

MÉMOIRES
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES
DE LIÈGE

CINQUIÈME SÉRIE
TOME VIII
FASCICULE 6

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ÉTOILES
FORMÉES INITIALEMENT D'HYDROGÈNE PUR

A. BOURY, Dr. Sc.
Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE DE BELGIQUE,
DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA CULTURE
ET DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ :
UNIVERSITÉ
7 PLACE DU XX AOÛT
LIÈGE, BELGIQUE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES ÉTOILES
FORMÉES INITIALEMENT D'HYDROGÈNE PUR

A. BOURY, Dr. Sc. (*)
Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège

(*) Chercheur agrégé de l'Institut Interuniversitaire des Sciences
Nucléaires (I. I. S. N.).

INTRODUCTION

Dans le cadre général d'une théorie cohérente et complète de la formation de tous les éléments chimiques à partir d'hydrogène pur à l'intérieur des étoiles, il est intéressant de savoir quelles sont les conditions qui prévalent dans les étoiles d'hydrogène pur et, puisqu'on ne les observe pas dans la nature, quelle est la stabilité de ces étoiles.

Le problème de la stabilité stellaire fut d'abord abordé par les astrophysiciens qui, tout en construisant des modèles statiques qui interprètent les propriétés des étoiles ordinaires, tentaient également de découvrir la raison du comportement des étoiles variables. Par exemple, on admet aujourd'hui qu'une Céphéïde est le siège de pulsations radiales finies. Toutefois, la théorie complète de ces oscillations exige le traitement d'équations intégrodifférentielles non linéaires qui posent des problèmes mathématiques d'une grande difficulté. Aussi, s'est-on contenté jusqu'ici de l'approche linéaire qui doit, en toute vraisemblance, fournir au moins l'ordre de grandeur des périodes et mettre en évidence l'apparition de l'instabilité vibrationnelle responsable du phénomène. Cette instabilité vibrationnelle est due à l'amplification de l'amplitude des oscillations adiabatiques sous l'action d'agents non adiabatiques comme la génération d'énergie nucléaire ou la conduction. On voit donc ici une raison directe de s'intéresser à la stabilité des étoiles ou tout au moins à l'un de ses aspects.

D'autre part, du point de vue logique, un modèle d'étoile n'a d'intérêt que s'il est stable vis-à-vis de toutes les perturbations infinitésimales possibles. On peut réduire celles-ci à quelques perturbations élémentaires, dont la composition permet de représenter

n'importe quel type de perturbation. Parmi ces phénomènes élémentaires, ce sont les pulsations radiales qui sont parmi les plus significatives, si l'on admet que l'étoile étudiée possède la symétrie sphérique. Les oscillations non radiales sont beaucoup plus complexes à étudier et l'on n'a, aujourd'hui encore, que peu d'information à leur sujet.

Néanmoins, par les travaux déjà faits, on sait que généralement, les instabilités les plus significatives se manifestent en premier lieu pour des perturbations radiales et ce sont celles-ci que nous envisagerons ici. Dans le cas de variables périodiques comme les Céphéides, l'instabilité vibrationnelle doit être relativement douce et telle que l'amplification initiale soit compensée par une dissipation qui intervient dès que l'amplitude relative atteint quelques pour-cent, comme le suggère l'observation. Nous sommes par contre intéressés ici par une instabilité vibrationnelle plus fondamentale qui ne puisse être supprimée que par une modification importante de la structure de l'étoile et notamment par une perte de matière.

Un problème analogue avait déjà été étudié pour les étoiles de composition chimique normale : prédominance d'hydrogène, une fraction appréciable d'hélium et un peu d'éléments lourds. P. Ledoux [1] avait montré en employant des modèles approximatifs, que de telles étoiles étaient vibrationnellement instables quand leur masse dépassait une valeur critique de l'ordre de $100 M_{\odot} \mu^{-2}$, où M_{\odot} représente la masse du soleil et μ le poids moléculaire moyen. Schwarzschild et Härm [2^b], utilisant leurs modèles perfectionnés pour des étoiles massives, ont réduit cette masse critique à une valeur de $60 M_{\odot}$.

En ce qui concerne les étoiles composées initialement d'hydrogène pur, une première étude se basant sur l'approximation du modèle standard d'Eddington [3] avait fourni une masse limite comprise entre 700 et $1200 M_{\odot}$ [4]. Cette limite dépendait de l'hélium accumulé en petite quantité pendant la contraction précédant l'arrivée à l'état d'équilibre.

Dans le présent travail, nous avons repris le problème en tenant compte du plus grand nombre de facteurs possible et nous avons trouvé une masse critique de $260 M_{\odot}$. Pour ce faire, nous avons dû tout d'abord construire les modèles statiques d'hydrogène pur pour diverses masses, ensuite nous avons examiné la contraction gravifique conduisant à ces modèles afin d'avoir une idée plus précise de l'accumulation de divers éléments chimiques pendant cette phase. Or, la fraction infime de carbone fabriquée par les réactions nucléaires « hydrogène \rightarrow hélium \rightarrow carbone » permet déjà l'apparition du cycle du carbone. Ce fait avait été suggéré, pour des masses même relativement faibles, par Levée et Hilton [5] et par D. Ezer (comm. priv. [6]). Nous avons alors par des approximations successives, modifié les propriétés de nos modèles en examinant les divers phénomènes qui peuvent se produire aux températures élevées que nous atteignons. Les modèles définitifs adoptés, nous avons calculé les caractéristiques du mode fondamental d'oscillation radiale adiabatique, celui-ci étant vraisemblablement le mode par lequel l'instabilité s'introduit [7]. Nous avons alors étudié la stabilité vis-à-vis de ces oscillations et déterminé la masse limite.

CHAPITRE I

MODÈLES D'ÉTOILES COMPOSÉES D'HYDROGÈNE PUR

Puisqu'elles rayonnent, toutes les étoiles sont le siège de processus irréversibles qui modifient leur constitution. Elles évoluent, mais, sauf quand elles connaissent des phases explosives ou oscillantes, leur évolution est si lente qu'on peut la traduire par une suite de configurations ou « modèles d'équilibre ». Le soleil, par exemple, est resté pratiquement identique à lui-même depuis un milliard d'années, comme l'indiquent beaucoup de découvertes paléontologiques.

Nous allons aussi considérer des modèles d'équilibre. Nous ne ferons que rappeler sans les établir, les équations fondamentales de la structure interne des étoiles ; celles-ci ont fait l'objet de nombreux développements dans des traités aujourd'hui classiques [8], [9], [10], [11].

Si nous admettons que les étoiles possèdent la symétrie sphérique, toutes les grandeurs physiques dépendent uniquement de la distance au centre r . Appelons ρ la densité, P la pression totale, g la gravité, T la température, μ le poids moléculaire moyen, $m(r)$ la masse contenue dans une sphère de rayon r , $\varepsilon(r)$ la génération d'énergie par gramme et par seconde et $L(r)$ l'énergie qui traverse par seconde la sphère de rayon r . Le système différentiel de la structure interne s'écrit

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (1.1)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -g\rho = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2} \quad (1.2)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi\rho\epsilon r^2 \quad (1.3)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3}{4\pi r^2} \frac{\kappa\rho L_R(r)}{4acT^3} \quad (1.4)$$

ou

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \quad (1.5)$$

L'équation (1.1) exprime simplement la distribution de la masse, l'équation (1.2) traduit l'équilibre hydrostatique. La pression P est la somme de la pression gazeuse P_G et la pression de radiation P_R . Si en chaque point, le milieu est en équilibre thermodynamique local, on a

$$P_G = \frac{\mathcal{R}\rho T}{\mu} \quad P_R = \frac{1}{3} aT^4 \quad (1.6), (1.7)$$

\mathcal{R} étant la constante des gaz.

On désigne souvent par β le rapport de la pression gazeuse à la pression totale, ce qui entraîne

$$P = \frac{\mathcal{R}\rho T}{\mu\beta} \quad (1.8)$$

L'équation (1.4), où $L_R(r)$ désigne la luminosité radiative, exprime le transport par la radiation de l'énergie produite par les sources nucléaires. Pour l'établir, on suppose que l'étoile rayonne comme un corps noir, ce qui est amplement justifié. κ est le coefficient d'opacité par gramme, intégré sur toutes les fréquences, a et c sont respectivement la constante de Stefan-Boltzmann et la vitesse de la lumière.

Si le gradient de température devient supérieur au gradient adiabatique, les phénomènes de convection apparaissent, qui se chargent de transporter la plus grande partie de l'énergie. Dans ces conditions, l'équation (1.5) remplace l'équation (1.4). γ représente le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant.

Si on appelle $\mathcal{L}(r)$ la « luminosité convective » et si l'on néglige

tous les modes de transfert autres que radiation et convection, on a

$$L(r) = L_R(r) + \mathcal{L}(r)$$

Le système des quatre équations différentielles doit être intégré en tenant compte des conditions aux limites $L(r)=m(r)=0$ en $r=0$ et $P = T = 0$ en $r = R$. Les solutions ne sont donc pas déterminées par des conditions initiales mais par des conditions aux limites et, de ce fait, l'existence et l'unicité des solutions restent un problème délicat. En pratique, cependant, l'intégration numérique faite dans de nombreux cas n'a jamais soulevé de difficultés et on a même fait très souvent usage du « théorème de Vogt-Russel » qui postule l'existence d'une solution unique.

Nous avons intégré ce système pour des étoiles composées d'hydrogène pur. Celui-ci étant complètement ionisé, si l'on néglige les couches très extérieures, le poids moléculaire moyen vaut $1/2$. Comme nous nous intéressons à des étoiles très massives, seule la diffusion de la lumière par les électrons est importante dans le coefficient d'opacité. Les premiers essais d'intégration ont montré que les étoiles en question sont composées d'un noyau où la convection prend place et d'une enveloppe en équilibre radiatif. C'est l'importance de la pression de radiation qui provoque l'apparition du noyau convectif. Dans le but d'étudier les étoiles massives de composition chimique normale, Schwarzschild et Härm [2a] ont calculé quatre modèles avec noyau convectif. Nous avons étendu leurs résultats à une plus grande gamme de valeurs du rapport β . Opérons d'abord le changement de variables suivant :

$$P = p \frac{GM^2}{4\pi R^4}, \quad T = t\mu \frac{GM}{\mathcal{R}R}, \quad m(r) = qM, \quad r = xR, \quad \beta = 1 - B \frac{t^4}{p} \quad (1.9)$$

avec

$$B = \frac{4}{3} \pi a G^3 \mathcal{R}^{-4} \mu^4 M^4, \quad C = \frac{0,3}{ac} \frac{\mathcal{R}^4 L}{\pi^2} G^{-4} M^{-3}.$$

M et R étant la masse et le rayon de l'étoile.

La structure du noyau convectif s'obtient par l'intégration des trois équations (1.1), (1.2), (1.5). Dans cette dernière, le rapport γ doit être remplacé par le coefficient adiabatique généralisé Γ_2 , introduit par Chandrasekhar [8] pour tenir compte de l'importance de la radiation dans les propriétés thermodynamiques du milieu. Posons :

$$p = p^* p_c, \quad t = t^* t_c, \quad q = q^* \frac{t_c^2}{\sqrt{p_c}}, \quad x = x^* \frac{t_c}{\sqrt{p_c}}, \quad B^* = B \frac{t_c^4}{p_c} \quad (1.10)$$

l'indice c désignant une valeur prise au centre de l'étoile.

Le système devient, en explicitant Γ_2 ,

$$\frac{dp^*}{dx^*} = -\beta \frac{p^* q^*}{t^* x^{*2}}, \quad \frac{dq^*}{dx^*} = \beta \frac{p^* x^{*2}}{t^*}, \quad \frac{dt^*}{dx^*} = \frac{dp^*}{dx^*} \frac{t^*}{p^*} \left(4 - \frac{1,5\beta^2}{4-3\beta} \right)^{-1} \quad (1.11)$$

$$1 - \beta = B^* \frac{t^{*4}}{p^*}, \quad 1 - \beta_c = B^*,$$

avec $q^* = 0$ et $p^* = t^* = 1$ en $x^* = 0$. Ainsi, un seul paramètre intervient, β_c , le rapport de la pression gazeuse à la pression totale au centre de l'étoile.

Dans l'enveloppe, on peut négliger la génération d'énergie qui sera faible. Dès lors, l'équation (1.3) disparaît et la structure de l'enveloppe sera donnée par l'intégration des équations (1.1), (1.2) et (1.4) où $L(r)$ est remplacée par L , la luminosité totale de l'étoile.

Le coefficient d'opacité par diffusion électronique est donné, si le milieu est constitué d'hydrogène pur, par la formule simple

$$\kappa = 0,4$$

Ceci n'est pas vrai aux hautes températures mais, quand l'erreur devient sensible, nous pénétrons dans le noyau convectif où l'opacité ne joue aucun rôle. Sans cette simplification, sur laquelle nous reviendrons, la construction des modèles devient beaucoup plus lourde.

Écrivons, dans l'enveloppe,

$$p' = \frac{\beta p}{(1-4BC)^2}, \quad q' = \frac{q-4BC}{1-4BC}, \quad t' = \frac{t}{1-4BC}, \quad C' = \frac{C}{(1-4BC)^3} \quad (1.12)$$

ce qui donne pour les équations d'équilibre

$$\frac{dp'}{dx} = -\frac{p'q'}{t'x^2}, \quad \frac{dq'}{dx} = \frac{p'x^2}{t'}, \quad \frac{dt'}{dx} = -C' \frac{p'}{t'^4 x^2} \quad (1.13)$$

avec $q' = 1, t' = p' = 0$ en $x = 1$. Cette intégration dépend également d'un seul paramètre, C' .

Il faut naturellement opérer le raccordement entre un noyau donné et l'enveloppe correspondante, c'est-à-dire associer à une valeur β_c , la valeur C' convenable. Pour cela, on recherche souvent la continuité des quantités $U, V, (n+1)$, invariantes pour les changements de variables (1.9) et (1.10)

$$U = \frac{dm(r)}{dr} \cdot \frac{r}{m(r)}, \quad V = -\frac{dp}{dr} \cdot \frac{r}{p}, \quad (n+1) = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{t}{p}$$

Vu la nature plus particulière du changement de variables (1.12), on utilise les variables auxiliaires :

$$U' = \frac{dq' \cdot x}{dx \cdot q'} = U \left(1 - 4 \cdot \frac{1-\beta}{n+1}\right)^{-1}, \quad V' = \frac{dp' \cdot x}{dx \cdot p'} = \frac{V}{\beta} \left(1 - 4 \cdot \frac{1-\beta}{n+1}\right)$$

$$(n+1)' = \frac{dp' \cdot t'}{dt' \cdot p'} = \frac{n+1}{\beta} \left(1 - 4 \cdot \frac{1-\beta}{n+1}\right).$$

Choisissant une valeur de β_c , on recherche, par intégrations successives, la valeur de C' qui assure la continuité de U', V' et $(n+1)'$, lors du passage du noyau convectif dans l'enveloppe radiative.

Si l'on désigne par l'indice f les valeurs des diverses quantités au point de jonction obtenu par la coïncidence des valeurs de U', V' et $(n+1)'$ calculées des deux côtés, il faut que β_f soit le même, calculé dans l'enveloppe ou dans le noyau, ce qui revient à :

$$1 - \beta_f = B(1 - 4BC)^2 \beta_f t_f^{-4} p_f'$$

De cette égalité et de la définition de C' , on déduit B et C puis M et L .

De même, P et T doivent être continues, ce qui entraîne, tous calculs faits,

$$p_f' = \frac{1}{(1 - 4BC)^2} \beta_f p_i^* p_c, \quad t_f' = \frac{t_i^*}{1 - 4BC} t_c$$

d'où l'on tire p_c et t_c .

De plus, q_i^* étant connu, q_f l'est aussi.

La continuité de r s'exprime sous la forme

$$\frac{x_i^* \mathcal{R} \sqrt{1 - \beta_c}}{x_f \mu \sqrt{4\pi G a / 3}} = RT_c \quad (1.14)$$

T_c étant la température centrale que l'on détermine en utilisant la forme intégrale de (1.3)

$$L = \int_0^{r_f} 4\pi \rho \varepsilon r^2 dr = f(p_c, t_c, RT_c) \int_0^{r_i^*} \varphi(x^*, p^*, t^*, T_c) dx^* \quad (1.15).$$

Cette quadrature ne dépend que du paramètre T_c . Celui-ci trouvé, le modèle est complètement déterminé. Puisque nous considérons des étoiles d'hydrogène pur, ε est donné par la théorie de la chaîne proton-proton. Les principales caractéristiques de ces modèles sont données dans un article publié à l'époque [12]. Cependant, pour les étoiles les plus massives, nous avons adopté depuis une loi $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ dont nous parlons plus loin (Chap. III) et qui est différente de celle utilisée dans [12]. Nous avons porté les résultats modifiés dans la table (3.1).

