

ÉTUDE DES OSCILLATIONS ET DE LA STABILITÉ
DU SPHÉROÏDE DE JEANS
ET DE L'ELLIPSOÏDE DE ROCHE

par

H. ROBE

Institut d'Astrophysique
Université de Liège

INTRODUCTION

Le problème de l'équilibre et de la stabilité d'une masse fluide homogène incompressible m_1 soumise à l'effet de marée d'un compagnon m_2 et animée ou non d'un mouvement de rotation uniforme fut considéré pour la première fois par Roche dans ses études sur la constitution et l'origine du système solaire [1]. Il montra que la figure d'équilibre peut être un sphéroïde allongé dans le cas le plus simple (m_1 sans rotation) et, moyennant certaines hypothèses, un ellipsoïde à 3 axes inégaux ($a_1 > a_2 > a_3$) dans l'autre cas.

Jeans [2] reprit le problème et en discuta quelques applications astronomiques ; il étudia ainsi la stabilité du sphéroïde (appelé depuis lors sphéroïde de Jeans) par la méthode des séries linéaires de Poincaré.

Récemment, Chandrasekhar et Lebovitz [3, 4] déterminèrent, sur la base du théorème du viriel, les fréquences des petites oscillations du sphéroïde et de l'ellipsoïde pour les harmoniques de surface de degré $l = 2$.

Dans ce travail, nous étudions successivement la stabilité dynamique des deux figures par la méthode générale des petites perturbations. Nous établissons ainsi la formule générale donnant toutes les fréquences d'oscillation du sphéroïde et les équations aux valeurs propres déterminant les fréquences de l'ellipsoïde associées aux harmoniques de Lamé de degré 2 et 3. Nous considérons ensuite la stabilité séculaire des deux figures ; d'abord par la méthode des coefficients de stabilité de Poincaré, puis par les équations du viriel ; nous montrons en particulier que l'instabilité séculaire de l'ellipsoïde précède son instabilité dynamique et qu'elle apparaît par un mode purement visqueux (c.-à-d. se manifestant seulement en présence de viscosité).

CHAPITRE I

LE SPHÉROÏDE DE JEANS

1. Configuration d'équilibre

Soit un système d'axes $Ox_1x_2x_3$ dont l'origine O coïncide avec le centre de masse de m_1 et dont l'axe Ox_3 pointe vers m_2 . L'attraction de m_2 ($0, 0, d$) au point $P(x_1, x_2, x_3)$ de m_1 dérive du potentiel V_2 :

$$V_2 = -\frac{Gm_2}{M_2P} = -\frac{Gm_2}{d} \left\{ 1 - \frac{2x_3}{d} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{d^2} \right\}^{-1/2}$$

et l'on peut développer cette expression suivant les puissances ascendantes des fractions x_i/d ; de plus, si l'on suppose la distance d suffisamment grande par rapport aux dimensions de la masse m_1 , on peut négliger les cubes de ces fractions et l'on trouve :

$$V_2 = -\frac{Gm_2}{d} - \frac{Gm_2}{d^2} x_3 + \frac{\mu}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \tag{1}$$

où le facteur μ :

$$\mu = \frac{Gm_2}{d^3} \tag{2}$$

caractérise l'effet de marée. Le premier terme, constant, est à négliger ; quant au second, il correspond à une accélération d'ensemble de la masse m_1 vers m_2 et ne contribue pas à la déformation, si bien qu'à l'approximation indiquée il vient pour le potentiel de marée V_T

$$V_T = \frac{\mu}{2} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) \tag{3}$$

Ainsi que Roche [1] l'a montré, la seule figure d'équilibre ellipsoïdale possible est alors un sphéroïde allongé (axes $a_1 = a_2, a_3$; $a_1^2 = a_3^2 \cdot (1 - e^2)$) d'excentricité e réunie à μ défini ci-dessus par :

$$\mu = \Pi G \rho \left\{ \frac{(1 - e^2)}{e^2} \right\} \frac{1}{e} \log \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right) - \frac{6}{3 - e^2} \tag{4}$$

On voit que μ s'annule pour $e = 0$ ou 1 et présente un maximum en $e = 0.883\ 026$ (cfr. table 1 et fig. 1) ; il vaut :

$$\frac{\mu}{\Pi G \rho} = \frac{m_2}{\Pi \rho d^3} = 0.125\ 536$$

et correspond à la distance d_m des 2 corps en deçà de laquelle l'équilibre sous cette forme n'est plus possible ; à toute distance supérieure à d_m , il existe deux sphéroïdes d'équilibre caractérisés par des excentricités e distinctes. Le self-potentiel Φ de la masse m_1 en P s'écrit

$$\Phi = A_1(x_1^2 + x_2^2) + A_3x_3^2 + \text{Cte} \quad (5)$$

en y posant

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \Pi G \rho \frac{(1-e^2)}{2e^2} \left\{ \frac{2}{1-e^2} - \frac{1}{e} \log \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \right\} \\ A_3 &= \Pi G \rho \frac{(1-e^2)}{e^2} \left\{ \frac{1}{e} \log \left(\frac{1+e}{1-e} \right) - 2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Enfin, la pression p en P est liée à la densité ρ par l'expression :

$$\frac{P}{\rho} = (A_3 - \mu) a_3^2 \left\{ 1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{a_1^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right\} \quad (7)$$

où, d'après (6) et (4), $(A_3 - \mu)$ vaut $\frac{2(1-e^2)}{3-e^2} \Pi G \rho$.

2. Les équations des petites oscillations et leur solution

Après séparation du temps par le facteur $e^{i\sigma t}$, les équations régissant les petits mouvements du fluide au voisinage de l'équilibre s'écrivent dans le formalisme eulérien utilisé ici :

$$\text{div } \vec{\delta r} = 0 \quad (8)$$

$$\sigma^2 \cdot \vec{\delta r} = \text{grad} \left(\frac{p'}{\rho} + \Phi' + V_T' \right) \quad (9)$$

$$\Delta^2 \Phi' = 0 \quad (10)$$

Les première et seconde équations expriment respectivement la conservation de la masse et de l'impulsion au cours du mouvement, la troisième est celle de Poisson. ρ désigne la densité, p la pression, $\vec{\delta r}$ le déplacement matériel et Φ le potentiel gravifique. Un indice prime affecté à une variable physique f désigne sa perturbation eulérienne, elle est liée à la perturbation lagrangienne δf par :

$$\delta f = f' + \vec{\delta r} \cdot \text{grad } f$$

La perturbation eulérienne du potentiel de marée est nulle :

$$V_T' = 0 \quad (11)$$

Ceci entraîne, vu (8) :

$$\Delta^2 \psi = 0, \quad \psi = \Phi' + \frac{p'}{\rho} \quad (12)$$

La fonction ψ est donc une solution de l'équation de Laplace valable à l'intérieur du sphéroïde S :

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad (13)$$

Φ' représente un potentiel de simple couche de densité $\rho \cdot \delta r_N$ répartie sur S si δr_N désigne la composante normale du déplacement superficiel.

Pour pouvoir exprimer facilement les conditions aux limites sur le potentiel et la pression à la surface, il est indiqué de passer aux coordonnées sphéroïdales ξ, θ, φ définies par

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot \text{sh } \xi \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ x_2 &= k \cdot \text{sh } \xi \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ x_3 &= k \cdot \text{ch } \xi \cdot \cos \theta, \quad k = a_3 e \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

L'élément de longueur s'écrit alors :

$$ds^2 = h_1^2 \cdot d\xi^2 + h_2^2 \cdot d\theta^2 + h_3^2 \cdot d\varphi^2$$

$$h_1^2 = h_2^2 = k^2 \{ \sin^2 \theta + \text{sh}^2 \xi \}; \quad h_3^2 = k^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \text{sh}^2 \xi$$

et le sphéroïde (13) correspond à la valeur ξ_0 telle que

$$\text{ch } \xi_0 = \frac{1}{e} \quad (15)$$

Dans ces variables, l'équation (12) se sépare et sa solution est une somme de termes de la forme :

$$\psi_l^{\pm m} = A_l^{\pm m} \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot P_l^m(\text{ch } \xi) \cdot e^{\pm im\varphi}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, l \quad (16)$$

où $A_l^{\pm m}$ désigne une constante arbitraire et P_l^m la fonction associée de Legendre [5] :

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}; \quad x = \cos \theta < 1$$

$$P_l^m(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}; \quad x = \text{ch } \xi > 1$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} \{ (x^2-1)^l \}$$

Le déplacement correspondant, donné par (9), vaut

$$\vec{\delta}_l^m = \frac{1}{\sigma^2} \text{grad } \psi_l^{\pm m} \quad (17)$$

Les solutions de l'équation de Laplace valables à l'intérieur et à l'extérieur du sphéroïde $\xi = \xi_0$ s'écrivent respectivement :

$$\Phi' = B_l^{\pm m} \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot \frac{P_l^m(\text{ch } \xi)}{P_l^m(\text{ch } \xi_0)} \cdot e^{\pm im\varphi} \quad (18)$$

$$\Phi'_e = B_l^{\pm m} \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot \frac{Q_l^m(\text{ch } \xi)}{Q_l^m(\text{ch } \xi_0)} \cdot e^{\pm im\varphi} \quad (19)$$

$B_l^{\pm m}$ est une constante à déterminer et $Q_l^m(x)$ la fonction associée de Legendre de seconde espèce :

$$Q_l^m(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_l(x)}{dx^m}$$

$$Q_l(x) = (-1)^l \frac{2^l \cdot l!}{(2l)!} \frac{d^l}{dx^l} \left\{ (x^2-1)^l \int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{l+1}} \right\}$$

Ainsi choisies, les expressions de Φ' et Φ'_e prennent même valeur à la surface ; par ailleurs, le potentiel Φ' est celui d'une couche de densité ρ . $\vec{\delta r} \cdot \vec{N}$ où \vec{N} désigne le vecteur normal unitaire à S et l'on doit avoir :

$$\left\{ \frac{d\Phi'_e}{dN} - \frac{d\Phi'}{dN} \right\}_{\xi=\xi_0} = 4\Pi G\rho (\vec{\delta r}_l^m) \cdot \vec{N} \quad (20)$$

où la dérivée suivant la normale vaut explicitement :

$$\frac{d\Phi'}{dN} = \vec{N} \cdot \text{grad } \Phi' = \left\{ \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi'}{\partial \xi} \right\}_{\xi=\xi_0} \quad (21)$$

En substituant les expressions (17), (18), (19) et (21) dans la condition (20), on obtient pour les constantes $B_l^{\pm m}$:

$$B_l^{\pm m} = \frac{4\Pi G\rho}{\sigma^2} \left\{ \frac{P_l^m(\text{ch } \xi) \cdot Q_l^m(\text{ch } \xi) \cdot DP_l^m(\text{ch } \xi)}{W_l^m} \right\}_{\xi=\xi_0} \cdot A_l^{\pm m}$$

où D représente la dérivée par rapport à ξ et W_l^m le wronskien des fonctions associées de Legendre P_l^m et Q_l^m :

$$W_l^m(\text{ch } \xi) = P_l^m(\text{ch } \xi) \cdot DQ_l^m(\text{ch } \xi) - Q_l^m(\text{ch } \xi) \cdot DP_l^m(\text{ch } \xi)$$

lequel s'évalue facilement :

$$W_l^m(\text{ch } \xi) = \frac{(-1)^{m+1} (l+m)!}{(l-m)! \text{sh } \xi} \quad (22)$$

La perturbation eulérienne du potentiel s'écrit donc finalement :

$$\Phi' = \frac{4\Pi G\rho}{\sigma^2} A_l^{\pm m} \frac{Q_l^m(\text{ch } \xi_0) \cdot DP_l^m(\text{ch } \xi_0)}{W_l^m(\text{ch } \xi_0)} P_l^m(\text{ch } \xi) P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{\pm im\varphi} \quad (23)$$

3. Déterminations des fréquences

La condition aux limites sur la pression, $\{p' + \vec{\delta r} \cdot \text{grad } p\}_S = 0$, s'écrit en termes de ψ et Φ' :

$$\{\rho\psi - \rho\Phi' + \vec{\delta r} \cdot \text{grad } p\}_{\xi=\xi_0} = 0 \quad (24)$$

où, selon (7), (14) et (17), nous avons successivement :

$$\begin{aligned} p &= \frac{2(1-e^2)}{3-e^2} \Pi G\rho^2 a_3^2 \left\{ 1 - \frac{e^2}{1-e^2} [\cos^2 \theta \cdot (1 - e^2 \text{ch}^2 \xi) + \text{sh}^2 \xi] \right\} \\ \{\delta r \cdot \text{grad } p\}_{\xi=\xi_0} &\overset{\rightarrow}{=} \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \psi_l^{\pm m}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial p}{\partial \xi} \right\}_{\xi=\xi_0} \\ &= - \frac{4\Pi G\rho}{\sigma^2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{3-e^2} \cdot DP_l^m(\text{ch } \xi_0) \cdot A_l^{\pm m} \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{\pm im\varphi} \end{aligned}$$

En substituant cette dernière expression, ainsi que celles de Φ' et ψ dans (24), on obtient pour les valeurs propres, compte tenu de (22) et (15)

$$\frac{\sigma^2}{\Pi G\rho} = 4 \left\{ \frac{e}{(3-e^2)} \cdot \frac{1}{P_l^m(x)} - (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} Q_l^m(x) \right\} \frac{dP_l^m(x)}{dx}; \quad (25)$$

$x = \text{ch } \xi_0 = 1/e$

A un l fixé correspondent donc $(l + 1)$ valeurs $\sigma^2 : \sigma_{l,0}^2, \sigma_{l,1}^2, \dots, \sigma_{l,l}^2$ qu'il est très facile de calculer lorsque l'on dispose des tables des fonctions $P_l^m(x), Q_l^m(x), DP_l^m(x)$ [6] et qui permettent en particulier de déterminer pour quelle valeur de μ le modèle devient instable ($\sigma^2 < 0$). Contrairement à la rotation qui lève complètement la dégénérescence des fréquences (tous les $\sigma_{l,m}$ distincts), la présence d'un champ gravifique extérieur laisse subsister en partie la dégénérescence, toutes les fréquences étant doubles (identiques pour $+m$ et $-m$).

Nous pouvons ignorer la valeur $l = 1$ qui correspond ici à un déplacement d'ensemble de la masse m_1 dans le champ de m_2 ; on a en effet, [7] :

$$P_1(x) = x; \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - 1, \quad P_1^1(x) = (x^2 - 1)^{1/2}$$

$$Q_1^1(x) = (x^2 - 1)^{1/2} \frac{dQ_1}{dx}$$

par suite

$$\psi_1^0 = A_1^0 \cos \theta \cdot \operatorname{ch} \xi = Ax_3 \Rightarrow \vec{\delta r}_1^0 = (0, 0, A)$$

$$\psi_1^1 = A_1^1 \sin \theta \cdot \operatorname{sh} \xi (\cos \varphi + i \sin \varphi) = B(x_1 + ix_2) \Rightarrow \vec{\delta r}_1^1 = B(1, i, 0) \quad (26)$$

où A et B désignent deux constantes.

De plus, tenant compte de la valeur (4) de μ :

$$\sigma_{1,0}^2 = -2\mu, \quad \sigma_{1,1}^2 = \mu \quad (27)$$

Par ailleurs, le mouvement d'une particule P soumise uniquement à l'attraction de m_2 obéit à l'équation :

$$\ddot{\vec{r}} = -\operatorname{grad} V_2; \quad (\vec{r} = \vec{OP})$$

où V_2 est donné par (1) tant que l'on reste au voisinage de m_1 ; on en déduit :

$$\ddot{x}_1 + \mu x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \mu x_2 = 0, \quad \ddot{x}_3 - 2\mu x_3 = \mu d$$

$$x_i = C_i \cos \sqrt{\mu} t + D_i \sin \sqrt{\mu} t, \quad i = 1, 2; \quad x_3 = -\frac{2}{d} + Ae^{\sqrt{2\mu}t}$$

lesquelles composantes du mouvement correspondent bien aux fréquences et déplacements précédents [cfr. (26) et (27)].

4. Pulsations σ correspondant aux harmoniques de surface $l = 2$ et 3

Pour ces valeurs, les fonctions requises sont :

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); \quad Q_2(x) = P_2(x) \cdot Q_0(x) - \frac{3}{2}x; \quad Q_0(x) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \quad Q_3(x) = P_3(x) \cdot Q_0(x) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}$$

il en résulte explicitement en fonction de l'excentricité e de la section méridienne :

$$\sigma_{2,0}^2 = \frac{3(1-e^2)\Pi G \rho}{(3-e^2)e^4} \left\{ \frac{6(3-e^2)^2 + 8e^4}{3-e^2} - \frac{(3-e^2)^2}{e} \log \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \right\}$$

$$\sigma_{2,1}^2 = \frac{6(1-e^2)(2-e^2)\Pi G\rho}{e^4} \left\{ \frac{1}{2e} \log \left(\frac{e+1}{1-e} \right) - \frac{3}{3-e^2} \right\}$$

$$\sigma_{2,2}^2 = \frac{(1-e^2)\Pi G\rho}{e^4} \left\{ -\frac{3(1-e^2)}{2e} \log \left(\frac{1+e}{1-e} \right) + \frac{9-18e^2+13e^4}{(1-e^2)(3-e^2)} \right\}$$

Dans la table 1 sont données les valeurs correspondantes ; les modes de pulsations $\sigma_{2,1}$ et $\sigma_{2,2}$ restent stables ; le premier devient instable au point où μ est maximum, car l'on a d'après (3) :

$$\frac{d\mu}{de} = \frac{\Pi G\rho}{e^3(3-e^2)} \left\{ \frac{6(3-e^2)^2+8e^4}{3-e^2} - \frac{(3-e^2)^2}{e} \log \left(\frac{1+e}{e-1} \right) \right\} = \frac{e\sigma_{2,0}^2}{3(1-e)^2}$$

Ceci signifie que des 2 figures d'équilibre possibles à une distance $d (> d_m)$, une seule, celle d'excentricité la plus petite, est stable.

Nous avons aussi calculé les valeurs propres σ^2 des modes appartenant aux harmoniques de degré 3 (table 2) ; il est surtout intéressant de noter que la première, $\sigma_{3,0}^2$, change de signe en $e = 0.94774$ en accord avec la détermination des « points neutres » (point où $\sigma = 0$) de ces harmoniques étudiés par Chandrasekhar [8].

Il serait évidemment possible d'étendre les calculs à des harmoniques de degré quelconque, mais l'intérêt majeur ici porte sur l'instabilité qui se manifeste en premier lieu quand l'excentricité augmente et passe par la valeur correspondant au maximum de $\mu/\Pi G\rho$; instabilité qui relève d'un harmonique de degré 2. Notons toutefois que l'instabilité correspondant à l'harmonique de degré 3 serait plus violente que la première si elle avait l'occasion de se manifester. Remarquons aussi que toutes ces instabilités s'introduisent par les modes symétriques autour de l'axe ($m_1 m_2$). L'harmonique de degré 2 modifie essentiellement l'excentricité de la section méridienne et on peut s'attendre à ce que l'instabilité correspondante ramène la seconde configuration d'excentricité trop grande vers celle d'excentricité plus petite. Il n'en est sans doute pas de même des instabilités qui se manifestent pour des harmoniques plus élevés et il est vraisemblable que si l'on pouvait commencer l'évolution avec l'excentricité maximum ($e = 1$), de multiples instabilités se manifesteraient brisant la configuration en petites portions, ce qui correspondrait à l'instabilité gravitationnelle bien connue du cylindre homogène incompressible.

TABLE 1
Carré des pulsations associées aux harmoniques $l = 2$
(μ et σ^2 en unités $\Pi G\rho$)

e	μ	$\sigma_{2,0}^2$	$\sigma_{2,1}^2$	$\sigma_{2,2}^2$	e	μ	$\sigma_{2,0}^2$	$\sigma_{2,1}^2$	$\sigma_{2,2}^2$
0.	0.	1.0667	1.0667	1.0667	0.80	0.11484	0.2808	0.7321	1.5980
0.10	0.00178	1.0602	1.0633	1.0733	0.84	0.12204	0.1517	0.6716	1.6670
0.20	0.00716	1.0392	1.0532	1.0934	0.88303	0.12554	0.	0.5894	1.7484
0.30	0.01626	1.0017	1.0354	1.1279	0.90	0.12476	-0.0612	0.5498	1.7826
0.40	0.02924	0.9428	1.0086	1.1782	0.94	0.11368	-0.1932	0.4309	1.8675
0.50	0.04622	0.8549	0.9706	1.2466	0.98	0.07204	-0.2305	0.2394	1.9567
0.60	0.06714	0.7269	0.9175	1.3361	0.999	0.00924	-0.0436	0.0278	1.9980
0.70	0.09114	0.5423	0.8425	1.4513	0.9999	0.00138	-0.0071	0.0041	1.9998

TABLE 2

Carré des pulsations associées aux harmoniques $l = 3$
(σ^2 en unités $\Pi G \rho$)

e	$\sigma_{3,0}^2$	$\sigma_{3,1}^2$	$\sigma_{3,2}^2$	$\sigma_{3,3}^2$	e	$\sigma_{3,0}^2$	$\sigma_{3,1}^2$	$\sigma_{3,2}^2$	$\sigma_{3,3}^2$
0.	2.2857	2.2857	2.2857	2.2857	0.930	0.15950	0.8581	2.1416	3.6791
0.1	2.2765	2.2788	2.2857	2.2972	0.947	0.00657	0.7345	2.1192	3.7518
0.2	2.2477	2.2573	2.2856	2.3321	0.948	-0.00229	0.7267	2.1178	3.7561
0.3	2.1959	2.2186	2.2851	2.3919	0.95	-0.01992	0.7107	2.1148	3.7649
0.4	2.1145	2.1584	2.2837	2.4792	0.96	-0.1048	0.6253	2.0987	3.8095
0.5	1.9918	2.0693	2.2804	2.5981	0.97	-0.1795	0.5284	2.0803	3.8553
0.6	1.8086	1.9397	2.2734	2.7547	0.98	-0.2319	0.4138	2.0588	3.9024
0.7	1.5312	1.7514	2.2595	2.9577	0.985	-0.2418	0.3460	2.0466	3.9263
0.8	1.1005	1.4731	2.2318	3.2196	0.99	-0.2314	0.2667	2.0330	3.9506
0.85	0.7986	1.2832	2.2008	3.3781	0.995	-0.1827	0.1671	2.0178	3.9751
0.90	0.4210	1.0412	2.1724	3.5587	0.997	-0.1418	0.1163	2.0111	3.9851
0.91	0.3362	0.9841	2.1632	3.5978	0.999	-0.0717	0.0594	2.0038	3.995
0.92	0.2488	0.9233	2.1529	3.6379					

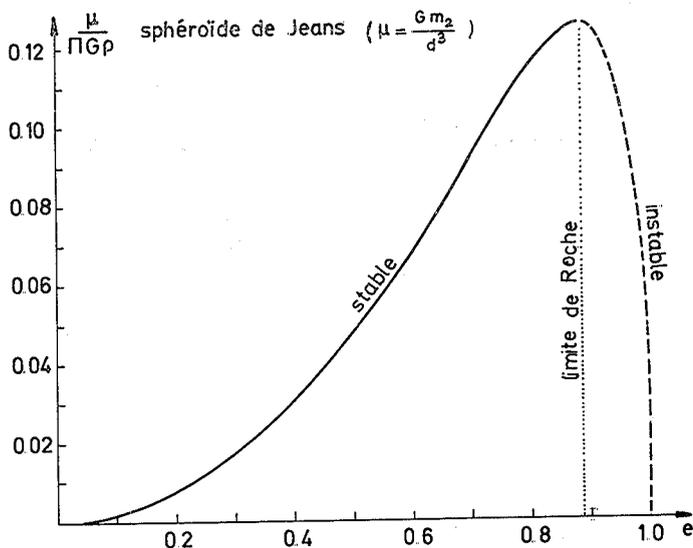


Fig. 1. — Variation de μ en fonction de e .

