il existe un ouvert  $A_i$  de  $H_i$ , distinct de  $H_i$  pour un nombre fini d'indices, et tel que  $x \in \Pi A_i \subset C$ . Considérons la projection  $x_i$  de  $x$ . Si  $A_i = H_i$ , posons  $B_i = E_i$ ; on a  $B'_i = H_i$ . Si  $A_i \neq H_i$ , il existe un ouvert  $B_i$  de  $E_i$  tel que  $x_i \in B'_i \subset A_i$ . On a  $x \in \Pi B'_i = (\Pi B_i)' \subset C$ ; ainsi, tout voisinage  $C$  d'un point  $x$  de  $\Pi H_i$  inclut un voisinage ouvert de  $x$  de la forme  $B'$ , où  $B$  est un ouvert de  $\Pi E_i$ .

2) Supposons que les ouverts  $B'$  de  $\Pi H_i$ , où  $B$  est un ouvert de  $\Pi E_i$ , forment une base de topologie de  $\Pi H_i$ . Montrons que, si  $x_k$  est un point de l'ouvert  $A_k$  de  $H_k$ , il existe un ouvert  $A$  de  $E_k$  tel que  $x_k \in A' \subset A_k$ .

Si  $i$  est un indice de  $I$  différent de  $k$ , posons  $A_i = H_i$ , et appelons  $x_i$  un point de  $H_i$ .  $(x_i)$  est un point de l'ouvert  $\Pi A_i$  de  $\Pi H_i$ . Il existe un ouvert  $B$  de  $\Pi E_i$  tel que  $(x_i) \in B' \subset \Pi A_i$ . Il existe une famille  $(B_i)$  d'ouverts respectivement de  $H_i$ , distincts de  $H_i$  pour un nombre fini d'indices, tels que  $(x_i) \in \Pi B_i \subset B'$ . On a  $x_k \in B_k$ ; donc  $x_k \in (B_k \cap E_k)'$ ; montrons que  $C_k = (B_k \cap E_k)'$  est inclus dans  $A_k$ . Supposons que le point  $y_k$  de  $C_k$  n'appartienne pas à  $A_k$ . Si  $i$  est distinct de  $k$ , posons  $C_i = B_i$  et  $y_i = x_i$ . D'une part, la trace sur  $\Pi E_i$  de l'ouvert  $\Pi C_i$  de  $\Pi H_i$  est incluse dans  $B$ , donc  $\Pi C_i$  est une partie de  $B'$ ; d'autre part, le point  $(y_i)$  de  $\Pi C_i$  n'appartient pas à  $B'$ ! L'ouvert  $B_k \cap E_k$  est l'ouvert  $A$  que nous cherchions. (

11.1.4. Les points de  $(\Pi H_i) - \Pi E_i$  sont fermés dans  $\Pi H_i$  si et seulement si, d'une part, les espaces  $H_i$  sont de Fréchet chaque fois qu'il existe un indice  $k$  de  $I$ , distinct de  $i$ , tel que  $H_k \neq E_k$ , et, d'autre part, les points des ensembles  $H_i - E_i$  sont fermés respectivement dans les espaces  $H_i$ .

1) Supposons les conditions vérifiées; montrons que tout point  $(x_i)$  de  $(\Pi H_i) - \Pi E_i$  est fermé dans  $\Pi H_i$ . Considérons un point  $(y_i)$  de  $\Pi H_i$ , différent de  $(x_i)$ , et montrons que  $(y_i)$  possède un voisinage qui ne contient pas  $(x_i)$ . Il existe un indice  $k$  de  $I$  pour lequel  $x_k$  est différent de  $y_k$ .

Si  $x_k$  appartient à  $H_k - E_k$ , alors  $y_k$  possède un voisinage ouvert  $A_k$  dans  $H_k$ , qui ne contient pas  $x_k$ . Pour tout  $i$  différent de  $k$ , posons  $A_i = H_i$ .  $\Pi A_i$  est un voisinage de  $(y_i)$  qui ne contient pas  $(x_i)$ .

Si  $x_k$  appartient à  $E_k$ , alors il existe un indice  $j$  différent de  $k$  pour lequel  $x_j$  appartient à  $H_j - E_j$ ; de ce fait,  $H_j \neq E_j$ , et  $H_k$  est de Fréchet. On peut alors achever la démonstration comme dans la première éventualité.

2) Supposons que les points de  $(\Pi H_i) - \Pi E_i$  sont fermés dans  $\Pi H_i$ .

Considérons d'abord un espace  $H_j$  pour lequel il existe un indice  $k$  distinct de  $j$  tel que  $H_k \neq E_k$ . Montrons que tout point  $x_j$  de  $H_j$  est fermé. Si  $H_j$  est réduit

à  $x_j$ , c'est clair ; supposons que  $y_j$  soit un point de  $H_j$  différent de  $x_j$ . Pour tout  $i$  distinct de  $j$ , choisissons un point  $x_i = y_i$  de  $H_i$  tel  $x_k = y_k$  appartienne à  $H_k - E_k$ .  $(x_i)$  et  $(y_i)$  sont des points différents de  $(\Pi H_i) - \Pi E_i$  ;  $(y_i)$  possède donc un voisinage qui ne contient pas  $(x_i)$ . Il existe ainsi des ouverts  $A_i$ , respectivement de  $H_i$ , distincts de  $H_i$  pour un nombre fini d'indices tels que  $(y_i)$  appartienne à  $\Pi A_i$ , et que  $\Pi A_i$  ne contienne pas  $(x_i)$ .  $A_j$  est un voisinage de  $y_j$  qui ne contient pas  $x_j$ , et  $H_j$  est donc de Fréchet.

Considérons maintenant un point  $x_k$  de  $H_k - E_k$ , et montrons que tout point  $y_k$  de  $H_k$ , différent de  $x_k$ , possède un voisinage qui ne contient pas  $x_k$ . Pour tout  $i$  distinct de  $k$ , appelons  $x_i = y_i$  un point de  $H_i$ .  $(x_i)$  est un point de  $(\Pi H_i) - \Pi E_i$  distinct de  $(y_i)$  ; il existe donc une famille d'ouverts  $A_i$ , respectivement de  $H_i$ , distincts de  $H_i$  pour un nombre fini d'indices, et tels que  $\Pi A_i$  contienne  $(y_i)$  sans contenir  $(x_i)$ .  $A_k$  est le voisinage cherché de  $y_k$ . (

### 11.1.5. Conclusion.

Revenons à notre famille  $(E_i)_{i \in I}$  d'espaces topologiques  $E_i$  auxquels sont associées respectivement les compactifications  $H_i$ .