Il est nécessaire de remarquer que les caractéristiques non dimensionnelles obtenues directement de l'intégration c'est-à-dire C' , B, C, x_f , p_f , q_f , t_f , p_c et t_c ne dépendent ni de la composition chimique ni des réactions nucléaires présentes. Si l'on compare les valeurs de nos solutions correspondant à $\beta_c = 0,4$, $0,5$ et $0,8$, on constate qu'elles sont presque identiques à celles obtenues par Schwarzschild et Härm pour $\beta_c = 0,398$, $0,501$ et $0,794$. Les petites différences sont dues à la méthode d'intégration et au procédé d'interpolation qui, parmi une famille d'enveloppes radiatives, sert à déterminer celle qui correspond à un noyau de paramètre β_c

donné. Ce n'est que lorsqu'on passe au calcul des quantités physiques (M, L, T_c, R, ρ_c) que μ et ε interviennent. Ce point est très important car il signifie que les modèles formels c'est-à-dire les solutions non dimensionnelles restent valables dans une grande variété de conditions physiques, pour autant que l'existence d'un noyau convectif soit justifiée. Ainsi, si nous sommes amenés à modifier la composition chimique ou l'importance relative des différentes réactions nucléaires, il suffira de réajuster T_c et R .

CHAPITRE II

RÉACTIONS THERMONUCLÉAIRES ET ABONDANCES D'ÉQUILIBRE

Les températures atteintes dans les modèles précédents incitent à la prudence quant aux réactions nucléaires qui peuvent se produire. A côté de la chaîne proton-proton, qui fournit de l'hélium, peut prendre place la réaction $3\text{He}^4 \rightarrow \text{C}^{12}$ et le C^{12} produit sert de catalyseur à une transformation supplémentaire d'hydrogène et d'hélium. Si ces dernières réactions sont importantes, on se trouvera en présence de plusieurs sources d'énergie qui contribueront au taux ϵ . Puisque l'efficacité d'une réaction thermonucléaire augmente avec la température, la relation (1.15) sera satisfaite pour des températures centrales inférieures à celles indiquées dans le tableau (3.1).

Dans ce qui suit, nous allons rappeler quelques notions sur les réactions thermonucléaires et définir les notations que l'on rencontrera tout au long du travail.

Nous ne mentionnerons ici que quelques formules simples, extensivement développées avec d'autres, dans les ouvrages de physique nucléaire et, en ce qui concerne spécialement l'astrophysique, dans le mémoire « B²FH » [13] l'ouvrage de Cameron [14], le livre classique de Gamow et Critchfield [15] et les articles de Salpeter, Fowler, Cameron, Gamow, Burbidge, Hoyle et d'autres [16 à 30].

Soient N_i et N_j le nombre de particules d'espèces i et j par unité de volume, M_i et M_j la masse de ces particules et A_i , A_j leur

nombre atomique. On utilise en astrophysique les abondances relatives en masse X_i et X_j liées à N_i et N_j par les relations

$$N_i = \frac{\rho X_i}{M_i} = \frac{\rho X_i}{m_0 A_i}, \quad N_j = \frac{\rho X_j}{M_j} = \frac{\rho X_j}{m_0 A_j} \quad (2.1)$$

où l'unité de masse atomique m_0 est souvent remplacée, à une très petite erreur près, par la masse m_i de l'atome d'hydrogène.

Pour qu'il y ait une réaction entre une particule i et une particule j , ces dernières doivent entrer en collision et former un noyau composé qui se désintègre ensuite. Si les particules ont une distribution maxwellienne des vitesses correspondant à une température T , le nombre de réactions par unité de volume et de temps entre particules dont l'énergie cinétique totale relative est comprise entre E et $E + dE$ vaut

$$dr'_{ij} = \frac{2N_i N_j \sigma_{ij}}{(kT)^{3/2}} \left(\frac{2\pi(M_i + M_j)}{M_i M_j} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) E dE \quad (2.2)$$

où σ_{ij} précisément dépend de l'énergie E et de la position des niveaux du noyau composé.

Si l'on est loin d'une résonance, on peut écrire

$$\sigma_{ij} = \frac{S_{ij}}{E} \exp\left(-\frac{4\pi e^2 Z_i Z_j M^{1/2}}{2^{1/2} \hbar E^{1/2}}\right) \quad (2.3)$$

où Z_i et Z_j désignent la charge des noyaux i et j et $M(= m_0 A)$ leur masse réduite. S_{ij} est une fonction qui dépend faiblement de E .

Le nombre total de réactions par unité de volume est égal à

$$r'_{ij} = \frac{2N_i N_j}{(kT)^{3/2}} \left(\frac{2\pi}{M}\right)^{1/2} \int_0^\infty S_{ij} \exp\left(-\frac{4\pi e^2 Z_i Z_j M^{1/2}}{2^{1/2} \hbar E^{1/2}}\right) \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE \quad (2.4)$$

L'intégrand possède un maximum fort aigu, le « pic de Gamow » [15] pour la valeur de l'énergie

$$E_m = kT \left(\frac{2^{1/2} M^{1/2} \pi^2 Z_i Z_j e^2}{\hbar (kT)^{1/2}} \right)^{2/3} \quad (2.5)$$

La largeur de ce pic vaut

$$\Delta E_m \simeq \left(\frac{8}{3} kT\right)^{1/2} 2^{1/3} E_m^{1/3} \quad (2.5')$$

et, dans ce domaine étroit d'énergie, S_{ij} peut être considérée comme constante. L'intégrale peut être estimée avec une très bonne précision et l'on obtient après réduction des constantes numériques que le nombre de réactions *par gramme* et par seconde est égal à

$$r_{ij} = \frac{r'_{ij}}{\rho} = 2,62 \times 10^{29} S_{ij} \rho \frac{X_i X_j}{A_i A_j} (AZ_i Z_j)^{-1} \tau_{ij}^2 \exp(-\tau_{ij}) \quad (2.6)$$

où S_{ij} est exprimé en keV-barns (1 barn = 10^{-24} cm²) et τ_{ij} vaut, si T_6 désigne la température en millions de degrés

$$\tau_{ij} = 42,48 \left(\frac{Z_i^2 Z_j^2 A_i A_j}{A_i + A_j} \right)^{1/3} T_6^{-1/2} \quad (2.7)$$

Numériquement,

$$S_{ij} = \sigma_{ij}(E). E. \exp(-31,28 Z_i Z_j A^{1/2} E^{-1/2}) \text{ keV. barns} \quad (2.8)$$

$$E_m = 1,220 (Z_i^2 Z_j^2 A T_6^2)^{1/3} \text{ keV} \quad (2.9)$$

$$\Delta E_m = 0,679 \sqrt{T_6 E_m} = 0,75 A^{1/6} Z_i^{1/3} Z_j^{1/3} T_6^{5/6} \text{ keV} \quad (2.9')$$

S_{ij} étant très difficile à calculer et des mesures aux basses énergies correspondant aux conditions stellaires étant impossibles en laboratoire, on a recours à des extrapolations à partir des expériences directes ou indirectes sur la section efficace. Parfois, on la calcule à l'aide de la théorie de la résonance ou en faisant des moyennes sur une série de résonances connues [13] [14]. L'opération est toujours délicate parce que, si une résonance existe à une énergie voisine de E_m le formalisme précédent n'est plus valable et les sections efficaces deviennent complètement erronées. Inversement, si l'on atteint des énergies de plusieurs centaines de keV, des résonances (connues) se font progressivement sentir et S_{ij} ne peut plus être traitée comme une constante. Nous verrons que nous devons tenir compte de telles corrections pour les réactions du cycle du carbone.

Signalons encore que, aux très hautes températures — plus de 600 millions de degrés — les formules que nous venons de rappeler doivent être modifiées notamment par l'introduction d'un terme supplémentaire dans l'expression de la probabilité de pénétration à travers la barrière de Coulomb. De plus, le calcul de l'intégrale (2.4) par la méthode du pic de Gamow, peut perdre quelque peu de sa précision.

Si une résonance se produit au voisinage de $E \simeq E_m$, les formules précédentes cessent d'être valables, comme on l'a dit, et il faut en appeler à la formule de Breit-Wigner à un niveau. Dans ce cas, on arrive à [14] :

$$r_{ij} = 4,82 \times 10^9 \frac{\rho X_i X_j \Gamma_{1eV} \Gamma_{2eV}}{A_i A_j m_0 A^{3/2} \Gamma_6^{3/2} \Gamma_{eV}} \exp \left(- \frac{0,0116 E_{eV}}{T_6} \right) \quad (2.10)$$

Γ_1 (en eV) étant la largeur partielle du niveau vis-à-vis de la désintégration (A + B) et Γ_2 (en eV) celle associée à la désintégration (C + D).

Les particules qui correspondent aux énergies de l'ordre de E_m se trouvant dans la queue de la distribution de Maxwell, leur nombre varie rapidement avec la température si bien que l'on peut s'attendre à une forte sensibilité des réactions à la température.

Vies moyennes et abondances d'équilibre. Si l'on a r'_{ij} réactions par unité de volume entre les noyaux i et j , la vie moyenne du noyau j par rapport à l'élément i est donnée par (*)

$$\bar{\tau}_i(j) = \frac{N_j}{r_{ij}} = \frac{\rho X_j}{m_0 A_j r'_{ij}} = \frac{X_j}{m_0 A_j r_{ij}} = \frac{6,03 \times 10^{23} X_j}{A_j r_{ij}} \quad (2.11)$$

Si n_j noyaux d'espèce j sont détruits dans la réaction, $\bar{\tau}_i(j)$ doit être divisé par n_j .

La formule (2.6) peut s'écrire sous la forme

$$r_{ij} = \frac{K_{ij} \rho X_i X_j}{m_0 A_i A_j} = \frac{6,03 \times 10^{23} K_{ij} \rho X_i X_j}{A_i A_j} \quad (2.12)$$

en définissant K_{ij} par

$$K_{ij} = 4,34 \times 10^5 S_{ij} (AZ_i Z_j)^{-1} \tau_{ij}^2 e^{-\tau_{ij}} \quad (2.13)$$

Il s'ensuit que

$$\bar{\tau}_i(j) = \frac{1}{n_j K_{ij} \rho \frac{X_i}{A_i}} \quad (2.14)$$

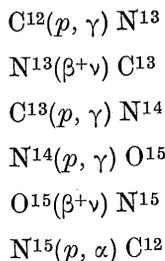
Si la réaction envisagée a lieu entre deux particules identiques i , par exemple la fusion de deux atomes d'hydrogène en un atome de

(*) Il importe de ne pas confondre les symboles τ_{ij} et $\tau_i(j)$.

deutérium, le nombre $N_i N_j$ doit être remplacé par le nombre de paires i soit à une très bonne approximation $\frac{N_i^2}{2}$.

A côté des réactions nucléaires, interviennent les désintégrations radioactives. Si λ_k est la constante radioactive de l'élément k , sa vie moyenne $\bar{\tau}(k)$ est simplement l'inverse de λ_k .

Envisageons maintenant un cycle de réactions tel que le cycle classique de Bethe :



La réaction $\text{N}^{14}(p, \gamma)$ a une section efficace, à une température de l'ordre de 20 millions de degrés, beaucoup plus faible que la réaction $\text{C}^{12}(p, \gamma)$. Si l'on part d'un mélange de C^{12} et d'hydrogène, le N^{14} va s'accumuler tandis que l'abondance de C^{12} va diminuer et, en fin de compte, les abondances s'ajusteront de façon à ce que le nombre de réactions $\text{C}^{12}(p, \gamma)$ soit le même que le nombre de réactions $\text{N}^{14}(p, \gamma)$ et que celui de toutes les réactions intermédiaires. On aura donc un « équilibre » et

$$r'_{\text{C}^{12}, p} = r'_{\text{N}^{13}} = r'_{\text{C}^{13}, p} = r'_{\text{N}^{14}, p} = r'_{\text{O}^{15}} = r'_{\text{N}^{15}, p} \quad (2.15)$$

c'est-à-dire

$$\frac{N_{\text{C}^{12}}}{\tau_p(\text{C}^{12})} = \frac{N_{\text{N}^{13}}}{\tau_\beta(\text{N}^{13})} = \frac{N_{\text{C}^{13}}}{\tau_p(\text{C}^{13})} = \frac{N_{\text{N}^{14}}}{\tau_p(\text{N}^{14})} = \frac{N_{\text{O}^{15}}}{\tau_\beta(\text{O}^{15})} = \frac{N_{\text{N}^{15}}}{\tau_p(\text{N}^{15})} \quad (2.16)$$

Le nombre total de cycles r' , égal à $r'_{\text{C}^{12}, p}$ ou n'importe lequel des autres r'_{ij} à l'équilibre, est donné par

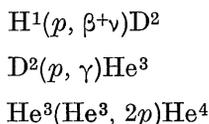
$$r' = \frac{\sum N}{\sum \bar{\tau}_i(j)} \text{ cm}^{-3} \text{ sec}^{-1} \quad (2.17)$$

Si l'on se trouve en présence d'un milieu qui ne contient primitivement aucun des isotopes intéressés et que l'on y introduise du

Carbone 12, ΣN sera tout simplement égal au nombre de noyaux de C^{12} introduits.

Le temps qu'il faut pour atteindre les abondances d'équilibre $N_{C^{12}}$, $N_{N^{13}}$, etc. dépend des sections efficaces des réactions envisagées. Par exemple, vers 13 millions de degrés, il est d'environ cent millions d'années [10]. Ceci signifie que dans chaque problème, il faut examiner la possibilité ou l'impossibilité pour le cycle ou la chaîne envisagée d'atteindre cet équilibre avant que les conditions physiques n'aient considérablement changé.

Dans le cas de la chaîne proton-proton qui prévaut habituellement jusqu'aux environs de 15 millions de degrés [10] [27],



l'équilibre est atteint quand le nombre de réactions des deux premiers types est deux fois plus grand que le nombre de réactions du troisième, puisqu'il faut produire deux noyaux de He^3 pour que la dernière réaction puisse avoir lieu.

Nous allons enfin donner une dernière indication sur les notations employées. Si un atome d'espèce n est produit par une réaction (m, p) et détruit par une réaction (n, q) , on a

$$\frac{dX_n}{dt} \frac{\rho}{A_n} = K_{mp} \frac{X_m X_p \rho^2}{A_m A_p} - K_{nq} \frac{X_n X_q \rho^2}{A_n A_q} \quad (2.18)$$

soit

$$\frac{dX_n}{dt} = K_{mp} \frac{X_m X_p \rho A_n}{A_m A_p} - K_{nq} \frac{X_n X_q \rho}{A_q} \quad (2.19)$$

S'il intervient des radioactivités, elles se traduisent par l'apparition dans les formules du type (2.19) de termes de la forme

$$\pm \lambda_k \frac{X_k A_n}{A_k}$$

Si plusieurs noyaux n sont formés ou détruits dans une réaction, on introduira les coefficients nécessaires dans (2.18) et (2.19).

Enfin, si les réactions ont atteint leur « équilibre », on écrira

$$\frac{dX_n}{dt} = 0 \tag{2.20}$$

sauf, naturellement, pour le produit initial (ici, H^1) et le produit final (He^4).

CHAPITRE III

LA PHASE DE CONTRACTION GRAVIFIQUE ET LA FORMATION DES ÉLÉMENTS

Rappelons tout d'abord quelques caractéristiques importantes des cinq modèles les plus massifs calculés dans le chapitre I, reprises dans le tableau 3.1.

TABLEAU 3.1

β_c	T_c	$\frac{M}{M_\odot}$	$\frac{R}{R_\odot}$	ρ_c
0.5	237	174	3,03	199,2
0.4	277	306	3,38	214,4
0.3	324	611	4,82	224,2
0.2	385	1515	6,96	218,7
0.1	483	6645	12,73	196,8

Or, comme nous l'avons déjà dit au chapitre précédent, aux températures atteintes pendant la phase de contraction conduisant à la séquence principale, la chaîne proton-proton peut être suivie de la réaction $3\text{He}^4 \rightarrow \text{C}^{12}$. Ce C^{12} , s'il est en quantité suffisante, peut amorcer le cycle du carbone. Nous allons, dans ce qui suit, examiner la formation d'hélium 4 (dont nous désignerons souvent l'abondance relative en masse par X_4) et celle de carbone 12 (X_{12}) et modifier, si besoin est, les propriétés des modèles construits en ne tenant compte que de la chaîne $p - p$.

I. — Les réactions nucléaires envisagées dans la contraction

i. La chaîne proton-proton.

Aux fortes températures, la chaîne proton-proton se présente sous deux aspects [4] (tableau 3.2).