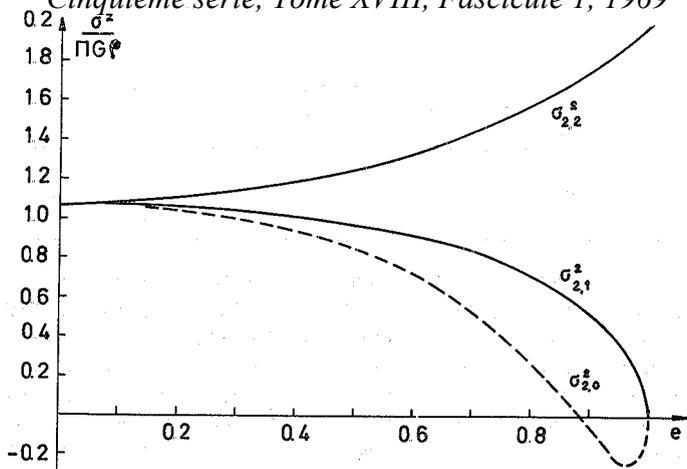


Fig. 2. — Carré des pulsations du sphéroïde de Jeans, harmoniques $l = 2$.

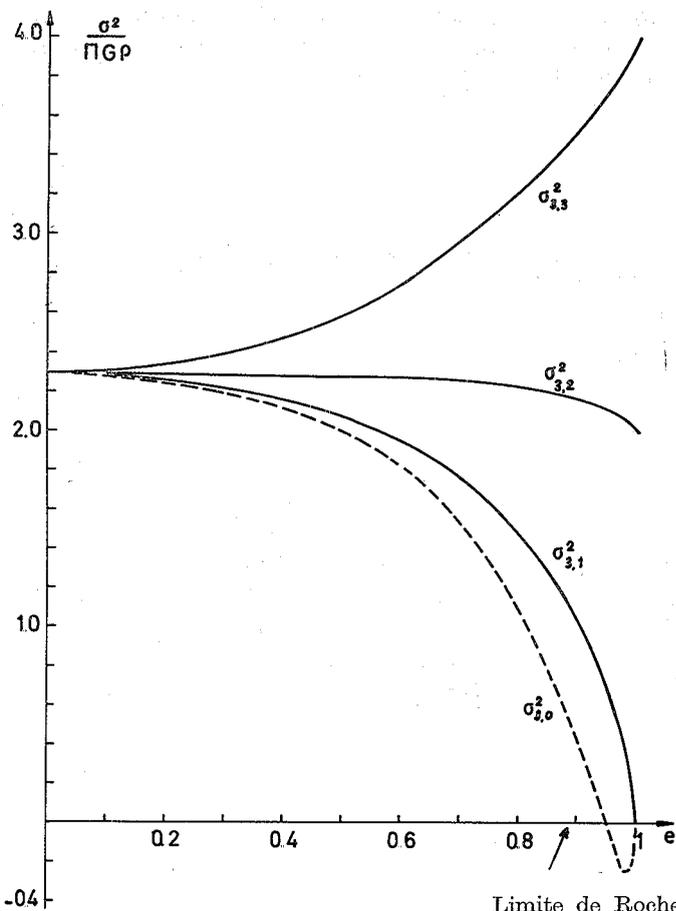


Fig. 3. — Carré des pulsations du sphéroïde de Jeans, harmoniques $l = 3$.

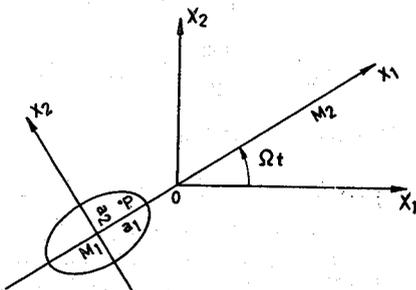
CHAPITRE II

L'ELLIPSOÏDE DE ROCHE

§ 1. Exposé de la méthode

1. Equations fondamentales

Désignons respectivement par $OX_1X_2X_3$ un système d'axes absolus tels que OX_1X_2 soit le plan commun aux orbites de m_1 et m_2 et par $M_1x_1x_2x_3$ des axes relatifs tels que M_1x_1 pointe vers m_2 et que M_1x_3 soit parallèle à OX_3 .



Les équations de l'hydrodynamique exprimant la conservation de la masse et de l'impulsion s'écrivent dans le système relatif :

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \operatorname{grad}) \vec{U} = -\operatorname{grad} \left(\Phi + V_2 + \frac{p}{\rho} \right) - \vec{\gamma}_c - \vec{\gamma}_e \quad (31)$$

où au point P, \vec{U} représente le vecteur vitesse du fluide ; Φ le self-potential de la masse m_1 ; V_2 le potentiel créé par m_2 ; ρ la densité ; p la pression ; $\vec{\gamma}_e$ et $\vec{\gamma}_c$ les accélérations d'entraînement et de Coriolis :

$$V_2 = -\frac{Gm_2}{d} \left\{ 1 - \frac{2x_1}{d} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{d^2} \right\}^{-1/2}$$

$$\vec{\gamma}_e = -\Omega^2 \overrightarrow{OP'} = -\Omega^2 (\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P'}) = \operatorname{grad} \left\{ \frac{Gm_2}{d^2} x_1 - \frac{\Omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right\} \quad (32)$$

où P' désigne la projection de P sur le plan OX_1X_2

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} ; \vec{\Omega} = (0, 0, \Omega) \quad (33)$$

$$\Omega^2 = G(m_1 + m_2)/d^3 = \mu(1 + q) \quad (34)$$

si :

$$\mu = Gm_2/d^3 ; q = \frac{m_1}{m_2} \quad (35)$$

A l'approximation habituelle (cfr. (I)) :

$$V_2 = -\frac{Gm_2}{d} - \frac{Gm_2}{d^2} x_1 + \frac{\mu}{2} (x_2^2 + x_3^2 - 2x_1^2) \quad (36)$$

par suite :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \text{grad}) \vec{U} = -\text{grad} \left(\Phi + V_T + V_\Omega + \frac{p}{\rho} \right) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} \quad (37)$$

où le potentiel de marée est désigné par V_T et celui des forces centrifuges par V_Ω :

$$V_T = \frac{\mu}{2} (x_2^2 + x_3^2 - 2x_1^2) \quad (38)$$

$$V_\Omega = -\frac{\Omega^2}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad (39)$$

Il reste à adjoindre l'équation de Poisson :

$$\Delta^2 \Phi = 4\Pi G\rho \quad (40)$$

On peut remarquer dès maintenant que lorsque $q \rightarrow \infty$, μ devient nul et l'on retrouve le cas d'une pure rotation (sphéroïde de MacLaurin et ellipsoïde de Jacobi) ; par contre, lorsque $q = -1$, $\Omega^2 = 0$ et l'on retrouve le cas du sphéroïde de Jeans ; en faisant varier q , on passe donc graduellement d'un cas à l'autre.

2. Figures d'équilibre

Comme Roche l'a montré, la figure d'équilibre de la masse m_1 peut être un ellipsoïde de demi-axes a_i tels que $a_1 > a_2 > a_3$; dans cette hypothèse, l'on a [9] :

$$\Phi = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 + \text{cte} \quad (41)$$

$$A_i = \Pi G\rho a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_i^2 + \lambda) \cdot \Delta(\lambda)} \quad (42)$$

$$\Delta(\lambda) = \{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)\}^{1/2} \quad (43)$$

et à l'équilibre, l'équation (37) se réduit à :

$$\frac{P}{\rho} = \alpha + x_1^2 \left(\frac{\Omega^2}{2} + \mu - A_1 \right) + x_2^2 \left(\frac{\Omega^2}{2} - \frac{\mu}{2} - A_2 \right) - x_3^2 \left(\frac{\mu}{2} + A_3 \right) \quad (44)$$

où α est une constante d'intégration à déterminer.

Par ailleurs, la pression p doit s'annuler à la surface libre du fluide, ce qui implique :

$$\frac{p}{\rho} = \alpha \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right) \quad (45)$$

et l'identification des expressions (44) et (45) conduit à la suite de rapports

$$\frac{a_1^2 \left(A_1 - \mu - \frac{\Omega^2}{2} \right)}{\alpha} = \frac{a_2^2 \left(A_2 + \frac{\mu}{2} - \frac{\Omega^2}{2} \right)}{\alpha} = \frac{a_3^2 \left(A_3 + \frac{\mu}{2} \right)}{\alpha} = 1$$

dont on déduit directement la valeur de α dans (45) :

$$\alpha = a_3^2 \left(A_3 + \frac{\mu}{2} \right) \quad (46)$$

Nous avons ensuite en soustrayant le 3^e rapport du premier et en y éliminant Ω^2 en terme de μ par (34)

$$\mu = \frac{2(a_1^2 A_1 - a_3^2 A_3)}{(q+3)a_1^2 + a_3^2} \quad (47)$$

De même, le troisième rapport soustrait du second donne :

$$\mu = \frac{2(a_2^2 A_2 - a_3^2 A_3)}{qa_2^2 + a_3^2}$$

il en résulte :

$$\frac{(a_1^2 A_1 - a_3^2 A_3)}{(3+q)a_1^2 + a_3^2} = \frac{(a_2^2 A_2 - a_3^2 A_3)}{qa_2^2 + a_3^2} \quad (48)$$

A une valeur choisie du paramètre q et à un rapport arbitraire des axes $a_2/a_1 (< 1)$, correspond par cette équation une valeur de a_3/a_1 que nous avons recherchée numériquement par essais et erreurs avec une précision absolue de 10^{-6} ; la relation (47) permet ensuite de calculer μ . Pour effectuer aisément les quadratures requises, nous avons ramené l'intervalle d'intégration de 0 à 1 par le changement de variables

$$x = \frac{a_3}{\sqrt{a_3^2 + \lambda}}$$

lequel transforme les A_i en :

$$A_1 = \frac{2a_1 a_2}{a_3^2} \Pi G \rho \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+k^2 x^2)^{3/2} (1+k'^2 x^2)^{1/2}} ;$$

$$k^2 = \frac{a_1^2}{a_3^2} - 1, \quad k'^2 = \frac{a_2^2}{a_3^2} - 1$$

$$A_2 = \frac{2a_1 a_2}{a_3^2} \Pi G \rho \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+k^2 x^2)^{1/2} (1+k'^2 x^2)^{3/2}}$$

$$A_3 = \frac{2a_1 a_2}{a_3^2} \Pi G \rho \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+k^2 x^2)^{1/2} (1+k'^2 x^2)^{1/2}}$$

Les tables 3 indiquent les valeurs des paramètres caractérisant les figures d'équilibre pour $q = 0,01 ; 0,1 ; 1 ; 5 ; 20 ; 100$ et 1000 . Le point où μ (et par suite Ω^2) atteint son maximum est connu sous le nom de limite de Roche et correspond à la distance minimum d_{\min} , d'équilibre possible ; elle dépend évidemment du rapport q des masses (voir tables 5).

Il est utile de représenter, comme Jeans, l'ensemble des solutions précédentes (voir fig. 4) dans un plan de coordonnées \bar{a} , \bar{b} définies par

$$\bar{a} = \frac{a_1}{(a_1 a_2 a_3)^{1/3}}, \quad \bar{b} = \frac{a_2}{(a_1 a_2 a_3)^{1/3}}$$

La sphère correspond au point (1, 1), les sphéroïdes de Maclaurin à la droite $\bar{a} = \bar{b}$ et ceux de Jeans à la courbe $\bar{a}\bar{b}^2 = 1$; S_2J représente la série des ellipsoïdes de Jacobi. L'ensemble des séquences des ellipsoïdes de Roche est compris dans la région ainsi limitée ; la ligne en trait plein joignant T_2 à S_2 marque la limite de Roche (Ω^2 et μ maximum).

En vue d'une comparaison ultérieure, rappelons que les figures de Jeans et de Maclaurin deviennent instables par des déformations associées aux harmoniques de degré $l = 2$ respectivement en T_2 et M_2 et qu'en T_3 et J_3 , le sphéroïde de Jeans et l'ellipsoïde de Jacobi le deviennent par des harmoniques de surface de degré $l = 3$.

TABLES 3

Les paramètres des ellipsoïdes de Roche

$\frac{a_2}{a_1}$	$\frac{a_3}{a_1}$	$\frac{\Omega^2}{\Pi G \rho}$	$\frac{\mu}{\Pi G \rho}$	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
$q = 0.01$						
0.9	0.875403	0.032434	0.03211	1.0827	0.9744	0.9478
0.8	0.764331	0.057957	0.05738	1.1781	0.9425	0.9005
0.7	0.661993	0.076439	0.07568	1.2923	0.9046	0.8555
0.6	0.565269	0.087527	0.08660	1.4339	0.8604	0.8105
0.55	0.518267	0.090129	0.08924	1.5195	0.8357	0.7875
0.5	0.471866	0.090690	0.08979	1.6183	0.8092	0.7636
0.4	0.380008	0.085376	0.08453	1.8738	0.7495	0.7120
0.35	0.334167	0.079385	0.07860	2.0448	0.7157	0.6833
0.3	0.288136	0.071193	0.07049	2.2616	0.6785	0.6516
0.2	0.194849	0.048573	0.04809	2.9496	0.5899	0.5747
0.1	0.098955	0.020477	0.02027	4.6579	0.4658	0.4609
$q = 0.1$						
0.90	0.873376	0.035072	0.03188	1.0836	0.9752	0.9465
0.80	0.761572	0.062305	0.05664	1.1796	0.9437	0.8983
0.70	0.659210	0.081776	0.07434	1.2941	0.9058	0.8531
0.60	0.562839	0.093262	0.08478	1.4360	0.8616	0.8082

TABLES 3 (suite)

$\frac{a_2}{a_1}$	$\frac{a_3}{a_1}$	$\frac{\Omega^2}{\Pi G \rho}$	$\frac{\nu}{\Pi G \rho}$	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
0.50	0.469992	0.09333	0.08758	1.6205	0.8102	0.7616
0.40	0.378732	0.09047	0.08224	1.8759	0.7503	0.7104
0.30	0.287405	0.07533	0.06849	2.2635	0.6791	0.6505
0.20	0.194542	0.05135	0.04669	2.9511	0.5902	0.5741
0.10	0.098894	0.02165	0.01069	4.6588	0.4659	0.4607

$q = 1$

0.90	0.854376	0.05955	0.029774	1.0915	0.9824	0.9326
0.80	0.736945	0.10026	0.050132	1.1926	0.9541	0.8789
0.70	0.635315	0.12616	0.063082	1.3101	0.9171	0.8323
0.60	0.542700	0.13925	0.069623	1.4535	0.8721	0.7888
0.55	0.498372	0.14127	0.070636	1.5394	0.8467	0.7672
0.54	0.489609	0.14132	0.070662	1.5581	0.8414	0.7628
0.53	0.480875	0.14125	0.070627	1.5772	0.8359	0.7585
0.52	0.472164	0.14107	0.070534	1.5970	0.8304	0.7540
0.40	0.368600	0.12952	0.064760	1.8929	0.7572	0.6977
0.30	0.281721	0.10663	0.05332	2.2787	0.6836	0.6420
0.20	0.192189	0.07229	0.036144	2.9631	0.5926	0.5695
0.10	0.098434	0.03045	0.01523	4.6661	0.4666	0.4592

$q = 5$

0.9	0.791095	0.13758	0.02293	1.1199	1.0079	0.8859
0.8	0.668463	0.19763	0.03294	1.2320	0.9856	0.8235
0.7	0.576788	0.22426	0.03738	1.3530	0.9471	0.7804
0.6	0.497821	0.23095	0.03849	1.4960	0.8976	0.7447
0.55	0.460366	0.22837	0.03806	1.5806	0.8694	0.7277
0.50	0.423361	0.22216	0.03703	1.6779	0.8390	0.7104
0.40	0.348819	0.19891	0.03315	1.9280	0.7712	0.6725
0.35	0.310529	0.18175	0.03029	2.0954	0.7334	0.6507
0.25	0.230358	0.13621	0.02270	2.5895	0.6474	0.5965
0.10	0.097631	0.04552	0.00759	4.6788	0.4679	0.4568

$q = 20$

0.95	0.777508	0.19214	0.009150	1.1063	1.0509	0.8601
0.85	0.628710	0.28320	0.01348	1.2323	1.0474	0.7747
0.70	0.519046	0.30641	0.01459	1.4014	0.9810	0.7274

TABLES 3 (suite)

$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$	$\frac{\Omega^2}{\Pi G \rho}$	$\frac{\mu}{\Pi G \rho}$	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
0.65	0.488645	0.30443	0.01450	1.4657	0.9527	0.7162
0.55	0.428897	0.29055	0.01384	1.6184	0.8901	0.6941
0.45	0.366884	0.26370	0.01256	1.8229	0.8203	0.6688
0.40	0.334107	0.24503	0.01167	1.9559	0.7824	0.6535
0.30	0.263640	0.19615	0.00934	2.3296	0.6989	0.6142
0.15	0.142329	0.09388	0.00447	3.6047	0.5407	0.5130

$q = 50$

0.95	0.694761	0.27229	0.005339	1.1485	1.0911	0.7980
0.85	0.581556	0.32990	0.006468	1.2647	1.0750	0.7355
0.75	0.522961	0.33645	0.006597	1.3661	1.0246	0.7144
0.70	0.496939	0.33397	0.006548	1.4219	0.9953	0.7066
0.50	0.390005	0.29620	0.005808	1.7245	0.8622	0.6725
0.45	0.360502	0.27933	0.005477	1.8336	0.8251	0.6610
0.10	0.096939	0.05823	0.001142	4.6900	0.4690	0.4546

$q = 100$

0.95	0.644266	0.31618	0.003131	1.1778	1.1189	0.7588
0.85	0.560324	0.34907	0.003456	1.2805	1.0884	0.7175
0.80	0.534958	0.35057	0.003471	1.3270	1.0616	0.7099
0.75	0.511345	0.34877	0.003453	1.3764	1.0323	0.7038
0.65	0.464268	0.33779	0.003344	1.4909	0.9691	0.6922
0.55	0.413919	0.31711	0.003140	1.6377	0.9008	0.6779
0.45	0.358062	0.28515	0.002823	1.8377	0.8270	0.6580
0.40	0.327545	0.26419	0.002616	1.9689	0.7876	0.6449
0.20	0.183876	0.14088	0.001395	3.0071	0.6014	0.5529
0.10	0.0968788	0.05932	0.000587	4.6909	0.4691	0.4544

$q = 1000$

0.95	0.577104	0.36742	0.000367	1.2218	1.1607	0.7051
0.90	0.556289	0.36930	0.000369	1.2594	1.1334	0.7006
0.85	0.537797	0.36807	0.000368	1.2981	1.1034	0.6981
0.75	0.499646	0.36066	0.000360	1.3871	1.0403	0.6930
0.65	0.457447	0.34653	0.000346	1.4982	0.9739	0.6854
0.55	0.409848	0.32399	0.000323	1.6431	0.9037	0.6734
0.45	0.355708	0.29068	0.000290	1.8418	0.8288	0.6551
0.40	0.325808	0.26911	0.000269	1.9724	0.7890	0.6426
0.20	0.183560	0.14333	0.000143	3.0088	0.6018	0.5523
0.10	0.096822	0.06036	0.000060	4.6918	0.4692	0.4543

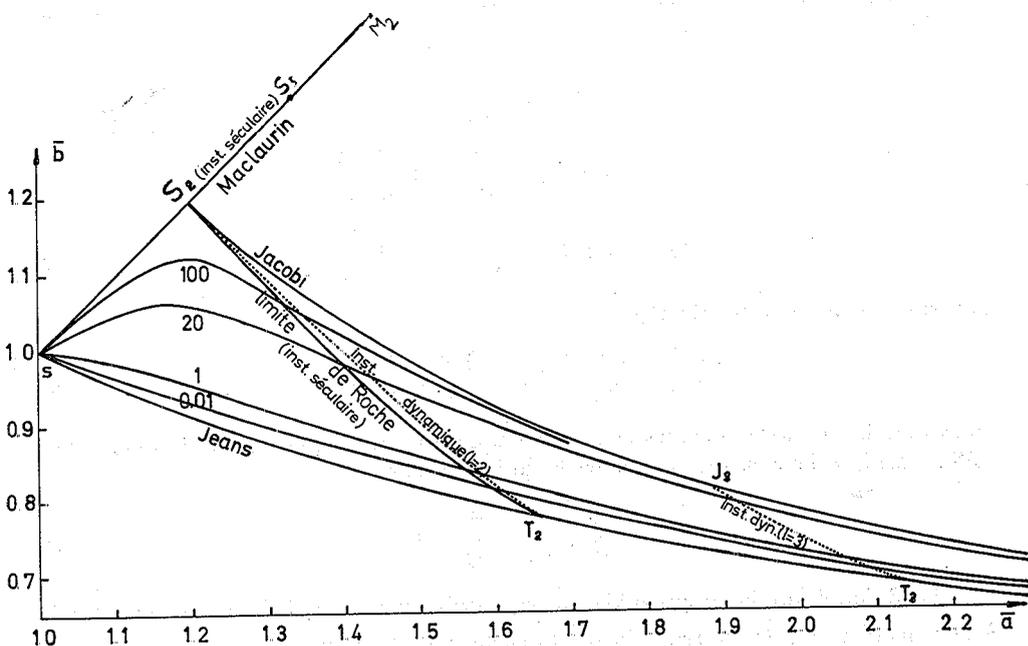


Fig. 4. — Équilibre et stabilité des ellipsoïdes de Roche.