*La compactification  $\Pi H_i$  de  $\Pi E_i$  est engendrée par un compactifiant sur  $\Pi E_i$  si et seulement si, d'une part, les compactifications  $H_i$  des  $E_i$  sont engendrées par des compactifiants respectifs  $\mathcal{K}_i$  sur les  $E_i$ , et si, d'autre part, les  $E_i$  et les  $\mathcal{K}_i$  sont de Fréchet chaque fois qu'il existe un indice  $k$  de  $I$ , distinct de  $i$ , pour lequel  $H_k \neq E_k$ .*

Pour le démontrer, il suffit de se reporter au résultat 3.4 (

11.2. Appelons  $\mathcal{K}_i$  et  $\mathcal{K}$  respectivement les compactifiants sur  $E_i$  et sur  $\Pi E_i$  engendrés par des compactifications  $H_i$  et  $\Pi H_i$ . Nous allons voir comment  $\mathcal{K}$  est lié aux  $\mathcal{K}_i$ .

11.2.1. *Les éléments de  $\mathcal{K}$  sont des recouvrements ouverts finis de  $\Pi E_i$  dans lesquels sont logés des recouvrements ouverts finis  $X$  de  $\Pi E_i$  de la forme suivante : Les  $Y_i$  sont respectivement des éléments de  $\mathcal{K}_i$ , distincts de  $\{E_i\}$  pour un nombre fini d'indices ;  $X$  est l'ensemble des ouverts  $\Pi A_i$  de  $\Pi E_i$ , où les  $A_i$  sont respectivement des ouverts des  $Y_i$ .*

Montrons d'abord que  $X$  est la trace sur  $\Pi E_i$  d'un recouvrement ouvert fini  $X'$  de  $\Pi H_i$ . Appelons  $X'$  l'ensemble des parties  $\Pi A'_i$  de  $\Pi H_i$  pour lesquelles  $A_i \in Y_i$ . Les ensembles  $\Pi A'$  sont des ouverts de  $\Pi H_i$ , car les  $A'_i$  sont des ouverts respectivement des espaces  $H_i$ , distincts de  $H_i$  pour un nombre fini d'indices. Les ouverts  $\Pi A'_i$  recouvrent  $\Pi H_i$  ; en effet, si  $(x_i)$  est un point de  $\Pi H_i$ , pour tout  $i$ , il existe un ouvert  $A_i$  de  $Y_i$  tel que  $x_i$  appartienne à  $A'_i$  ; on a  $(x_i) \in \Pi A'_i$ . Les ouverts  $\Pi A'_i$  sont en nombre fini, car les ensembles  $Y_i$  comportent un seul élément, sauf pour un nombre fini d'indices pour lesquels ils sont réduits à un nombre fini d'éléments. La trace de  $X'$  sur  $\Pi E_i$  est  $X$ .

Considérons maintenant un élément  $Z$  de  $\mathcal{K}$ , et montrons qu'il existe un élément  $X$  de la forme indiquée qui est logé dans  $Z$ .  $Z$  est la trace sur  $\Pi E_i$  d'un recouvrement ouvert fini  $Z'$  de  $\Pi H_i$ . Les ouverts de  $Z'$  sont des réunions d'ouverts  $B$  de la forme  $B = \Pi B_i$ , où les  $B_i$  sont respectivement des ouverts des espaces  $H_i$ , distincts de  $H_i$  pour un nombre fini d'indices. Appelons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des ouverts  $B$  relatifs à tous les éléments de  $Z'$ .  $\mathcal{B}$  est un recouvrement ouvert de  $\Pi H_i$  qui contient un sous-recouvrement fini  $V'$ . La trace  $V$  de  $V'$  sur  $\Pi E_i$  est un élément de  $\mathcal{K}$  logé dans  $Z$ . Fixons une coordonnée  $j$  de  $I$ ,  $p_j V'$  est un recouvrement ouvert fini de  $H_j$ , réduit à  $\{H_j\}$ , sauf pour un nombre fini d'indices. A tout point  $x$  de  $H_j$ , associons



l'intersection des ouverts de  $p_j V'$  qui contiennent  $x$ . Appelons  $Y'_j$  l'ensemble de ces intersections ;  $Y'_j$  est un recouvrement ouvert fini de  $H_j$ . Appelons  $Y_j$  la trace de  $Y'_j$  sur  $E_j$ . Les  $Y_j$  sont respectivement des éléments des compactifiant  $\mathcal{K}_j$ , distincts de  $\{E_j\}$  pour un nombre fini d'indices. Procédons maintenant à la construction de  $X$  comme c'est indiqué dans l'énoncé, et montrons que  $X$  est logé dans  $V$  ; le théorème sera démontré.

Considérons un élément  $\Pi A_i$  de  $X$ . Pour tout  $i$ , appelons  $x_i$  un point de  $H_i$  qui a permis de retenir  $A_i$  comme trace sur  $E_i$  de l'intersection des ouverts de  $p_i V'$  qui contiennent  $x_i$ . Il existe un élément de  $V'$  qui contient  $(x_i)$ .  $\Pi A_i$  est inclus dans la trace sur  $\Pi E_i$  de cet ouvert de  $V'$ .  $\llcorner$

11.2.2. Pour tout  $j$ ,  $\mathcal{K}_j = p_j \mathcal{K}$ .

Un élément  $X$  de  $\mathcal{K}_j$  est la trace sur  $E_j$  d'un recouvrement ouvert fini  $X'$  de  $H_j$ .  $Y' = p_j^{-1} X'$  est un recouvrement ouvert fini de  $\Pi H_i$  dont la trace  $Y$  sur  $\Pi E_i$  appartient à  $\mathcal{K}$ . On a  $X = p_j Y$  ; ainsi, tout élément de  $\mathcal{K}_j$  appartient à  $p_j \mathcal{K}$ .

Dans un élément  $Y$  de  $\mathcal{K}$ , est logé un élément  $X$  de  $\mathcal{K}$  de la forme indiquée en 11.2.1. Avec les notations de ce paragraphe, on a  $p_j X = Y_j \in \mathcal{K}_j$ . Or  $p_j X$  est logé dans le recouvrement ouvert fini  $p_j Y$  de  $E_j$  ; ainsi  $p_j Y$  appartient à  $\mathcal{K}_j$ , et  $p_j \mathcal{K}$  est une partie de  $\mathcal{K}_j$ .  $\llcorner$

11.3. Appelons  $(E_i)_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques non vides. Soit  $\mathcal{K}$  un compactifiant sur  $\Pi E_i$ .

11.3.1. Pour tout  $j$ ,  $\mathcal{K}_j = p_j \mathcal{K}$  est un compactifiant sur  $E_j$ .

1)  $p_j$  est une surjection ouverte, donc les éléments de  $\mathcal{K}_j$  sont des recouvrements ouverts finis de  $E_j$ .  $\mathcal{K}$  n'est pas vide,  $\mathcal{K}_j$  ne l'est pas non plus.

2) Soit un élément  $X$  de  $\mathcal{K}_j$ , logé dans une partie finie  $Y$  de la topologie de  $E_j$ . Il existe un élément  $Z$  de  $\mathcal{K}$  tel que  $p_j Z = X$ .  $Z$  est logé dans la partie finie  $p_j^{-1} X$  de la topologie de  $\Pi E_i$  qui est elle-même logée dans la partie finie  $p_j^{-1} Y$ . Ainsi  $p_j^{-1} Y$  appartient à  $\mathcal{K}$ , et  $p_j p_j^{-1} Y = Y$  appartient à  $\mathcal{K}_j$ .