TABLEAU 3.2

La chaîne proton-proton

Réactions	Énergie libérée en MeV [22] [28]	$S_{ij}(T_6 = 12,5)$ en keV-barn [22] [28]
$H^1 + H^1 \rightarrow D^2 + \beta^+ + \nu$	$\overline{1,19} \times 2$	$S_{11} = (3,5 \pm 0,4) \times 10^{-22}$
$D^2 + H^1 \rightarrow He^3 + \gamma$	$\overline{5,49} \times 2$	$S_{12} = 8,0 \times 10^{-5}$
$He^3 + He^3 \rightarrow He^4 + 2H^1$	$\overline{12,85}$	$S_{33} = 1,3 \times 10^3$
	26,21 (2% de perte par neutrinos)	
$He^3 + He^4 \rightarrow Be^7 + \gamma$	$\rightarrow \overline{1,58}$	$S_{34} = 1,2$
$Be^7 + H^1 \rightarrow B^8 + \gamma$	$\overline{0,14}$	$S_{71} = 2,0 \times 10^{-2}$
$B^8 \rightarrow Be^{8*} + \beta^+ + \nu$	$\overline{7,7}$	$\bar{\tau} = 0,5 \text{ sec}$
$Be^{8*} \rightarrow 2He^4$	$\overline{3,0}$	$\bar{\tau} = 10^{-21} \text{ sec}$
	19,1 (29 % de perte par neutrinos)	

La réaction $H^1 + H^1(p - p)$ est de loin la plus lente et, puisqu'elle est la première de la chaîne, c'est elle qui impose le rythme et, de ce point de vue, seule sa section efficace est importante. S_{ij} , dans le tableau 3.2 est calculée à 12,5 millions de degrés. A des températures beaucoup plus élevées, il faut tenir compte des variations de S_{ij} [13] [18 à 21] [28] avec l'énergie des particules donc avec la température. De la variation de la probabilité de transition β^+ vis-à-vis de l'énergie et de l'introduction d'autres facteurs de correction, les physiciens nucléaires ont obtenu [13] [18] [28] :

$$S_{11} = S(p - p) = 3,36 \times 10^{-22} \{ 1 + 0,0123 T_6^{1/3} + 0,00888 T_6^{2/3} + 0,00065 T_6 \} \quad (3.1)$$

Un point délicat concerne maintenant le compétition entre les maillons ($He^3 + He^3$) et ($He^3 + He^4$). A l'équilibre [4], X_{He^3} est très petite. Aussi, bien que la quantité S_{33} soit plus grande que S_{34} , la réaction ($He^3 + He^4$) prendra le pas dès que X_4 sera assez grande. Or, la première chaîne est moins efficace que la seconde parce que,

si elle subit une perte négligeable par neutrinos, elle requiert pour se compléter, deux réactions $p - p$ au lieu d'une seule. Au total, une seule réaction $p - p$ entraîne dans le premier cas la libération de 13,11 MeV et de 19,1 dans le second. Comme les deux maillons peuvent coexister, il faut tenir compte de leur importance relative. Fowler [27] [28] a introduit pour cela la fonction de poids $\psi(\alpha)$. La déduction de $\psi(\alpha)$ n'étant pas explicitée dans les articles de Fowler, nous avons cru utile de la résumer ici.

Si l'on appelle r_{33} et r_{34} le nombre de réactions ($\text{He}^3 + \text{He}^3$) et ($\text{He}^3 + \text{He}^4$) par gramme et par seconde, on a, en vertu de (2.12)

$$\frac{r_{34}}{r_{33}} = \frac{3K_{34}X_4}{4K_{33}X_{\text{He}^3}} \quad (3.2)$$

Quand les abondances des isotopes intermédiaires ont atteint leurs valeurs d'équilibre, ce qui est rapidement le cas aux fortes températures,

$$\frac{dX_{\text{H}^3}}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dX_{\text{He}^3}}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

En utilisant les formules du type (2.10), on obtient l'expression de X_{He^3} que l'on réintroduit dans (3.2). On trouve, tous calculs faits,

$$\frac{r_{34}}{r_{33}} = \frac{-4}{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}} = 2\alpha + 2\alpha \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}} \quad (3.4)$$

avec

$$\alpha = \frac{K_{34}^2}{4K_{11}K_{33}} \left(\frac{X_4}{4X_1}\right)^2 = \frac{S_{34}^2}{S_{11}S_{33}} \left(\frac{X_4}{4X_1}\right)^2 \exp(-100 T_6^{-1/3}) \quad (3.5)$$

X_1 désignant l'abondance de l'hydrogène.

Si r_{11} désigne le nombre de réactions ($\text{H}^1 + \text{H}^1$), on a

$$r_{11} = 2r_{33} + r_{34}$$

et

$$\varepsilon = r_{11}q = r_{11} \left\{ \left(1 - \frac{r_{34}}{2r_{33} + r_{34}}\right) \times 13,11 + \left(\frac{r_{34}}{2r_{33} + r_{34}}\right) \times 19,1 \right\} \quad (3.6)$$

Grâce à (3.4), l'expression de q devient :

$$q = \frac{13,11 + \left[\alpha + \alpha \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}} \right] 19,1}{1 + \alpha + \alpha \sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}}$$

Appelant $\psi(\alpha)$ le rapport $9/13,11$, on trouve, après des calculs élémentaires,

$$\psi(\alpha) = 1 + \left(\frac{19,1}{13,11} - 1 \right) \left(-\alpha + \alpha \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right)^{1/2} \right) = 1 + 0,457\alpha \left[\left(1 + \frac{2}{\alpha} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (3.7)$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 13,11 \psi(\alpha) r_{11} \text{ MeV sec}^{-1} \\ &= 1,863 \cdot 10^3 X_1^2 \rho \tau_{11}^2 e^{-\tau_{11}} \psi(\alpha) (1 + 0,0123 T_6^{1/3} + \dots) \text{ erg sec}^{-1} \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\tau_{11} = 3380,4 T^{-1/3}, \quad 1 \leq \psi(\alpha) \leq 1,457 \text{ pour } 0 \leq \alpha \leq \infty$$

Si l'on envisage maintenant la production d'hélium 4, elle est deux fois plus rapide par le second maillon que par le premier. On écrit une formule analogue à (3.6) : si \mathcal{N} est le nombre effectif de noyaux produits par réactions ($1/2 \leq \mathcal{N} \leq 1$), on a

$$r_{11} \mathcal{N} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_{34}}{2r_{33} + r_{34}} \right) r_{11} + \frac{r_{34}}{2r_{33} + r_{34}} r_{11} \quad (3.9)$$

Introduisant $\varphi(\alpha) = 2\mathcal{N}$, on trouve, par une déduction analogue à celle de $\psi(\alpha)$

$$\varphi(\alpha) = 1 + \left[-\alpha + \alpha \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right)^{1/2} \right] \quad (3.10)$$

$$N = r_{11} \mathcal{N} = \frac{1}{2} r_{11} \varphi(\alpha). \quad (3.11)$$

On remarquera que

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= 1 + 0,457[\varphi(\alpha) - 1] \quad (3.12) \\ 1 &\leq \varphi(\alpha) \leq 2 \text{ pour } 0 \leq \alpha \leq \infty. \end{aligned}$$

$\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ étant peu sensibles à une erreur sur α , nous avons adopté l'expression exacte (3.1) pour S_{11} mais nous avons conservé pour S_{33} et S_{34} les valeurs du tableau [28]. Si l'on prend $X_4 \simeq 10^{-4}$, $T_6 = 90$, on trouve $\alpha = 0,33$, $\varphi(\alpha) = 1,54$, $\psi(\alpha) = 1,24$. Ceci montre qu'en adoptant pour les modèles du premier chapitre les

abondances d'hélium 4 estimées dans un autre travail [4], on peut adopter $\varphi(\alpha) = 2$, $\psi(\alpha) = 1,457$ dans l'intégrale $L = \int \varepsilon dm$. Seul le maillon ($\text{He}^3 + \text{He}^4$) joue un rôle. On confirmera cette vue lors de l'étude de l'accumulation des éléments (§ II).

ii. la réaction 3α .

Aux hautes températures ($\simeq 10^8$ degrés), l'hélium se transforme en carbone suivant la chaîne « 3α » [13] [14] [20] (figure 3.1, tableau 3.3)

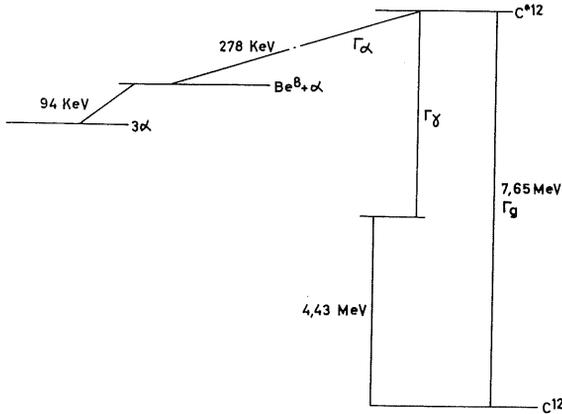


Fig. 3.1. — Schéma de la réaction 3α (l'échelle d'énergie n'est pas respectée)

TABLEAU 3.3.

La réaction 3α

Réactions	Bilan
$\text{Be}^4 + \text{He}^4 \rightleftharpoons \text{Be}^8 + \gamma$	— 94 keV
$\text{Be}^8 + \text{He}^4 \rightleftharpoons \text{C}^{12*} + \gamma$	— 278 keV
$\text{C}^{12*} \rightarrow \text{C}^{12} + 2\gamma$	7,654 MeV
$3\text{He}^4 \rightarrow \text{C}^{12}$	7,28 MeV

Les noyaux d'hélium réagissent entre eux pour former du Be^8 . Celui-ci cependant se désintègre spontanément en deux particules α et sa vie moyenne vis-à-vis de cette désintégration est extrêmement

courte ($\sim 10^{-11}$ seconde). Si aucun autre facteur n'intervenait, l'on arriverait finalement à un équilibre entre les abondances de He^4 et de Be^8 . Mais un niveau de résonance de C^{12} se trouve en $E_r = 373$ keV si l'on prend comme zéro des énergies l'équivalent en masse de trois noyaux He^4 (fig. 3.1). Cette résonance est assez forte pour permettre l'existence de la réaction ($\text{Be}^8 + \text{He}^4$), malgré la faible abondance de Be^8 .

Le second maillon conduit à une situation analogue : le noyau composé C^{12*} se désintègre rapidement en Be^8 et He^4 mais la chute vers les niveaux inférieurs de C^{12} , quoique beaucoup moins probable ($\Gamma_\alpha \ll \Gamma_\gamma$ et Γ_g) est néanmoins possible. Aussi n'y aura-t-il pas un véritable équilibre entre les abondances de C^{12*} , Be^8 et de He^4 .

Le calcul montre toutefois que les abondances de Be^8 et de C^{12*} ne sont guère différentes de ce qu'elles seraient sans l'existence de la réaction ($\text{Be}^8 + \text{He}^4$) et de la désintégration ($\text{C}^{12*} \rightarrow \text{C}^{12}$). [Dans le calcul du nombre de ces réactions, on peut donc utiliser les abondances d'équilibre, bien que ce soit la différence négligée qui ait en définitive la plus grande signification physique.]

Après avoir calculé $X_{\text{C}^{12*}}$, on trouve pour le nombre de réactions « 3α »

$$r_{3\alpha} = 1,2 \times 10^{19} \rho^2 X_4^3 (\Gamma_g + \Gamma_\gamma) T_8^{-3} \exp\left(-\frac{43,2}{T_8}\right),$$

T_8 étant la température exprimée en centaines de millions de degrés et Γ_g, Γ_γ étant exprimés en eV. Salpeter [20] et d'autres auteurs adoptent $\Gamma_\gamma \simeq 10^{-3}$ eV et $\Gamma_g \simeq 5 \times 10^{-5}$ eV. On a donc

$$r_{3\alpha} \simeq 1,2 \times 10^{16} \rho^2 X_4^3 T_8^{-3} \exp\left(-\frac{43,2}{T_8}\right) \text{ g}^{-1} \text{ sec}^{-1} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} \simeq 1,34 \times 10^{11} \rho^2 X_4^3 T_8^{-3} \exp\left(-\frac{43,2}{T_8}\right) \text{ erg g}^{-1} \text{ sec}^{-1} \quad (3.14).$$

Mais l'incertitude est de l'ordre de 20 sur $(\Gamma_\gamma + \Gamma_g)$ et de 40 % sur la valeur de l'énergie de résonance E_r , [20] [31].

Note ajoutée à la correction des épreuves. — Très récemment SEEGER et KAVANAGH (*Ap. J.*, **137**, 704, 1963) ont trouvé $\Gamma_g + \Gamma_\gamma \simeq 2,4 \pm 1,5 \times 10^{-3}$ eV. Il subsiste donc une incertitude de 60 pour-cent dans (3.13) et (3.14).

Cette imprécision physique apporte une malheureuse incertitude sur l'abondance de C^{12} produit.

Notons enfin (Fowler, comm. priv. 1962) que des réactions du genre ($Be^8 + H^1 \rightarrow B^9 \rightarrow 2He^4 + H^1$), si elles sont présentes, ne modifient en rien les abondances d'équilibre de Be^8 ou de C^{12} .

iii. Le cycle du carbone.

Le cycle du carbone transforme l'hydrogène en hélium, en utilisant le carbone 12 comme catalyseur. Aux réactions du cycle classique, il faut ajouter, aux hautes températures, la capture radiative des protons par l'isotope N^{13} . On se trouve en présence des réactions suivantes (tableau 3.4) :

TABLEAU 3.4

Le cycle du carbone

Réactions	Énergie libérée en Mev ^[22] [28]	S_{ij} (keV-barn) (= S_j) ou $\bar{\tau}$ ^[22] [28]
$C^{12} + H^1 \rightarrow N^{13} + \gamma$	1,95	$1,2 \pm 0,2$
$N^{13} \rightarrow C^{13} + \beta^+ + \nu$	1,50	$\bar{\tau} = 870 \text{ sec}$
$C^{13} + H^1 \rightarrow N^{14} + \gamma$	7,54	$6,1 \pm 2$
$N^{14} + H^1 \rightarrow O^{15} + \gamma$	7,35	$3,0 \pm 0,6$
$O^{15} \rightarrow N^{15} + \beta^+ + \nu$	1,73	$\bar{\tau} = 180 \text{ sec}$
$N^{15} + H^1 \rightarrow C^{12} + He^4$	4,96	$7,2 \times 10^4$
25,03 (6% de perte par neutrinos)		
$N^{13} + H^1 \rightarrow O^{14} + \gamma$	$\sim 4,66$ ^[32] [33]	~ 1 (très incertaine)
$O^{14} \rightarrow N^{14} + \beta^+ + \nu$	$\sim 5,1$	$\bar{\tau} = 108 \text{ sec}$
9,76		
$N^{15} + H^1 \rightarrow O^{16} + \gamma$	12,11	32
$O^{16} + H^1 \rightarrow F^{17} + \gamma$	0,59	5 ± 1
$F^{17} \rightarrow O^{17} + \beta^+ + \nu$	1,76	$\bar{\tau} = 1,6 \text{ min}$
$O^{17} + H^1 \rightarrow N^{14} + He^4$	1,20	$\simeq 4 \times 10^3$
15,66		

Nous appellerons S_i les valeurs S_{ij} de ce tableau, pour les

distinguer de valeurs plus modernes. Comme pour la chaîne $p - p$, les valeurs de S sont des valeurs calculées à 12,5 millions de degrés. Mais on sait que la réaction $C^{12}(p, \gamma)$ possède une résonance à 456 keV. $C^{13}(p, \gamma)$ en possède une à 554 keV [20]. Mais, plus récemment [34], on a détecté une résonance pour cette dernière réaction vers 450 keV. Tenant compte de ces données et des mesures sur $N^{14}(p, \gamma)$ [35], Caughlan et Fowler ont publié, dans un article très récent, des données extensives sur la plupart des réactions du cycle. Introduisant les termes de variation avec l'énergie, on a

$$\begin{aligned}
 S &= \left\{ S_0 + \left(E_m(T) + \frac{5}{6}kT \right) \left[\frac{dS}{dE} \right] + \dots \right\} \left\{ 1 + \frac{5}{12\tau} + \dots \right\} \\
 &= S_0 \left\{ 1 + \frac{5}{12\tau} + \frac{1}{S_0} \left[\frac{dS}{dE} \right] \left\{ E_m(T) + \frac{35}{36}kT \right\} + \dots \right\} \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

où S_0 et $\left[\frac{dE}{dS} \right]$ sont déterminées par extrapolation des résultats obtenus en laboratoire. E_m est l'énergie correspondant au pic de Gamow. Le plus souvent les termes en τ^{-1} , τ^{-2} , etc. ne sont guère importants. Par exemple, à 435.10⁶ degrés, ce terme apporte une correction de quelques pour-cent. Mais, par suite de la proximité des résonances, le terme en $\left[\frac{dS}{dE} \right]$ devient important. Caughlan et

Fowler [26] donnent, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}
 S_{C^{12}, H^1} &= 1,20 + 3,64 \times 10^{-3} T_6^{1/3} + 2,28 \times 10^{-2} T_6^{2/3} + 4,87 \times 10^{-4} T_6 \\
 S_{N^{13}, H^1} &= 5,52 + 1,68 \times 10^{-2} T_6^{1/3} + 7,64 \times 10^{-2} T_6^{2/3} + 1,63 \times 10^{-3} T_6 \\
 S_{N^{14}, H^1} &= 3,12 + 8,54 \times 10^{-3} T_6^{1/3} - 1,17 \times 10^{-2} T_6^{2/3} - 2,24 \times 10^{-4} T_6
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 S_{N^{15}, H^1(\rightarrow C^{12})} &= 53400 + 1,46 \times 10^2 T_6^{1/3} + 3,60 \times 10^3 T_6^{2/3} + 6,88 \times 10^1 T_6 \\
 S_{N^{15}, H^1(\rightarrow O^{16})} &= 27,4 + 7,49 \times 10^{-2} T_6^{1/3} + 8,15 \times 10^{-1} T_6^{2/3} \\
 &\quad + 1,56 \times 10^{-2} T_6
 \end{aligned}$$

Dr Fowler ayant eu l'amabilité de nous fournir ces données avant publication (mai 1962), il nous a été possible de les incorporer dans la fin de notre travail. Mais, dans l'étude de la contraction elle-même, nous avons utilisé les données du tableau. Ceci est sans grande conséquence pour le calcul de ϵ et de T_c : à trois cents

millions de degrés, ε calculé à l'aide des S_{ij} du tableau (ou S_i) vaut $8,60.10^4$ et calculé à l'aide des formules (3.16), $8,66.10^4$. L'écart est du même ordre vers cent millions de degrés. Par contre, les abondances d'équilibre des divers isotopes sont considérablement influencées, de même que la sensibilité des réactions aux variations de température.