3. Les équations des petites oscillations et leurs solutions

Les petites mouvements de la masse fluide au voisinage de l'équilibre sont maintenant décrits par le système linéaire.

$$\operatorname{div} \vec{\delta r} = 0; \quad \vec{U}' = i\sigma \vec{\delta r} \cdot e^{i\sigma t} \quad (49)$$

$$\sigma^2 \vec{\delta r} = \operatorname{grad} \psi + 2i\sigma \vec{\Omega} \wedge \vec{\delta r}, \quad \psi = \Phi' + \frac{p'}{\rho} \quad (50)$$

$$\Delta^2 \Phi' = 0 \quad (51)$$

car les perturbations eulériennes du potentiel de marée, des forces centrifuges et de la densité sont nulles :

$$V_{r'} = V_{\Omega'} = 0; \quad \rho' = 0$$

Ces équations diffèrent de celles du cas de la figure de Jeans par le terme de Coriolis. En projetant l'équations de mouvement sur les axes, on obtient

$$\sigma^2 \xi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - 2i\sigma \Omega \xi_2$$

$$\sigma^2 \xi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + 2i\sigma \Omega \xi_1$$

$$\sigma^2 \xi_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}; \quad \vec{\delta r} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

On en déduit, en excluant la valeur $\sigma^2 = 4\Omega^2$ pour laquelle la résolution n'est plus possible :

$$\begin{aligned}(\sigma^2 - 4\Omega^2)\xi_1 &= \frac{\partial\psi}{\partial x_1} - 2i \frac{\Omega}{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \\(\sigma^2 - 4\Omega^2)\xi_2 &= \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + 2i \frac{\Omega}{\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\(\sigma^2 - 4\Omega^2)\xi_3 &= \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\end{aligned}\tag{52}$$

par suite, compte tenu de (49)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = 0\tag{53}$$

et la fonction ψ est une solution de cette équation, dite équation de Poincaré [10], définie à l'intérieur et sur la surface E de l'ellipsoïde

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1\tag{54}$$

Le fluide étant incompressible, Φ' se réduit au potentiel de simple couche dû à la densité $\varepsilon = \rho \vec{\delta r} \cdot \vec{N}$ répartie sur la surface E, \vec{N} étant le vecteur normal unitaire à E. Pour calculer ce potentiel, les coordonnées ellipsoïdales, λ, μ, ν , s'imposent ; elles sont définies par [11] :

$$\begin{aligned}x_1^2 &= \frac{(\lambda + a_1^2)(\mu + a_1^2)(\nu + a_1^2)}{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 - a_3^2)} \\x_2^2 &= \frac{(\lambda + a_2^2)(\mu + a_2^2)(\nu + a_2^2)}{(a_2^2 - a_1^2)(a_2^2 - a_3^2)} \\x_3^2 &= \frac{(\lambda + a_3^2)(\mu + a_3^2)(\nu + a_3^2)}{(a_3^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)}\end{aligned}$$

et l'ellipsoïde E correspond à $\lambda = 0$. La métrique s'écrit

$$ds^2 = h_1^2 \cdot d\lambda^2 + h_2^2 \cdot d\mu^2 + h_3^2 \cdot d\nu^2$$

où

$$h_1^2 = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{4 \cdot \Delta(\lambda)} ; h_2^2 = \frac{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}{4 \cdot \Delta(\lambda)} ; h_3^2 = \frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}{4 \cdot \Delta(\lambda)}$$

L'équation de Laplace se sépare et l'expression de Φ' , respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de l'ellipsoïde E, est une somme de termes de la forme :

$$\left. \begin{aligned}\Phi' &= B_{lm} \cdot \frac{L_{lm}(\lambda)}{L_{lm}(0)} \cdot P_{lm}(\mu, \nu) \\ \Phi'_e &= B_{lm} \cdot \frac{S_{lm}(\lambda)}{S_{lm}(0)} \cdot P_{lm}(\mu, \nu)\end{aligned}\right\} \begin{aligned}l &= 1, 2, \dots, \infty \\ m &= 1, 2, \dots, 2l + 1\end{aligned}$$

où L_{lm} est la fonction de Lamé valable à l'intérieur de l'ellipsoïde et S_{lm} la fonction associée pour l'extérieur :

$$S_{lm}(\lambda) = L_{lm}(\lambda) \int_{\lambda}^{\infty} \frac{(2l+1) d\lambda}{2(L_{lm})^2 \Delta(\lambda)}$$

P_{lm} est l'harmonique de Lamé de degré l et d'ordre m défini par le produit $L_{lm}(\mu) \cdot L_{lm}(\nu)$ et habituellement noté $M(\mu) \cdot N(\nu)$; [11]. Ces expressions de Φ' et de Φ'_e prennent bien la même valeur en tout point de E et assurent la continuité du potentiel ; par contre, en ce qui concerne leur dérivée normale, on a :

$$\sum_{l,m} \left\{ \frac{\partial \Phi'_e}{\partial N} - \frac{\partial \Phi'}{\partial N} \right\} = 4\Pi G \varepsilon$$

Cela étant, supposons la fonction ψ connue, la densité superficielle vaut alors d'après (23)

$$\varepsilon = \rho \vec{\delta r} \cdot \vec{N} = \frac{\rho}{2(\sigma^2 - 4\Omega^2)} \left\{ \frac{F}{h_1} \right\}_{\lambda=0} \quad (55)$$

où l'on a posé :

$$F = \frac{x_1}{a_1^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{x_2}{a_2^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) \cdot \frac{x_3}{a_3^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + 2i \frac{\Omega}{\sigma} \left\{ \frac{x_2}{a_2^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{x_1}{a_1^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right\} \quad (56)$$

et tenu compte de l'expression suivante du vecteur \vec{N}

$$\vec{N} = \left\{ \frac{1}{2h_1} \left[\frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \frac{x_3}{a_3^2} \right] \right\}_0 \quad (57)$$

F est une fonction définie sur E et l'on peut la développer en termes des harmoniques de Lamé :

$$\{F\}_0 = \sum_{l,m} \alpha_{lm} \cdot P_{lm} \quad (58)$$

il s'ensuit en explicitant la condition sur les dérivées normales :

$$\sum_{l,m} B_{lm} \left\{ \frac{DS_{lm}}{S_{lm}} - \frac{DL_{lm}}{L_{lm}} \right\}_3 \cdot P_{lm} = \sum_{l,m} \frac{2\Pi G \rho}{(\sigma^2 - 4\Omega^2)} \alpha_{lm} \cdot P_{lm}$$

D représentant la dérivée par rapport à λ .

La dernière relation implique que les coefficients de P_{lm} dans les deux membres sont égaux :

$$B_{lm} \left\{ \frac{W_{lm}}{S_{lm} \cdot L_{lm}} \right\}_0 = \frac{2\Pi G \rho}{(\sigma^2 - 4\Omega^2)} \alpha_{lm}$$

soit encore, vu la valeur du wronskien W_{lm} ($W_{lm} = -(2l+1)/2a_1 a_2 a_3$)

$$B_{lm} = - \frac{2\Pi G \rho H_{lm}}{\sigma^2 - 4\Omega^2} \cdot \alpha_{lm} \quad (59)$$

où l'on a posé :

$$H_{lm} = \frac{2a_1 a_2 a_3}{(2l+1)} \cdot S_{lm}(0) \cdot L_{lm}(0) \quad (60)$$

Le potentiel de simple couche vaut donc à la surface de l'ellipsoïde

$$\Phi' = - \sum_{l,m} \frac{2\Pi G \rho H_{lm}}{(\sigma^2 - 4\Omega^2)} \cdot \alpha_{lm} \cdot P_{lm} \quad (61)$$

Il reste à déterminer ψ et à tenir compte de la condition sur la pression à la surface :

$$\{p' + \vec{\delta r} \cdot \text{grad } p\}_0 = 0 \quad (62)$$

4. Détermination de ψ . Condition aux limites et détermination des fréquences

Les équations (52), ainsi que la condition aux limites (62) sont celles rencontrées par Cartan [10] dans l'étude de la stabilité ordinaire de l'ellipsoïde de Jacobi ; il a démontré à cette occasion les deux résultats fondamentaux suivants :

1° Il suffit de considérer pour la solution de l'équation de Poincaré la somme suivante :

$$\psi = \sum_l \psi_l = \sum_l \left\{ \sum_{m=1}^{2l} \frac{A_{lm}}{L_{lm}(0)} Q_{lm} + \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 \right) R_{l-2} \right\} \quad (63)$$

où R_{l-2} désigne un polynôme arbitraire de degré $l-2$ et Q_{lm} le polynôme de Lamé de degré l ; les coefficients de R_{l-2} sont déterminés en exprimant que ψ_l satisfait l'équation de Poincaré.

2° Les $(2l+1)$ coefficients α_{lm} introduits antérieurement sont uniquement des combinaisons linéaires des $(2l+1)$ constantes A_{lm} ; cette dernière propriété permet de considérer séparément les valeurs successives de l ; en outre, elle montre que la composante du déplacement superficiel correspondant s'exprime exclusivement en terme des P_{lm} .

Il reste à expliquer la condition (62) à la surface. Nous avons d'abord d'après (45) et (46) :

$$\{\text{grad } p\}_0 = -\rho a_3^2 (2A_3 + \mu) \cdot \left\{ \frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \frac{x_3}{a_3^2} \right\}_0$$

ou encore ; grâce à (57) :

$$= -2\rho a_3^2 (2A_3 + \mu) \cdot \{h_1\}_0 \cdot \vec{N}$$

ce qui entraîne :

$$\{\vec{\delta r} \cdot \text{grad } p\}_0 = -(2\Pi G \rho^2 H_{13} + \rho a_3^2 \mu) \cdot \{2h_1 \cdot \vec{\xi} \cdot \vec{N}\}_0 \quad (64)$$

car

$$L_{13}(\lambda) = (a_3^2 + \lambda)^{1/2} ; A_3 = \frac{2}{3} \Pi G \rho a_1 a_2 S_{13}(0)$$

Grâce à (61) et (63), nous pouvons calculer

$$p' = \rho \cdot \psi - \rho \Phi'$$

qui, introduite en même temps que (64) dans la condition aux limites (62) conduit au système linéaire suivant en les coefficients A_{lm} et α_{lm} :

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \cdot A_{lm} + \mathcal{H}_{lm} \cdot \alpha_{lm} = 0$$

si

$$\mathcal{H}_{lm} = 2\Pi G\rho (H_{lm} - H_{13}) - a_3^2 \tag{65}$$

Du second résultat de Cartan, on déduit que pour chaque valeur de l , le système précédent est en fait linéaire homogène en les $(2l + 1)$ inconnues A_{lm} et que le déterminant de ses coefficients donne, en l'égalant à zéro, les fréquences σ^2 cherchées. De la définition des coefficients de Lamé α_{lm} et A_{lm} des fonctions F et ψ résultent les relations pratiques suivantes

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \int_E \psi_l \cdot P_{lm} \frac{dS}{h_1} + \mathcal{H}_{lm} \int_E F_l \cdot P_{lm} \frac{dS}{h_1} = 0$$

soit

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \cdot \int_E \psi_l \cdot Q_{lm} \frac{dS}{h_1} + \mathcal{H}_{lm} \int_E F_{lm} \cdot Q_{lm} \cdot \frac{dS}{h_1} = 0 \tag{66}$$

lesquelles expressions peuvent être explicitées directement en fonction des variables cartésiennes x_i tout comme ψ_l et F_l .

§ 2. Les oscillations ellipsoïdales

Nous appliquons maintenant le résultat général précédent aux oscillations représentées par les harmoniques de Lamé de degré 2 ; alors :

$$Q_{2i} = \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_i} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda_i} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda_i} - 1 ; i = 1, 2$$

$$Q_{23} = x_1 x_2 ; Q_{24} = x_1 x_3 ; Q_{25} = x_2 x_3$$

$$L_{2i} = \lambda - \lambda_i ; i = 1, 2$$

$$L_{23} = \{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)\}^{1/2} ; L_{24} = \{(a_1^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)\}^{1/2} ;$$

$$L_{25} = \{(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda)\}^{1/2}$$

où λ_1 et λ_2 sont les racines du trinôme :

$$\frac{1}{a_1^2 + \lambda} + \frac{1}{a_2^2 + \lambda} + \frac{1}{a_3^2 + \lambda} = 0 ; -a_1^2 < \lambda_1 < -a_2^2 < \lambda_2 < -a_3^2$$

Il s'ensuit :

$$\psi_2 = \sum_{m=1}^5 A_{2m} \cdot Q_{2m} + \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 \right\} \cdot A_2$$

Nous scinderons ψ_2 en deux parties : la première contenant les polynômes Q_{24} , Q_{25}

où x_3 apparaît en facteur, la seconde contenant les autres termes ; car F_2 se sépare aussi en une première somme de termes en x_1x_3 , x_2x_3 dont les coefficients dépendent des A_{24} , A_{25} seulement et en une seconde en les termes x_1^2 ; x_2^2 ; x_3^2 ; x_1x_2 associés aux constantes A_{21} , A_{22} , A_{23} et A_2 .

Il y correspond respectivement des oscillations asymétriques et symétriques par rapport au plan équatorial, ainsi que nous allons le voir.

1. Oscillations asymétriques

ψ_2 se réduit à

$$\psi_2 = A_{24}x_1x_3 + A_{25}x_2x_3$$

et d'après (52), nous avons :

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2)\xi_1 = \left(A_{24} - \frac{2i\Omega}{\sigma} A_{25} \right) x_3$$

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2)\xi_2 = \left(A_{25} + \frac{2i\Omega}{\sigma} A_{24} \right) x_3$$

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2)\xi_3 = \left(\frac{1 - 4\Omega^2}{\sigma^2} \right) (A_{24}x_1 + A_{25}x_2)$$

En deux points symétriques (x_1, x_2, x_3) et $(x_1, x_2, -x_3)$, les composantes ξ_1 , ξ_2 sont de signes opposés tandis que ξ_3 conserve un signe constant.

On a ensuite :

$$F_2 = \left\{ \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} - \frac{4\Omega^2}{a_3^2\sigma^2} \right) A_{24} - \frac{2i\Omega}{a_1^2\sigma} A_{25} \right\} x_1x_3 \\ + \left\{ \left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} - \frac{4\Omega^2}{a_3^2\sigma^2} \right) A_{25} + \frac{2i\Omega}{a_2^2\sigma} A_{24} \right\} x_2x_3$$

et il résulte directement des relations (66) en y faisant $m = 4$ puis 5

$$\left\{ \sigma^2 - 4\Omega^2 + \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} - \frac{4\Omega^2}{a_3^2\sigma^2} \right) \mathcal{H}_{24} \right\} A_{24} - \frac{2i\Omega}{a_1^2\sigma} \mathcal{H}_{24} \cdot A_{25} = 0 \\ - \frac{2i\Omega}{a_2^2\sigma} \mathcal{H}_{25} \cdot A_{24} + \left\{ \sigma^2 - 4\Omega^2 + \left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} - \frac{4\Omega^2}{a_3^2\sigma^2} \right) \mathcal{H}_{25} \right\} A_{25} = 0$$

L'élimination de A_{24} et A_{25} conduit à l'équation suivante du troisième degré en σ^2

$$\sigma^2 \cdot \left\{ \sigma^2 + \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) \mathcal{H}_{24} \right\} \cdot \left\{ \sigma^2 + \left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) \mathcal{H}_{25} \right\} \\ - 4\Omega^2 \cdot \left\{ \sigma^2 + \frac{\mathcal{H}_{24}}{a_3^2} \right\} \cdot \left\{ \sigma^2 + \frac{\mathcal{H}_{25}}{a_3^2} \right\} = 0 \quad (67)$$

où, d'après (60) et (65)

$$\mathcal{H}_{24} = -a_3^2 (2\Pi G\rho a_1 a_2 a_3 B_{13} + \mu)$$

$$\mathcal{H}_{25} = -a_3^2 (2\Pi G\rho a_1 a_2 a_3 B_{23} + \mu) \quad (68)$$

si

$$B_{ij} = \int_0^\infty \frac{\lambda \cdot d\lambda}{(a_i^2 + \lambda)(a_j^2 + \lambda) \cdot \Delta(\lambda)}$$

On peut simplifier quelque peu les expressions de B_{13} et B_{23} en recourant aux conditions d'équilibre (46) :

$$\begin{aligned} 2\Pi G\rho a_1 a_2 a_3 B_{13} + \mu &= \frac{a_1^2}{a_1^2 - a_3^2} (3\mu + \Omega^2) \\ 2\Pi G\rho a_1 a_2 a_3 B_{23} + \mu &= \frac{a_2^2}{a_2^2 - a_3^2} \Omega^2 \end{aligned} \quad (69)$$

Ainsi, les fréquences cherchées sont les racines de l'équation :

$$\begin{aligned} \sigma^2 \left\{ \sigma^2 - \frac{a_1^2 + a_3^2}{a_1^2 - a_3^2} (3\mu + \Omega^2) \right\} \left\{ \sigma^2 - \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2^2 - a_3^2} \Omega^2 \right\} \\ - 4\Omega^2 \left\{ \sigma^2 - \frac{a_1^2}{a_1^2 - a_3^2} (3\mu + \Omega^2) \right\} \left\{ \sigma^2 - \frac{a_2^2}{a_2^2 - a_3^2} \Omega^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

Elle se réduit à celle obtenue par Chandrasekhar par la méthode des viriels [4, eq. 66] ; en effet, en désignant par μ_c et Ω_c^2 les μ et Ω^2 utilisés par cet auteur :

$$\mu_c = \mu / \Pi G\rho a_1 a_2 a_3 ; \quad \Omega_c^2 = \Omega^2 / \Pi G\rho a_1 a_2 a_3$$

on a, grâce à (68) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}_{24}}{a_3^2} &= -\Pi G\rho a_1 a_2 a_3 (2B_{13} + \mu_c) \\ \frac{\mathcal{H}_{25}}{a_3^2} &= -\Pi G\rho a_1 a_2 a_3 (2B_{23} + \mu_c) \end{aligned} \quad (71)$$

et successivement depuis (69)

$$\begin{aligned} -\frac{a_3^2}{a_1^2} (2B_{13} + \mu_c) &= -2B_{13} + 2\mu_c + \Omega_c^2 ; \\ \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) \mathcal{H}_{24} &= \Pi G\rho a_1 a_2 a_3 (-4B_{13} + \mu_c + \Omega_c^2) \end{aligned} \quad (72)$$

de même

$$\left(\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) \mathcal{H}_{25} = \Pi G\rho a_1 a_2 a_3 (-4B_{23} - 2\mu_c + \Omega_c^2) \quad (73)$$

et on retrouve bien en substituant les expressions (71)-(73) dans (67) l'équation (66) de Chandrasekhar si on y remplace $-\sigma^2$ par λ^2 .