3) Considérons deux éléments  $X = \{A_1, \dots, A_n\}$  et  $Y = \{B_1, \dots, B_q\}$  de  $\mathcal{K}_j$ , et montrons que  $Z = \{A_1 \cap B_1, A_2, \dots, B_q\}$  appartient à  $\mathcal{K}_j$ .  $p_j^{-1} X$  et  $p_j^{-1} Y$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ , de même que  $V = \{(p_j^{-1} A_1) \cap (p_j^{-1} B_1), p_j^{-1} A_2, \dots, p_j^{-1} B_q\}$ . On a  $Z = p_j V$ , donc  $Z$  appartient à  $\mathcal{K}_j$ .  $\llcorner$

11.3.2. Appelons  $K$  la compactification de  $\Pi E_i$  engendrée par le compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $\Pi E_i$ .

Il existe des compactifications  $K_i$  des  $E_i$  et un homéomorphisme  $K \rightarrow \Pi K_i$  qui, réduit à  $\Pi E_i$  est l'identité si et seulement si, d'une part, 11.2.1 est vérifié, et, d'autre part, les  $E_i$  et les  $\mathcal{K}_i = p_i \mathcal{K}$  sont de Fréchet chaque fois qu'il existe un indice  $k$  de  $I$ , distinct de  $i$ , pour lequel  $E_k \neq K_k$ .

Supposons d'abord l'existence de l'homéomorphisme ; puisque  $K$  est engendrée par un compactifiant sur  $\Pi E_i$ , il en est de même pour  $\Pi K_i$ , et la seconde partie de la condition est vérifiée. Les compactifiants des  $E_i$  qui engendrent les  $K_i$  sont les  $\mathcal{K}_i$  (11.2.2) ; finalement, le compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $\Pi E_i$  qui engendre  $\Pi K_i$  vérifie 11.2.1.

Supposons maintenant les conditions vérifiées. La seconde partie implique l'existence d'un compactifiant sur  $\Pi E_i$  qui engendre  $\Pi K_i$ . Ce compactifiant vérifie 11.2.1, donc c'est  $\mathcal{K}$ . Et il existe un homéomorphisme  $K \rightarrow \Pi K_i$  qui, réduit à  $\Pi E_i$ , est l'identité, puisque ces deux compactifications sont engendrées par le même compactifiant sur  $\Pi E_i$ .  $\llcorner$

## CHAPITRE IV

# EXTENSIONS RÉGULIÈRES

### Introduction

Soit  $H$  une extension régulière séparée d'un espace topologique  $E$ . A partir de  $H$ , nous allons définir un compactifiant  $\mathcal{K}$  sur  $E$ , nous appellerons  $K$  la compactification engendrée par  $\mathcal{K}$ , et nous montrerons qu'il existe un homéomorphisme  $f: H \rightarrow fH \subset K$ , identique sur  $E$ .

Si  $E$  est un espace uniforme séparé, son complété séparé  $\hat{E}$  est une extension, régulière séparée de  $E$ . Nous verrons comment on peut définir, à partir de la structure uniforme sur  $E$ , le compactifiant  $\mathcal{K}$  dont il vient d'être question.

### 1. Remarque préliminaire

*Toute topologie régulière sur un ensemble  $E$  est l'image réciproque par une application  $f$  d'une topologie régulière séparée sur un ensemble  $F$ .*

Soit un espace topologique régulier  $E$ . Nous dirons que deux points  $x$  et  $y$  de  $E$  sont en relation  $r$  lorsque leurs voisinages sont les mêmes (les tamis  $\mathcal{U}_x$  et  $\mathcal{U}_y$ , liés à  $x$  et  $y$ , sont égaux).  $r$  est une relation d'équivalence sur  $E$ . Appelons  $F$  l'espace quotient  $E/r$ , et  $f$  la projection  $E \rightarrow F$ .

*Tout ouvert de  $E$  est saturé pour  $r$ .*

Considérons l'ouvert  $A$  de  $E$ , appelons  $x$  un point de  $A$ , et  $y$  un point de  $E$  équivalent à  $x$ .  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{U}_y$ , donc  $y$  appartient à  $A$ . Les ouverts de  $F$  sont donc les projections des ouverts de  $A$ , et la topologie de  $E$  est l'image réciproque de la topologie de  $F$ .

*$F$  est régulier.*

Considérons le voisinage  $fA$  du point  $fx$  de  $F$ .  $A$  est un voisinage de  $x$  dans  $E$ ;  $A$  inclut un voisinage ouvert  $B$  de  $x$  tel que  $\bar{B} \subset A$ .  $fB$  est un voisinage ouvert de  $fx$  dans  $F$ ;  $\bar{B}$  est saturé pour  $r$  puisque  $E - \bar{B}$  l'est; ainsi  $fB$  est fermé dans  $F$ . L'adhérence de  $fB$  dans  $F$  est donc incluse dans  $fA$ .

*$F$  est de Hausdorff.*

Soient les points distincts  $fx$  et  $fy$  de  $F$ .  $\mathcal{U}_x$  est différent de  $\mathcal{U}_y$ .  $\mathcal{U}_x$ , par exemple, contient un ouvert  $A$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{U}_y$ .  $x$  possède un voisinage ouvert  $B$  dont l'adhérence est incluse dans  $A$ .  $fB$  et  $f(E - \bar{B})$  sont des voisinages disjoints de  $fx$  et  $fy$  dans  $F$ .  $\llcorner$

Fort du résultat précédent, nous allons nous limiter à la considération d'espaces topologiques réguliers séparés. Dans la suite de ce chapitre, lorsque nous dirons qu'un espace est régulier, nous sous-entendrons qu'il est séparé.

## 2. La relation $l_H$

Considérons une extension régulière  $H$  de l'espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{T}$ . Par hérédité,  $E$  est régulier. Soient les ouverts  $A$  et  $B$  de  $E$ , nous écrirons  $Al_H B$  lorsque  $\overline{\overline{A'}} \subset B'$ .

2.1. Si  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $E$ ,  $Al_H B$  implique  $\overline{\overline{A}} \subset B$ .

En effet,  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \cap E = \overline{\overline{A'}} \cap E \subset B' \cap E = B$  (II, 5.5.1) et 8)). ((

2.2. Si  $x$  est un point de  $E$ , et si  $A$  est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $E$ , alors  $x$  possède un voisinage ouvert  $B$  tel que  $B l_H A$ .

$A'$  est un voisinage de  $x$  dans  $H$ , il existe un voisinage  $D$  de  $x$  dans  $H$  tel que  $\overline{\overline{D}} \subset A'$ .  $H$  est le minimum de sa classe, donc il existe un voisinage ouvert  $B$  de  $x$  dans  $E$  tel que  $B' \subset D$ . On a  $\overline{\overline{B'}} \subset A'$ , donc  $B l_H A$ . ((

2.3. Définition.

Une relation  $l$ , définie sur  $\mathcal{T}$ , sera dite régulière lorsqu'elle vérifie 2.1 et 2.2. Si  $H$  est une extension régulière de  $E$ ,  $\mathcal{T}$ , nous dirons que  $l_H$  est la relation régulière sur  $\mathcal{T}$  engendrée par  $H$ .