Tant des valeurs de S_i que des deux dernières formules (3.16), il apparaît que la réaction ($N^{15} \rightarrow O^{16}$) est, à même température, deux mille fois moins probable que la réaction ($N^{15} \rightarrow C^{12}$). Nous négligerons complètement la branche ($N^{15} \rightarrow O^{16} \rightarrow F^{17} \rightarrow O^{17} \rightarrow N^{14}$).

Enfin, la photodésintégration de N^{13} et l'équilibre



sont négligeables tant que la température n'a pas dépassé 650 millions de degrés [21].

Calculons maintenant l'expression du taux ε_{CN} de génération d'énergie par le cycle du carbone. Si l'on a atteint les abondances d'équilibre, (équation 2.20) on a, considérant uniquement les deux premiers embranchements du cycle

$$\begin{aligned} r'_{C^{12}, H^1} &= r'_{N^{13}, H^1} + r'_{N^{13}(\beta^+)} \\ r'_{C^{13}, H^1} &= r'_{N^{13}(\beta^+)} \\ r'_{O^{14}(\beta^+)} &= r'_{N^{13}, H^1} \\ r'_{N^{14}, H^1} &= r'_{O^{14}(\beta^+)} + r'_{C^{13}, H^1} \\ r'_{O^{15}(\beta^+)} &= r'_{N^{15}, H^1} = r'_{N^{14}, H^1} = r'_{C^{12}, H^1} = r' \text{ cm}^{-3} \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \quad (3.17)$$

où r' désigne le nombre de cycles effectués par seconde. Reprenant la définition de la vie moyenne d'un isotope vis-à-vis d'une réaction donnée (2.11) et son expression (2.14)

$$\bar{\tau}_H(C^{12}) = \frac{1}{K_{C^{12}, H^1} \rho X_1}, \bar{\tau}_\beta(O^{14}) = \frac{1}{\lambda_{14}}, \text{ etc.}$$

on a de (3.17),

$$\begin{aligned} \frac{N_{C^{12}}}{\bar{\tau}_{H^1}(C^{12})} &= \frac{N_{N^{14}}}{\bar{\tau}_{H^1}(N^{14})} = \frac{N_{N^{15}}}{\bar{\tau}_{H^1}(N^{15})} = \frac{N_{O^{15}}}{\bar{\tau}_\beta(O^{15})} = \frac{N_{O^{14}}}{\bar{\tau}_\beta(O^{14})} + \frac{N_{C^{13}}}{\bar{\tau}_{H^1}(C^{13})} = \\ &= \frac{N_{N^{13}}}{\bar{\tau}_{H^1}(N^{13})} + \frac{N_{N^{13}}}{\bar{\tau}_\beta(N^{13})} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si l'on appelle N_{12}^* le nombre total de noyaux de carbone 12 formés par la chaîne ($3\alpha \rightarrow C^{12}$) et se retrouvant sous la forme de divers isotopes dans le cycle, on a

$N_{12}^* = N_{C^{12}} + N_{N^{13}} + N_{C^{13}} + N_{O^{14}} + N_{N^{14}} + N_{O^{15}} + N_{N^{15}}$ (cm⁻³)
 et de (3.18), on peut écrire, $\bar{\tau}$ désignant la « durée moyenne du cycle »

$$r' = \frac{N_{12}^*}{\bar{\tau}} = N_{12}^* \left\{ \left[\frac{N_{O^{14}}}{N_{C^{13}}} \bar{\tau}_\beta(O^{14}) \bar{\tau}_{H^1}(C^{13}) + \bar{\tau}_\beta(O^{14}) \bar{\tau}_{H^1}(C^{13}) \right] \right. \\ \left. \left[\frac{N_{O^{14}}}{N_{C^{13}}} \bar{\tau}_{H^1}(C^{13}) + \bar{\tau}_\beta(O^{14}) \right]^{-1} + \bar{\tau}_{H^1}(C^{12}) + \bar{\tau}_{H^1}(N^{14}) + \bar{\tau}_{H^1}(N^{15}) \right. \\ \left. + \bar{\tau}_\beta(O^{15}) + \bar{\tau}_{H^1}(N^{13}) \bar{\tau}_\beta(N^{13}) [\bar{\tau}_{H^1}(N^{13}) + \bar{\tau}_\beta(N^{13})]^{-1} \right\}^{-1} \quad (3.19)$$

Mais on a

$$\frac{dX_{C^{13}}}{dt} = \lambda_{13} X_{N^{13}} - K_{C^{13}, H^1} \rho X_{C^{13}} X_1 = 0 \\ \frac{dX_{O^{14}}}{dt} = \frac{14}{13} K_{N^{13}, H^1} \rho X_{N^{13}} X_1 - \lambda_{14} X_{O^{14}} = 0$$

En se rappelant que

$$N_k = \frac{\rho X_k}{m_0 A_k},$$

on trouve

$$\frac{N_{O^{14}}}{N_{C^{13}}} = \frac{(K_{N^{13}, H^1} \rho X_1)(K_{C^{13}, H^1} \rho X_1)}{\lambda_{13} \lambda_{14}} = \frac{\bar{\tau}_\beta(N^{13}) \bar{\tau}_\beta(O^{14})}{\bar{\tau}_{H^1}(N^{13}) \bar{\tau}_{H^1}(C^{13})}$$

Par conséquent, si l'on pose

$$y = \frac{\bar{\tau}_\beta(N^{13})}{\bar{\tau}_{H^1}(N^{13})} \quad (3.20)$$

l'expression (3.19) devient

$$r' = \frac{N_{12}^*}{\frac{y \bar{\tau}_\beta(O^{14}) + \bar{\tau}_{H^1}(C^{13}) + \bar{\tau}_\beta(N^{13})}{y + 1} + \bar{\tau}_{H^1}(C^{12}) + \bar{\tau}_{H^1}(N^{14}) + \bar{\tau}_\beta(O^{15}) + \bar{\tau}_{H^1}(N^{15})}$$

ou, par unité de masse et après introduction des valeurs numériques

$$r = \frac{6,03 \times 10^{23} X_{12}^*}{12} \cdot \frac{1}{\frac{108y + 870 + \bar{\tau}_{H^1}(C^{13})}{y + 1} + \bar{\tau}_{H^1}(C^{12}) + \bar{\tau}_{H^1}(N^{14}) + \bar{\tau}_{\beta}(O^{15}) + \bar{\tau}_{H^1}(N^{15})} \quad (3.21)$$

Quand la température augmente, les vies moyennes des éléments vis-à-vis des réactions nucléaires diminuent rapidement mais la vitesse des désintégrations β reste inchangée. Ce phénomène entraîne deux conséquences importantes pour le cycle du carbone. La première, c'est que, à partir de 150 millions de degrés environ, la vie moyenne de N^{13} vis-à-vis de la désintégration β devient plus longue que la vie moyenne vis-à-vis de la capture radiative $N^{13}(p, \gamma)$ (tableau 3.5). Le cycle du carbone emprunte alors principalement le second embranchement.

Deuxièmement, les désintégrations de O^{14} et de O^{15} vont devenir, aux hautes températures, les maillons les plus lents du cycle. A l'image familière du cycle du carbone où la réaction $N^{14}(p, \gamma)$ est de loin la plus lente, va se substituer celle du cycle où O^{14} et O^{15} imposent le rythme et dont la vitesse devient indépendante de la température. Dans ces conditions

$$r \simeq \frac{6,03 \times 10^{23} X_{12}^*}{12} \cdot \frac{1}{\bar{\tau}_{\beta}(O^{14}) + \bar{\tau}_{\beta}(O^{15})} = \frac{6,03 \times 10^{23} X_{12}^*}{3456} \quad (3.22)$$

TABLEAU 3.5

On obtient la vie moyenne de N^{13} ou de N^{14} pour l'une des températures indiquées en divisant la donnée correspondante de la table par ρX_1 . Si

$\rho = 100$, $X_1 = 1$, $\bar{\tau}_{H^1}(N^{13})$ et $\bar{\tau}_{H^1}(N^{14})$ sont nettement plus brèves que $\bar{\tau}_{\beta}(N^{13})$, $\bar{\tau}_{\beta}(O^{14})$ et $\bar{\tau}_{\beta}(O^{15})$ quand $T^6 \gtrsim 150$.

T_6	$(K_{N^{13}, H^1})^{-1}$	$(K_{N^{14}, H^1})^{-1}$
50	$6,648 \times 10^9$	$2,380 \times 10^9$
100	$2,162 \times 10^6$	$7,639 \times 10^5$
150	$4,556 \times 10^4$	$1,603 \times 10^4$
200	$4,080 \times 10^3$	$1,419 \times 10^3$
250	$7,651 \times 10^2$	$2,660 \times 10^2$
300	$2,017 \times 10^2$	$7,012 \times 10^1$

Le cycle du carbone est alors très rapide. Nous allons comparer son efficacité à celle de la chaîne $p - p$. A 3×10^8 degrés, $\varphi(\alpha)=2$, $\psi(\alpha) = 1,457$; l'énergie libérée par la chaîne $p - p$ vaut $\varepsilon_{pp} = 2,725 \times 10^3 \rho X_1^2 \tau^2 e^{-\tau} [1 + \dots] = 7,462 \times 10^2 \rho X_1^2 \text{ erg g}^{-1} \text{ sec}^{-1}$ tandis que le cycle du carbone libre, si l'on néglige toutes les vies moyennes autres que celles de O^{14} et de O^{15} (form. 3.22), une énergie égale à

$$\varepsilon_{CN} \simeq 7 \times 10^{15} X_{12}^* \text{ erg g}^{-1} \text{ sec}^{-1}$$

il y a donc égalité entre ε_{pp} et ε_{CN} dès que

$$X_{12}^* \simeq 10^{-13} \rho X_1^2$$

Dans les modèles calculés au chapitre I, ρ est de l'ordre de 10^2 , X_1 vaut pratiquement 1. Une abondance relative de carbone 12 (et des isotopes associés) de l'ordre de 10^{-11} (en masse) suffit à assurer une production d'énergie importante, voire prépondérante, par le cycle du carbone. Il faut donc modifier les modèles calculés en tenant compte du carbone accumulé en faible quantité, pendant la contraction conduisant à la séquence principale.

On peut aussi calculer $\varepsilon_{3\alpha}$ à l'aide de (3.14). On trouve, à la température considérée

$$\varepsilon_{3\alpha} = 8,293 \times 10^3 \rho^2 X_4^3$$

On a donc

$$\frac{\varepsilon_{3\alpha}}{\varepsilon_{pp}} \simeq 10 \rho X_4^3$$

Or, l'abondance d'hélium accumulée est faible [4], de l'ordre de 10^{-3} au maximum. Cela montre que, du point de vue de la génération d'énergie, la réaction 3α est négligeable.

II. — LA CONTRACTION GRAVIFIQUE ET LA FORMATION DES ÉLÉMENTS

i. Les modèles d'étoiles en contraction et l'échelle des temps.

L'examen de la formation des étoiles par contraction gravifique et de leur arrivée sur la séquence principale, est rendu difficile par plusieurs facteurs. Tout d'abord, l'équation (1.3) doit être complétée

par les termes qui expriment le travail des forces de pression, lors du mouvement, et la variation de l'énergie interne. Elle devient

$$\frac{\partial L(r)}{\partial r} = 4\pi\rho r^2\varepsilon + \frac{4\pi r^2 P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\pi r^2 \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} \mathcal{RT} + \frac{\alpha T^4}{\rho} \right) \quad (3.23)$$

Par contre, l'équation (1.1) peut être conservée telle quelle si la contraction est suffisamment lente, puisque son terme correctif est une dérivée seconde par rapport au temps. Le système (1.1) à (1.4) devient un système aux dérivées partielles, impossible à résoudre sans l'aide de calculateurs électroniques très puissants.

Mais, même si ces moyens techniques sont accessibles, l'emploi inévitable de formules aux différences conduit au problème d'une structure « initiale », à partir de laquelle on commence à étudier la contraction. Ce modèle « initial » est à présent tout à fait inconnu.

Enfin, l'opacité aux basses températures et densités est encore mal connue.

Heney et ses collaborateurs avaient calculé quelques modèles d'étoile en contraction, les uns pour une étoile de masse solaire [36], d'autres pour des étoiles d'hydrogène pur de 20 M_{\odot} [5]. Leur résultat le plus caractéristique était la faible augmentation de la luminosité pendant la contraction suivie d'une chute brusque ($\simeq 0,3$ Magnitude).

Mais des considérations plus récentes, dues à Hayashi [37] conduisent à penser que les étoiles en contraction gravifique devraient être presque entièrement convectives. D. Ezer et Cameron [38] ont calculé sur cette base des modèles de contraction du soleil. Ils arrivent à une image différente de celle résultant des travaux plus anciens : la luminosité diminue fortement pendant la contraction, sauf un peu avant d'atteindre la séquence principale, où elle croît, puis diminue encore un peu. Bref, tant les difficultés numériques que les incertitudes physiques, empêchent encore actuellement d'estimer exactement la durée de la contraction gravifique. Nous avons dû recourir à des approximations tant pour les modèles que pour l'échelle des temps de contraction.

Envisageons d'abord les modèles. La pression de radiation

sera suffisamment importante pendant une partie de la contraction pour entraîner l'apparition de la convection. Naturellement, ni la valeur de β_c , ni l'étendue du noyau convectif, ne seront celles des modèles d'équilibre. Mais, faute de données, nous adopterons cette hypothèse et nous considérerons que le noyau convectif d'un modèle d'équilibre est aussi celui de l'étoile pendant la phase de contraction. Puisque RT_c est une constante (1.12), à chaque valeur de R , nous associerons T_c telle que

$$\frac{T_c}{(T_c)_{\text{ÉQUIL}}} = \frac{R_{\text{ÉQUIL}}}{R} \quad (3.24)$$

et puisque notre hypothèse entraîne une valeur constante du rapport $\rho_c/\bar{\rho}$ pendant la contraction,

$$\frac{\rho_c}{(\rho_c)_{\text{ÉQUIL}}} = \left(\frac{R_{\text{ÉQUIL}}}{R}\right)^3 \quad (3.25)$$

On reprend alors, pour chaque valeur de R , la distribution de T , P et ρ en fonction de $m(r)$ fournie par le modèle d'équilibre.

Nous devons maintenant calculer le temps que met une étoile de masse donnée pour se contracter du rayon R_1 au rayon R_2 . En fait, la relation (3.23) fixe simplement la rapidité de la contraction. Mais on peut déterminer celle-ci globalement par le schéma suivant : nous adopterons, comme beaucoup d'auteurs, l'échelle des temps de Helmholtz-Kelvin, — déduite à l'époque où l'on supposait que l'énergie stellaire était précisément la contraction gravifique — qui donne, pour le temps en question :

$$[\Delta t]_{R_2}^{R_1} \simeq - \frac{3\Gamma_1 - 4}{3\Gamma_3 - 3} q \frac{GM^2}{\bar{L}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.26)$$

q est un coefficient numérique qui dépend de la configuration générale de l'étoile ; nos modèles ne s'éloignant pas trop du polytrophe d'indice $n = 3$ [3], nous prendrons la valeur correspondante de q , $\frac{3}{2} \bar{L}$ désigne la valeur moyenne de la luminosité pendant le passage du rayon R_1 au rayon R_2 . C'est encore une inconnue, mais si l'on se base sur le travail de Levée et Hilton [5], prendre pour \bar{L} la valeur L du modèle d'équilibre n'entraîne pas d'erreur grossière.