2. Oscillations symétriques

Ici,

$$\psi_2 = \sum_{m=1}^3 A_{2m} \cdot Q_{2m} + \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 \right) A_2$$

soit encore, en introduisant de nouvelles constantes pour alléger les calculs :

$$\psi_2 = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_1x_2 \quad (74)$$

En substituant cette expression dans (52), l'on a :

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \cdot \xi_1 = 2 \left(A - \frac{i\Omega}{\sigma} D \right) x_1 + \left(D - \frac{4i\Omega}{\sigma} B \right) x_2$$

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \cdot \xi_2 = \left(D + \frac{4i\Omega}{\sigma} A \right) x_1 + 2 \left(B + \frac{i\Omega}{\sigma} D \right) x_2$$

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \cdot \xi_3 = 2 \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) \cdot Cx_3$$

et en deux points symétriques, les vecteurs $\tilde{\xi}$ le sont aussi. Il vient ensuite :

$$F_2 = \left\{ \frac{2A - 2i\Omega D/\sigma}{a_1^2} \right\} x_1^2 + \left\{ \frac{2B + 2i\Omega D/\sigma}{a_2^2} \right\} x_2^2 \\ + \left\{ \frac{2(1 - 4\Omega^2/\sigma^2)C}{a_3^2} \right\} x_3^2 + \left\{ \frac{4i\Omega}{\sigma} \left(\frac{A}{a_2^2} - \frac{B}{a_1^2} \right) + D \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \right\} x_1x_2 \quad (75)$$

d'où, en exprimant que ψ_2 et F_2 satisfont à l'équation (53) et aux conditions (66) :

$$A + B + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) C = 0 \quad (76)$$

$$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \cdot \int_E \psi_2 \cdot Q_{2i} \frac{dS}{h_1} + \mathcal{H}_{2i} \int_E F_2 \cdot Q_{2i} \frac{dS}{h_1} = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (77)$$

En vue du calcul des intégrales de surface, effectuons avec Cartan le changement de variables :

$$x_1 = a_1\bar{x}_1; \quad x_2 = a_2\bar{x}_2; \quad x_3 = a_3\bar{x}_3$$

lequel transforme l'ellipsoïde E en la sphère S et conduit à des intégrales de la forme $\int_S \bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2 dS$ qu'il suffit de calculer à un facteur constant près, puisque

$$\int_S \bar{x}_1^4 dS = \int_S \bar{x}_2^4 dS = \int_S \bar{x}_3^4 dS = 3 \int_S 3\bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2 dS; \quad i \neq j$$

par exemple :

$$\int_E Ax_1^2 \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_1} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda_1} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda_1} - 1 \right\} \frac{dS}{h_1} \\ = K_1 A a_1^2 \int_S \bar{x}_1^2 \left\{ \frac{\bar{x}_1^2}{a_1^2 + \lambda_1} + \frac{\bar{x}_2^2}{a_2^2 + \lambda_1} + \frac{\bar{x}_3^2}{a_3^2 + \lambda_1} \right\} dS = 2K_1 A \frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_1}$$

K_1 désignant la constante qui apparaît en facteur dans chacun des termes des expression (77).

On obtient ainsi le système linéaire homogène en A, B, C, D dont le déterminant des coefficients fournit, en l'égalant à zéro, les fréquences σ^2 désirées.

Après quelques opérations élémentaires [retrancher la première colonne de la seconde, multiplier la seconde colonne ainsi obtenue par Ω , en retrancher la quatrième et diviser le résultat par $(\sigma^2 - 4\Omega^2)$], ce déterminant peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix} 1 & & 1 & & 0 \\ a_1^2(\sigma^2 - 4\Omega^2) + 2\mathcal{H}_{21} & (a_1^2 - a_2^2)\lambda_1\Omega & a_3^2\sigma^2 + 2\mathcal{H}_{21} & 2(a_1^2 - a_2^2)\Omega\mathcal{H}_{21} \\ a_1^2 + \lambda_1 & (a_1^2 + \lambda_1)(a_2^2 + \lambda_1) & a_3^2 + \lambda_1 & (a_1^2 + \lambda_1^2)(a_2^2 + \lambda_1) \\ a_1^2(\sigma^2 - 4\Omega^2) + 2\mathcal{H}_{22} & (a_1^2 - a_2^2)\lambda_2\Omega & a_3^2\sigma^2 + 2\mathcal{H}_{22} & 2(a_1^2 - a_2^2)\Omega\mathcal{H}_{22} \\ a_1^2 + \lambda_2 & (a_1^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_2) & a_3^2 + \lambda_2 & (a_1^2 + \lambda_2)(a_2^2 + \lambda_2) \\ -\frac{4\Omega\mathcal{H}_{23}}{a_2^2} & \sigma^2 + \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}\right)\mathcal{H}_{23} & 0 & \sigma^2 \left\{ \sigma^2 - 4\Omega^2 + \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}\right)\mathcal{H}_{23} \right\} \end{vmatrix} = 0$$

soit finalement :

$$\begin{vmatrix} (a_1^2 - a_2^2)\lambda_1\Omega & 4\Omega^2 a_1^2 & 2\mathcal{H}_{21} & -\lambda_1\sigma^2 & 2(a_1^2 - a_2^2)\Omega\mathcal{H}_{21} \\ (a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 + \lambda_1) & a_1^2 - a_2^2 & a_3^2 + \lambda_1 & a_3^2 + \lambda_1 & (a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 + \lambda_1) \\ (a_1^2 - a_2^2)\lambda_2\Omega & 4\Omega^2 a_1^2 & 2\mathcal{H}_{22} & -\lambda_2\sigma^2 & 2(a_1^2 - a_2^2)\Omega\mathcal{H}_{22} \\ (a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 + \lambda_2) & a_1^2 - a_2^2 & a_3^2 + \lambda_2 & a_3^2 + \lambda_2 & (a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 + \lambda_2) \\ \sigma^2 + \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}\right)\mathcal{H}_{23} & 4\Omega\frac{\mathcal{H}_{23}}{a_2^2} & & & \sigma^2 \left\{ \sigma^2 - 4\Omega^2 + \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}\right)\mathcal{H}_{23} \right\} \end{vmatrix} = 0$$

où :

$$\mathcal{H}_{23} = 2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 \cdot a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda) \cdot \Delta(\lambda)} - 2a_3^2 A_3 - a_3^2 \mu = -\frac{3a_1^2 a_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \mu \quad (79)$$

et :

$$\mathcal{H}_{21} = 2\pi G\rho a_1 a_2 a_3 \cdot \lambda_1^2 \cdot \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^2 \cdot \Delta(\lambda)} - 2a_3^2 A_3 - a_3^2 \mu; \quad i = 1, 2. \quad (80)$$

Nous n'avons su réduire ce déterminant à celui obtenu par Chandrasekhar à partir des viriels, mais nous avons vérifié pour plusieurs configurations que leurs racines étaient bien identiques (précision des calculs ; 5 chiffres significatifs).

Les valeurs propres des oscillations ellipsoïdales, asymétriques et symétriques, sont données dans les tables 4 pour quelques valeurs du rapport q des masses. Cinq d'entre elles proviennent de la fréquence unique de Kelvin de la sphère incompressible ; la sixième est nulle dans ce cas et correspond alors à des déplacements de matière le long des surfaces de niveau (voir Appendice).

On observe que l'ellipsoïde de Roche devient instable ($\sigma_4^2 = 0$) par une déformation symétrique par rapport au plan de l'équateur. Nous avons déterminé les axes, \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , et les paramètres Ω^2 et μ de l'ellipsoïde critique de chaque série ; celui-ci se situe légèrement au delà de la limite de Roche. Ceci signifie qu'il existe une petite région où les deux figures d'équilibre correspondant à une même valeur de μ sont dynamiquement stables. Cette particularité est due à la force de Coriolis ; sans elle, la série deviendrait instable dès la limite de Roche ainsi que nous l'avons constaté pour les sphéroïdes de Jeans. La figure 6 illustre la situation pour la séquence $q = 1$.

Le pointillé joignant T_2 à S_2 sur la figure 4 indique, dans le plan de Jeans, les points où l'instabilité dynamique apparaît (cfr. tables 6).

Notons aussi que lorsque l'ellipsoïde s'allonge de plus en plus suivant a_1 tandis que les axes a_2 et a_3 tendent à devenir égaux, les pulsations σ_2, σ_3 des modes asymétriques tendent respectivement vers les pulsations σ_5, σ_6 des modes symétriques; si bien qu'à la limite, l'ellipsoïde de Roche présente une analogie étroite avec le sphéroïde de Jeans. La comparaison des figures 2 et 5 conduit à la même conclusion.

TABLES 4

Valeurs propres σ^2 des oscillations ellipsoïdales
(σ^2 en unités $\Pi G \rho$)

$\frac{a_2}{a_1}$	Modes asymétriques			Modes symétriques		
	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2	σ_6^2

$q = 0,01$

0.90	0.0355	0.9119	1.327	0.6142	1.1391	1.366
0.80	0.0689	0.8434	1.468	0.4075	1.1233	1.473
0.70	0.0979	0.7699	1.585	0.2458	1.0381	1.577
0.60	0.1204	0.6845	1.688	0.1100	0.9115	1.676
0.55	0.1285	0.6365	1.735	0.0502	0.8383	1.723
0.50	0.1340	0.5851	1.778	— 0.0039	0.7607	1.767
0.40	0.1354	0.4719	1.854	— 0.0916	0.5964	1.846
0.30	0.1214	0.3465	1.916	— 0.1428	0.4259	1.911
0.20	0.0889	0.2134	1.962	— 0.1424	0.2556	1.960
0.10	0.0398	0.0836	1.993	— 0.0807	0.0975	1.990

$q = 0.1$

0.9	0.0384	0.9071	1.335	0.6003	1.143	1.376
0.8	0.0739	0.8390	1.477	0.3932	1.131	1.482
0.7	0.1043	0.7662	1.593		1.047	1.583
0.6	0.1277	0.6815	1.694	0.1029	0.9197	1.681
0.5	0.1414	0.5829	1.782	— 0.0619	0.7677	1.770
0.4	0.1426	0.4702	1.857	— 0.0897	0.6015	1.846
0.3	0.1277	0.3452	1.917	— 0.1381	0.4291	1.912
0.2	0.0936	0.2123	1.962	— 0.1375	0.2570	1.960
0.1	0.0420	0.0831	1.990	— 0.0781	0.0978	1.990

TABLES 4 (suite)

$\frac{a_2}{a_1}$	Modes asymétriques			Modes symétriques		
	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2	σ_6^2
$q = 1$						
1.	0.	1.0666	1.066	1.0666	1.066	1.066
0.95	0.0340	0.9886	1.116	0.8846		
0.90	0.0649	0.8695	1.403	0.4914	1.175	1.457
0.80	0.1169	0.8037	1.551	0.2878	1.184	1.548
0.7	0.1562	0.7370	1.659	0.1541	1.107	1.631
0.6	0.1829	0.6591	1.746	0.0558	0.9780	1.714
0.53	0.1935	0.5961		0.0012	0.8686	
0.52	0.1944	0.5865		— 0.0057	0.8521	
0.50	0.1959	0.5669	1.818	— 0.01916	0.8184	1.791
0.40	0.1931	0.4594	1.879	— 0.0736	0.6407	1.859
0.30	0.1711	0.3378	1.929	— 0.1042	0.4542	1.917
0.20	0.1259	0.2069	1.966	— 0.1022	0.2686	1.962
0.10	0.0578	0.0797	1.991	— 0.0589	0.1001	1.990
0.03	0.0096	0.0121	1.999	— 0.0118	0.0147	1.999
$q = 5$						
0.95	0.0874	0.8374	1.447	0.4341	1.194	1.542
0.9	0.1470	0.7891	1.583	0.2627	1.266	1.606
0.8	0.2195	0.7322	1.726	0.1120	1.287	1.648
0.7	0.2573	0.6804	1.804		1.201	1.701
0.6	0.2740	0.6202	1.856	0.0035	1.064	1.761
0.55	0.2757	0.5854	1.876	— 0.0109	0.984	1.792
0.5	0.2733	0.5468	1.895	— 0.0228	0.8970	1.821
0.4	0.2550	0.4569	1.927	— 0.0403	0.7076	1.877
0.3	0.2159	0.3488	1.953	— 0.0494	0.5026	1.926
0.2	0.1525	0.2237	1.975	— 0.0468	0.2939	1.965
0.1	0.0670	0.0914	1.992	— 0.0277	0.1058	1.991
$q = 20$						
0.95	0.1971	0.7467	1.687	0.1708		
0.85	0.2954	0.6890	1.863	0.0353	1.395	1.656
0.70	0.3251	0.6391	1.925	0.0023	1.246	1.722

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège
 Cinquième série, Tome XVIII, Fascicule 1, 1969
 TABLES 4 (suite)

$\frac{a_2}{a_1}$	Modes asymétriques			Modes symétriques		
	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2	σ_6^2
0.65	0.3248	0.6200	1.935	— 0.0023	1.179	1.750
0.55	0.3137	0.5734	1.949	— 0.0088	1.026	1.807
0.40	0.2698	0.4725	1.964	— 0.0149	0.749	1.885
0.30	0.2189	0.3770	1.973	— 0.0165	0.537	1.930
0.15	0.1066	0.1829	1.988	— 0.0129	0.2075	1.980

$q = 50$

0.95	0.2764	0.6995	1.838	0.0584	1.428	1.660
0.85	0.3369	0.6618	1.938	0.0076	1.417	1.639
0.75	0.3451	0.6392	1.959	0.0004	1.311	1.692
0.70	0.3433	0.6262	1.964	— 0.0013	1.251	1.721
0.50	0.3075	0.5461	1.974	— 0.0053	0.951	1.836
0.30	0.2170	0.3875	1.980	— 0.0071	0.548	1.931
0.10	0.0616	0.1140	1.994	— 0.0039	0.113	1.991

$q = 100$

0.95	0.3190	0.6756	1.913	0.0206	1.477	1.619
0.85	0.3530	0.6503	1.967	0.0018	1.415	1.630
0.80	0.3549	0.6420	1.973	0.0003	1.364	1.659
0.75	0.3535	0.6326	1.977	— 0.0005	1.310	1.689
0.55	0.3230	0.5712	1.981	— 0.0025	1.039	1.808
0.30	0.2160	0.3915	1.982	— 0.0036	0.552	1.932
0.20	0.1448	0.2680	1.987	— 0.0033	0.324	1.967
0.10	0.0610	0.1160	1.994	— 0.0020	0.114	1.991

$q = 1000$

0.95	0.3678	0.6463	1.989	0.00028	1.489	1.560
0.90	0.3697	0.6426	1.993	0.00001	1.445	1.590
0.85	0.3685	0.6387	1.994	— 0.00005	1.404	1.662
0.75	0.3612	0.6262	1.994	— 0.00013	1.305	1.686
0.55	0.3246	0.5709	1.990	— 0.00027	1.041	1.808
0.40	0.2698	0.4853	1.986	— 0.0004	0.7710	1.888
0.20	0.1437	0.2716	1.987	— 0.0003	0.3268	1.967
0.10	0.0605	0.1179	1.994	— 0.0002	0.1147	1.991

TABLE 5

Limite de Roche

q	$\frac{\Omega^2}{\Pi G \rho}$	$\frac{\mu}{\Pi G \rho}$	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
Jeans	0.	0.12554	1.656	0.7771	0.7771
0.01	0.09074	0.08984	1.594	0.8155	0.7693
0.1	0.09643	0.08766	1.590	0.8182	0.7686
1	0.14132	0.07066	1.557	0.8418	0.7632
5	0.23101	0.03850	1.482	0.9026	0.7479
20	0.30642	0.01459	1.399	0.9821	0.7279
50	0.33659	0.00660	1.350	1.033	0.7170
100	0.35057	0.00347	1.322	1.065	0.7106
1000	0.36931	0.00369	1.257	1.135	0.7008
Jacobi	0.37423	0.	1.197	1.197	0.6977

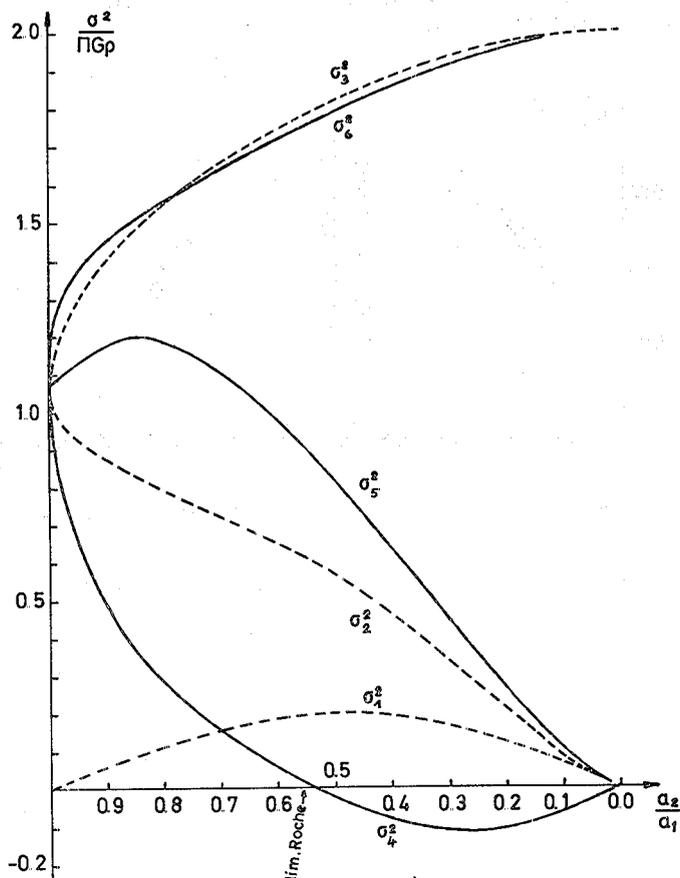


Fig. 5. — Carré des pulsations des ellipsoïdes de Roche, harmoniques $l = 2$; série $q = 1$. modes symétriques (—) et asymétriques (-----)

TABLE 6

Ellipsoïde de Roche critique
(Position du point d'instabilité ; harmoniques $l = 2$)

q	$\frac{\Omega \bar{i}}{\Pi G \rho}$	$\frac{\mu}{\Pi G \rho}$	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
Jeans	0.	0.12554	1.656	0.7771	0.7771
0.01	0.09071	0.08981	1.611	0.8112	0.7654
0.1	0.09640	0.08764	1.607	0.8137	0.7466
1	0.14122	0.07061	1.580	0.8350	0.7577
5	0.23069	0.03845	1.514	0.8914	0.7409
20	0.30593	0.01457	1.430	0.9682	0.7221
50	0.33620	0.00659	1.377	1.019	0.7128
100	0.35026	0.003468	1.343	1.052	0.7078
1000	0.36925	0.003689	1.267	1.128	0.7001
Jacobi	0.37423	0.	1.197	1.197	0.6977

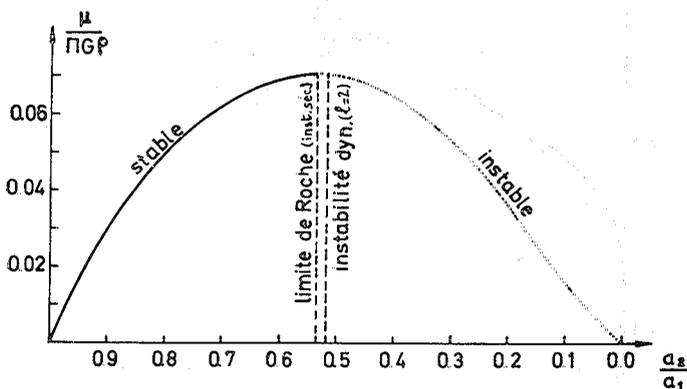


Fig. 6. — Séquence de Roche $q = 1$, variation de μ en fonction de $\frac{a_2}{a_1}$.

§ 3. Pulsations σ associées aux harmoniques de surface $l = 3$

Comme précédemment, nous pouvons considérer séparément les polynômes de Lamé pairs et impairs par rapport à x_3 ; aux premiers correspondent des oscillations symétriques par rapport au plan de l'équateur, aux seconds des mouvements asymétriques.