## 3. Construction de $R$

Soit  $l$  une relation régulière définie sur la topologie  $\mathcal{T}$  d'un espace séparé  $E$ .  $E$  est régulier ; pour le voir, il suffit de se reporter à 2.1 et 2.2. Nous supposons que  $E$  n'est pas vide.

Appelons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des recouvrements ouverts finis de  $E$  de la forme  $\{B, E - \overline{\overline{A}}\}$ , où  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $E$  tels que  $A l B$ . On vérifie que les éléments de  $\mathcal{B}$  recouvrent  $E$  en s'appuyant sur 2.1.

$\mathcal{B}$  n'est pas vide.

En effet,  $E$  n'est pas vide, et contient donc un point  $x$ .  $E$  est un voisinage ouvert de  $x$  ; en vertu de 2.2.,  $x$  possède un voisinage ouvert  $A$  tel que  $A l E$  ;  $\{E - \overline{\overline{A}}, A\}$  appartient à  $\mathcal{B}$ . ((

Appelons  $\mathcal{K}$  le compactifiant sur  $E$  engendré par  $\mathcal{B}$ , et soit  $K$  la compactification de  $E$  engendrée par  $\mathcal{K}$ .

$\mathcal{K}$  vérifie  $(R_2)$ .

3.1.  $A l B$  implique  $\overline{\overline{A'}} \subset B'$ .

$\{B, E - \overline{\overline{A}}\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ , donc  $\{B', (E - \overline{\overline{A}})'\}$  recouvre  $K$ . Or  $(E - \overline{\overline{A}})' = K - \overline{\overline{A'}}$  (II, 5.5. 9)), donc  $\overline{\overline{A'}}$  est inclus dans  $B'$ . ((

*Définitions.*

Considérons une relation  $r$  sur la topologie  $\mathcal{T}$  de  $E$ .

Une partie  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{T}$  sera appelée une  $r$ -partie de  $\mathcal{T}$  lorsque, pour tout ouvert  $A$  de  $\mathcal{V}$ , on peut trouver un ouvert  $B$  de  $\mathcal{V}$  tel que  $B r A$ .

Un tamis sur  $E$  qui est une  $r$ -partie de  $\mathcal{T}$  sera appelé un  $r$ -tamis sur  $E$ .

Observons que les tamis liés aux points de  $E$  sont des  $l$ -tamis.

Appelons  $R$  la réunion de  $E$  et de l'ensemble des  $\mathcal{X}$ -recouvreages  $a$  pour lesquels  $\mathcal{U}_a$  est un  $l$ -tamis. Munissons  $R$  de sa topologie de sous-espace de  $K$ . Convenons que, si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{T}$ ,  $\bar{A}$  et  $A'$  désignent respectivement  $\bar{A}^R$  et  $A'^R$ .

3.2.  $R$  est régulier ; nous l'appellerons l'extension régulière de  $E$  engendrée par  $l$ .

Soit le point  $r$  de  $R$  et le voisinage  $A$  de  $r$  dans  $R$ . Il existe un ouvert  $B$  de  $E$  tel que  $r \in B' \subset A$ . Il existe un ouvert  $C$  de  $\mathcal{U}_r$  tel que  $C l B$ , car  $\mathcal{U}_r$  est un  $l$ -tamis.

On a  $\overline{C'^K} \subset B'^K$ , donc  $\overline{C'^K} \cap R = \overline{C'} \subset B'^K \cap R = B' \subset A$  (II, 5.5.1) et 5.6). Ainsi, les voisinages fermés forment un système fondamental de voisinages des points de  $R$ .  $R$  est de Kolmogoroff, puisque  $E$  est séparé (III, 5.4) ; ainsi  $R$  est de Hausdorff, et, par là, régulier [J<sub>1</sub>, Ch. IV, ex. 3]. (

$R$  est une extension régulière de  $E$  dont on peut déduire la relation régulière  $l_R$  sur  $\mathcal{T}$ .

3.3.  $l$  est inclus dans  $l_R$ .

Soient les ouverts  $A$  et  $B$  de  $E$  tels que  $A l B$ , on a  $\overline{A'^K} \subset B'^K$  (3.1), donc  $\overline{A'^K} \cap R = \overline{A'^K} \cap R^R = \overline{A'} \subset B'^K \cap R = B'^R = B'$  ; donc  $A l_R B$ . (

3.4. Si  $A, B$  et  $C$  sont des ouverts de  $\mathcal{T}$ ,  $A \subset B l_R C$  implique  $A l_R C$  ; de même,  $A l_R B \subset C$  implique  $A l_R C$ .

Contentons-nous de démontrer la première implication. Dans  $R$ , on a  $A' \subset B' \subset \overline{B'} \subset C'$ , donc  $\overline{A'} \subset C'$ , et ainsi  $A l_R C$ . (

3.5. Si  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $\mathcal{T}$ ,  $A l_R B$  implique  $(E - \bar{B}) l_R (E - \bar{A})$ .

Pour le voir, il suffit de se reporter à (II, 5.5. 12)). (

3.6. Si  $A, B, C$  et  $D$  sont des ouverts de  $\mathcal{T}$ ,  $A l_R B$  et  $C l_R D$  impliquent  $A \cap C l_R B \cap D$  et  $A \cup C l_R B \cup D$ .

Démontrons d'abord la première relation.

$$\overline{(A \cap C)'} = \overline{A' \cap C'} \subset \overline{A'} \cap \overline{C'} \subset B' \cap D' = (B \cap D)'.$$

Démontrons maintenant la seconde relation.  $A' \cup C'$  et  $(A \cup C)'$  sont des ouverts de  $R$  dont les traces sur  $E$  sont égales, donc

$$\overline{(A \cup C)'} = \overline{A' \cup C'} = \overline{A'} \cup \overline{C'} \subset B' \cup D' \subset (B \cup D)'.$$
 (

3.7. Si  $R$  est compact, alors, pour tous ouverts  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{T}$  tels que  $A l_R B$ , on peut trouver un ouvert  $C$  de  $\mathcal{T}$  tel que  $A l_R C l_R B$ .

Supposons que  $R$  est compact, soient les ouverts  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{T}$  tels que  $A l_R B$ .

On a  $\overline{A'} \subset B'$ .  $\overline{A'}$  et  $R - B'$  sont des fermés disjoints de l'espace normal  $R$  ; ils

possèdent les voisinages ouverts disjoints respectifs  $F$  et  $G$ .  $\overline{\overline{F}}$  est inclus dans  $B'$ . Posons  $C = F \cap E$ ; on a  $A' \subset C' \subset \overline{C'}$ , donc  $Al_R C$ . D'autre part,  $F$  et  $C'$  ont des traces égales sur  $E$ , donc  $\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{C'}}$ ; de ce fait,  $\overline{\overline{C'}} \subset B'$ . Ainsi  $Cl_R B$ . ((

#### 4. Cas où $l$ est engendré par une extension régulière $H$

Considérons une extension régulière  $H$  de l'espace topologique  $E$ ,  $\mathcal{T}$ ; posons  $l = l_H$ ; appelons  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $K$ ,  $R$  les éléments définis à partir de  $l$ , comme il est fait ci-dessus.