TABLEAU 3.6

Valeurs de $[\Delta t]_{\infty}^{\text{RÉQUIL}}$ pour les différentes masses
 en utilisant diverses valeurs de $\bar{\beta}$

$$A = \frac{3}{2} \frac{GM^2}{LR}, \quad B = \frac{3\Gamma_1 - 4}{3(\Gamma_3 - 1)} = \frac{\bar{\beta}}{2}$$

$\frac{M}{M_{\odot}}$	A ($\times 10^{-12}$)	$\bar{\beta}$	B	Δt ($\times 10^{-12}$)	$\frac{M}{M_{\odot}}$	A ($\times 10^{-12}$)	$\bar{\beta}$	B	Δt ($\times 10^{-12}$)
20,9	16,66	1	0,50	8,33	173,8	7,034	0,6	0,30	2,11
		0,9	0,45	7,50			0,7	0,35	2,46
38,9	10,24	1	0,50	5,12	306	7,615	0,4	0,20	1,52
		0,9	0,45	4,61			0,5	0,25	1,90
		0,8	0,40	4,10			0,6	0,30	2,28
64,2	8,230	0,9	0,45	3,70	611,2	9,242	0,3	0,15	1,38
		0,8	0,40	3,29			0,4	0,20	1,85
		0,7	0,35	2,88			0,5	0,25	2,31
104,1	7,572	0,6	0,30	2,27	1515	13,25	0,2	0,10	1,33
		0,7	0,35	2,65			0,3	0,15	1,99
		0,8	0,40	3,03			0,1	0,05	1,36
173,8	7,034	0,5	0,25	1,76	6645	27,18	0,2	0,10	2,72

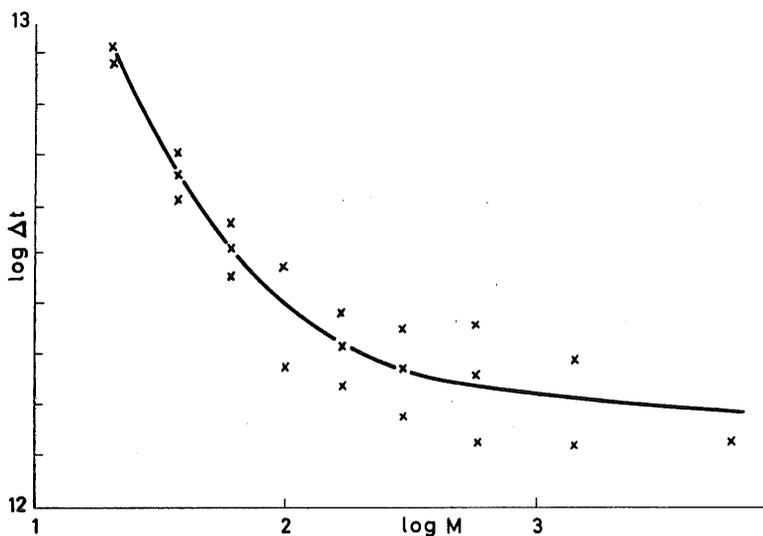


Fig. 3.2. — La courbe indique les temps adoptés pour la construction des étoiles d'hydrogène pur, avec la chaîne $p-p$ seule présente (voir aussi table 3.7). Les croix désignent les valeurs reprises de la table 3.6.

Enfin, les Γ sont les coefficients adiabatiques généralisés introduits par Chandrasekhar [8]. Ces fonctions de β tiennent compte de l'importance de la radiation dans le calcul de l'énergie interne. $(3\Gamma_1 - 4) : (3\Gamma_3 - 3)$ représente une valeur moyenne tant au travers de l'étoile que par rapport au temps puisque β est certainement un peu plus grand pendant la contraction que dans l'état d'équilibre. Aussi, pour chaque étoile a-t-on calculé $[\Delta t]_{\infty}^{\text{RÉQ}}$ pour quelques valeurs de β et l'on a tracé une courbe adoucie $[\Delta t]_{\infty}^{\text{RÉQUIL}}$ en fonction de M . Ce sont les temps fournis par ce procédé que l'on a adoptés (fig. 3.2, tabl. 3.7).

TABLEAU 3.7

Temps adoptés pour la durée de la contraction gravifique des étoiles formées d'hydrogène pur (avec chaîne $p - p$ seulement).

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$[\Delta t]_{\infty}^{\text{RÉQUIL}} (\times 10^{-12})$
173,8	2,13
306	1,90
611	1,76
1515	1,67
6645	1,55

ii. *La formation d'hélium et de carbone.*

On connaît maintenant, pour une étoile de masse donnée, le temps qu'elle met pour passer de l'état de dilution infinie à une configuration de rayon donné. En vertu du schéma traduit par les relations (3.24) à (3.26), on peut associer à chaque instant t une valeur de T_c donnée par la relation

$$t = [\Delta t]_{\infty}^{\text{R}} = \frac{3\Gamma_1 - 4}{3(\Gamma_3 - 1)} \cdot \frac{1,5 \text{ GM}^2}{\text{LR}} = \frac{3\Gamma_1 - 4}{3(\Gamma_3 - 1)} \cdot \frac{1,5 \text{ GM}^2 T_c}{\text{L} \cdot (\text{RT}_c)_{\text{ÉQUIL}}} \quad (3.27)$$

Ceci entraîne

$$\frac{t}{[\Delta t]_{\infty}^{\text{RÉQUIL}}} = \frac{T_c}{(T_c)_{\text{ÉQUIL}}} \quad (3.28)$$

Dans tout ce qui précède, l'indice « EQUIL » désigne toute

quantité calculée avec les données des modèles d'équilibre où seule prend place la chaîne $p - p$. L'apparition du cycle du carbone va modifier la température, la densité et le rayon des modèles, mais les formules (3.24) à (3.28) restent parfaitement valables car la quantité RT_c , indépendante de ϵ , demeure inchangée.

Connaissant $T_c(t)$ et par conséquent $T(t)$ et $\rho(t)$ au travers de l'étoile, on peut calculer le nombre de réactions $p - p$ par seconde :

$$\int_0^M r_{11} dm = M \int_0^1 r_{11} dq, \quad (3.29)$$

l'énergie engendrée par cette chaîne

$$\int_0^M \epsilon_{pp} dm = M \int_0^1 \epsilon_{pp} dq = M \int_0^1 13,11 r_{11} \psi(\alpha) dq \text{ MeV sec}^{-1} \quad (3.30)$$

le nombre d'atomes d'hélium produits par seconde

$$\mathcal{N} = M \int_0^1 \frac{1}{2} r_{11} \varphi(\alpha) dq \quad (3.31)$$

et la masse totale d'hélium produite par seconde

$$M \int_0^1 X_4(t) dq = M \cdot \frac{1}{2} \cdot 6,64 \times 10^{-24} \int_0^1 r_{11} \varphi(\alpha) dq \quad (3.32)$$

En pratique, les intégrales (3.29) à (3.32) sont calculées de 0 à q_f puisque les réactions nucléaires sont négligeables dans la zone radiative. Pour les calculer, il faut connaître la valeur de φ et ψ et, par conséquent, la quantité d'hélium accumulée depuis l'instant initial jusqu'à l'instant t . Si $X_4(t)$ est la quantité d'hélium produite localement par gramme et par seconde, le brassage par convection qui est relativement rapide (quelques jours) [10] vis-à-vis du temps de contraction (quelques dizaines de milliers d'années), redistribue cet hélium uniformément dans tout le noyau convectif. On calculera donc la quantité moyenne d'hélium produite par gramme et par seconde dans le noyau convectif :

$$\bar{X}_4(t)/\text{sec} = \frac{1}{q_f} \int_0^{q_f} X_4(t) dq \quad (3.33)$$

La quantité d'hélium accumulée par gramme depuis l'origine jusqu'à l'instant considéré vaut donc

$$\bar{X}_4(t) = \int_0^t \bar{X}_4(t)/\text{sec} dt \quad (3.34)$$

Il est alors possible de calculer le taux de la réaction 3α et d'estimer la production de carbone 12. Enfin, connaissant

$$\bar{X}_{12}(t) = \int_0^t \bar{X}_{12}(t)/\text{sec} dt \quad (3.35)$$

on peut calculer l'énergie libérée par le cycle du carbone.

Celui-ci apparaît d'ailleurs de façon relativement brusque dans l'histoire de l'étoile. En effet, la réaction 3α est très sensible à la température (son taux est proportionnel à $\rho^2 T^{26}$ et $\rho^2 T^{12}$ vers 150 et 300 millions de degrés). Le taux de production de carbone varie donc très rapidement et il en va de même de l'importance du cycle du carbone. Cela signifie en pratique que, dès que ε_{CN} doit être pris en considération, la condition

$$\int_0^M (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{\text{CN}}) dm = L$$

est presque immédiatement remplie et l'étoile cesse de se contracter. Ces considérations justifient le fait de négliger la production d'hélium par le cycle du carbone au cours de la contraction.

Pour calculer $X_4(t)$, $X_{12}(t)$, $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, $\varepsilon_{pp}(t)$, $\bar{X}_4(t)/\text{sec}$ etc., nous avons procédé comme suit (fig. 3.3). Partant d'une température ($\lesssim 6 \times 10^7$) et d'une densité ($\lesssim 3$) assez basses pour que seule la branche ($\text{He}^3 + \text{He}^3$) de la chaîne $p - p$ soit importante ($\bar{X}_4 \simeq 0$, $\varphi = \psi = 1$) [4], on calcule $\int r_{11} dm$ à l'instant t_1 correspondant. On répète ce calcul pour une autre température assez faible ($t = t_2$). A l'aide des deux valeurs obtenues,

$$\bar{X}_4(t_1)/\text{sec} \text{ et } \bar{X}_4(t_2)/\text{sec}, \text{ on estime } \int_0^{t_2} \bar{X}_4/\text{sec} dt = \bar{X}_4(t_2).$$

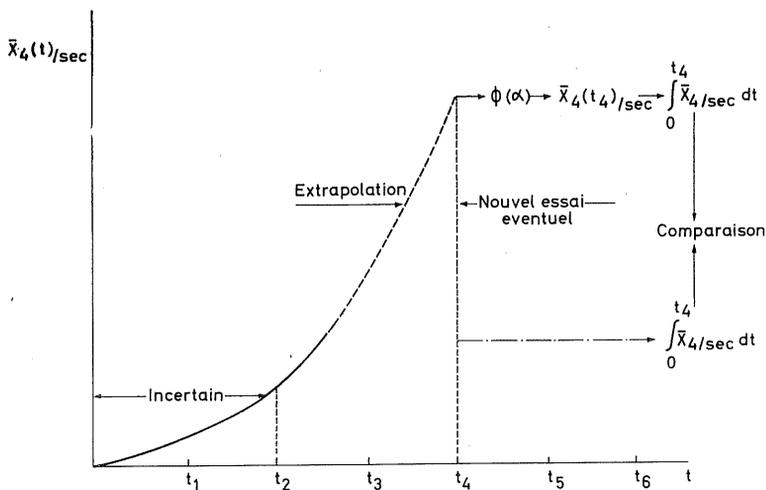


Fig. 3.3. — Schéma du procédé de calcul de $\bar{X}_4(t)$ pendant la contraction. On a choisi le point t_4 comme exemple.

Cette valeur n'est certainement pas exempte d'erreur, car dans les régions extérieures de l'étoile, la réaction $(\text{He}^3 + \text{He}^3)$ n'a même pas lieu et la réaction $p - p$ s'arrête à la production de He^3 .

Cependant, comme les fonctions φ et ψ sont très peu sensibles à la valeur exacte de α , cette erreur initiale n'aura aucune conséquence. De l'instant t_2 , on extrapole graphiquement \bar{X}_4/sec jusqu'à

un instant t_3 , on obtient une valeur d'essai de $\int_0^{t_3} \bar{X}_4/\text{sec} dt$. On en

déduit $\varphi(\alpha)$ au travers de l'étoile puis $\frac{1}{2} \int_0^{q_f} r_{11} \varphi dq$. Ceci fournit des

valeurs de $\bar{X}_4(t_3)/\text{sec}$ et de $\int_0^{t_3} \bar{X}_4/\text{sec} dt$ que l'on compare à celles obtenues par l'extrapolation. Si les résultats diffèrent sensiblement,

on répète l'itération. En général, ceci n'est pas nécessaire à cause de la faible sensibilité de $\varphi(\alpha)$. On emploie le même procédé pour

autant de valeurs de t (donc de T_c) qu'on le désire. La valeur de $\bar{X}_4(t)$ devient assez grande vis-à-vis de $\bar{X}_4(t_2)$ pour rendre négligeable l'imprécision de départ. La plupart de ces calculs ont été

effectués à l'aide du calculateur électronique de l'Université et les intégrales ont été calculées par voie graphique.

Ayant ainsi obtenu l'évolution de l'abondance d'hélium 4 au cours de la phase de contraction, on calcule $\overline{X}_{12}(t)/\text{sec}$ et $\overline{X}_{12}(t)$. La réaction 3α extrêmement sensible à la température, est fortement concentrée dans les régions les plus intérieures de l'étoile. Aussi a-t-on pu rendre les calculs plus rapides en utilisant, au lieu des distributions réelles de $\frac{T}{T_c}$ et $\frac{\rho}{\rho_c}$, celles correspondant au polytrophe $n = 3$, dont nos modèles se rapprochent d'autant mieux que β_c est plus proche de zéro. Par exemple, pour $\beta_c = 0,5$, on a en $q = 0,07$, $\frac{T}{T_c} = 0,903$ contre $0,909$ en réalité et $\frac{\rho}{\rho_c} = 0,735$ contre $0,773$. Il en résulte en ce point une erreur d'une vingtaine de pour-cent sur $\varepsilon_{3\alpha}$ mais ce dernier n'atteint plus qu'un dixième, au maximum, de ce qu'il vaut au centre de l'étoile. Comme l'écart entre les deux distributions diminue rapidement quand on s'approche du centre et que l'on calcule $\int r_{3\alpha} dq$ ou $\int X_{12}/\text{sec} dq$, l'erreur globale sera beaucoup plus faible, de l'ordre de quelques pour-cent, donc négligeable vis-à-vis de l'incertitude qui entache encore les données physiques concernant la réaction 3α . Les principaux résultats sont consignés dans la table 3.8.

iii. — *Les modèles corrigés.*

Nous ne nous sommes pas encore préoccupé dans le paragraphe précédent, de calculer $\int \varepsilon_{pp} dm$ et $\int \varepsilon_{CN} dm$ et de comparer ces quantités à L . En fait, puisque les températures d'équilibre ont été calculées d'après la condition

$$\int_0^M \varepsilon_{pp} dm = L$$

on a sans aucun doute, pour les températures les plus élevées utilisées dans nos calculs

$$\int_0^M (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{CN}) dm > L.$$

Nous devons maintenant déterminer la nouvelle température d'équilibre de chaque modèle, c'est-à-dire rechercher à quel instant on a

$$\int_0^M (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{CN}) dm = L \quad (3.36)$$

TABLEAU 3.8

Accumulation de He⁴ et de C¹²

Note — (*m*) = 10^{*m*}

<i>t</i> (sec)	(T ₆) _c	ρ _c	\bar{X}_4 ,sec	$\bar{X}_4(t)$	$\bar{X}_{12}(t)$
M = 174 M _⊙					
2,66 (11)	29,6	0,389	5,1 (—20)	<1,4 (—8)	
5,32 (11)	59,3	3,11	3,0 (—18)	1,9 (—7)	
1,06 (12)	119	24,9	1,29 (—16)	1,83 (—5)	
1,19 (12)	132	34,7	2,68 (—16)	4,15 (—5)	
1,30 (12)	144	45,1	5,13 (—16)	8,50 (—5)	
1,41 (12)	157	57,3	8,29 (—16)	1,52 (—4)	4 (—19)
1,52 (12)	169	71,9	1,20 (—15)	2,62 (—4)	2 (—17)
1,62 (12)	181	88,4	1,68 (—15)	4,15 (—4)	6,8 (—16)
1,73 (12)	193	107	2,26 (—15)	6,28 (—4)	1,53 (—14)
1,84 (12)	205	128	3,01 (—15)	9,09 (—4)	2,50 (—13)
1,95 (12)	217	153	3,93 (—15)	1,28 (—3)	3,05 (—12)
2,06 (12)	229	179	4,99 (—15)	1,75 (—3)	2,96 (—11)
2,13 (12)	237	199	5,92 (—15)	2,14 (—3)	1,31 (—10)
M = 306 M _⊙					
2,37 (11)	34,6	0,419	8,3 (—20)	<2 (—8)	
5,74 (11)	69,6	3,35	4,4 (—18)	3 (—7)	
9,48 (11)	139	26,8	2,00 (—16)	3,74 (—5)	
1,04 (12)	152	35,4	3,87 (—16)	5,30 (—5)	
1,16 (12)	170	49,5	7,69 (—16)	1,28 (—4)	1,11 (—18)
1,28 (12)	187	65,9	1,22 (—15)	2,40 (—4)	1,27 (—16)
1,40 (12)	204	85,2	1,83 (—15)	4,17 (—4)	7,30 (—15)
1,51 (12)	221	109	2,68 (—15)	6,72 (—4)	2,35 (—13)
1,63 (12)	238	136	3,77 (—15)	1,05 (—3)	5,66 (—12)
1,74 (12)	255	167	5,10 (—15)	1,55 (—3)	8,72 (—11)
1,90 (12)	277	214	7,37 (—15)	2,50 (—3)	2,29 (—9)

TABLEAU 3.8. — Suite

$t(\text{sec})$	$(T_0)_c$	ρ_c	\bar{X}_4/sec	$\bar{X}_{(4)t}$	$\bar{X}_{12}(t)$
$M = 1515 M_\odot$					
1,04 (11)	24,1	0,0534	2,8 (—21)		
2,09 (11)	48,1	0,427	1,93 (—19)	4 (—9)	
4,18 (11)	96,3	3,42	8,27 (—18)	5,3 (—7)	
6,77 (11)	156	14,6	1,10 (—16)	1,12 (—5)	
7,90 (11)	182	23,1	3,10 (—16)	3,33 (—5)	
8,35 (11)	193	27,3	4,45 (—16)	4,99 (—5)	
9,03 (11)	208	34,5	6,68 (—16)	9,53 (—5)	1,03 (—17)
1,02 (12)	234	42,1	1,17 (—15)	1,90 (—4)	1,71 (—15)
1,13 (12)	260	67,4	1,89 (—15)	3,59 (—4)	1,54 (—13)
1,24 (12)	286	89,8	2,87 (—15)	6,18 (—4)	5,99 (—12)
1,35 (12)	312	116	4,20 (—15)	1,01 (—3)	1,47 (—10)
1,47 (12)	338	148	5,95 (—15)	1,60 (—3)	2,49 (—9)
1,58 (12)	364	185	8,17 (—15)	2,37 (—3)	3,15 (—8)
1,67 (12)	385	219	1,06 (—14)	3,22 (—3)	2,01 (—7)
$M = 6645 M_\odot$					
1,11 (11)	34,8	0,0732	1,2 (—20)		
2,23 (11)	69,5	0,586	6,5 (—19)		
4,75 (11)	148	5,69	3,16 (—17)	2,4 (—6)	
5,94 (11)	185	11,1	1,19 (—16)	1,0 (—5)	
7,13 (11)	222	19,2	3,70 (—16)	3,80 (—5)	
8,32 (11)	260	30,5	8,05 (—16)	1,05 (—4)	5,29 (—16)
9,50 (11)	297	45,5	1,47 (—15)	2,38 (—4)	1,05 (—13)
1,07 (12)	334	64,8	2,46 (—15)	4,75 (—4)	7,86 (—12)
1,19 (12)	371	88,9	3,90 (—15)	8,39 (—4)	2,92 (—10)
1,31 (12)	408	118	5,84 (—15)	1,41 (—3)	6,60 (—9)
1,43 (12)	445	154	8,55 (—15)	2,25 (—3)	1,10 (—7)
1,55 (12)	483	197	1,21 (—14)	3,49 (—3)	1,34 (—6)

Nous avons décidé de tenir compte de l'effet éventuel d'une mauvaise estimation des durées de contraction en envisageant pour chaque étoile trois possibilités : l'une où l'on conserve les valeurs de \bar{X}_{12} calculées plus haut, une autre où nous avons multiplié toutes les valeurs de \bar{X}_{12} par 10 et une troisième où nous avons multiplié toutes ces valeurs par 0,1.