1. Oscillations symétriques

Nous avons

$$\psi_3 = \sum_{i=1}^4 A_{3i} Q_{3i} + \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 \right) (D_1 x_1 + D_2 x_2)$$

où

$$Q_{3i} = x_1 \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_i} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda_i} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda_i} - 1 \right\} \quad i = 1, 2 \quad (81)$$

$$Q_{3i} = x_2 \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_i} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda_i} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda_i} - 1 \right\} \quad i = 3, 4 \quad (82)$$

λ_1, λ_2 et λ_3, λ_4 sont respectivement les racines des équations

$$\frac{3}{a_1^2 + \lambda} + \frac{1}{a_2^2 + \lambda} + \frac{1}{a_3^2 + \lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{a_1^2 + \lambda} + \frac{3}{a_2^2 + \lambda} + \frac{1}{a_3^2 + \lambda} = 0 \quad (84)$$

Les fonctions de Lamé correspondantes s'écrivent :

$$L_{3i} = \sqrt{a_1^2 + \lambda} (\lambda - \lambda_i), \quad i = 1, 2; \quad L_{3i} = \sqrt{a_2^2 + \lambda} (\lambda - \lambda_i), \quad i = 3, 4 \quad (85)$$

Pour alléger les calculs, nous pouvons écrire :

$$\psi_3 = Ax_1^3 + Bx_1x_2^2 + Cx_1x_3^2 + \alpha x_2^3 + \beta x_1^2x_2 + \gamma x_3^2x_2$$

où A, B, ..., γ désignent 6 constantes arbitraires ; il s'ensuit :

$$\begin{aligned} F_3 = & \left\{ \frac{3A}{a_1^2} - \frac{2i\Omega}{\sigma} \frac{\beta}{a_1^2} \right\} x_1^3 + \left\{ \frac{B}{a_1^2} + \frac{2B}{a_1^2} + \frac{4i\Omega}{\sigma} \frac{\beta}{a_2^2} - \frac{6i\Omega}{\sigma} \frac{\alpha}{a_1^2} \right\} x_1x_2^2 \\ & + \left\{ \frac{C}{a_1^2} + 2 \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) \frac{C}{a_3^2} - \frac{2i\Omega}{\sigma} \frac{\gamma}{a_1^2} \right\} x_1x_3^2 + \left\{ \frac{3\alpha}{a_2^2} + \frac{2i\Omega}{\sigma} \frac{B}{a_2^2} \right\} x_2^3 \\ & + \left\{ \left(\frac{2}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \beta + \frac{6i\Omega}{\sigma} \frac{A}{a_2^2} - \frac{4i\Omega}{\sigma} \frac{B}{a_1^2} \right\} x_1^2x_2 \\ & + \left\{ \frac{\gamma}{a_2^2} + 2 \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) \frac{\gamma}{a_3^2} + \frac{2i\Omega}{\sigma} \frac{C}{a_2^2} \right\} x_2x_3^2 \end{aligned}$$

En exprimant que ψ_3 est une solution de l'équation de Poincaré, on obtient deux premières conditions sur les constantes :

$$3A + B + \left(1 - 4 \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right) C = 0; \quad 3\alpha + \beta + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) \gamma = 0 \quad (86)$$

Les conditions aux limites (66) sur la surface E peuvent être calculées facilement si l'on y fait le changement de variables $x_i = a_i \bar{x}_i$ déjà utilisé auparavant ; il conduit à des intégrales de la forme $\int_S \bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2 \bar{x}_k^2 dS$ qu'il suffit de calculer à un facteur près en tenant compte des égalités :

$$\int_S \bar{x}_i^3 dS = 5 \int_S \bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2 dS = 5 \int_S \bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2 = 15 \int_S \bar{x}_i^2 \bar{x}_j^2 \bar{x}_k^2 dS, \quad (i \neq j \neq k)$$

on trouve ainsi, en se rappelant que les λ_i sont les racines des équations (84) :

$$\int_E x_1 x_j^2 Q_{3i} \frac{d\Sigma}{h_1} = K_i \frac{(1 + 2\delta_{1j}) a_j^2}{a_j^2 + \lambda_i} \quad i = 1, 2$$

$$\int_E x_2 x_j^2 Q_{3i} \frac{d\Sigma}{h_1} = K_i \frac{(1 + 2\delta_{2j}) a_j^2}{a_j^2 + \lambda_i} \quad i = 3, 4$$

0	1	$\sigma^2 - 4\Omega^2$
0	0	0
$\left(\frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_1} - \frac{a_2^2}{a_2^2 + \lambda_1}\right) (\sigma^2 - 4\Omega^2)$ $+ \left(\frac{3}{a_1^2 + \lambda_1} - \frac{a_2^2 + 2a_1^2}{a_1^2(a_2^2 + \lambda_1)}\right) \mathcal{H}_{31}$	$\frac{a_2^2}{a_2^2 + \lambda_1} (\sigma^2 - 4\Omega^2)$ $+ \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{2}{a_2^2}\right) \frac{a_2^2 \mathcal{H}_{31}}{a_2^2 + \lambda_1}$	$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \frac{a_3^2 \sigma^2}{a_3^2 + \lambda_1}$ $+ \left(\frac{a_3^2 \sigma^2}{a_1^2} + 2(\sigma^2 - 4\Omega^2)\right) \frac{\mathcal{H}_{31}}{a_3^2 + \lambda_1}$
$\left(\frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_2} - \frac{a_2^2}{a_2^2 + \lambda_2}\right) (\sigma^2 - 4\Omega^2)^2$ $+ \left(\frac{3}{a_1^2 + \lambda_2} - \frac{a_2^2 + 2a_1^2}{a_1^2(a_2^2 + \lambda_2)}\right) \mathcal{H}_{32}$	$\frac{a_2^2}{a_2^2 + \lambda_2} (\sigma^2 - 4\Omega^2)$ $+ \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{2}{a_2^2}\right) \frac{a_2^2 \mathcal{H}_{32}}{a_2^2 + \lambda_2}$	$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \frac{a_3^2 \sigma^2}{a_3^2 + \lambda_2}$ $+ \left(\frac{a_3^2 \sigma^2}{a_1^2} + 2(\sigma^2 - 4\Omega^2)\right) \frac{\mathcal{H}_{32}}{a_3^2 + \lambda_2}$
$\left(\frac{a_1^2 + 2a_2^2}{a_2^2(a_1^2 + \lambda_3)} - \frac{3}{a_2^2 + \lambda_3}\right) \mathcal{H}_{33}$	$\left(\frac{3}{a_2^2 + \lambda_3} - \frac{2}{a_1^2 + \lambda_3}\right) \mathcal{H}_{33}$	$\frac{a_3^2 \mathcal{H}_{33}}{a_2^2(a_3^2 + \lambda_3)} \sigma^2$
$\left(\frac{a_1^2 + 2a_2^2}{a_2^2(a_1^2 + \lambda_4)} - \frac{3}{a_2^2 + \lambda_4}\right) \mathcal{H}_{34}$	$\left(\frac{3}{a_2^2 + \lambda_4} - \frac{2}{a_1^2 + \lambda_4}\right) \mathcal{H}_{34}$	$\frac{a_3^2 \mathcal{H}_{34}}{a_2^2(a_3^2 + \lambda_4)} \sigma^2$

0	0	0
0	σ^2	$\sigma^2 - 4\Omega^2$
$\left(\frac{a_2^2 + 2a_1^2}{a_1^2(a_2^2 + \lambda_1)} - \frac{3}{a_1^2 + \lambda_1} \right) \mathcal{H}_{31}$	$\Omega^2 \left(\frac{3}{a_1^2 + \lambda_1} - \frac{2}{a_2^2 + \lambda_1} \right) \mathcal{H}_{31}$	$\frac{4\Omega^2 a_3^2}{a_1^2(a_3^2 + \lambda_1)} \mathcal{H}_{31}$
$\left(\frac{a_2^2 + 2a_1^2}{a_1^2(a_2^2 + \lambda_2)} - \frac{3}{a_1^2 + \lambda_2} \right) \mathcal{H}_{32}$	$\Omega^2 \left(\frac{3}{a_1^2 + \lambda_2} - \frac{2}{a_2^2 + \lambda_2} \right) \mathcal{H}_{32}$	$\frac{4\Omega^2 a_3^2}{a_1^2(a_3^2 + \lambda_2)} \mathcal{H}_{32}$
$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{a_2^2}{+ \lambda_3} - \frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_3} \right) (\sigma^2 - 4\Omega^2) \\ & \frac{3}{+ \lambda_3} - \frac{2a_2^2 + a_1^2}{a_2^2(a_1^2 + \lambda_3)} \mathcal{H}_{33} \end{aligned} \right\} \sigma^2$	$\left. \begin{aligned} & \frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_3} \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2) \right. \\ & \left. + \left(\frac{2}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \mathcal{H}_{33} \right\} \sigma^2$	$\left. \begin{aligned} & \frac{a_3^2}{a_3^2 + \lambda_3} \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2) \sigma^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\sigma^2}{a_2^2} + \frac{2(\sigma^2 - 4\Omega^2)}{a_3^2} \right) \mathcal{H}_{33} \right\}$
$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{a_2^2}{+ \lambda_4} - \frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_4} \right) (\sigma^2 - 4\Omega^2) \\ & \frac{3}{+ \lambda_4} - \frac{2a_2^2 + a_1^2}{a_2^2(a_1^2 + \lambda_4)} \mathcal{H}_{34} \end{aligned} \right\} \sigma^2$	$\left. \begin{aligned} & \frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_4} \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2) \right. \\ & \left. + \left(\frac{2}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \mathcal{H}_{34} \right\} \sigma^2$	$\left. \begin{aligned} & \frac{a_3^2}{a_3^2 + \lambda_4} \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2) \sigma^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{\sigma^2}{a_2^2} + \frac{2(\sigma^2 - 4\Omega^2)}{a_3^2} \right) \mathcal{H}_{34} \right\}$

K_i représentant des constantes qu'il est inutile de connaître, car elles apparaissent en facteurs dans tous les termes des conditions (66). Ceci entraîne pour les conditions aux limites correspondant à Q_{3i} ($i = 1, 2$) et Q_{3i} ($j = 3, 4$) :

$$\begin{aligned} & \left\{ 3(\sigma^2 - 4\Omega^2)a_1^2 + 9\mathcal{H}_{31} \right\} \frac{A}{a_1^2 + \lambda_i} + \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2)a_2^2 + \left(2 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \mathcal{H}_{31} \right\} \frac{B}{a_2^2 + \lambda_i} \\ & + \left\{ \sigma^2 - 4\Omega^2 \right\} a_3^2 + \left[2 \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) + \frac{a_3^2}{a_1^2} \right] \mathcal{H}_{31} \left\{ \frac{C}{a_3^2 + \lambda_i} - 6i \frac{\Omega}{\sigma} \frac{a_2^2}{a_1^2(a_2^2 + \lambda_i)} \mathcal{H}_{31}\alpha \right. \\ & \left. + \frac{2i\Omega}{\sigma} \mathcal{H}_{31} \left\{ \frac{2}{a_2^2 + \lambda_i} - \frac{3}{a_1^2 + \lambda_i} \right\} \beta - \frac{2i\Omega}{\sigma} \frac{a_3^2}{a_1^2(a_3^2 + \lambda_i)} \mathcal{H}_{31}\gamma \right) = 0 ; i = 1, 2 \quad (87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{6i\Omega}{\sigma} \frac{a_1^2}{a_2^2(a_1^2 + \lambda_j)} \mathcal{H}_{31}A + 2 \frac{i\Omega}{\sigma} \mathcal{H}_{33} \left\{ \frac{3}{a_2^2 + \lambda_j} - \frac{2}{a_1^2 + \lambda_j} \right\} B \\ & + \frac{2i\Omega}{\sigma} \frac{a_3^2}{a_2^2(a_3^2 + \lambda_j)} \mathcal{H}_{31}C + \left\{ 3(\sigma^2 - 4\Omega^2)a_2^2 + 9\mathcal{H}_{3j} \right\} \frac{\alpha}{a_2^2 + \lambda_j} \\ & + \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2)a_1^2 + \left(2 + \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) \mathcal{H}_{3j} \right\} \frac{\beta}{a_1^2 + \lambda_j} \\ & + \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2)a_3^2 + \left[2 \left(1 - 4 \frac{\Omega^2}{\sigma^2} \right) + \frac{a_3^2}{a_2^2} \right] \mathcal{H}_{3j} \right\} \frac{\gamma}{a_3^2 + \lambda_j} = 0 ; j = 3, 4 \quad (88) \end{aligned}$$

Le déterminant formé des coefficients des 6 équations linéaires homogènes (86)-(88) fournit, en l'égalant à zéro, les fréquences d'oscillations cherchées. Après quelques transformations simples, on obtient l'équation aux valeurs propres (89).

Cette équation est du huitième degré en σ^2 ; mais elle possède une racine double, $\sigma^2 = 4\Omega^2$, à rejeter, car cette valeur a été exclue en résolvant le système (52).

Les tables 7 donnent les 6 racines à considérer effectivement ; la première s'annule en même temps que le coefficient \mathcal{H}_{31} (on vérifie directement que (89) possède alors une 4^e et une 5^e colonnes proportionnelles) ; l'ellipsoïde de Roche est donc aussi instable par une déformation associée aux harmoniques de surface $l = 3$, identiques d'ailleurs à ceux de l'ellipsoïde de Jacobi [12]. La table 8 contient les valeurs des paramètres des figures critiques. Celles-ci ont aussi été localisées par Chandrasekhar par un procédé basé sur les équations des viriels d'ordre 3 [4, p. 1202] ; notre méthode nécessite seulement le calcul de \mathcal{H}_{31} et est donc plus simple ; de plus, \mathcal{H}_{31} varie linéairement au voisinage du point d'instabilité (voir figure 7).

TABLES 7

Valeurs propres σ^2 associées aux harmoniques de degré $l = 3$
Modes symétriques

$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2	σ_6^2
-----------------------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------

$q = 0.01$

0.9	0.00097	0.07850	1.560	2.160	2.515	2.691
0.8	0.00166	0.14736	1.195	2.079	2.478	2.886
0.7	0.00202	0.20254	0.8923	1.933	2.383	3.077
0.6	0.00205	0.2400	0.6200	1.702	2.297	3.258
0.5	0.00176	0.2558	0.3582			
0.4	0.00122	0.2472	0.1315	1.084	2.165	2.588
0.3	— 0.06375	0.2096	0.00084	0.7572	2.109	3.734
0.2	— 0.17505	0.1446	0.00027	0.4491	2.058	3.860
0.1	— 0.14135	0.06135	0.00003	0.1739	2.018	3.955

$q = 0.1$

0.9	0.00106	0.08497	1.536	2.157	2.525	2.702
0.8	0.00178	0.1586	1.167	2.078	2.488	2.894
0.7	0.00215	0.2170	0.8666	1.935	2.390	3.081
0.6	0.00216	0.2561	0.5993	1.708	2.300	3.259
0.5	0.00185	0.2718	0.3527	1.415	2.227	3.428
0.4	0.00127	0.2621	0.1251	1.090	2.165	3.586
0.3	— 0.06388	0.2219	0.0009	0.7614	2.109	3.731
0.2	— 0.1719	0.1529	0.0003	0.4510	2.058	2.857
0.1	— 0.1390	0.06487	0.00002	0.1743	2.018	3.954

$q = 1$

1.	0.	0.	2.2857	2.2857	2.2857	2.2857
0.99	0.00022	0.01605	2.008	2.214	2.383	2.511
0.98	0.00041	0.03178	1.883	2.193	2.429	2.584
0.97	0.00061	0.04719	1.785	2.179	2.465	2.633
0.9	0.00176	0.1458	1.341	2.130	2.596	2.788
0.8	0.00275	0.2588	0.9551	2.066	2.556	2.951
0.7	0.00313	0.3393	0.6780	1.946	2.431	3.113
0.6	0.00301	0.3864	0.4535	1.740	2.317	3.268
0.5	0.00248	0.4008	0.2566	1.458	2.232	3.419

TABLES 7 (suite)

$\frac{a_2}{a_1}$	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2	σ_6^2
0.4	0.00158	0.3774	0.0824	1.132	2.165	3.566
0.3	— 0.06343	0.3154	0.0012	0.7925	2.107	3.708
0.2	— 0.1489	0.2158	0.0004	0.4665	2.057	3.838
0.1	— 0.1218	0.0913	0.00005	0.1778	2.017	3.946

$q = 5$

0.9	0.0037	0.3495	0.8935	2.086	2.729	2.920
0.8	0.0047	0.5314	0.5510	2.045	2.612	3.026
0.7	0.0047	0.6252	0.3643	1.950	2.441	3.140
0.6	0.0042	0.6601	0.2335	1.769	2.308	3.258
0.5	0.0032	0.6468	0.1255	1.507	2.221	3.386
0.4	0.0012	0.5872	0.0292	1.190	2.157	2.552
0.3	— 0.0571	0.4795	0.0017	0.8425	2.103	3.664
0.2	— 0.1111	0.3242	0.00057	0.4949	2.056	3.805
0.1	— 0.0932	0.1367	0.00007	0.1847	2.017	3.930

$q = 20$

0.9	0.0057	0.6921	0.4293	2.075		
0.8	0.0058	0.8451	0.2526	2.041	2.514	3.020
0.7	0.0053	0.8881	0.1736	1.946	2.358	3.110
0.6	0.0044	0.8780	0.1160	1.771	2.258	3.219
0.5	0.0032	0.8260	0.0620	1.523	2.194	3.345
0.4	— 0.0018	0.7310	0.0100	1.218	2.145	3.484
0.3	— 0.0495	0.5882	0.0019	0.8729	2.099	3.632
0.2	— 0.0878	0.3948	0.0006	0.5148	2.055	3.783
0.15				0.3443	2.034	3.855

$q = 100$

0.9	0.0061	0.9902	0.1780	2.078	2.520	2.918
0.8	0.0058	1.032	0.1315	2.035	2.381	2.976
0.7	0.0052	1.020	0.1043	1.937	2.285	3.072
0.6	0.0043	0.9783	0.0758	1.765	2.222	3.189
0.5	0.0029	0.9042	0.0415	1.525	2.179	3.321

TABLES 7 (suite)

$\frac{a_2}{a_1}$	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2	σ_6^2
0.4	— 0.0050	0.7920	0.0068	1.227	2.138	3.465
0.3	— 0.0456	0.6334	0.0020	0.8850	2.097	3.618
0.2	— 0.0785	0.4240	0.0007	0.5234	2.033	3.774
0.1	— 0.0683	0.1784	0.00008	0.1925	2.017	3.917

$q = 1000$

	0.0060	1.087	0.1228	2.083	2.440	2.869
0.9	0.0059	1.096	0.1136	2.075	2.403	2.884
0.8	0.0057	1.087	0.1028	2.031	2.331	2.955
0.7	0.0051	1.057	0.0881	1.933	2.262	3.058
0.6	0.0043	1.005	0.0665	1.762	2.211	3.180
0.5	0.0028	0.9248	0.0368	1.525	2.173	3.315
0.4	— 0.0059	0.8078	0.0064	1.230	2.136	3.460
0.3	— 0.0445	0.6451	0.0021	0.8880	2.096	3.614
0.2	— 0.0761	0.4315	0.0007	0.5257	2.054	3.771
0.1	— 0.0665	0.1815	0.00009	0.1932	2.017	3.916

TABLE 8

Position du point d'instabilité : harmoniques $l = 3$

q	$\frac{\Omega^2}{\Pi G \rho}$	$\frac{\mu}{\Pi G \rho}$	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
Jeans	0.	0.1091	2.142	0.6833	0.6833
0.01	0.07808	0.07730	2.078	0.7093	0.6779
0.1	0.08290	0.07536	2.037	0.7110	0.6775
1	0.12073	0.06036	2.044	0.7258	0.6741
5	0.19369	0.03228	1.979	0.7591	0.6657
20	0.24957	0.01188	1.924	0.7911	0.6571
100	0.27591	0.00273	1.895	0.8090	0.6521
1000	0.28317	0.000283	1.887	0.8144	0.6508
Jacobi	0.2840	0.	1.886	0.8150	0.6507

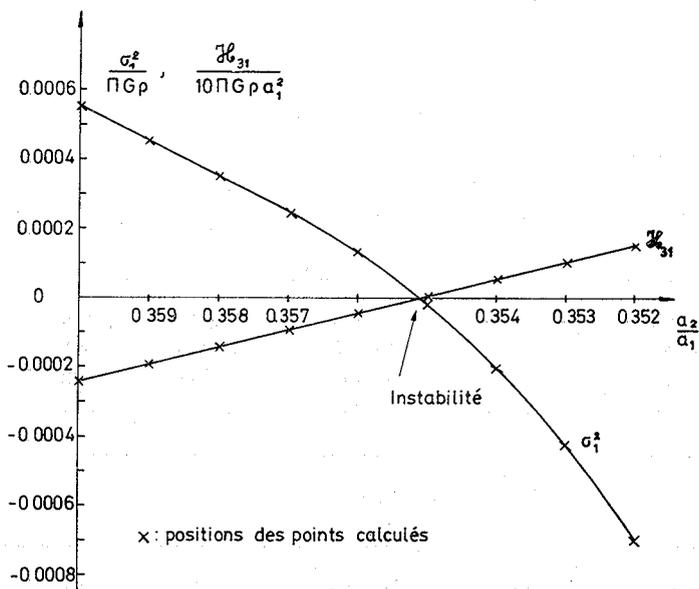


Fig. 7. — Ellipsoïdes de Roche ; série $q = 1$; harmoniques $l = 3$.
Variations de σ_1^2 et \mathcal{H}_{31} au voisinage de l'instabilité.

2. Oscillations asymétriques

On a cette fois :

$$\psi_3 = \sum_{i=5}^7 A_{3i} Q_{3i} + D_3 x_3 \left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 \right)$$

soit encore en introduisant de nouvelles constantes A, B, C, D :

$$\psi_3 = (Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + Dx_1x_2)x_3$$

Ceci entraîne :

$$\begin{aligned} F_3 = & \left\{ \frac{2A}{a_1^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) \frac{A}{a_3^2} - 2i \frac{\Omega D}{\sigma a_1^2} \right\} x_1^2 x_3 \\ & + \left\{ 2 \frac{B}{a_1^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) \frac{B}{a_3^2} + 2i \frac{\Omega D}{\sigma a_2^2} \right\} x_2^2 x_3 + 3 \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) \frac{C}{a_3^2} x_3^3 \\ & + \left\{ \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2} \right) \frac{1}{a_3^2} \right] D + 4i \frac{\Omega A}{\sigma a_2^2} - 4i \frac{\Omega B}{\sigma a_1^2} \right\} x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Par ailleurs, les polynômes et fonctions de Lamé à considérer sont :

$$Q_{3i} = x_3 \left\{ \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda_i} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda_i} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda_i} - 1 \right\} \quad i = 5, 6 ; \quad Q_{37} = x_1 x_2 x_3$$

$$L_{3i} = \sqrt{a_3^2 + \lambda} (\lambda - \lambda_i), \quad i = 5, 6 ; \quad L_{37} = \Delta(\lambda)$$

En procédant comme précédemment pour exprimer que ψ_3 satisfait à l'équation de Poincaré et aux conditions aux limites (66) on arrive aux 4 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 & A + B + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2}\right) C = 0 \\
 & \frac{4i\Omega}{\sigma} \frac{\mathcal{H}_{37}}{a_2^2} A - \frac{4i\Omega}{\sigma} \frac{\mathcal{H}_{37}}{a_1^2} B \\
 & + \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2) + \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{a_3^2} \right] \mathcal{H}_{37} \right\} D = 0 \\
 & \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2)a_1^2 + \left[2 + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{a_1^2}{a_3^2} \right] \mathcal{H}_{3i} \right\} \frac{A}{a_1^2 + \lambda_i} \\
 & + \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2)a_2^2 + \left[2 + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2}\right) \frac{a_2^2}{a_3^2} \right] \mathcal{H}_{3i} \right\} \frac{B}{a_2^2 + \lambda_i} \\
 & + 3 \left\{ (\sigma^2 - 4\Omega^2)a_3^2 + 3 \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\sigma^2}\right) \mathcal{H}_{3i} \right\} \frac{C}{a_3^2 + \lambda_i} + 2i \frac{\Omega}{\sigma} \mathcal{H}_{3i} \left\{ \frac{1}{a_3^2 + \lambda_i} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{a_1^2 + \lambda_i} \right\} D = 0 ; \quad i = 5, 6
 \end{aligned}$$

Le déterminant des coefficients égal à zéro fournit après quelques opérations élémentaires l'équation caractéristique cherchée (cfr. éq. 90) ; elle admet 5 racines distinctes toujours positives (cfr. tables 9). La figure 8 illustre la variation des diverses fréquences pour deux masses égales ($g = 1$) : on remarquera surtout la variation rapide de σ_1^2 après l'instabilité ; par contre, σ_3^2 est alors quasi nulle. Chandrasekhar et Lebovitz signalent aussi cette particularité pour l'ellipsoïde de Jacobi [12].