4.1.  $H$  est homéomorphe à un sous-espace de  $R$ .

Soit un point  $h$  de  $H - E$ . Posons  $a_h = \mathcal{T} - \mathcal{U}_h$ .

1)  $a_h$  est un recouvrement ouvert de  $E$ . En effet, si  $x$  appartient à  $E$ , puisque  $H$  est séparé, il existe un voisinage  $A$  de  $x$  dans  $H$  qui ne contient pas  $h$ . Comme  $H$  est le minimum de sa classe, il existe un voisinage ouvert  $B$  de  $x$  tel que  $B' \subset A$ .  $B$  est un élément de  $a_h$  qui contient  $x$ .

2)  $a_h$  est  $\mathcal{K}$ -convenable.  $\mathcal{K}$  est inclus dans l'ensemble  $\mathcal{K}$  des traces sur  $E$  des recouvrements ouverts finis de  $H$ .  $a_h$  est  $\mathcal{K}$ -convenable, donc  $\mathcal{K}$ -convenable.

3)  $a_h$  est un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$ . Considérons un ouvert  $A$  de  $\mathcal{U}_h$ , et montrons qu'on ne peut l'adjoindre à  $a_h$ , sans altérer le caractère convenable de celui-ci.  $h$  appartient à  $A^H$ ; il existe un ouvert  $B$  de  $\mathcal{T}$  tel que  $h \in B^H \subset \overline{B'^H} \subset A^H$  ( $H$  est régulier et sa topologie est le minimum de sa classe).  $E - \overline{B}$  est disjoint de l'ouvert  $B$  de  $\mathcal{U}_h$ , donc  $E - \overline{B}$  appartient à  $a_h$ . L'élément  $\{A, E - \overline{B}\}$  de  $\mathcal{K}$  démontre la thèse.

4)  $a_h$  appartient à  $R$ ; il faut vérifier que  $\mathcal{U}_h$  est un  $l$ -tamis; c'est clair.

5) Définissons une application  $f: H \rightarrow R$  de la façon suivante:

Si  $h$  appartient à  $E$ , alors  $fh = h$ .

Si  $h$  appartient à  $H - E$ , alors  $fh = a_h$ .

$f$  est un homéomorphisme  $H \rightarrow fH \subset R$ . ((

Désormais, nous identifions  $H$  et  $fH$ , et nous supposons que la situation est la suivante:  $E \subset H \subset R \subset K$ .

4.2. Si  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $\mathcal{T}$ ,  $A \cap B$  équivaut à  $Al_R B$  et à  $\overline{A'^K} \subset B'^K$ .

Soient les ouverts  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{T}$  tels que  $A \cap B$ . On a  $\overline{A'^K} \subset B'^K$  (3.1). Donc

$$\overline{A'^K} \cap R = \overline{A'^K} \cap \overline{B'^R} = \overline{A'^R} \subset B'^K \cap R = B'^R \quad (\text{II, 5.5. 1) et 5.6.})$$

C'est-à-dire  $Al_R B$ .

Supposons maintenant avoir  $Al_R B$ ; on a  $\overline{A'^R} \subset B'^R$ ; donc

$$\overline{A'^R} \cap H = \overline{A'^R} \cap \overline{H^H} = \overline{A'^H} \subset B'^R \cap H = B'^H;$$

et ainsi  $A \cap B$ . ((

4.3.  $R$  est le sous-espace régulier maximum de  $K$  qui inclut  $H$ .

Montrons que si on adjoint à  $H$  un point  $a$  de  $K$  qui n'appartient pas à  $R$ , le

sous-espace de  $K$  obtenu n'est pas régulier. Supposons que  $M = H \cup \{a\}$  soit régulier. Il existe un ouvert  $A$  de  $\mathcal{U}_h$  qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall B \in \mathcal{T}, B \cap A \Rightarrow B \notin \mathcal{U}_a.$$

$A^M$  est un voisinage ouvert de  $a$  dans  $M$ . Il existe un ouvert  $B$  de  $\mathcal{T}$  tel que  $a \in \overline{B^M} \subset A^M$ . Comme au paragraphe précédent, on en déduit que  $B \cap A$ . Mais  $B$  appartient à  $\mathcal{U}_a$ , c'est impossible ! (

4.4. Si, pour tous ouverts  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{T}$  tels que  $A \cap B$ , on peut trouver un ouvert  $C$  de  $\mathcal{T}$  tel que  $A \cap C \cap B$ , alors  $K$  coïncide avec  $R$ .

Montrons que  $K$  est régulier, 4.3 permettra de conclure. Pour montrer la régularité de  $K$ , il suffit de prouver que  $\mathcal{K}$  vérifie l'axiome  $(R_1)$ . Appuyons-nous sur (III, 6.3.2).  $\mathcal{K}$  est engendré par ses éléments de la forme  $\{B, E - \bar{A}\}$ , où  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $\mathcal{T}$  tels que  $A \cap B$ . On peut trouver des ouverts  $C$  et  $D$  de  $E$  tels que  $A \cap D \cap C \cap B$ . On a  $E - \overline{D \cap C} - \bar{A}$ , donc les ensembles  $\{C, E - \bar{D}\}$ ,  $\{B, E - \bar{C}\}$ ,  $\{E - \bar{A}, E - \overline{E - \bar{D}}\}$  appartiennent à  $\mathcal{K}$ , et (III, 6.3.2) est vérifié. (

4.5. Si  $R$  est compact, alors  $K = R$ .

C'est une application de 3.7 et de 4.4. (

4.6. Appelons  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{K}_1$ ,  $K_1$ , et  $R_1$  les éléments introduits au paragraphe 3, à partir de la relation régulière  $l_R$ .

$R$  est homéomorphe à  $R_1$ .

Par 4.1, nous savons qu'il existe un homéomorphisme  $f : R \rightarrow fR \subset R_1$ ; montrons que  $f$  est surjectif. Si  $A$  et  $B$  sont des ouverts de  $E$ ,  $A \cap B$  implique  $A \cap_R B$ ; ainsi  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$ , et  $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$ . Si  $a$  est un  $\mathcal{K}$ -recouvrement sur  $E$ , c'est donc un recouvrement  $\mathcal{K}$ -convenable de  $E$ . Il existe un  $\mathcal{K}$ -recouvrement  $b$  qui inclut  $a$ . Le  $\mathcal{K}_1$ -recouvrement  $fb$  est égal à  $b$ . Ainsi  $a$  est inclus dans  $fb$ ; de ce fait,  $a = fb$ . (

## 5. Seconde construction de $R$

Partons de nouveau d'une relation régulière  $l$  définie sur la topologie  $\mathcal{T}$  de l'espace  $E$ .