De telles modifications de \bar{X}_{12} doivent logiquement être accompagnées de changements de \bar{X}_4 . Si, conservant toutes autres choses égales, on multiplie la durée de la contraction par un facteur α , \bar{X}_4 sera remplacée par une quantité de l'ordre de $\alpha\bar{X}_4$. Puisque la production de carbone 12 est proportionnelle au cube de l'abondance d'hélium 4, \bar{X}_{12} sera multipliée par un facteur de l'ordre de α^4 . Changer \bar{X}_{12} d'un facteur 10 revient à changer \bar{X}_4 de $\sim 1,8$. Une telle modification ne perturbera guère $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$. Celles-ci atteignent très vite leur valeur maximum. ε_{pp} ne sera donc pas altérée.

On trouvera les principaux résultats dans la table 3.9.

TABLEAU 3.9

Recherche de l'instant où la condition

$$\int_0^M (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{ON}) dm = L$$

est remplie.

La première colonne indique la température centrale et la deuxième donne $\int \varepsilon_{pp} dm$. La troisième donne $\int \varepsilon_{ON} dm$ pour l'abondance \bar{X}_{12} calculée. Dans les deux autres cas, on multiplie ce nombre par 10 ou 0,1. Les colonnes 4, 5 et 6 donnent $E = \int (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{ON}) dm$ et la valeur du rapport $\frac{E}{L}$ dans les trois cas envisagés. On a désigné par K la valeur de X_{12} calculée plus haut.

(1) (T_c) _c	(2) $\int \varepsilon_{pp} dm$	(3) $\int \varepsilon_{ON} dm$	(4) E et $\frac{E}{L}$ $\bar{X}_{12} = K$	(5) E et $\frac{E}{L}$ $\bar{X}_{12} = 10 K$	(6) E et $\frac{E}{L}$ $\bar{X}_{12} = 0.1 K$
			M = 174 M _☉		
229	6,86 (39)	2,42 (40)	3,10 (40) 3,81	2,49 (41) 30,5	9,28 (39) 1,14
216	5,41 (39)	2,08 (39)	7,49 (39) 0,919	2,62 (40) 3,22	5,62 (39) 0,689
205	4,14 (39)	1,36 (38)	4,28 (39) 0,525	5,51 (39) 0,676	4,16 (39) 0,510

(1) (T_6) _c	(2) $\int \varepsilon_{pp} dm$	(3) $\int \varepsilon_{cN} dm$	(4) E et $\frac{E}{L}$ $\bar{X}_{12} = K$	(5) E et $\frac{E}{L}$ $X_{12} = 10 K$	(6) E et $\frac{E}{L}$ $\bar{X}_{12} = 0.1 K$
$M = 306 M_{\odot}$					
255	1,32 (40)	1,51 (41)	1,64 (41) 8,61	1,52 (42) 79,9	2,83 (40) 1,48
238	9,74 (39)	8,14 (39)	1,79 (40) 0,939	9,11 (40) 4,78	1,06 (40) 0,554
221	6,93 (39)	2,63 (38)	7,19 (39) 0,378	9,56 (39) 0,502	6,96 (39) 0,365
$M = 1515 M_{\odot}$					
312	5,74 (40)	1,55 (42)	1,61 (42) 11,2	1,56 (43) 108	2,13 (41) 1,48
286	3,92 (40)	5,33 (40)	9,25 (40) 0,642	5,72 (41) 3,97	4,45 (40) 0,309
260	2,54 (40)	1,07 (39)	2,65 (40) 0,184	3,61 (40) 0,250	2,56 (40) 0,178
$M = 6645 M_{\odot}$					
371	2,36 (41)	1,56 (43)	1,59 (43) 21,6	1,56 (44) 213	1,60 (42) 2,18
334	1,49 (41)	3,57 (41)	5,06 (42) 0,691	3,72 (42) 5,07	1,85 (41) 0,252
297	8,80 (40)	3,69 (39)	9,25 (40) 0,126	1,26 (41) 0,171	8,92 (40) 0,122

Il suffit d'une simple interpolation pour trouver, dans chaque cas, la température centrale qui assure l'équilibre et, par conséquent, l'instant d'arrivée sur la séquence principale. On en déduit toutes les autres propriétés : ρ_c , R , $\int \varepsilon_{pp} dm$, $\int \varepsilon_{cN} dm$ et \bar{X}_4 . Comme \bar{X}_{12} varie très rapidement avec t , il est difficile d'interpoler parmi les valeurs $\bar{X}_{12}(t)$ de la table 3.8. Il est plus aisé de calculer par interpolation la quantité $(\int \varepsilon_{cN} dm) / \bar{X}_{12}(t)$ et de déduire \bar{X}_{12} par l'application de la condition (3.36). Les nouvelles caractéristiques des modèles d'équilibre sont indiquées dans la table 3.10.

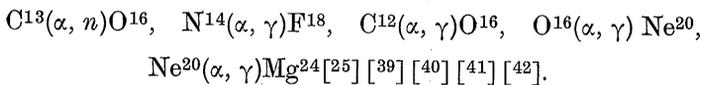
Il convient de remarquer que notre méthode de modification des modèles n'est licite que parce que le poids moléculaire moyen μ n'est pratiquement pas altéré par l'apport d'une très petite quantité d'hélium et d'une fraction infime de carbone. Si μ changeait considérablement, à une valeur β_c donnée ne correspondraient plus ni la même masse ni la même luminosité.

A la lecture de la table 3.10, on constate que les modèles obtenus dans les trois hypothèses faites sur l'accumulation de carbone, se ressemblent fort. L'état d'équilibre n'est guère sensible aux détails de l'histoire de la contraction, au moins dans ces étoiles relativement simples du point de vue de la composition et de l'opacité. L'abondance de carbone à l'équilibre diffère certes d'une hypothèse à l'autre mais pas du tout par un facteur 10. Dans les masses les plus fortes, l'écart n'est que de vingt pour-cent. Ceci autorise, dans nos limites de précision, à adopter pour la suite un seul des trois modèles pour chaque étoile. Nous avons repris ceux correspondant aux abondances de carbone calculées ($\bar{X}_{12} = K$).

Le cycle du carbone est d'une grande efficacité : pour la plus faible des quatre masses, il contribue au quart de la génération d'énergie et pour la plus grande, il en assure les quatre-vingts pour-cent.

iv. — *Autres réactions nucléaires.*

Les températures atteintes et le faible contenu d'hélium et de carbone justifient *a posteriori* l'ignorance complète d'une série de réactions extrêmement faibles dans nos conditions alors que, dans des étoiles ordinaires ayant la même température, elles joueraient un rôle primordial. Nous avons néanmoins examiné les réactions



Marion et Fowler [25] donnent, pour les deux premières, les vies moyennes indiquées dans la table 3.11.

TABLEAU 3.10

Caractéristiques des nouveaux modèles d'équilibre

	T_c	ρ_c	$\frac{R}{R_\odot}$	$\int \varepsilon_{pp} dm$	$\int \varepsilon_{CN} dm$	$\bar{X}_{1,2}$	\bar{X}_4	$(\varepsilon_{3\alpha})_c$	T_{eff}
174 M_\odot	237	199	3,03	8,15 (39)					
Hydrog. pur	226	173	3,17	6,54 (39)	1,60 (39)	2,03 (—12)			
$\bar{X}_{1,2} = 0,1$ K	218	154	3,30	5,52 (39)	2,62 (39)	3,79 (—12)	1,31 (—3)	2,71 (—3)	127000
= K	208	135	3,45	4,49 (39)	3,66 (39)	6,23 (—12)			
= 10 K									
306 M_\odot	277	214	3,71	1,90 (40)					
Hydrog. pur	250	157	4,12	1,20 (40)	7,06 (39)	4,29 (—12)			
$\bar{X}_{1,2} = 0,1$ K	239	137	4,31	9,82 (39)	9,22 (39)	6,33 (—12)	1,06 (—3)	3,08 (—3)	136000
= K	228	119	4,52	7,95 (39)	1,11 (40)	8,94 (—12)			
= 10 K									
1515 M_\odot	385	219	4,96	1,44 (41)					
Hydrog. pur	308	112	8,70	5,39 (40)	9,02 (40)	8,72 (—12)			
$\bar{X}_{1,2} = 0,1$ K	291	94,2	9,22	4,18 (40)	1,02 (41)	1,11 (—11)	6,76 (—4)	5,32 (—3)	152000
= K	275	80,0	9,73	3,30 (40)	1,11 (41)	1,37 (—11)			
= 10 K									
6645 M_\odot	483	197	12,7	7,33 (41)					
Hydrog. pur	361	82,3	17,0	2,10 (41)	6,23 (41)	1,01 (—11)			
$\bar{X}_{1,2} = 0,1$ K	338	67,4	18,2	1,58 (41)	5,75 (41)	1,24 (—11)	5,11 (—4)	5,90 (—3)	161000
= K	317	55,6	19,4	1,19 (41)	6,14 (41)	1,49 (—11)			
= 10 K									

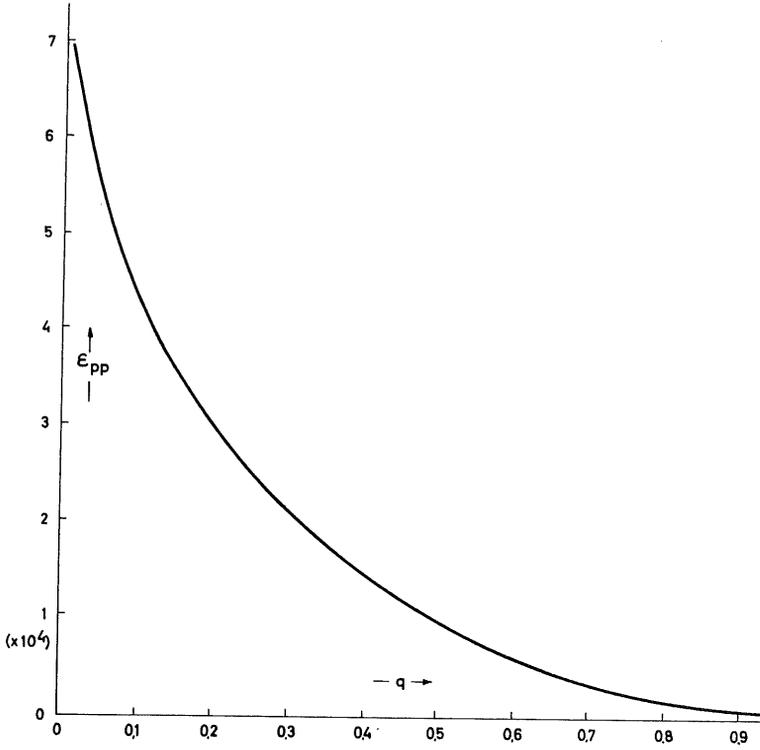


Fig. 3.4. — Distribution de ϵ_{pp} en fonction de q dans l'étoile de $174 M_{\odot}$.

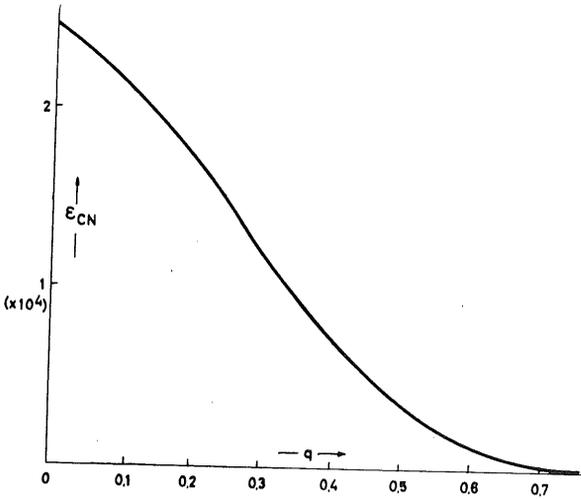


Fig. 3.5. — Distribution de ϵ_{CN} en fonction de q dans l'étoile de $174 M_{\odot}$.

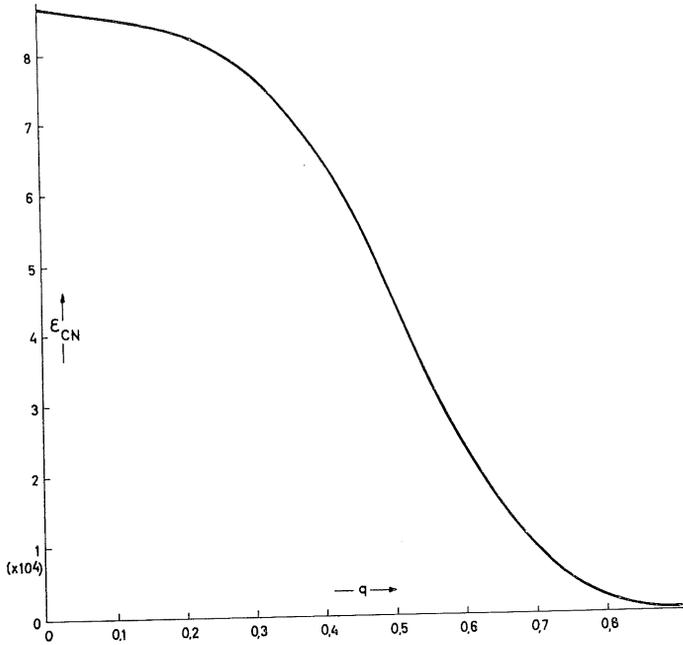


Fig. 3.6. — Distribution de ε_{CN} en fonction de q dans l'étoile de $6645 M_{\odot}$. On remarque la faible sensibilité du cycle du carbone aux hautes températures, due à l'influence prépondérante des désintégrations de O^{14} et de O^{15} .

TABLEAU 3.11

T_6	$\log \left(\frac{\tau_{\text{années}} \rho X_4}{10^4} \right)$	
100	2,93	10,60
150	-0,54	6,70
200	-2,71	4,26
300	-5,39	1,23
	$\text{C}^{13}(\alpha, n)\text{O}^{16}$	$\text{N}^{14}(\alpha, \gamma)\text{F}^{18}$

Dans nos modèles, ρX_4 est de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1} . A 300 millions de degrés et si $\rho X_4 = 10^{-2}$, la vie moyenne de C^{13} par rapport à la réaction (α, n) est de quatre ans alors que, vis-à-vis de la réaction (p, γ) , elle est de quelques centièmes de seconde si $\rho \simeq 100$.

La réaction $C^{13}(\alpha, n)$ est donc négligeable. Ce résultat est confirmé par les données de Cameron [40] qui, utilisant une section efficace plus petite, adopte pour la vie moyenne de C^{13} vis-à-vis de la réaction (α, n)

$$\bar{\tau}_\alpha(C^{13}) = [9 \times 10^{-4} \exp(-322T_6^{-1/3})\rho X_4 T_6^{-2/3}]^{-1}$$

soit cent ans dans les conditions choisies.

De même, la réaction $C^{12}(\alpha, \gamma)$ est tout à fait inexistante et il en va de même par conséquent de $O^{16}(\alpha, \gamma)$ et de $Ne^{20}(\alpha, \gamma)$. Salpeter [18] donne, par exemple, pour la vie moyenne de C^{12} dans $C^{12}(\alpha, \gamma)$:

$$\bar{\tau}_\alpha(C^{12}) = \left[\frac{T_8^2(1 + 0,3 T_8^{-2/3})}{5,3 \times 10^9 \exp(-69,20 T_8^{-1/3})\rho X_4} \right] (T_8 = 10^{-8}T)$$

soit $4,4 \times 10^{20}(\rho X_4)^{-1}$ secondes à cent millions de degrés et $1,3 \cdot 10^{12}(\rho X_4)^{-1}$ à trois cents millions de degrés.