En conclusion, nous noterons qu'aux harmoniques de surface de degré 3 sont associées 11 valeurs propres σ^2 toujours réelles ; 7 correspondent à la fréquence unique de Kelvin de la sphère, les 4 autres sont alors nulles. Pour ces harmoniques, il existe une analogie étroite entre l'ellipsoïde de Roche et celui de Jacobi ; en particulier, l'instabilité se manifeste par une déformation symétrique par rapport à l'équateur et la valeur propre qui devient négative ne provient pas de la fréquence de Kelvin. Ceci semble indiquer que pour ces déformations ($l = 3$), la rotation axiale joue un rôle plus important que l'effet de marée. Par contre, l'instabilité associée aux harmoniques $l = 2$ doit être causée par l'effet de marée ; en effet, l'ellipsoïde de Jacobi reste stable pour ces déformations.

0	σ^2	1	0
$\left\{ \sigma^2 + \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) \mathcal{H}_{37} \right\}$	$4 \frac{\mathcal{H}_{37} \Omega^2}{a_1^2}$	0	$(\sigma^2 - 4\Omega^2) \left(\sigma^2 + \frac{\mathcal{H}_{37}}{a_3^2} \right) + \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \mathcal{H}_{37} \sigma^2$
$\left(\frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_5} - \frac{a_2^2}{a_2^2 + \lambda_5} \right) \left(\sigma^2 + \frac{\mathcal{H}_{35}}{a_3^2} \right)$	$\frac{a_2^2}{a_2^2 + \lambda_5} (\sigma^2 - 4\Omega^2) \left(\sigma^2 + \frac{\mathcal{H}_{35}}{a_3^2} \right) + 2 \frac{\mathcal{H}_{35}}{a_2^2 + \lambda_5} \sigma^2$	$\frac{a_3^2}{a_2^2 + \lambda_5} (\sigma^2 + 3 \frac{\mathcal{H}_{35}}{a_3^2})$	$2 \mathcal{H}_{35} \left(\frac{1}{a_2^2 + \lambda_5} - \frac{1}{a_1^2 + \lambda_5} \right) \sigma^2$
$\left(\frac{a_1^2}{a_1^2 + \lambda_6} - \frac{a_2^2}{a_2^2 + \lambda_6} \right) \left(\sigma^2 + \frac{\mathcal{H}_{36}}{a_3^2} \right)$	$\frac{a_2^2}{a_2^2 + \lambda_6} (\sigma^2 - 4\Omega^2) \left(\sigma^2 + \frac{\mathcal{H}_{36}}{a_3^2} \right) + 2 \frac{\mathcal{H}_{36}}{a_2^2 + \lambda_6} \sigma^2$	$\frac{a_3^2}{a_2^2 + \lambda_6} (\sigma^2 + 3 \frac{\mathcal{H}_{36}}{a_3^2})$	$2 \mathcal{H}_{36} \left(\frac{1}{a_2^2 + \lambda_6} - \frac{1}{a_1^2 + \lambda_6} \right) \sigma^2$

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège
Cinquième série, Tome XVIII, Fascicule 1, 1969

TABLES 9

Valeurs propres σ^2 associées aux harmoniques de degré $l = 3$
Modes asymétriques

$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$	σ_7^2	σ_8^2	σ_9^2	σ_{10}^2	σ_{11}^2
-----------------------------	--------------	--------------	--------------	-----------------	-----------------

$q = 0.01$

0.9	0.01722	0.02871	1.890	2.374	2.679
0.8	0.03570	0.05630	1.698	2.383	2.886
0.7	0.05346	0.08114	1.516	2.349	3.077
0.6	0.06810	0.1016	1.322	2.295	3.258
0.5	0.07698	0.1156	1.111	2.234	3.429
0.4	0.07753	0.1205	0.8823	2.172	3.589
0.3	0.06786	0.1119	0.6401	2.113	3.734
0.2	0.04775	0.08503	0.3931	2.060	3.859
0.1	0.02043	0.03927	0.1571	2.018	3.955

$q = 0.1$

0.9	0.01867	0.03112	1.877	2.377	2.689
0.8	0.03857	0.06065	1.685	2.388	2.894
0.7	0.05742	0.08695	1.504	2.354	3.082
0.6	0.07282	0.1083	1.313	2.299	3.260
0.5	0.08200	0.1228	1.105	2.236	3.428
0.4	0.08231	0.1274	0.8787	2.173	3.586
0.3	0.07191	0.1180	0.6380	2.114	3.731
0.2	0.05053	0.0896	0.3919	2.060	3.857
0.1	0.02161	0.04147	0.1566	2.018	3.954

$q = 1$

1.	0.	0.	2.2857	2.2857	2.2857
0.99	0.00318	0.00565	2.116	2.308	2.452
0.98	0.00641	0.01126	2.047	2.320	2.518
0.97	0.00965	0.01681	1.995	2.235	2.567
0.90	0.03280	0.05368	1.775	2.407	2.770
0.8	0.06463	0.09949	1.581	2.427	2.955
0.7	0.09190	0.1361	1.416	2.389	3.116
0.6	0.1119	0.1626	1.246	2.324	3.270
0.5	0.1220	0.1777	1.060	2.253	3.420

TABLES 9 (suite)

$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$	σ_7^2	σ_8^2	σ_9^2	σ_{10}^2	σ_{11}^2
0.4	0.1197	0.1791	0.8514	2.182	3.566
0.3	0.1029	0.1629	0.6228	2.118	3.708
0.2	0.0716	0.1234	0.3832	2.062	3.838
0.1	0.0305	0.0577	0.1525	2.018	3.945

$q = 5$

0.9	0.0844	0.1310	1.545	2.485	2.930
0.8	0.1421	0.2072	1.375	2.502	3.048
0.7	0.1782	0.2514	1.251	2.447	3.152
0.6	0.1976	0.2733	1.126	2.368	3.265
0.5	0.2017	0.2773	0.9804	2.283	3.390
0.4	0.1893	0.2645	0.8056	2.202	3.524
0.3	0.1583	0.2327	0.6001	2.129	3.665
0.2	0.1082	0.1752	0.3721	2.066	3.805
0.1	0.0457	0.0841	0.1466	2.019	3.931

$q = 20$

0.9	0.1860	0.2672	1.314	2.580	3.017
0.8	0.2427	0.3352	1.209	2.553	3.059
0.7	0.2646	0.3578	1.132	2.479	3.134
0.6	0.2698	0.3588	1.043	2.392	3.234
0.5	0.2616	0.3444	0.9279	2.303	3.353
0.4	0.2382	0.3158	0.7776	2.217	3.488
0.3	0.1957	0.2710	0.5892	2.138	3.633
0.2	0.1325	0.2025	0.3694	2.070	3.783

$q = 100$

0.9	0.2888	0.3936	1.172	2.619	2.980
0.8	0.3084	0.4142	1.128	2.563	3.022
0.7	0.3106	0.4119	1.078	2.485	3.104
0.6	0.3040	0.3975	1.008	2.399	3.210
0.5	0.2881	0.3723	0.9062	2.311	3.333
0.4	0.2591	0.3356	0.7667	2.224	3.470
0.3	0.2114	0.2848	0.5860	2.143	3.620
0.2	0.1427	0.2118	0.3699	2.072	3.774
0.1	0.0598	0.1040	0.1450	2.020	3.917

$\frac{a_2}{a_1}$	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_{10}^2	σ_{11}^2
-------------------	--------------	--------------	--------------	-----------------	-----------------

$q = 1000$

0.9	0.3290	0.4413	1.128	2.618	2.944
0.8	0.3287	0.4381	1.105	2.561	3.004
0.7	0.3236	0.4270	1.064	2.486	3.093
0.6	0.3132	0.4078	0.9986	2.401	3.202
0.5	0.2951	0.3795	0.9007	2.313	3.327
0.4	0.2645	0.3405	0.7640	2.226	3.466
0.3	0.2155	0.2881	0.5853	2.144	3.616
0.2	0.1453	0.2140	0.3702	2.073	3.771
0.1	0.0609	0.1052	0.1452	2.020	3.916

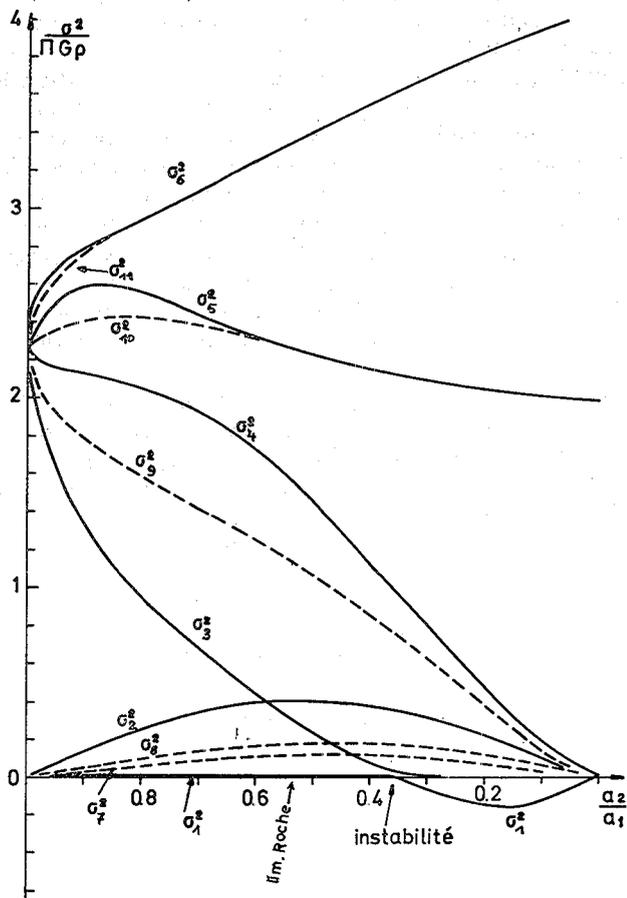


Fig. 8. — Carré des pulsations des ellipsoïdes de Roche, harmoniques $l = 3$; série $q = 1$. modes symétriques (—) et asymétriques (-----)

CHAPITRE III

LA STABILITÉ SÉCULAIRE
DES FIGURES DE ROCHE ET DE JEANS

Les résultats précédents permettent d'étudier la stabilité dynamique du sphéroïde de Jeans et de l'ellipsoïde de Roche, c'est-à-dire la stabilité en l'absence de forces dissipatives éventuelles ; mais il faut faire la distinction entre cette stabilité dynamique et la stabilité séculaire qui elle, tient compte des effets des forces dissipatives et sur laquelle Lord Kelvin [13] a attiré particulièrement l'attention. L'importance de cette distinction — du moins pour un système mécanique discret et les fluides homogènes incompressibles — tient au fait qu'en présence de rotation, une configuration dynamiquement stable peut être séculairement instable ; par contre, une configuration séculairement stable l'est toujours dynamiquement. Les deux formes d'instabilité peuvent cependant se produire simultanément.

On doit à H. Poincaré [14] une méthode simple pour rechercher la stabilité séculaire des ellipsoïdes. Elle consiste à étudier la variation de l'énergie potentielle au voisinage de l'équilibre et se ramène à déterminer le signe de certains coefficients définis par la figure d'équilibre elle-même évitant ainsi la résolution explicite des équations du mouvement.

Nous calculons ces coefficients — appelés « coefficients de stabilité » par Poincaré — pour les figures de Roche et de Jeans et étudions leur stabilité séculaire d'abord par cette méthode. Nous reprenons ensuite le problème par les équations du viriel lesquelles permettent, moyennant un choix particulier du coefficient de viscosité, de résoudre rigoureusement le problème, de confirmer facilement les résultats obtenus par la première méthode et en outre de montrer que l'instabilité séculaire apparaît par un mode purement visqueux.

§ 1. La méthode de Poincaré

1. Le théorème de l'énergie pour un fluide visqueux

Nous allons d'abord établir en toute généralité l'équation de conservation de l'énergie d'un fluide visqueux pour le système qui nous occupe. Les équations du mouvement s'écrivent ici :

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial p_{li}}{\partial x_l} - 2\rho(\vec{\Omega} \wedge \vec{U})_i ; i = 1, 2, 3 \quad (91)$$

où l'on a posé

$$p_{ij} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right), \quad i \neq j$$

$$p_{ii} = -p - \frac{2}{3} \bar{\mu} \operatorname{div} \vec{U} + 2\bar{\mu} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad (92)$$

Les p_{ji} désignent les composantes du tenseur des tensions, $\bar{\mu}$ le coefficient de viscosité et V le potentiel total des forces agissantes :

$$V = \Phi + V_\Omega + V_T \quad (93)$$

A la surface libre S du fluide, la force de tension \vec{T} par unité d'aire doit être nulle ; ceci implique, si \vec{N} désigne le vecteur unitaire normal à S et dirigé vers l'extérieur :

$$N_1 p_{1i} + N_2 p_{2i} + N_3 p_{3i} = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (94)$$

Cela étant, multiplions les équations (91) par U_i et additionnons les, il vient :

$$\frac{\rho}{2} \frac{D}{Dt} \left(\sum_i U_i^2 \right) = -\rho \left(\sum_i U_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,l} \frac{\partial p_{li}}{\partial x_i} U_i \quad (95)$$

où les termes correspondant à la force de Coriolis sont nuls, celle-ci n'effectuant aucun travail. En intégrant cette dernière relation sur le volume \mathcal{V} du fluide à l'instant t , on est conduit à l'équation

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \left(\sum_i U_i^2 \right) dv + \int_{\mathcal{V}} \left(\sum_i U_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) \rho dv = \int_{\mathcal{V}} \left(\sum_{i,l} U_i \frac{\partial p_{li}}{\partial x_i} \right) dv$$

En tenant compte de l'identité

$$U_i \frac{\partial p_{li}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} (U_i \cdot p_{li}) - p_{li} \frac{\partial U_i}{\partial x_l}$$

et de la formule

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \right) dv = \int_S A \cdot N_i dS$$

nous obtenons, grâce aux conditions aux limites (94)

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\sum_i U_i \frac{\partial p_{li}}{\partial x_l} \right) dv = \int_{\mathcal{V}} \left(\sum_{i,l} p_{li} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right) dv$$

ou encore, en explicitant les p_{li} =

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(p \operatorname{div} \vec{U} \right) dv - 2F \quad (96)$$

où $2F$ est la fonction de dissipation de Lord Rayleigh :

$$2F = \bar{\mu} \int_{\mathcal{V}} \left\{ 2 \sum \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \vec{U})^2 \right\} dv$$

Cette fonction est toujours positive et représente le taux de conversion d'énergie du fluide en chaleur par suite des frottements internes [15].

Par ailleurs, les énergies potentielles associées aux potentiels Φ , V_Ω et V_T sont respectivement :

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \Phi \rho dv ; W_\Omega = \int_{\mathcal{V}} V_\Omega \rho dv ; W_T = \int_{\mathcal{V}} V_T \rho dv$$

et leurs dérivées totales en suivant le mouvement valent

$$\begin{aligned} \frac{DW_1}{Dt} &= \int_{\mathcal{V}} \left(\sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} U_i \right) \rho dv \\ \frac{DW_\Omega}{Dt} &= \int_{\mathcal{V}} \left(\sum \frac{\partial V_\Omega}{\partial x_i} U_i \right) \rho dv ; \frac{DW_T}{Dt} = \int_{\mathcal{V}} \left(\sum \frac{\partial V_T}{\partial x_i} U_i \right) \rho dv \end{aligned} \quad (97)$$

En tenant compte des relations (95) à (97), nous pouvons écrire l'équation d'énergie sous la forme

$$\frac{D}{Dt} (T + W) - \int_{\mathcal{V}} (p \operatorname{div} \vec{U}) dv = -2F \quad (98)$$

où T désigne l'énergie cinétique et W l'énergie potentielle totale :

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) \rho dv ; \quad (99)$$

$$W = W_1 + W_\Omega + W_T \quad (100)$$

Cas du fluide incompressible

Si nous considérons maintenant le mouvement d'un fluide incompressible au voisinage de l'équilibre, nous avons :

$$\frac{D}{Dt} (\delta T + \delta W) = -2F \quad (101)$$

où les δ désignent les variations par rapport à l'équilibre.

Cette équation indique clairement que la figure d'équilibre est séculairement stable lorsque l'énergie potentielle totale W est minimum. En effet, δW est alors positive, tandis que δT l'est toujours ; d'après (101), la somme $\delta T + \delta W$ ne peut que diminuer au cours du mouvement. Ceci implique que δT et δW s'annulent à des instants distincts qui tendent asymptotiquement l'un vers l'autre tandis que δT et δW tendent vers zéro.

Dans le cas contraire (W n'est pas minimum), δW devient de plus en plus négatif ; ce qui implique, du moins pour les figures homogènes incompressibles dont la variation d'énergie dépend uniquement de l'amplitude de la déformation superficielle, que la figure s'écarte de plus en plus de l'équilibre et est donc séculairement instable.

Il est aussi évident qu'une figure d'équilibre séculairement stable, c'est-à-dire pour laquelle W est un minimum, est également dynamiquement stable puisque dans ce cas en l'absence de force dissipative on a

$$\delta T + \delta W = \delta E$$

où δE est positif et δT et δW restent constamment bornés au cours du mouvement.

Dans le cas où elle est instable séculairement, il est impossible de conclure sans une discussion détaillée du mouvement prenant la force de Coriolis en considération.

2. Les coefficients de stabilité de l'ellipsoïde de Roche

Nous allons d'abord calculer le module g de la force totale \vec{F} agissant sur une masse unitaire située à la surface E_0 de l'ellipsoïde ; g est donc en fait la gravité apparente à la surface. Nous avons

$$\vec{F} = -g \cdot \vec{N}$$

où \vec{N} est donné par la formule (57) et \vec{F} par le gradient de V :

$$\vec{N} = \left\{ \tilde{\omega} \left(\frac{x_1^2}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2}, \frac{x_3}{a_3} \right) \right\}_{\lambda=0}, \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{2h_1} \quad (\text{cfr. 57})$$

$$\vec{F} = -\text{grad } V = \{(\Omega^2 + \mu - 2A_1)x_1; (\Omega^2 - \mu - 2A_2)x_2; (-\mu - 2A_3)x_3\}$$

En identifiant les deux expressions de \vec{F} , il vient :

$$\{g\tilde{\omega}\}_{E_0} = (2A_3 + \mu)a_3^2 \quad (102)$$

Le produit $g\tilde{\omega}$ est donc constant sur la surface.

Soient maintenant \mathcal{V}_0 la figure d'équilibre et \mathcal{V} la configuration voisine résultant d'une petite déformation caractérisée par un champ de déplacement $\vec{\xi}(x_1, x_2, x_3)$. \mathcal{V} peut être considéré comme résultant de la superposition d'une couche superficielle C à l'ellipsoïde initial E_0 . La variation de l'énergie potentielle totale vaut

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_\Omega + \delta W_T$$

Nous avons d'abord

$$\delta W_1 = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} G \frac{dm(M)dm(M')}{MM'} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_0} \int_{\mathcal{V}_0} G \frac{dm(E)dm(E')}{EE'}$$

Cela étant, distinguons entre les points E, E' de l'ellipsoïde E_0 et les points P, P' de la couche C , il vient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \frac{dm(M)dm(M')}{MM'} &= \int_{\mathcal{V}_0} \int_{\mathcal{V}_0} \frac{dm(E)dm(E')}{EE'} + 2 \int_C \int_{\mathcal{V}_0} \frac{dm(E)dm(P)}{EP} \\ &+ \int_C \int_C \frac{dm(P)dm(P')}{PP'} \end{aligned}$$

par suite :

$$\delta W_1 = \int_C \Phi(P)dm(P) - \frac{G}{2} \int_C \int_C \frac{dm(P)dm(P')}{PP'}$$

De même :

$$\delta W_\Omega = \int_C V_\Omega(P)dm(P); \quad \delta W_T = \int_C V_T(P)dm(P)$$

Au total, il vient donc

$$\delta W = \int_C V(P) dm(P) - \frac{G}{2} \int_C \int_C \frac{dm(P) dm(P')}{PP'} \quad (103)$$

Par ailleurs, l'on a en désignant dorénavant par E un point de la surface d'équilibre E_0

$$V(P) = V(E) + g \cdot h$$

où h désigne la distance normale de P à l'ellipsoïde comptée positivement vers l'extérieur ; $V(E)$ est naturellement constant sur E_0 , d'où :

$$\delta W = V(E) \int_C dm(P) + \int_C g \cdot h \cdot dm(P) - \frac{G}{2} \int_C \int_C \frac{dm(P) \cdot dm(P')}{PP'}$$

Dans la région C, $dm(P) = \rho dS(E) \cdot dh$ et $\int_C dm(P) = 0$ puisque la masse reste constante. La première intégrale est donc nulle. Négligeant les termes d'ordre supérieur à deux en h , les intégrales suivantes deviennent :

$$\delta W = \frac{\rho}{2} \int_{E_0} g \cdot h^2 dS - \frac{G\rho^2}{2} \int_{E_0} \int_{E_0} \frac{h(E) \cdot h(E') \cdot dS(E) \cdot dS(E')}{EE'} \quad (104)$$

La fonction h étant déterminée sur l'ellipsoïde E_0 , on peut l'exprimer sous la forme d'une somme de fonctions de Lamé

$$h(E) = \tilde{\omega} \left\{ \sum_{l,m} A_{lm} \cdot P_{lm}(E) \right\} ; P_{lm}(E) = L_{lm}(\mu) \cdot L_{lm}(\nu)$$

où les A_{lm} sont des constantes petites arbitraires. Par ailleurs, les harmoniques de Lamé satisfont à la relation d'orthogonalité :

$$\int_{E_0} \tilde{\omega} P_{lm}(E) \cdot P_{ij}(E) dS(E) = 0 \text{ si } P_{ij} \neq P_{lm} \quad (105)$$

Compte tenu de cette relation et de la formule (102), l'on a :

$$\int_{E_0} gh^2 dS = a_3^2 (2A_3 + \mu) \left\{ \sum_{l,m} A_{l,m}^2 \int_{E_0} \tilde{\omega} P_{l,m}^2 dS \right\} \quad (106)$$

Enfin, par la relation de Liouville (Lyttleton, p. 83) qui s'écrit ici :

$$\int_{E_0} \frac{\tilde{\omega}(E') P_{lm}(E') dS(E')}{EE'} = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{(2l+1)} L_{lm}(0) \cdot S_{lm}(0) \cdot P_{lm}(E)$$

on a aussi :

$$\int_{E_0} \int_{E_0} \frac{h(E) h(E') dS(E) dS(E')}{EE'} = 4\pi a_1 a_2 a_3 \left\{ \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \cdot L_{lm}(0) \cdot S_{lm}(0) \cdot A_{l,m}^2 \int_{E_0} \tilde{\omega} P_{l,m}^2 dS \right\} \quad (107)$$

Grâce à cette relation et à (106), on obtient finalement

$$\delta W = -\frac{\rho}{2} \left\{ \sum_{l,m} \mathcal{H}_{lm} \cdot A_{lm}^2 \int_{E_0} \tilde{\omega} P_{lm}^2 dS \right\} \quad (108)$$

où \mathcal{H}_{lm} a déjà été défini par la relation (65).