5.1. Si  $r$  est une relation sur  $\mathcal{T}$ , l'inclusion des  $r$ -tamis sur  $E$  est un ordre inductif.

En effet, considérons une famille  $(\mathcal{U}_i)$  totalement ordonnée de  $r$ -tamis sur  $E$ . Appelons  $\mathcal{U}$  la réunion des  $\mathcal{U}_i$ . C'est un tamis sur  $E$  qui majore  $(\mathcal{U}_i)$ ; montrons que c'est un  $r$ -tamis. Si  $A$  est un ouvert de  $\mathcal{U}$ , il existe un indice  $i$  tel que  $A$  appartienne à  $\mathcal{U}_i$ .  $\mathcal{U}_i$  contient un ouvert  $B$  tel que  $B \cap A$ .  $B$  appartient à  $\mathcal{U}$  qui est donc un  $r$ -tamis. (

5.2. Appelons  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  l'ensemble des  $l$ -tamis purs maximaux sur  $E$  qui ont leur noyau vide. Appelons  $Q$  l'ensemble des indices  $i$  de  $I$  pour lesquels  $\mathcal{U}_i$  vérifie la propriété suivante :

$$(A) : \forall A, B \in \mathcal{T}, (A \notin \mathcal{U}_i, B \cap A \Rightarrow E - \bar{B} \in \mathcal{U}_i).$$

Un  $l$ -tamis pur  $\mathcal{U}$  qui vérifie la propriété (A) est un  $l$ -tamis pur maximal.

Supposons que  $\mathcal{U}$  soit strictement inclus dans un  $l$ -tamis pur  $\mathcal{V}$ . Appelons A un ouvert du tamis  $\mathcal{V}$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{U}$ . Il existe un ouvert B de  $\mathcal{V}$  tel que B/A. En vertu de (A),  $E - \overline{B}$  appartient à  $\mathcal{U}$ , donc à  $\mathcal{V}$ . B et  $E - \overline{B}$  seraient des éléments disjoints de  $\mathcal{V}$  ! (

Soit M l'extension minimum de E associée à la famille  $(\mathcal{U}_i)$  de tamis sur E. Appelons P le sous-espace  $E \cup Q$  de M.

5.3. P est homéomorphe à R.

Appelons  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{K}$  et R les éléments définis au paragraphe 3, à partir de la relation régulière  $l$  sur  $\mathcal{C}$ .

Considérons un point  $a$  de  $R - E$ .  $\mathcal{U}_a$  est un  $l$ -tamis pur sur E. Montrons que son noyau est vide ; soit  $x$  un point de E ;  $a$  contient un voisinage ouvert A de  $x$ . Il existe un voisinage B de  $x$  tel que B/A.  $\{E - \overline{B}, A\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ , donc  $E - \overline{B}$  n'appartient pas à  $a$  ; c'est un ouvert de  $\mathcal{U}_a$  qui ne contient pas  $x$ .

Montrons que  $\mathcal{U}_a$  vérifie la propriété (A). Soient les ouverts A et B de E tels que A/B ; supposons que A n'appartienne pas à  $\mathcal{U}_a$ . A appartient à  $a$ .  $\{E - \overline{B}, A\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ , donc  $E - \overline{B}$  appartient à  $\mathcal{U}_a$ .

Il existe donc un indice unique  $fa$  de Q tel que  $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_{fa}$ . Définissons une application  $f : R \rightarrow P$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x \in E &\rightarrow x ; \\ a \in R - E &\rightarrow fa. \end{aligned}$$

$f$  est un homéomorphisme  $R \rightarrow fR$  ; montrons que  $f$  est surjectif.

Si  $q$  est un point de Q, posons  $a_q = \mathcal{C} - \mathcal{U}_q$ .

1)  $a_q$  recouvre E.

Si  $x$  est un point de E, il existe un ouvert A de  $\mathcal{U}_q$  qui ne contient pas  $x$  ( $\mathcal{U}_q$  a son noyau vide).  $\mathcal{U}_q$  contient un ouvert B tel que B/A.  $E - \overline{B}$  est un voisinage ouvert de  $x$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{U}_q$  ; c'est un ouvert de  $a_q$  qui contient  $x$ .

2)  $a_q$  est  $\mathcal{K}$ -convenable.

Supposons que l'élément X de  $\mathcal{K}$  soit inclus dans  $a_q$ . On peut trouver des éléments  $X_1, \dots, X_n$  de  $\mathcal{B}$  tels que  $Y = m(X_1, \dots, X_n)$  soit logé dans X. Y est inclus dans  $a_q$  ; en effet, si un ouvert A n'appartient pas à un tamis, les ouverts inclus dans A ne lui appartiennent pas non plus. Pour tout  $i$ ,  $X_i$  est de la forme  $\{A_i, E - \overline{B}_i\}$ , où  $A_i$  et  $B_i$  sont des ouverts de E tels que  $B_i/A_i$ . Si  $A_i$  n'appartient pas à  $\mathcal{U}_q$ , en vertu de (A),  $E - \overline{B}_i$  appartient à  $\mathcal{U}_q$ . L'élément

$$(\cap \{A_i : A_i \in \mathcal{U}_q\}) \cap (\cap E - \overline{B}_j : A_j \notin \mathcal{U}_q)$$

appartient simultanément à  $\mathcal{U}_q$  et  $a_q$  !

3)  $a_q$  est maximal.

Considérons un ouvert A de E qui n'appartient pas à  $a_q$  ; A est un élément de  $\mathcal{U}_q$ . Il existe un ouvert B de  $\mathcal{U}_q$  tel que B/A.  $E - \overline{B}$  n'appartient pas à  $\mathcal{U}_q$  (pureté), c'est donc un ouvert de  $a_q$ .  $\{A, E - \overline{B}\}$  appartient à  $\mathcal{K}$ . On ne peut donc adjoindre A à  $a_q$  sans altérer le caractère convenable de ce dernier.

$f$  est surjective puisque tout point  $q$  de  $Q$  est l'image par  $f$  du point  $a_q$  de  $R - E$ .  
 Donc  $f$  est un homéomorphisme  $R \rightarrow Q$ . ((  
 Désormais, nous identifions  $R$  et  $Q$ .

## 6. Cas où $l$ est engendré par une extension régulière

Soit une extension régulière  $H$  de  $E$  ; posons  $l = l_H$ .

### 6.1. Lemme.

Si  $r$  est une relation sur la topologie  $\mathcal{T}$  de  $E$  qui vérifie les propriétés suivantes :  
 quels que soient les ouverts  $A, B, C$  et  $D$  de  $E$ ,

- 1)  $A \cap B$  et  $C \cap D$  impliquent  $A \cap C \cap B \cap D$ , et
- 2)  $A \cap B \subset C$  implique  $A \cap C$ ,

alors, si  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{W}$  sont des  $r$ -parties non vides de  $\mathcal{T}$ , le tamis  $\mathcal{U}$  sur  $E$ , engendré par  $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ , est un  $r$ -tamis sur  $E$ .