Nous avons aussi examiné la capture d'électrons par He^3 , Be^7 et N^{13} . En fait, on sait [27] que des réactions telles que $He^3 + e^-$ ne deviennent significatives qu'aux hautes densités ($\rho > 10^5$). Ceci ressort très bien des résultats de Dumézil-Curien et Schatzman [43] [44]. Nous avons utilisé ici les formules données par Gamow et Schönberg [45]. Le nombre d'électrons capturés par cm^3 et par seconde par les noyaux d'un type donné Z est de

$$N^- = \frac{2g^2 N_Z N_e}{\pi^{3/2} (\lg 2) c^3 \hbar^4} (kT)^{-3/2} \int_Q^\infty e^{-\frac{E}{kT}} (E - Q)^2 E^{1/2} dE \quad (3.37)$$

où N_Z et N_e représentent le nombre de noyaux considérés et le nombre d'électrons par cm^3 , g la constante de Fermi ($g \simeq 1,5 \times 10^{-49}$ erg cm^3) et Q l'énergie maximum du spectre continu β de l'élément ($Z - 1$). Si la masse de celui-ci est plus petite que celle de l'élément Z , alors $Q < 0$ et la limite inférieure de l'intégration doit être prise égale à zéro.

La vie moyenne de l'élément Z est donnée par

$$\bar{\tau}_e = \frac{N_Z}{N^-}$$

Pour He^3 , nous avons aussi fait les calculs à l'aide du taux de réaction donné par Schatzman ([45] formule 27)

$$\mathcal{K} = 1,036 \times 10^{-37} \times 10^{-0,928/T_8} T_8^{3/2}.$$

Quant à la vie moyenne de Be^7 , nous avons utilisé la formule que fournit Fowler [27]

$$\bar{\tau}_e(\text{Be}^7) \simeq \frac{7 \times 10^4}{\rho(1 + X)} \text{ jours.}$$

Nous avons alors comparé les résultats obtenus avec les vies moyennes de He^3 par rapport à la réaction ($\text{He}^3 + \text{He}^4$) de Be^7 dans ($\text{Be}^7 + p$) et N^{13} dans $\text{N}^{13}(\beta^+\nu)$. Ces résultats (table 3.12) doivent être considérés uniquement du point de vue de l'ordre de grandeur.

Il est nécessaire de faire les remarques suivantes : quand l'abondance X_4 d'hélium est très petite, la réaction ($\text{He}^3 + \text{He}^4$) est lente mais alors la réaction ($\text{He}^3 + \text{He}^3$) est la plus importante et est très rapide [18]. Aux très basses températures, la réaction ($\text{Be}^7 + \text{H}^1$) est de loin plus lente que la capture d'électrons mais alors la production de Be^7 est négligeable puisque c'est la chaîne $\text{H}^1 + \text{H}^1 \rightarrow \text{D}^2 + \text{H}^1 \rightarrow \text{He}^3 + \text{He}^3 \rightarrow \text{He}^4 + 2\text{H}^1$ qui est significative. Pour terminer, rappelons que la réaction $\text{N}^{13} + \text{H}^1$ prend progressivement le pas sur la désintégration de N^{13} quand la température atteint et dépasse cent millions de degrés.

En résumé, on peut ignorer la capture d'électrons.

TABLEAU 3.12

Comparaison de diverses vies moyennes (en secondes) l'indice « e » désigne une vie moyenne vis-à-vis de la capture d'électrons

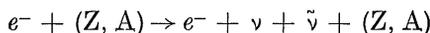
$$\rho = 100, \rho X_4 = 10^{-2}, X_1 = 1$$

T_8	$\bar{\tau}_e(\text{He}^3)$ [45]	$\bar{\tau}_e(\text{He}^3)$ [44]	$\bar{\tau}_{\text{He}^4}(\text{He}^3)$	$\bar{\tau}_e(\text{Be}^7)$	$\bar{\tau}_{\text{H}^1}(\text{Be}^7)$	$\bar{\tau}_e(\text{N}^{13})$	$\bar{\tau}_\beta(\text{N}^{13})$
5	3,1 (31)	5,1 (31)	3,2 (26)	~3 (7)	1,2 (17)	~4(6)	870
30	5,2 (14)	1,2 (15)	2,5 (12)	~3 (7)	7,6 (5)	~4(6)	870
100	4,5 (11)	1,1 (12)	6,7 (6)	~3 (7)	3,1 (1)	~4(6)	870
300	1,6 (10)	6,3 (10)	3,0 (3)	~3 (7)	7,6 (-1)	~4(6)	870

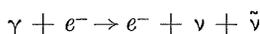
Enfin, les phénomènes de photodésintégration sont négligeables. Celle affectant N^{13} et qui donne $N^{13} + \gamma \rightleftharpoons C^{12} + H^1$, ne devient influente que lorsque la température dépasse six cents millions de degrés [21].

v. — *Pertes d'énergie par neutrinos.*

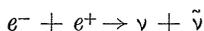
Depuis quelque temps, divers auteurs ont attiré l'attention sur la possibilité de pertes d'énergie considérables dues à des émissions très importantes de neutrinos [46] [47] [48]. A côté de la production habituelle de neutrinos lors des désintégrations β qui font partie des chaînes thermonucléaires, il existe d'autres processus beaucoup plus efficaces. Il s'agit du brehmsstrahlung



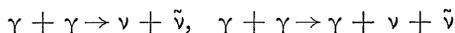
de l'effet photoneutrino



de l'annihilation de paires d'électrons

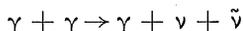


et de la production de neutrinos par interaction photon-photon



D'autres processus pourraient encore être découverts.

D'après Chiu et Morrison [46], les deux premiers processus ne jouent de rôle appréciable que vers 10^{10} degrés. La transition $\gamma + \gamma \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ est interdite [49]. Par contre, la réaction



est fort efficace. Les résultats donnés par Chiu et Morrison [46] ne sont malheureusement que des estimations (table 3.13) et une extrapolation un peu hasardeuse donne, pour les conditions régnant au centre de la plus massive de nos étoiles ($T_6 = 338$, $\rho = 67$) une perte d'énergie par émission de neutrinos de 10^5 à 10^6 ergs par gramme et par seconde, contre environ 10^5 pour l'énergie thermonucléaire. Pour l'étoile de $306 M_{\odot}$, ($T_6 = 240$, $\rho = 140$), cette émission n'est plus que de 10^3 à 10^4 ergs par g. et par sec. contre 10^5 pour la libération due aux réactions thermonucléaires.

TABLEAU 3.13

Perte d'énergie ϵ_ν par g. et par sec. pour une densité de 10^6 g. cm⁻³

T_6	ϵ_ν
500	$10^{3,5}$
1000	10^7
2000	10^{11}
2500	10^{12}

La décroissance de la production de neutrinos est cependant beaucoup plus rapide que celle des réactions nucléaires : l'efficacité de la chaîne proton-proton décroît comme T^4 et celle du cycle du carbone ne décroît pratiquement pas. Nos modèles ne seront donc guère modifiés par le phénomène en question, sauf peut-être le plus massif.

Le processus $e^- + e^+ \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ est beaucoup moins important jusqu'à 500 millions de degrés. Chiu [48] donne une table très détaillée des pertes d'énergie dans ce processus. A 500 millions de degrés, (la température la plus basse qu'il considère), Chiu donne une émission de $4,81 \times 10^7$, $4,77 \times 10^7$ et $2,63 \times 10^5$ par cm³ et par seconde pour des densités de $2,94 \times 10^1$, $2,94 \times 10^3$ et $2,94 \times 10^6$ grammes par cm³. Mais, dès que T descend sous les 500 millions de degrés, la perte d'énergie décroît très vite ainsi que le montre une extrapolation à partir des résultats de Chiu ; nous indiquons ici, à titre d'exemple, les valeurs correspondant à la valeur 10^{-3} du paramètre N'_0 , défini dans son article et tel que $\rho = 2,94 \times 10^6 N'_0$.

On a posé

$$S = - \frac{dU}{dt} \times \frac{1}{1,88 \times 10^{19}}$$

$-\frac{dU}{dt}$ étant l'énergie perdue par unité de volume et de temps et exprimée en erg.

TABLEAU 3.14

T_6	$\log S$	T_6	$\log S$
500	-11,59594	800	-6,96778
600	- 9,58922	900	-6,04965
700	- 8,11134	1000	-5,29118

Voici encore, pour quelques densités, la perte d'énergie par cm^3 et par seconde, à 500 millions de degrés.

TABLEAU 3.15

$\log N_0^t$	$\log S$	$\log N_0^t$	$\log S$
-5,00	-11,59223	-2,50	-11,60412
-4,50	-11,59228	-2,00	-11,62974
-4,00	-11,59253	-1,00	-11,93794
-3,50	-11,59335	-0,50	-12,53425
-3,00	-11,59594	0,00	-13,84120

Par extrapolation, on trouve pour $T_6 = 350$, $\rho \leq 2,94 \times 10^3$.

$$-\frac{dU}{dt} \simeq 4 \times 10^3 \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

et pour $T_6 = 300$, $\rho \leq 2,94 \times 10^3$

$$-\frac{dU}{dt} \simeq 10^2 \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}.$$

Dans nos étoiles, où la densité centrale est d'une centaine de grammes par cm^3 , la perte d'énergie par l'annihilation d'électrons, n'atteindra que quelques ergs par gramme et par seconde. Elle est absolument négligeable.

CHAPITRE IV

OSCILLATIONS RADIALES ET TEMPS CARACTÉRISTIQUES

Afin de pouvoir discuter au chapitre suivant la stabilité vibrationnelle de nos modèles, nous allons rappeler les propriétés essentielles des oscillations radiales. Leur théorie est exposée en détail dans quelques ouvrages devenus classiques [50] [51] [52] [53] [54]. Nous nous limiterons ici à résumer la méthode à suivre et à donner les résultats particuliers concernant notre problème.

On calcule d'abord les caractéristiques des oscillations radiales adiabatiques, en admettant pour le déplacement lagrangien du point r , la forme

$$(\delta r)_a = \xi_a(r) r e^{i\sigma a t} \quad (4.1)$$

Les variations lagrangiennes relatives de ρ , P , T sont alors données par

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_a = -3\xi_a - r \frac{d\xi_a}{dr} \quad (4.2)$$
$$\left(\frac{\delta P}{P}\right)_a = \Gamma_1 \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_a, \quad \left(\frac{\delta T}{T}\right)_a = (\Gamma_3 - 1) \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_a$$

Si la fréquence $\frac{\sigma_a}{2\pi}$ est réelle, on se trouve en présence d'oscillations stationnaires véritables. Dans le cas contraire, l'étoile est le siège d'un mouvement apériodique, conduisant à l'instabilité dynamique.

Ceci ne se produit [51] que si les Γ_i sont inférieurs à $4/3$, ce qui n'arrive jamais dans les étoiles habituelles [55]. Seule, la présence

de réactions nucléaires d'équilibre (du type $A + B \rightleftharpoons C + D$) pourrait provoquer un abaissement des Γ_i sous $4/3$ [56]. Ce n'est pas le cas ici. Si l'on tient compte de la nature non adiabatique des oscillations, σ devient complexe ($\sigma = \sigma_a + i\sigma'$) et sa partie imaginaire σ' a la signification d'un coefficient d'amortissement :

$$\frac{\delta r}{r} = \xi(r) e^{i\sigma_a t} e^{-\sigma' t} \quad (4.3).$$

La méthode des perturbations fournit pour la valeur de σ'

$$\sigma' = - \frac{1}{2\sigma_a^2} \frac{\int_0^M \left(\frac{\delta \Gamma}{\Gamma} \right)_a \left(\delta \varepsilon - \frac{d\delta L(r)}{dm} \right)_a dm}{\int_0^M r^2 \xi_a^2 dm} \quad (4.4)$$

où les variations $\delta \varepsilon$ et $\delta L(r)$ sont calculées à l'aide de ξ_a , $\left(\frac{\delta \Gamma}{\Gamma} \right)_a$ et $\left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)_a$ (form. (4.1) et (4.2))

i. — *Le mode fondamental des oscillations radiales adiabatiques.*

En se limitant à une théorie linéaire du phénomène, l'amplitude $\xi_a(r)$ de l'oscillation est solution de l'équation homogène

$$\frac{d}{dr} \left(r^4 \Gamma_1 P \frac{d\xi_a}{dr} \right) + \xi_a \left(\sigma_a^2 \rho r^4 + r^3 \frac{d}{dr} \{ 3\Gamma_1 - 4 \} P \right) = 0 \quad (4.5)$$

avec les conditions aux limites

$$\delta r = 0 \text{ en } r = 0 \text{ (centre), } \delta P = 0 \text{ en } r = R \text{ (surface)} \quad (4.6)$$

L'équation (4.5), accompagnée des conditions (4.6) conduit à un problème analogue à celui de Sturm-Liouville, avec cependant des singularités aux limites de l'intervalle $0 \leq r \leq R$. Mais ([51], pp. 459 et seq.) si les singularités sont régulières et si les conditions aux limites sont satisfaites par la partie régulière de la solution, l'équation différentielle admet un spectre discret de fréquences propres et de fonctions propres, ayant les mêmes propriétés que dans le problème de Sturm-Liouville habituel. A la fréquence fondamentale (σ_a)₀ correspond une solution (ξ_a)₀ n'ayant aucun

nœud dans l'intervalle $0 \leq r \leq R$. A la nième fréquence propre $(\sigma_a)_n$ correspond un mode ayant n nœuds. Le comportement de $\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_a$, $\left(\frac{\delta P}{P}\right)_a$ et $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_a$ est semblable à celui de ξ_a . Les singularités en $r = 0$ et en $r = R$ sont des pôles d'ordre 1 et l'étude de l'équation indicielle montre que l'on peut écrire, au voisinage du centre, en utilisant la variable $x = r/R$,

$$\xi_a = \Sigma a_i x^i.$$

et, près de la surface, où l'on utilise la variable indépendante $z = 1 - x$

$$\xi_a = \Sigma c_i z^i.$$

$$\text{Au centre } a_1 = 0 \text{ et } \frac{d\xi_a}{dx} = \frac{d\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_a}{dx} = \frac{d\left(\frac{\delta T}{T}\right)_a}{dx} = \frac{d\left(\frac{\delta P}{P}\right)_a}{dx} = 0$$

Nous avons reproduit dans l'appendice B les développements en série employés.

Si l'on tient compte des relations (4.2), l'équation (4.5) se ramène après un peu d'algèbre, à la forme

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta P}{P}\right)_a = - \left(\frac{\delta P}{P}\right)_a \frac{dP}{dr} \frac{1}{P} - \frac{\sigma_a^2}{P} \frac{dP}{dr} \frac{\xi_a r^3}{Gm(r)} - 4 \frac{dP}{dr} \frac{\xi_a}{P}$$

ou, en introduisant la variable homologue habituelle

$$V = - \frac{r}{P} \frac{dP}{dr}$$

$$\text{à } r \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta P}{P}\right)_a = V \left(\frac{\delta P}{P}\right)_a + V \left(\frac{\sigma_a^2 r^3}{Gm(r)} \xi_a + 4 \xi_a\right)$$

$$\begin{aligned} \text{ou } x \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta P}{P}\right)_a &= V \left(\frac{\delta P}{P}\right)_a + V \left(\frac{\sigma^2 R^3 x^3}{GMq} \xi_a + 4 \xi_a\right) \\ &= V \left(\frac{\delta P}{P}\right)_a + V \xi_a \left(\frac{\omega^2 x^3}{q} + 4\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Le paramètre ω^2 est défini par

$$\omega^2 = \frac{\sigma^2 R^3}{GM} \quad (4.8)$$

C'est la forme utilisée par Schwarzschild et Härm pour l'étude de leurs modèles d'étoiles massives [2b]. Signalons, en passant, qu'une erreur d'impression s'est glissée dans leur formule (2) où le signe moins est incorrect. On doit ainsi résoudre deux équations différentielles du premier ordre, forme de traitement plus pratique pour les calculatrices électroniques.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \xi_a &= \frac{1}{x} \left[- \left(\frac{\delta P}{P} \right)_a \frac{1}{\Gamma_1} - 3 \xi \right], \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta P}{P} \right)_a &= V \left[\left(\frac{\delta P}{P} \right)_a + \left\{ 4 + \frac{\omega^2 x^3}{q} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nous normalisons la solution en posant

$$\xi_a = 1 \text{ en } x = 0$$

ce qui entraîne

$$\left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)_a = -3, \quad \left(\frac{\delta P}{P} \right)_a = -3\Gamma_1, \quad \left(\frac{\delta T}{T} \right)_a = -3(\Gamma_3 - 1) \quad (x=0) \quad (4.10)$$

Comme on n'a jamais la valeur exacte de la « fréquence » propre ω^2 , $|\xi|$, $\left| \frac{\delta \rho}{\rho} \right|$ etc. croissent au delà de toute limite lorsqu'on s'approche de la surface et il est nécessaire pour la valeur adoptée de ω^2 (valeur au demeurant très voisine de la valeur exacte) de remplacer la solution numérique au voisinage de la surface par celle fournie par le développement mentionné plus haut

$$\xi_a = \sum_i c_i(\omega^2) z^i.$$

Nous avons donné en appendice quelques détails sur le calcul de ω^2 et de ξ_a . On trouvera dans la table 4.1 les caractéristiques principales du mode fondamental pour chacune des quatre étoiles étudiées. De plus, la figure 4.1 montre deux des solutions ξ_a et $\left(\frac{\delta P}{P} \right)_a$.