Ainsi, au signe près, les coefficients de stabilité de Poincaré s'identifient aux coefficients \mathcal{H}_{lm} introduits lors de l'étude des petites oscillations libres de l'ellipsoïde. Un raisonnement identique à celui de Lyttleton (réf. 11, p. 107) montre que le long d'une série linéaire \mathcal{H}_{lm} s'annule après \mathcal{H}_{im} si $l > i$. Il existe $(2l + 1)$ coefficients \mathcal{H}_{lm} distincts.

Nous savons déjà (cfr. 68, 69 et 79) que \mathcal{H}_{23} , \mathcal{H}_{24} et \mathcal{H}_{25} restent toujours négatifs ; les autres coefficients correspondant aux harmoniques de degré $l = 2$ et 3 ont été calculés lors de la résolution des équations déterminantes (78), (89) et (90). Seuls \mathcal{H}_{21} et \mathcal{H}_{31} changent de signe. Le premier, \mathcal{H}_{21} , s'annule à la limite de Roche ; l'ellipsoïde devient donc *séculairement instable* dès cette limite, il reste cependant *dynamiquement stable* un peu au-delà comme nous l'avons vu précédemment (cfr. table 5, 6 et fig. 6). Que les deux instabilités ne s'établissent pas en même temps se vérifie aussi rapidement en posant $\mathcal{H}_{21} = 0$ et $\sigma^2 = 0$ dans l'équation (78), car son premier membre se réduit alors à :

$$-4 \mathcal{H}_{23} \Omega^2 a_1^2 (a_1^2 + a_2^2 + 2\lambda_1) / (a_1^2 - a_2^2)$$

laquelle quantité n'est jamais nulle. Par contre, nous avons vu que l'équation (89) admet une racine nulle lorsque \mathcal{H}_{31} s'annule et que cette racine change de signe avec \mathcal{H}_{31} (fig. 7).

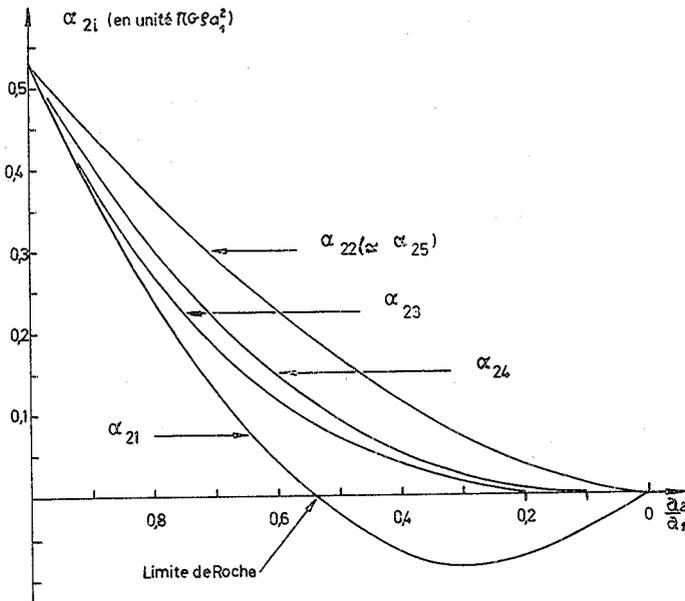


Fig. 9. — Coefficients de stabilité des ellipsoïdes de Roche, série $q = 1$; harmoniques $l = 2$ ($\alpha_{2i} = -\mathcal{H}_{2i}$)

Les figures 9 et 10 montrent les variations des coefficients de stabilité le long de la série $q = 1$. On notera surtout pour $l = 2$ (fig. 5 et 9) le parallèle évident entre les variations de \mathcal{H}_{21} et de la valeur propre σ_1^2 qui révèle l'instabilité dynamique ; pour $l = 3$ (fig. 8 et 10), ce ne sont que les valeurs négatives de σ_1^2 et de \mathcal{H}_{31} qui présentent cette particularité. Enfin, lorsque les rapports a_2/a_1 et a_3/a_1 tendent vers zéro, les coefficients de stabilité y tendent aussi.

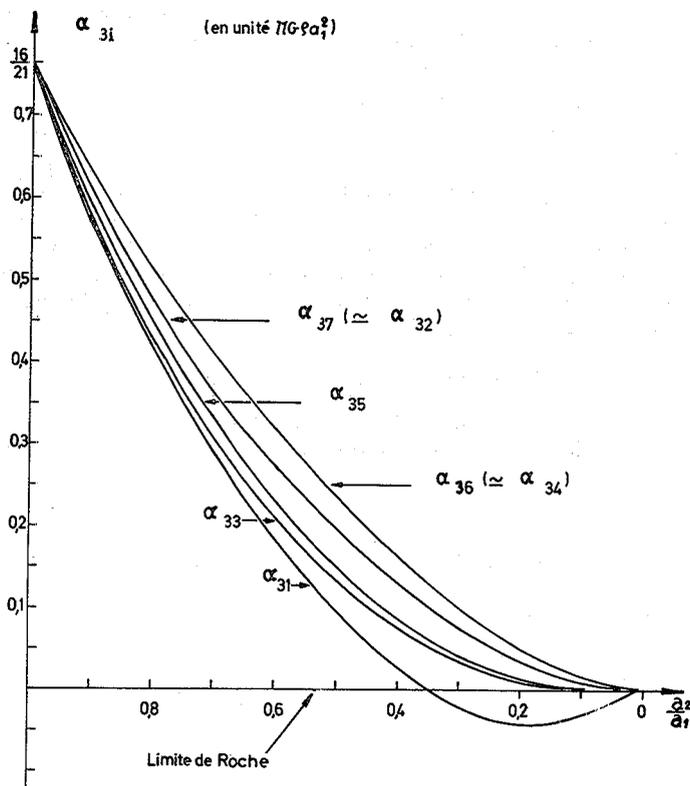


Fig. 10. — Coefficients de stabilité des ellipsoïdes de Roche, série $q = 1$; harmoniques $l = 3$ ($\alpha_{3i} = -\mathcal{H}_{3i}$)

3. Les coefficients de stabilité du sphéroïde de Jeans

Nous rapportons maintenant le mouvement au système d'axes $Ox_1x_2x_3$ où O est le centre du sphéroïde et Ox_3 tel que $a_3 > a_1 = a_2$. J désigne la surface d'équilibre.

En terme de l'excentricité e de la section méridienne, la relation (102) s'écrit :

$$\frac{g}{h_1} = 4\Pi G\rho \frac{\sqrt{1-e^2}}{3-e^2} = K(e) \quad (109)$$

La déformation superficielle est maintenant décrite par la série

$$h = \frac{1}{h_1} \left\{ \sum_{l=2}^l \sum_{m=0}^l A_l^{\pm m} \cdot S_l^{\pm m}(\theta, \varphi) \right\}; S_l^{\pm m} = P_l^m(\theta) \cdot e^{\pm mi\varphi}$$

et l'expression (106) devient :

$$\int_J gh^2 dS = K \left\{ \sum_{l,m} (A_l^{\pm m})^2 \int_J (S_l^{\pm m})^2 \frac{dS}{h_1} \right\} \quad (110)$$

Pour évaluer la seconde intégrale de (104) dans le cas qui nous occupe, il faut d'abord remarquer qu'en procédant exactement comme Lyttleton (voir [11], p. 83), on obtient ici pour la formule de Liouville

$$\int_J \frac{S_l^{\pm m}(E')}{EE'} \frac{dS(E')}{h_1(E')} = 4\pi \operatorname{sh} \xi_0 (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m\left(\frac{1}{e}\right) \cdot Q_l^m\left(\frac{1}{e}\right) \cdot S_l^{\pm m}(E) \quad (111)$$

où P_l^m et Q_l^m sont les fonctions associées de Legendre de première et de seconde espèces. Grâce à cette relation, on obtient pour la variation de l'énergie potentielle du sphéroïde de Jeans :

$$\delta W = \rho \left\{ \sum_{l,m} \alpha_{lm} (A_l^{\pm m})^2 \int_J (S_l^{\pm m})^2 \frac{dS}{h_1} \right\} \quad (112)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_{lm} &= \frac{K}{2} - 2\Pi G \rho (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \operatorname{sh} \xi_0 \cdot Q_l^m\left(\frac{1}{e}\right) \cdot P_l^m\left(\frac{1}{e}\right) \\ &= 2\Pi G \rho \operatorname{sh} \xi_0 \left\{ \frac{e}{3-e^2} - (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} Q_l^m\left(\frac{1}{e}\right) \cdot P_l^m\left(\frac{1}{e}\right) \right\} \end{aligned} \quad (113)$$

compte tenu de (109) et de la valeur de $\operatorname{sh} \xi_0$ en fonction de e .

Il existe ici $(l+1)$ coefficients de stabilité α_{lm} . Comme $\operatorname{ch} \xi_0$ vaut $1/e$, la comparaison des formules (25) et (113) montre que les instabilités séculaires et dynamiques du sphéroïde de Jeans apparaissent ensemble.

§ 2. La méthode du viriel

En présence de viscosité, il faut substituer aux termes de pression des équations du viriel établies par Chandrasekhar (voir éq. 52 dans [4]), les termes correspondant au tenseur des tensions lesquels s'écrivent ici

$$\delta \mathcal{P}_{ij} = \delta \int_V x_j \left(\sum_l \frac{\partial p_{il}}{\partial x_l} \right) dv \quad (114)$$

Après intégration par parties, il vient :

$$\mathcal{P}_{ij} = \int_S x_j \left(\sum_l N_l \cdot p_{il} \right) dS - \int_V p_{ij} dv$$

où l'intégrale de surface est nulle, compte tenu des conditions aux limites (94).

En séparant la pression proprement dite des termes liés à la viscosité, on obtient :

$$\mathcal{P}_{ij} = \delta_{ij}\Pi - P_{ij} \quad (115)$$

si

$$\Pi = \int_{\mathcal{V}} p \, dv ; P_{ij} = \int_{\mathcal{V}} \bar{\mu} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dv \quad (116)$$

1. Oscillations symétriques

Aux équations (57-61) de Chandrasekhar régissant les oscillations ellipsoïdales symétriques par rapport au plan de l'équateur (plan x_1x_2) correspondent maintenant les suivantes :

$$\lambda^2 N_{11} - 2\lambda\Omega N_{21} = \delta W_{11} + (\Omega^2 + 2\mu)V_{11} + \delta\Pi - \delta P_{11} \quad (117)$$

$$\lambda^2 N_{22} + 2\lambda\Omega N_{12} = \delta W_{22} + (\Omega^2 - \mu)V_{22} + \delta\Pi - \delta P_{22} \quad (118)$$

$$\lambda^2 N_{33} = \delta W_{33} - \mu V_{33} + \delta\Pi - \delta P_{33} \quad (119)$$

$$\lambda^2 N_{12} - 2\lambda\Omega N_{22} = \delta W_{12} + (\Omega^2 + 2\mu)V_{12} - \delta P_{12} \quad (120)$$

$$\lambda^2 N_{21} + 2\lambda\Omega N_{11} = \delta W_{12} + (\Omega^2 - \mu)V_{12} - \delta P_{21} \quad (121)$$

$$\frac{V_{11}}{a_1^2} + \frac{V_{22}}{a_2^2} + \frac{V_{33}}{a_3^2} = 0 \quad (122)$$

où l'on a posé

$$V_{ij} = N_{ij} + N_{ji} ; N_{ij} = \int_{\mathcal{V}} \rho \xi_i x_j \, dv ; \lambda = \frac{d}{dt} \quad (123)$$

$$\delta W_{ij} = -2B_{ij}V_{ij} ; (i \neq j) \quad (124)$$

$$\delta W_{ii} = -(2B_{ii} - a_i^2 A_{ii})V_{ii} + a_i^2 \sum_{l \neq i} A_{il}V_{ll} \quad (125)$$

$$\delta P_{ij} = \lambda \bar{\mu} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) dv \quad (126)$$

ou encore, en intégrant par parties :

$$\delta P_{ij} = \lambda \int_{\mathcal{V}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\mu} \xi_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\mu} \xi_j) \right\} dv - \lambda \int_{\mathcal{V}} \left\{ \xi_i \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_j} + \xi_j \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_i} \right\} dv \quad (127)$$

La forme physique exacte du coefficient de viscosité n'est pas essentielle ici et nous choisissons $\bar{\mu}$ de telle façon que δP_{ij} puisse être exprimé uniquement en fonction des N_{ij} :

$$\bar{\mu} = \frac{5}{2} \rho \nu \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} \right) \quad (128)$$

μ reste ainsi constant sur une surface de niveau et s'annule à la surface ; la première

intégrale de (127), qui se réduit à une intégrale de surface. est donc nulle et l'on a finalement :

$$\delta P_{ij} = 5\lambda\nu \left(\frac{N_{ij}}{a_i^2} + \frac{N_{ji}}{a_j^2} \right) \quad (129) (*)$$

Substituons aux équations (117)-(122) les combinaisons suivantes : (117)-(118) ; (117) + (118)-(119) ; (122) ; (120) + (121) ; (120)-(121) ; soient :

$$\left(-\frac{\lambda^2}{2} + M_{11} - \frac{5\lambda\nu}{a_1^2} \right) V_{11} + \left(\frac{\lambda^2}{2} + M_{12} + \frac{5\lambda\nu}{a_2^2} \right) V_{21} + M_{13}V_{33} - 2\lambda\Omega V_{12} = 0 \quad (130)$$

$$\left(-\frac{\lambda^2}{2} + M_{21} - \frac{5\lambda\nu}{a_1^2} \right) V_{11} + \left(-\frac{\lambda^2}{2} + M_{22} - \frac{5\lambda\nu}{a_2^2} \right) V_{22} + \left(\lambda^2 + M_{23} + \frac{10\lambda\nu}{a_3^2} \right) V_{33} - 2\lambda\Omega V_{12} + 4\lambda\Omega N_{21} = 0 \quad (131)$$

$$M_{31}V_{11} + M_{31}V_{22} + M_{33}V_{33} = 0 \quad (132)$$

$$\lambda\Omega V_{11} - \lambda\Omega V_{22} + \left(\lambda^2 + J + \frac{10\lambda\nu}{a_2^2} \right) V_{12} + 10\lambda\nu \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) N_{21} = 0 \quad (133)$$

$$-\lambda\Omega V_{11} - \lambda\Omega V_{22} + (\lambda^2 - 3\mu)V_{12} - 2\lambda^2 N_{21} = 0 \quad (134)$$

où l'on a posé avec Lebovitz [17]

$$M_{11} = \Omega^2 + 2\mu - 3B_{11} + B_{12} ; M_{12} = \mu - \Omega^2 + 3B_{22} - B_{12} ;$$

$$M_{13} = B_{23} - B_{13} ; M_{21} = \Omega^2 + 2\mu - 3B_{11} - B_{12} + 2B_{13} ;$$

$$M_{22} = \Omega^2 - \mu - 3B_{22} - B_{12} + 2B_{23} ; M_{23} = 2\mu + 6B_{33} - B_{13} - B_{23} ;$$

$$M_{31} = 1/a_1^2 ; M_{32} = 1/a_2^2 ; M_{33} = 1/a_3^2.$$

$$J = 4B_{12} - 2\Omega^2 - \mu \quad (135)$$

Les valeurs propres sont données par les racines λ du déterminant.

$$\begin{vmatrix} -\frac{\lambda^2}{2} + M_{11} - 5\frac{\lambda\nu}{a_1^2} ; \frac{\lambda^2}{2} + M_{12} + \frac{5\lambda\nu}{a_2^2} ; & M_{13} ; & -2\lambda\Omega ; & 0 \\ -\frac{\lambda^2}{2} + M_{21} - \frac{5\lambda\nu}{a_1^2} ; -\frac{\lambda^2}{2} + M_{22} - \frac{5\lambda\nu}{a_2^2} ; \lambda^2 + M_{23} + \frac{10\lambda\nu}{a_3^2} ; & -2\lambda\Omega ; & 4\lambda\Omega \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0 & 0 \\ \lambda\Omega & -\lambda\Omega & 0 & \lambda^2 + J + 10\frac{\lambda\nu}{a_2^2} ; & 10\lambda\nu \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) \\ -\lambda\Omega & -\lambda\Omega & 0 & \lambda^2 - 3\mu ; & -2\lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (136)$$

(*) Le facteur $\frac{5}{2}$ dans $\bar{\mu}$ permet d'obtenir pour δP_{ij} une expression identique à celle de Rosenkilde [16] ; il faut cependant bien noter que cette équivalence est purement formelle, le coefficient ν étant supposé petit par cet auteur. De plus, il a évalué δP_{ij} pour des déplacements ne respectant pas les conditions aux limites, si bien que l'interprétation de ses résultats reste délicate.

Nous n'avons pas cherché explicitement les racines de cette équation ; il suffit de remarquer simplement qu'elle est de la forme

$$\lambda \left\{ \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right) \lambda^7 + \dots + 30\mu\nu \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) M \right\} = 0$$

où le déterminant $M = |M_{ij}|$ est nul à la limite de Roche, positif en deçà et négatif au delà. $\lambda = 0$ correspond à la première racine nulle considérée par Lebovitz [17], mais interprétée erronément (cfr. Appendice). D'après le critère de Hurwitz [18], l'équation du 7^e degré admet certainement une racine à partie réelle positive dès que M devient négatif ; ceci signifie que la viscosité rend les figures de Roche et de Jeans séculairement instables dès la limite de Roche, en accord parfait avec le critère de Poincaré. Cette racine est nulle lorsque $\nu = 0$, elle s'identifie alors à la seconde racine nulle interprétée aussi erronément par Lebovitz. Il existe donc un *mode purement visqueux* responsable de l'instabilité séculaire qui se manifeste dès la limite de Roche.

2. Oscillations asymétriques

Les équations (53)-(56) établies dans la référence [4] deviennent pour le fluide visqueux considéré :

$$\lambda^2 N_{31} + (2B_{13} + \mu)V_{13} + \delta P_{31} = 0$$

$$\lambda^2 N_{13} + (2B_{13} - \Omega^2 - 2\mu)V_{13} - 2\lambda\Omega N_{23} + \delta P_{13} = 0$$

$$\lambda^2 N_{23} + (2B_{23} - \Omega^2 + \mu)V_{23} + 2\lambda\Omega N_{13} + \delta P_{23} = 0$$

$$\lambda^2 N_{32} + (2B_{23} + \mu)V_{23} + \delta P_{32} = 0$$

et en substituant aux δP_{ij} leurs expressions (129), il vient :

$$\left(\lambda^2 + 2B_{13} + \mu + \frac{5\lambda\nu}{a_1^2} \right) V_{13} - \left(\lambda^2 - 5\lambda\nu \left(\frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) \right) N_{13} = 0 \quad (137)$$

$$\left(2B_{13} - \Omega^2 - 2\mu + \frac{5\lambda\nu}{a_1^2} \right) V_{13} + \left(5\lambda\nu \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) + \lambda^2 \right) N_{13} - 2\lambda\Omega N_{23} = 0 \quad (138)$$

$$\left(2B_{23} - \Omega^2 + \mu + \frac{5\lambda\nu}{a_2^2} \right) V_{23} + 2\lambda\Omega N_{13} + \left(\lambda^2 + 5\lambda\nu \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) \right) N_{23} = 0 \quad (139)$$

$$\left(\lambda^2 + 2B_{23} + \mu + \frac{5\lambda\nu}{a_2^2} \right) V_{23} + \left(5\lambda\nu \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) - \lambda^2 \right) N_{23} = 0 \quad (140)$$

On en déduit l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2B_{13} + \mu + \frac{5\lambda\nu}{a_1^2} & 0 & 5\lambda\nu \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) - \lambda^2 & 0 \\ 2B_{13} - \Omega^2 - 2\mu + \frac{5\lambda\nu}{a_1^2} & 0 & 5\lambda\nu \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) + \lambda^2 & -2\lambda\Omega \\ 0 & 2B_{23} - \Omega^2 + \mu + \frac{5\lambda\nu}{a_2^2} & 2\lambda\Omega & 5\lambda\nu \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) + \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 + 2B_{23} + \mu + \frac{5\lambda\nu}{a_2^2} & 0 & 5\lambda\nu \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (141)$$

Elle peut être simplifiée quelque peu en retranchant la première et la quatrième ligne respectivement de la seconde et de la troisième ; de plus, λ eut être mis en évidence dans la troisième et la quatrième colonne :

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2B_{13} + \mu + \frac{5\lambda\nu}{a_1^2} & 0 & 5\nu \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_1^2} \right) - \lambda & 0 \\ -\lambda - \Omega^2 - 3\mu & 0 & 2\lambda & -2\Omega \\ 0 & -\lambda^2 - \Omega^2 & 2\Omega & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 + 2B_{23} + \mu + \frac{5\lambda\nu}{a_2^2} & 0 & 5\nu \left(\frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_2^2} \right) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (142)$$

La racine double $\lambda^2 = 0$ subsiste dans le cas des déformations asymétriques (appendice). L'équation restante, du sixième degré, a la forme :

$$\lambda^6 + \dots + 2\Omega^2 (2B_{12} + \mu) (2B_{23} + \mu) = 0$$

et d'après (69), son terme indépendant est toujours positif ; elle permet d'estimer l'effet de la viscosité sur les fréquences $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ rencontrées lors de l'étude de la stabilité dynamique (II, § 2), il en résulte toujours ici un amortissement.