Soit un élément  $A$  de  $\mathcal{U}$ , il existe des éléments  $B_1, \dots, B_n$  de  $\mathcal{V}$  et des éléments  $C_1, \dots, C_q$  de  $\mathcal{W}$  tels que  $B = (\cap B_i) \cap (\cap C_j)$  soit inclus dans  $A$ . On peut trouver des éléments  $D_1, \dots, D_n$  de  $\mathcal{V}$  et des éléments  $F_1, \dots, F_q$  de  $\mathcal{W}$  tels qu'on ait selon le cas, pour tout indice,  $D_i \cap B_i$  ou  $F_j \cap C_j$ .  $C = (\cap D_i) \cap (\cap F_j)$  appartient à  $\mathcal{U}$ . On a  $C \cap B \subset A$ , donc  $C \cap A$ . ((

### 6.2. Si $R$ est compact, alors il coïncide avec $M$ .

Il faut montrer que, si  $R$  est compact, tout  $l$ -tamis  $\mathcal{U}$  pur, maximal, de noyau vide vérifie la propriété (A).

Soit un ouvert  $A$  de  $\mathcal{T}$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{U}$  ; considérons un ouvert  $B$  de  $\mathcal{T}$  tel que  $B \cap A$  ; supposons que  $E - \bar{B}$  n'appartient pas à  $\mathcal{U}$ . Si  $C$  est un ouvert de  $\mathcal{U}$ , il n'est pas inclus dans  $E - \bar{B}$ , donc il rencontre  $B$ . En vertu de 3.7, il existe une suite  $D_1, D_2, \dots$  d'ouverts de  $\mathcal{T}$  tels que  $B \cap \dots \cap D_n \cap D_1 \cap A$ . Aucun ouvert  $D_i$  n'appartient à  $\mathcal{U}$ , sinon la relation  $D_i \subset A$  impliquerait  $A \in \mathcal{U}$ . Quel que soit l'ouvert  $C$  de  $\mathcal{U}$  et l'ouvert  $D_i$ ,  $C \cap D_i$  n'est pas vide, sinon de  $B \subset D_i$ , on déduirait  $C \cap B = \emptyset$ .

$\{D_i\}$  est une  $l$ -partie de  $\mathcal{T}$  ; le tamis  $\mathcal{U}'$  engendré par les ouverts de  $\mathcal{U}$  auxquels on adjoint les ouverts  $D_i$  est un  $l$ -tamis sur  $E$ .  $\mathcal{U}'$  est pur et de noyau vide ; il inclut strictement  $\mathcal{U}$ . C'est impossible ! ((

## 7. Complétion des espaces uniformes

Appuyons-nous sur  $[B_1]$  dont nous adopterons intégralement les notations. Considérons un espace uniforme séparé  $X$  ; appelons  $\hat{X}$  le complété séparé de  $X$ .  $\hat{X}$  est régulier ; l'application  $i : X \rightarrow \hat{X}$ , introduite en  $[B_1, II, \text{par. } 3, \text{n}^\circ 7, \text{th. } 3]$  est un homéomorphisme de  $X$  sur le sous-espace partout dense  $i(X)$  de  $\hat{X}$ .  $\hat{X}$  est donc une extension régulière de  $X$ . A partir de la structure uniforme sur  $X$ , nous allons déterminer une relation régulière  $l$  ; nous montrerons que l'extension régulière  $R$ , engendrée par  $l$ , contient un sous-espace qui inclut  $\hat{X}$ , et qui est homéomorphe à  $\hat{X}$ .



7.1. *Les entourages ouverts symétriques forment un système fondamental d'entourages de X.*

Considérons un entourage V de X. Il existe un entourage symétrique W inclus dans V. L'intérieur U de W est un entourage de X inclus dans V ; montrons que U est symétrique. Si  $(x, y)$  appartient à U, il existe un voisinage ouvert A de x et un voisinage ouvert B de y tels que  $A \times B$  soit inclus dans W,  $B \times A$  est inclus dans W, donc  $(y, x)$  appartient à U. ((

7.2. *Un filtre de Cauchy minimal sur X possède une base formée d'ouverts.*

Considérons le filtre de Cauchy minimal  $\mathfrak{X}$  sur X, et l'élément M de  $\mathfrak{X}$ . Il existe un élément M' de  $\mathfrak{X}$  et un entourage ouvert symétrique V de X tel que  $V(M') \subset M$ .  $V(M')$  est un ouvert de  $\mathfrak{X}$ . ((

7.3. *Si A est un ouvert de X, le filtre de Cauchy minimal  $\mathfrak{X}$  appartient à  $(i(A))^{\wedge \mathfrak{X}}$  si et seulement si A appartient à  $\mathfrak{X}$ .*

1) Supposons que  $\mathfrak{X}$  appartienne à  $(i(A))'$ . Il existe un entourage symétrique V de X tel que  $\tilde{V}(\mathfrak{X}) \cap i(X) \subset i(A)$ . Il existe un entourage symétrique ouvert W de X tel que  $\tilde{W} \subset V$ . On a  $\emptyset \neq \tilde{W}(\mathfrak{X}) \cap i(X) \subset i(A)$ . Appelons x un point de X tel que  $i(x)$  appartienne à  $\tilde{W}(\mathfrak{X}) \cap i(X)$ .  $(\mathfrak{B}(x), \mathfrak{X})$  appartient à  $\tilde{W}$  ; les filtres  $\mathfrak{B}(x)$  et  $\mathfrak{X}$  ont donc en commun un élément B petit d'ordre W.  $W(B)$  est un ouvert de  $\mathfrak{X}$  ; montrons que  $i(W(B))$  est inclus dans  $\tilde{V}(\mathfrak{X})$ , donc que  $W(B)$  est inclus dans A ; la première partie de la démonstration sera faite.

Soit le point y de  $W(B)$ .  $\mathfrak{B}(y)$  et  $\mathfrak{X}$  ont en commun l'ensemble  $W(B)$  ; montrons que  $W(B)$  est petit d'ordre V, on en déduira que  $i(y)$  appartient à  $\tilde{V}(\mathfrak{X})$ . Appelons  $(u, v)$  un point de  $W(B) \times W(B)$  ; il existe des éléments  $b_1$  et  $b_2$  de B tels que  $(u, b_1)$  et  $(v, b_2)$  appartiennent à W. Or  $(b_1, b_2)$  appartient à W, donc  $(u, v)$  appartient à  $\overset{3}{W}$ , donc à  $\overset{4}{W}$ , donc à V.