Pour conclure, il est intéressant de résumer dans un tableau unique les résultats principaux concernant les figures homogènes dérivées de la sphère : le sphéroïde de Maclaurin, l'ellipsoïde de Jacobi le sphéroïde de Jeans et l'ellipsoïde de Roche.

Les instabilités, dynamique et séculaire, du sphéroïde de Maclaurin, du sphéroïde de Jeans et de l'ellipsoïde de Roche se manifestent d'abord par les harmoniques de degré $l = 2$; celles de Jacobi par ceux de degré $l = 3$. Elles apparaissent ensemble pour les figures de Jeans et de Jacobi. Par contre, les figures de Maclaurin et de Roche deviennent dynamiquement instables au-delà du point où naît l'instabilité séculaire et ceci est dû à la force de Coriolis. On notera aussi que l'instabilité séculaire apparaît à un point de bifurcation pour les séries de Maclaurin et de Jacobi et en un « point limite » pour celles de Jeans et de Roche : au point S_2 commence la série de Jacobi et en J_3 la série des figures piriformes ; par contre, à la limite de Roche, le paramètre μ atteint une valeur maximum au-delà de laquelle n'existe plus aucune figure d'équilibre. Remarquons à ce sujet, que l'existence d'un point de bifurcation implique l'existence d'une déformation faisant passer d'un état d'équilibre à un autre, et par conséquent, une fréquence s'annulant en ce point ; le fait que l'ellipsoïde de Roche ne possède pas une valeur propre s'annulant à la limite de Roche montre bien qu'il ne s'agit pas d'un point de bifurcation.

Remerciements

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici toute ma gratitude à Monsieur le Professeur P. Ledoux qui m'a suggéré ce travail et n'a cessé de me prodiguer ses conseils et ses encouragements.

TABLEAU RÉCAPITULATIF DES FIGURES HOMOGENES INCOMPRESSIBLES

	Stabilité dynamique	Stabilité séculaire
Sphéroïdes de Maclaurin (fig. 4 et réf. 19-20)		
$l = 2$	σ^2 s'annule en S_2 sans y changer de signe. Instabilité dynamique en M_2 , σ devient complexe (oscillations d'amplitude croissante).	Instabilité séculaire en S_2 ; \mathcal{H}_{21} y change de signe.
$l = 3$	σ^2 s'annule en S_3 sans y changer de signe. Instabilité en M_3 , σ devient complexe.	Instabilité séculaire en S_3 , \mathcal{H}_{31} y change de signe.
l'instabilité séculaire précède l'instabilité dynamique.		
Ellipsoïdes de Jacobi (fig. 4 et réf. 12)		
$l = 2$	Toujours stables.	Toujours stables.
$l = 3$	Instables en J_3 ; σ^2 , toujours réel, y change de signe.	Instables en J_3 ; \mathcal{H}_{31} y change de signe.
instabilités séculaire et dynamique simultanées.		
Sphéroïdes de Jeans (fig. 4)		
$l = 2$	Instabilité en T_2 { (pour tout l , }	Instabilité de T_2 (limite de Roche)
$l = 3$	Instabilité en T_3 { σ^2 toujours réel) }	Instabilité en T_3
instabilités séculaire et dynamique simultanées (l quelconque).		
Ellipsoïdes de Roche (fig. 4)		
$l = 2$	\mathcal{H}_{21} change de signe à la limite de Roche : σ^2 ne s'annule pas. L'instabilité dynamique apparaît au-delà de cette limite; σ^2 , toujours réel, change alors de signe.	Instabilité dès la limite de Roche. (précède l'instabilité dynamique).
$l = 3$	σ^2 , toujours réel, change de signe avec \mathcal{H}_{31} .	Instabilité séculaire dès que \mathcal{H}_{31} change de signe (instabilités séculaire et dynamique simultanées).
l'instabilité séculaire précède l'instabilité dynamique.		

RÉFÉRENCES

- [1] ROCHE, E., 1850. — *Mémoires de l'Académie de Montpellier*.
- [2] JEANS, J., 1917. — *Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics*. Cambridge, University Press.
- [3] CHANDRASEKHAR, S., and LEBOVITZ, N. R., 1963. — *Ap. J.*, **137**, 1172.
- [4] CHANDRASEKHAR, S., 1963. — *Ap. J.*, **138**, 1182.
- [5] HOBSON, E. W., 1931. — *Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge University Press.
- [6] — *Tables of Associated Legendre Functions*. Columbia University Press, New-York, 1945.
- [7] JAHNKE, EMDE, LÖSCH, 1960. — *Tables of higher Functions*. Teubner, Stuttgart.
- [8] CHANDRASEKHAR, S., 1963. — *Ap. J.*, **137**, 1185.
- [9] TISSERAND, F., 1891. — *Mécanique Céleste*, t. II. Gauthier-Villars, Paris.
- [10] CARTAN, E., 1922. — *Bull. des Sc. math.*, 2^e série, XLVI, 317.
- [11] LYTTLETON, R. A., 1953. — *The stability of Rotating Liquid Masses*. Cambridge University Press.
- [12] CHANDRASEKHAR, S. and LEBOVITZ, N. R., 1963. — *Ap. J.*, **137**, 1142.
- [13] THOMSON and TAIT, 1879. — *Natural Philosophy*, t. II.
- [14] POINCARÉ, H., 1902. — *Figures d'Équilibre*. Gauthier-Villars, Paris.
- [15] VILLAT, H., 1943. — *Leçons sur les fluides visqueux*. Gauthier-Villars, Paris.
- [16] ROSENKILDE, C. E., 1966. — *Ap. J.*, **148**, 825.
- [17] LEBOVITZ, N. R., 1963. — *Ap. J.*, **138**, 1214.
- [18] DERWIDUÉ, L., 1957. — *Introduction à l'Algèbre Supérieur*. Sciences et Lettres, Liège.
- [19] LEBOVITZ, N. R., 1961. — *Ap. J.*, **134**, 500.
- [20] CHANDRASEKHAR, S. and LEBOVITZ, N. R., 1963. — *Ap. J.*, **137**, 1162.

Appendice

SUR LES FRÉQUENCES ISSUES DE ZÉRO (CAS DES FIGURES HOMOGÈNES INCOMPRESSIBLES)

En étudiant la stabilité dynamique des ellipsoïdes de Roche, nous avons trouvé 6 valeurs propres associées aux harmoniques de degré $l = 2 : 5$ provenant, comme on pouvait s'y attendre, de la fréquence unique de Kelvin pour la sphère ; et une sixième, σ_1^2 , surprenante à première vue et issue de zéro, une des fréquences triviales de la sphère. De même, pour $l = 3$, outre les 7 valeurs prévues, en apparaissent 4 autres issues de zéro (fig. 8). Chandrasekhar et Lebovitz (réf. 19 et 20) ont aussi obtenu pour $l = 3$, 11 fréquences pour les figures de Maclaurin et de Jacobi.

Nous allons montrer explicitement pour $l = 2$ et 3 qu'il existe toujours pour toutes ces figures, y compris celle de Jeans, $(l + 1)$ fréquences issues de zéro (certaines, ou toutes, pouvant être nulles). Les équations du viriel, rappelées précédemment, paraissent le moyen le plus aisé d'y parvenir ; pour $\mu = 0$ elles correspondent aux figures de Maclaurin et Jacobi et pour $\Omega^2 = 0$ à celle de Jeans.

1. Déplacements symétriques.

Pour ceux-ci, l'équation caractéristique (136) s'écrit ici ($\nu = 0$)

$$\begin{vmatrix} -\frac{\lambda^2}{2} + M_{11} & \frac{\lambda^2}{2} + M_{12} & M_{13} & -2\lambda\Omega & 0 \\ -\frac{\lambda^2}{2} + M_{21} & -\frac{\lambda^2}{2} + M_{22} & \lambda^2 + M_{23} & -2\lambda\Omega & 4\lambda\Omega \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0 & 0 \\ \lambda\Omega & -\lambda\Omega & 0 & \lambda^2 + J & 0 \\ -\lambda\Omega & -\lambda\Omega & 0 & \lambda^2 - 3\mu & -2\lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (A - 1)$$

Elle admet toujours la valeur propre $\lambda^2 = 0$ qui compte pour une des racines issues de zéro annoncées. Les autres racines correspondent à la fréquence unique de Kelvin de la sphère ; ce sont $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ pour l'ellipsoïde de Roche (fig. 5) ; $\sigma_{3,0}, \sigma_{3,1}, \sigma_{3,2}$ pour le sphéroïde de Jeans (fig. 2) ; $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ pour celui de Maclaurin (réf. 19-20). σ_4 s'annule au point de bifurcation de la série de Maclaurin avec celle de Jacobi et reste nulle le long de cette dernière (*) ; si bien qu'il subsiste l'ellipsoïde de Jacobi, 2 fréquences non nulles correspondant à σ_3 et σ_5 .

(*) L'ellipsoïde de Jacobi est caractérisé par $J = 0$ et ceci entraîne l'existence d'une seconde racine $\lambda^2 = 0$ qui provient cependant de celle de Kelvin via la série de Maclaurin et ne doit donc pas être rangée parmi les racines recherchées ici. Elle correspond à une petite rotation solide de l'ellipsoïde autour de l'axe de rotation.

Cela étant, revenons à la racine double $\lambda = 0$ et étudions à l'aide des équations (130-134) les solutions N_{ij} , V_{ij} correspondantes. Une première solution est constituée par des constantes et donnée par

$$V_{12} = 0; \quad M \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{22} \\ V_{33} \end{pmatrix} = 0$$

où la matrice M est non singulière partout sauf à la limite de Roche. Il en résulte, en excluant momentanément ce cas, $V_{11} = V_{22} = V_{33} = 0$ et N_{21} arbitraire. Comme le viriel du second ordre revient ici à considérer des déplacements linéaires en les coordonnées :

$$\xi_i = \left(\sum_j X_{ij} x_j \right) e^{\lambda t}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (A-2)$$

la solution précédente implique $X_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), car

$$V_{ii} = 2 \int_V \rho \left(\sum_j X_{ij} x_j \right) x_i dv = 2 I_{ii} X_{ii}, \quad I_{ii} = \int_V \rho x_i^2 dv$$

de même V_{12} nul impose $I_{22} X_{12} + I_{11} X_{21} = 0$, ou encore

$$X_{21} = - \frac{I_{22}}{I_{11}} X_{12} = - \frac{a_2^2}{a_1^2} X_{12}$$

où X_{12} est arbitraire puisque N_{21} l'est. En outre, une oscillation symétrique par rapport à l'équateur exige $X_{13} = X_{23} = X_{31} = X_{32} = 0$; si bien que le vecteur $\vec{\xi}$ se réduit à :

$$\xi_1 = X_{12} x_2; \quad \xi_2 = - \frac{a_2^2}{a_1^2} X_{12} x_1; \quad \xi_3 = 0 \quad (A-3)$$

Il est donc tangent aux surfaces de niveau d'équation :

$$1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = \frac{p^*}{p_c} \quad (A-4)$$

où p^* désigne la valeur constante de la pression sur cette surface.

Contrairement à l'interprétation de Lebovitz (réf. 17), ce déplacement ne correspond donc pas à une rotation infinitésimale de l'ellipsoïde de Roche (*). Ce n'est que dans le cas de Maclaurin ($a_1 = a_2$) et bien sûr de la sphère qu'il en est ainsi (rotation autour de Ox_3).

(*) Soient \vec{r}_0 la position d'un élément du fluide à l'équilibre et $\vec{\xi}(\vec{r}_0) \cdot e^{\lambda t}$ son déplacement; au cours de l'oscillation, il occupe les positions définies par

$$x_i = x_{i0} + \xi_i(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \cdot e^{\lambda t}; \quad i = 1, 2, 3$$

ou encore au premier ordre

$$x_i = x_{i0} + \xi_i(x_1, x_2, x_3) \cdot e^{\lambda t}$$

Le lieu des points (x_i) atteint par les points de la surface libre est donc donné par l'équation

$$\sum_j \frac{(x_j - \xi_j e^{\lambda t})^2}{a_j^2} = 1 \quad \text{c.-à-d.} \quad \sum_j \left(\frac{x_j^2}{a_j^2} - 2 \frac{x_j \xi_j}{a_j^2} e^{\lambda t} \right) = 1 \quad (A-5)$$

Il est clair que pour le déplacement (A-3), la surface libre reste inchangée.

La seconde solution correspondant à la racine nulle s'obtient en substituant $V_{ij,0} + V_{ij,1}t$ aux V_{ij} et $N_{21,0} + N_{21,1}t$ à N_{21} dans les équations (130-134) ; on trouve cette fois

$$V_{11,1} = V_{22,1} = V_{33,1} = V_{12,0} = V_{12,1} = 0$$

$$M \begin{pmatrix} V_{11,0} \\ V_{22,0} \\ V_{33,0} \end{pmatrix} = k, \quad k = -4\Omega N_{21,1}$$

Il en résulte

$$V_{11,0} = M_{21}^* \cdot k ; \quad V_{22,0} = M_{22}^* \cdot k ; \quad V_{33,0} = M_{23}^* \cdot k$$

où M_{ij}^* désigne le mineur de l'élément M_{ij} divisé par $|M|$.

En terme du déplacement ξ :

$$\xi_i = \sum_{j=1}^3 (X_{ij,0} + X_{ij,1}t) e^{\lambda t} ; \quad i = 1, 2, 3$$

on obtient en procédant comme précédemment

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 2\Omega \frac{I_{22}}{I_{11}} M_{21}^* X_{12,1} x_1 + (X_{12,0} + X_{12,1}t) x_2 \\ \xi_2 &= -\frac{I_{22}}{I_{11}} (X_{12,0} + X_{12,1}t) x_1 + 2\Omega M_{22}^* X_{12,1} x_2 \\ \xi_3 &= 2\Omega \frac{I_{22}}{I_{33}} X_{12,1} x_3 \end{aligned} \right\}$$

et la surface libre correspondante est donnée par l'expression :

$$\sum_i \left(1 - 4\Omega \frac{a_2^2}{a_i^2} M_{2i}^* X_{12,1} \right) \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$$

Elle représente un ellipsoïde *stationnaire* dont les axes coïncident en direction avec ceux de l'ellipsoïde d'équilibre, mais différent légèrement en grandeur.

Enfin, lorsque $|M| = 0$ (limite de Roche), les deux solutions sont du type $\xi_i = X_{ii} x_i$ et les axes de la surface libre, toujours invariable, coïncident avec les axes Ox_i .

2. Déplacements asymétriques.

L'équation caractéristique (142) se réduit à

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} \lambda^2 + 2B_{13} + \mu & 0 & -\lambda & 0 \\ -\lambda^2 - \Omega^2 - 3\mu & 0 & 2\lambda & -2\Omega \\ 0 & -\lambda^2 - \Omega^2 & 2\Omega & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 + 2B_{23} + \mu & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (A-6)$$

$\lambda^2 = 0$ compte donc pour la seconde racine issue de zéro ; la troisième et dernière est $-\sigma_1^2$ pour l'ellipsoïde de Roche (fig. 5) ; 0 pour le sphéroïde de Jeans et

— Ω^2 pour les figures de Maclaurin et Jacobi comme on le vérifie aisément en posant Ω^2 puis μ égal à zéro dans l'équation précédente. Les autres racines proviennent de celle de Kelvin et sont σ_2, σ_3 pour l'ellipsoïde de Roche ; $\sigma_{2,1}, \sigma_{2,2}$ pour le sphéroïde de Jeans ; σ_1, σ_2 pour celui de Maclaurin.

Le tableau suivant résume les divers cas rencontrés pour $l = 2$.

Figures homogènes incompressibles

TABLEAU

des valeurs propres σ^2 pour $l = 2$

	issues de zéro			issues de Kelvin				
Sphère	0			σ_K^2				
Maclaurin	0	0	Ω^2	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2
Jacobi	0	0	Ω^2	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	0	σ_5^2
Jeans	0	0	0	$\sigma_{2,1}^2$	$\sigma_{2,2}^2$	$\sigma_{2,0}^2$	$\sigma_{2,1}^2$	$\sigma_{2,2}^2$
Roche	0	0	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	σ_5^2	σ_6^2

La solution des équations (137)-(140) correspondant à la racine double nulle de (A-6) est $V_{13} = V_{23} = 0$; N_{13} et N_{23} arbitraires ; il en résulte

$$\xi_1 = X_{13}x_3 ; \xi_2 = X_{23}x_3 ; \xi_3 = -\frac{I_{33}}{I_{11}} X_{13}x_1 - \frac{I_{30}}{I_{22}} X_{23}x_2$$

Ce sont encore des déplacements tangents aux surfaces de niveau ; dans le cas de la sphère, ils contiennent les rotations infinitésimales autour de $Ox_1(X_{13} = 0)$ et $Ox_2(X_{23} = 0)$.

L'oscillation correspondant à la troisième racine issue de zéro est facile à interpréter dans le cas du sphéroïde de Maclaurin ($\mu = 0$). En choisissant par exemple $\lambda = i\Omega$, les équations (137)-(140) se réduisent au système :

$$\left. \begin{array}{l} V_{13} + kN_{13} = 0 \\ N_{13} + iN_{23} = 0 \\ V_{23} + kN_{23} = 0 \end{array} \right\} ; k = \frac{\Omega^2}{2B_{13} - \Omega^2}, B_{13} = B_{23}$$

On en déduit en terme du paramètre complexe N_{13}

$$V_{13} = -kN_{13} ; N_{23} = iN_{13} ; V_{23} = -ikN_{13}$$

ce qui conduit pour le vecteur déplacement $\tilde{\xi}$ ($X_{13} = \text{constante complexe}$) aux expressions suivantes :

$$\xi_1 = X_{13}x_3e^{i\Omega t} ; \xi_2 = iX_{13}x_3e^{i\Omega t}$$

$$\xi_3 = -(1 + k) \frac{I_{33}}{I_{11}} (x_1 + ix_2)X_{13}e^{i\Omega t}$$

dont il convient de ne considérer que la partie réelle, c.-à-d. en posant $X_{13} = A + iB$,
 $\operatorname{tg} \psi = A/B$, $\varepsilon = (A^2 + B^2)^{1/2}$:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\varepsilon \sin(\Omega t - \psi) \cdot x_3; \quad \xi_2 = -\varepsilon \cos(\Omega t - \psi) \cdot x_3 \\ \xi_3 &= (1 + k) \frac{I_{33}}{I_{11}} \varepsilon (\sin(\Omega t - \psi) \cdot x_1 + \cos(\Omega t - \psi) \cdot x_2) \end{aligned} \right\}$$

Le mouvement de la surface libre est décrit par l'équation

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 2 \frac{k\varepsilon}{a_1^2} [\sin(\Omega t - \psi) \cdot x_1 x_3 + \cos(\Omega t - \psi) \cdot x_2 x_3] = 1$$

Ainsi, au premier ordre en ε , la surface libre conserve la forme et la grandeur du sphéroïde d'équilibre lui-même et décrit un mouvement de précession de vitesse angulaire Ω autour de l'axe Ox_3 . La surface déplacée s'obtient par une petite rotation du sphéroïde d'équilibre autour de la droite d'équation

$$\sin(\Omega t - \psi) \cdot x_1 + \cos(\Omega t - \psi) \cdot x_2 = 0; \quad x_3 = 0$$

Ceci termine notre étude des fréquences issues de zéro pour les harmoniques de degré $l = 2$. Lorsque l est égal à 3, comme on l'a rappelé au début, on trouve effectivement 4 fréquences non nulles issues de zéro pour les figures de Roche, Maclaurin et Jacobi. Nous avons vérifié à l'aide du viriel du troisième ordre (*) que dans le cas du sphéroïde de Jeans, il existe encore 4 valeurs propres $\lambda^2 = 0$ représentant les racines annoncées.

Pour conclure, remarquons que l'on peut s'attendre à ce qu'il existe au plus $(l + 1)$ valeurs propres issues de zéro. En effet, si l'on cherche à appliquer la méthode des perturbations à la détermination de ces fréquences, le terme de Coriolis, toujours proportionnel à σ_0 (fréquence non perturbée, égale ici à zéro), s'évanouit; et les effets de la rotation se réduisent à ceux de la force centrifuge, dont le potentiel ne dépend que de Ω^2 et est du même type que celui des forces de marée pour lequel nous avons trouvé que la dégénérescence n'est que partiellement levée $[(l + 1)$ valeurs propres; voir formule (25)].

(*) M. and J. TASSOUL, 1967. — *Ap. J.*, **150**, 213-221.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION	7
Chapitre I. — Le sphéroïde de Jeans	
§ 1. — Configuration d'équilibre	9
§ 2. — Les équations des petites oscillations et leur solution	10
§ 3. — Détermination des fréquences	12
§ 4. — Pulsations σ correspondant aux harmoniques de surface $l = 2$ et 3	13
Chapitre II. — L'ellipsoïde de Roche	
§ 1. — Exposé de la méthode	17
§ 2. — Les oscillations ellipsoïdales	27
§ 3. — Pulsations σ associées aux harmoniques de surface $l = 3$	36
Chapitre III. — La stabilité séculaire des figures de Roche et de Jeans	
§ 1. — La méthode de Poincaré	50
§ 2. — La méthode du viriel	57
RÉFÉRENCES	63
APPENDICE. — Sur les fréquences issues de zéro (cas des figures homogènes incompressibles)	64