2) Supposons que A appartienne à  $\mathfrak{X}$ . Il existe un entourage symétrique V de X et un élément B de  $\mathfrak{X}$  tels que  $V(B) \subset A$ . Montrons que  $\tilde{V}(\mathfrak{X}) \cap i(X) \subset i(A)$  ; on saura alors que  $\mathfrak{X}$  appartient à  $(i(A))'$ . Appelons x un point de X tel que  $i(x)$  appartienne à  $\tilde{V}(\mathfrak{X})$ .  $\mathfrak{B}(x)$  et  $\mathfrak{X}$  ont en commun un ensemble C petit d'ordre V. C n'est pas disjoint de B ; soit b un point de  $B \cap C$ .  $(x, b)$  appartient à  $C \times C$ , donc à V ; ainsi x appartient à  $V(B)$ .  $i(x)$  est donc un élément de  $i(A)$ . ((

7.4. *La relation l.*

Deux ouverts A et B de X seront en relation l lorsqu'il existe une partie C de X, et deux entourages symétriques V et W de X tels que

$$\overset{3}{W} \subset V \text{ et } A \subset W(C) \subset V(C) \subset B.$$

7.5. *La relation l est régulière.*

Vérifions d'abord 2.1. Supposons que les ouverts A et B de X sont en relation l. On a  $\bar{A} \subset \overline{W(C)} \subset WW(C) \subset B$ .

Pour vérifier 2.2, nous allons montrer qu'en général, si  $\mathfrak{X}$  est un filtre de Cauchy minimal sur X, alors le tamis  $o(\mathfrak{X})$  des ouverts de  $\mathfrak{X}$  est un l-tamis.

Soit l'élément  $A$  de  $o(\mathfrak{X})$ . Il existe un entourage symétrique  $V$  de  $X$  et un élément  $B$  de  $\mathfrak{X}$  tels que  $V(B) \subset A$ ;  $V(B)$  appartient à  $\mathfrak{X}$ . Il existe un entourage ouvert symétrique  $W$  de  $X$  tel que  $WW \subset V$ .  $W(B)$  appartient à  $o(\mathfrak{X})$  et  $W(B) \subset V(B) \subset A$ . Ainsi,  $o(\mathfrak{X})$  est un  $l$ -tamis.  $\llcorner$

7.6. Appelons  $R$  l'extension régulière de  $X$  engendrée par  $l$ .

Il existe un homéomorphisme  $f$  de  $\hat{X}$  sur une partie de  $R$  tel que pour tout point  $x$  de  $X$ ,  $fi(x) = x$ .

$\hat{X}$  est une extension régulière de  $i(X)$ ;  $\hat{X}$  est donc le minimum de sa classe.

La famille  $\Phi$  de tamis associée à l'extension  $\hat{X}$  de  $i(X)$  est composée des tamis suivants : si  $\mathfrak{X}$  est un filtre de Cauchy minimal, de noyau vide sur  $\hat{X}$ , le tamis  $o(\mathfrak{X})$  des ouverts de  $\mathfrak{X}$  appartient à  $\Phi$ . Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que, si  $\mathfrak{X}$  est un filtre de Cauchy minimal, de noyau vide,  $o(\mathfrak{X})$  est un  $l$ -tamis pur maximal qui vérifie la propriété (A). Cela découlera du résultat évident suivant : si  $f$  est un homéomorphisme de l'espace topologique  $E$  sur l'espace  $F$ , si  $H$  et  $G$  sont des extensions minimales de leur classe de  $E$  et  $F$ , associées aux familles  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  et  $(\mathcal{V}_j)_{j \in J}$  de tamis sur  $E$  et  $F$ , s'il existe une bijection  $g : I \rightarrow J$  telle que, pour tout  $i$ ,  $\{fA : A \in \mathcal{U}_i\} = \mathcal{V}_{f_i}$ , alors il existe un homéomorphisme  $h : H \rightarrow G$ , tel que pour tout point  $x$  de  $E$ ,  $hx = fx$ .

Il est acquis que  $o(\mathfrak{X})$  est un  $l$ -tamis pur ; le fait de satisfaire à (A) entraîne le caractère maximal. Il s'agit donc de voir si  $o(\mathfrak{X})$  vérifie (A).

Considérons l'ouvert  $A$  de  $X$  ; supposons que  $A$  n'appartienne pas à  $o(\mathfrak{X})$  ; soit  $B$  un ouvert de  $X$  tel que  $B \cap A$  ; montrons que  $X - \bar{B}$  appartient à  $o(\mathfrak{X})$ . Il existe deux entourages symétriques  $V$  et  $W$  de  $X$  et une partie  $C$  de  $X$  tels que  $\overset{\circ}{W} \subset V$  et  $B \subset W(C) \subset V(C) \subset A$ . Il existe un entourage symétrique  $U$  de  $X$  tel que  $\overset{\circ}{U} \subset W$  ;  $\mathfrak{X}$  contient un élément  $D$  petit d'ordre  $U$ .  $U(D)$  appartient à  $\mathfrak{X}$ . Montrons que  $U(D)$  et  $W(C)$  sont disjoints ; supposons que le point  $x$  de  $X$  appartienne à  $U(D)$  et à  $W(C)$ . On peut trouver un point  $d$  de  $D$  et un point  $c$  de  $C$  tels que  $(x, d) \in U$  et  $(x, c) \in W$ . Considérons le point  $y$  de  $U(D)$  ; il existe un point  $d'$  de  $D$  tel que  $(y, d') \in U$  ;  $(d, d')$  appartient à  $U$ . Au total,  $(y, c)$  appartient à  $UUW(C)$ , donc à  $V(C)$ , donc à  $A$ . Ainsi, l'élément  $U(D)$  de  $\mathfrak{X}$  est inclus dans  $A$  qui appartiendrait à  $o(\mathfrak{X})$ . C'est impossible, et  $U(D)$  est disjoint de  $W(C)$ , donc de  $\bar{B}$ .  $X - \bar{B}$  appartient à  $\mathfrak{X}$  ; c'est un ouvert de  $o(\mathfrak{X})$ .  $\llcorner$

7.7. Si  $X$  est précompact, alors  $f$  est surjectif.

Si  $X$  est précompact,  $\hat{X}$  est compact ;  $f\hat{X}$  est donc un compact de l'espace de Hausdorff  $R$  ;  $f\hat{X}$  est donc fermé.  $f\hat{X}$  inclut  $X$ , et  $X$  est dense dans  $R$  ; on a donc  $f\hat{X} = R$ .  $\llcorner$

## RÉFÉRENCES

- [B<sub>1</sub>] N. BOURAKI, Topologie générale, *Act. Sc. et Ind.*, 1142 (1965).
- [B<sub>2</sub>] N. BOURAKI, Topologie générale. *Act. Sc. et Ind.*, 1143 (1965).
- [J<sub>1</sub>] F. JONGMANS, *Notes de topologie générale*.
- [J<sub>2</sub>] F. JONGMANS et R. MOORS, Extensions et compactifications moniques d'un espace topologique. *Bull. Soc. Royale Sc. Liège*, 30<sup>e</sup> année, n° 7-8, 1961, 320-333.
- [K] H.-J. KOWALSKY, *Topologische Räume*, Bâle, Birkhäuser, 1961.
- [M] R. MOORS, Extensions d'un espace topologique  $E$  donné pour lesquelles  $E$  et sa topologie sont connus. *Bull. Soc. Royale Sc. Liège*, n° 9, 1963, 653-658.
- [S] Yu. SMIRNOV, Sur les espaces de proximité. *Mat. Sbornik N. S.*, 31 (73), 1952, 543-574.