La limitation des calculs au mode fondamental se justifie par les considérations suivantes. Dans tous les cas connus d'intérêt physique [7] [51], $|\xi_a|$, $\left| \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)_a \right|$, $\left| \left(\frac{\delta P}{P} \right)_a \right|$ etc. prennent près de la sur-

face de l'étoile des valeurs nettement plus grandes que près du centre et les rapports $\left| \frac{\xi_{a, \text{SURFACE}}}{\xi_{a, \text{CENTRE}}} \right|, \left| \frac{(\delta\rho/\rho)_{a, \text{SURFACE}}}{(\delta\rho/\rho)_{a, \text{CENTRE}}} \right|$ etc. augmentent avec l'ordre du mode. D'autre part, comme la génération d'énergie ε diminue quand on s'éloigne du centre tandis que $\frac{d\delta L}{dm}$ grandit, le terme déstabilisant $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_a \delta\varepsilon$ est défavorisé par rapport au terme stabilisant $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_a \frac{d\delta L}{dm}$ quand l'ordre du mode augmente.

Ainsi, c'est vis-à-vis du mode fondamental que l'instabilité, si elle existe est la plus grande et l'on s'en tient généralement à celui-là.

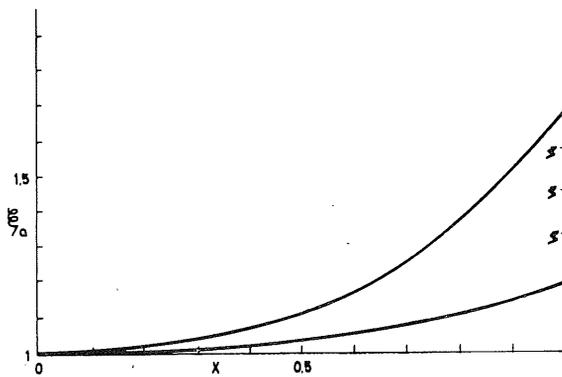


Fig. 4.1a. — Solutions $\xi_a(x)$ pour $\beta_c = 0,5$ et $\beta_c = 0,1$. Les flèches indiquent la valeur que prend $(\xi_a)_{\text{SURFACE}}$ pour les trois autres valeurs de β_c .

Les équations (4.9) ne dépendent que de la distribution de p , q , t et β à travers le modèle. Or, on l'a vu à la fin du premier chapitre, cette distribution est déterminée dès que β_c est imposé. Les données de la table 4.1 sont donc valables pour toute étoile formée d'un noyau convectif et d'une enveloppe à opacité constante. Ainsi, parmi nos solutions, nous avons pu comparer celles correspondant à $\beta_c = 0,4$ et $0,5$ à des solutions que Schwarzschild et Härm [2b] avaient calculées pour des valeurs de β_c voisines de celles-là. Nos résultats sont en bon accord avec les leurs.

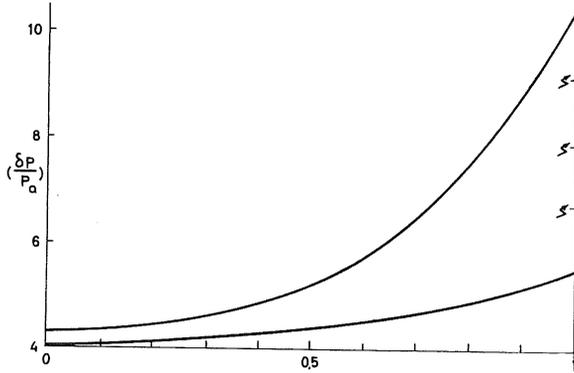


Fig. 4.Ib. — Solutions $\left(\frac{\delta P}{P}\right)_a$ pour $\beta_c = 0,5$ et $\beta_c = 0,1$. Les flèches indiquent la valeur que prend $\left(\frac{\delta P}{P}\right)_{a, \text{SURFACE}}$ pour les trois autres valeurs de β_c .

Ce n'est que lorsqu'on passe de ω^2 à σ^2 — par la relation (4.8) — que les conditions physiques particulières de chaque étoile interviennent.

TABLEAU 4.1

Caractéristiques du mode fondamental des oscillations radiales adiabatiques

β_c	ω^2	$(\xi_a)_{\text{CENTRE}}$	$(\xi_a)_{\text{SURFACE}}$	$\left(\frac{d\xi_a}{dr}\right)_{\text{SURFACE}}$	
0,5	2,19769	1	1,714	2,158	
0,4	1,76753	1	1,582	1,652	
0,3	1,38495	1	1,469	1,248	
0,2	0,997121	1	1,344	0,8550	
0,1	0,562531	1	1,194	0,4467	
$\left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_{a, \text{CENTRE}}$	$\left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_{a, \text{SURFACE}}$	$\left(\frac{\delta P}{P}\right)_{a, \text{CENTRE}}$	$\left(\frac{\delta P}{P}\right)_{a, \text{SURFACE}}$	$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{a, \text{CENTRE}}$	$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{a, \text{SURFACE}}$
—3	—7,300	—4,278	—10,62	—1,111	—2,851
—3	—6,398	—4,215	— 9,124	—1,077	—2,370
—3	—5,654	—4,158	— 7,909	—1,051	—2,013
—3	—4,887	—4,103	— 6,716	—1,030	—1,690
—3	—4,029	—4,051	— 5,448	—1,014	—1,364

TABLEAU 4.2

Périodes des oscillations radiales adiabatiques (mode fondamental)

β_c	M/M_\odot	\overline{X}_{12}	σ^2	σ	$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{\sigma}$
0,5	174	0,1K	3,643 (—6)	2,166 (—3)	2,901 (3)
		K	4,151 (—6)	2,037 (—3)	3,084 (3) \simeq 1 heure
		10 K	3,643 (—6)	1,909 (—3)	3,291 (3)
0,4	306	0,1 K	3,028 (—6)	1,740 (—3)	3,611 (3)
		K	2,658 (—6)	1,630 (—3)	3,855 (3) \simeq 1 heure
		10 K	2,288 (—6)	1,513 (—3)	4,153 (3)
0,2	1515	0,1 K	8,986 (—7)	9,479 (—4)	6,629 (3)
		K	7,562 (—7)	8,696 (—4)	7,225 (3) \simeq 2 heures
		10 K	6,423 (—7)	8,014 (—4)	7,841 (3)
0,1	6645	0,1 K	2,988 (—7)	5,466 (—4)	1,149 (4)
		K	2,431 (—7)	4,931 (—4)	1,274 (4) \simeq 4 heures
		10 K	2,008 (—7)	4,481 (—4)	1,402 (4)

Note. — Comme on l'a dit plus haut, nous retiendrons uniquement les valeurs correspondant au cas $\overline{X}_{12} = \text{K}$ sauf mention contraire.

Les valeurs de la période du mode fondamental sont reprises dans la table 4.2. On voit que, suivant la masse, cette période va de une à quelques heures.

Avant d'entamer l'étude de la stabilité vibrationnelle, nous allons revenir un moment aux réactions nucléaires et examiner la vitesse à laquelle elles modifient la composition chimique de nos étoiles. En effet si le temps caractéristique de ces modifications n'est pas beaucoup plus long que la période d'oscillation, la structure de l'étoile se modifie très rapidement, tout comme ses caractéristiques vibrationnelles. Il serait alors nécessaire d'abandonner l'image des modèles statiques rendus invalides par une évolution trop rapide.

ii. — *Variation progressive de la composition chimique.*

Quand les étoiles ont atteint la séquence principale, elles continuent d'être le siège de modifications de composition chimique qui les font évoluer, le plus souvent très lentement. Le soleil, par exemple, transforme actuellement son hydrogène en hélium.

Le cas qui nous occupe a cependant un aspect très différent de celui des étoiles ordinaires : dans celles-ci, le combustible nucléaire s'use progressivement tandis que chez nous, les réactions nucléaires consomment certes l'hydrogène mais elles produisent également du carbone si bien que la consommation de l'un des réactifs du cycle du carbone est compensée par la synthèse de l'autre.

L'hélium et le carbone s'accumulent progressivement. Nous allons estimer la production de C^{12} par la réaction 3α dans les conditions d'équilibre de nos modèles. On trouve, pour la production de C^{12} et pour le temps nécessaire pour doubler la quantité de C^{12} présente dans les modèles, les valeurs de la table 4.3.

TABLEAU 4.3

Taux d'accumulation du carbone 12

$\frac{M}{M_{\odot}}$	\bar{X}_{12}	Masse de C^{12} produite par seconde et par gramme	Temps (en se- condes) néces- saire pour doubler l'abon- dance \bar{X}_{12}	Rapport de ce temps à la période
174	0.1 K	~4 (—22)	~5 (9)	~2 (6)
	K	~8 (—23)	~5 (10)	~2 (7)
	10 K	~1,2 (—23)	~5 (11)	~2 (8)
306	0.1 K	~1,3 (—21)	~3 (9)	~1 (6)
	K	~1,5 (—22)	~4 (10)	~1 (7)
	10 K	~2,2 (—23)	~4 (11)	~1 (8)
1515	0.1 K	~2,5 (—21)	~4 (9)	~5 (5)
	K	~3,5 (—22)	~3 (10)	~5 (6)
	10 K	~4,8 (—23)	~3 (11)	~5 (7)
6645	0.1 K	~3,8 (—21)	~3 (9)	~2 (5)
	K	~4,8 (—22)	~3 (10)	~2 (6)
	10 K	~4,5 (—23)	~3 (11)	~2 (7)

Ces résultats déduits par interpolation graphique entre les valeurs de $\int_0^M r_{3a} dm$ et de $\int \bar{X}_{12} dm$ utilisées lors de l'étude de la contraction, donnent seulement un ordre de grandeur mais c'est tout ce qui est requis ici.

Pour augmenter l'abondance de carbone disons de un pour-cent, il faudrait donc plusieurs dizaines de milliers de périodes, soit quelques années. Cependant, une telle modification ne bouleverserait pas les propriétés de l'étoile qui y est sujette. En effet, si le carbone augmente en quantité, l'efficacité du cycle du carbone s'accroît.

Dès lors, la condition

$$\int_0^N \varepsilon dm = \int_0^M (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{CN}) dm = L$$

n'est plus strictement remplie. L'étoile tendra à se dilater, passant d'un rayon R_1 à un rayon R_2 pour abaisser sa température et rétablir l'équilibre. Pendant cette phase, on aura d'après (3.23)

$$\int_0^M (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{CN}) dm - \bar{L} = \frac{3}{2} \frac{GM^2}{R_1} \frac{(3\Gamma_1 - 4)}{3(\Gamma_3 - 1)} \frac{1}{\Delta t^*} \left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right) \quad (4.10)$$

Δt^* étant le temps requis pour augmenter l'abondance de carbone d'une quantité choisie, ici, un pour-cent de sa valeur. L'application de cette relation n'est naturellement valable que du point de vue de l'ordre de grandeur.

Envisageons, pour fixer les idées, l'étoile de $1515 M_\odot$ et admettons que la variation de température soit associée à une transformation homologue.

$$T \propto \frac{1}{R} \quad \rho \propto \frac{1}{R^3}$$

Vers 300 millions de degrés, ε_{pp} varie comme T^4 et ε_{CN} ne dépend plus de T mais, pour tenir compte quelque peu des diverses couches de l'étoile qui sont à des températures inférieures, admettons que

$$\int \varepsilon_{pp} dm \propto T^6 \quad \int \varepsilon_{CN} dm \propto T^3$$

Si par suite de la modification d'abondance de C^{12} , l'étoile passe de son rayon actuel R_1 au rayon R_2 , on aura

$$\left(\int \varepsilon_{pp} dm\right)_{R_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^6 \left(\int \varepsilon_{pp} dm\right)_{R_1} = 4,175 \times 10^{40} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^6$$

$$\left(\int \varepsilon_{CN} dm\right)_{R_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3 \left(\int \varepsilon_{CN} dm\right)_{R_1} \times 1,01 = 1,034 \times 10^{41} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3$$

Remplaçant dans (4.10) \bar{L} par la luminosité d'équilibre L , Γ_1 et Γ_3 par leurs valeurs 1,511 et 1,444 correspondant à $\beta_c = 0,2$, Δt^* par sa valeur 4×10^8 secondes et $\int (\varepsilon_{pp} + \varepsilon_{CN}) dm$ par la moyenne arithmétique entre sa valeur pour $R = R_1$ et celle pour $R = R_2$, on obtient l'équation

$$2,088 \times 10^{40} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^6 + 5,170 \times 10^{40} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^3 + 2,088 \times 10^{40}$$

$$+ 5,170 \times 10^{40} + 7,190 \times 10^{44} \left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 7,190 \times 10^{44} + 1,442 \times 10^{41}.$$

(4.11)

qui montre immédiatement que T_2 est extrêmement voisin de T_1 . Si l'on pose dans (4.11), $T_2 = T_1 + \Delta T$, on trouve, en développant en série et en se limitant au premier ordre

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq -2 \times 10^{-6}$$

Si l'on double l'abondance de carbone, on obtient, en reprenant le même calcul

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq -10^{-2}$$

L'accumulation de C^{12} n'a donc pas un effet sensible sur nos modèles avant qu'au moins plusieurs millions de périodes d'oscillation ne se soient écoulées.

Nous avons dans ce qui précède négligé toutes les variations des autres éléments : l'hydrogène diminue lentement et l'hélium augmente. Le premier effet est négligeable. En effet, pour l'étoile

envisagée, la production de He^4 est de $\simeq 3 \times 10^{-15}$ par seconde. Puisque $\bar{X}_1 + \bar{X}_4 \simeq 1$, $\Delta\bar{X}_1 \simeq -\Delta\bar{X}_4$.

La consommation d'hydrogène est de 3×10^{-15} par seconde. Après 10^8 secondes, la correction relative à ε_{pp} et ε_{CN} due à cette diminution d'hydrogène atteint à peine quelque 10^{-5} .

L'influence de l'accumulation d'hélium sur la réaction 3α est également très faible. La correction relative est de quelques dixièmes de pour-cent puisque $\bar{X}_4 \simeq 10^{-3}$ et $\Delta\bar{X}_4 \simeq 3 \times 10^{-15}$ par seconde, soit en 10^8 secondes un total de $10^{-4}\bar{X}_4$. On pouvait donc la négliger dans les considérations de la page précédente.

En conclusion, la variation de la composition est assez lente pour ne pas perturber appréciablement les oscillations radiales.

CHAPITRE V

STABILITÉ VIBRATIONNELLE ET MASSE LIMITE

Le coefficient de stabilité vibrationnelle est le plus souvent utilisé, rappelons-le, sous la forme,

$$\sigma' = - \frac{1}{2\sigma_a^2} \frac{\int_0^M \left(\frac{\delta T}{T}\right)_a \left(\delta\varepsilon - \frac{d\delta L}{dm}\right)_a dm}{\int_0^M r^2 \xi_a^2 dm} \quad (5.1)$$

Cependant, cette expression obtenue par la méthode des perturbations, n'est strictement valide que si les termes non adiabatiques restent réellement très petits en comparaison des termes non adiabatiques. Or, ceci cesse d'être vrai près de la surface de l'étoile, les termes non adiabatiques tendant à devenir appréciables au-dessus d'un certain niveau r_a correspondant à la masse $m(r_a) = M_a$. Il faut noter que, dans cette région, $\delta\varepsilon$ s'annule identiquement, si bien que ces termes sont simplement proportionnels à $\frac{d\delta L}{dm}$. Une

étude plus détaillée du problème [57] révèle que $\frac{d\delta L}{dr}$ et $\frac{d^2\delta L}{dr^2}$ tendent vers zéro quand on s'approche plus encore de la surface de l'étoile. Physiquement, ceci est dû au fait que, dans les couches très superficielles, la capacité calorifique devient si faible qu'aucune quantité de chaleur appréciable ne peut s'y accumuler. Ainsi, il doit exister un niveau $r^*(> r_a)$ correspondant à la masse M^* au delà duquel la contribution à l'intégrale (5.1) devient tout à fait négligeable et nous pouvons remplacer la limite supérieure d'intégration M par M^* .

Entre la couche M_a et la couche M^* , les phénomènes peuvent prendre un caractère assez complexe, surtout si une ionisation importante s'y produit et la généralisation de (5.1) à partir de la thermodynamique conduit à l'expression

$$\sigma' = -\frac{1}{2\sigma_a^2} \frac{\int_0^{M_a} \left(\frac{\delta T}{T}\right)_a \left(\delta\varepsilon - \frac{d\delta L}{dm}\right)_a dm}{\int_0^M r^2 \xi_a^2 dm} + \frac{1}{2\sigma_a^2 \int_0^M r^2 \xi_a^2 dm} \int_{M_a}^{M^*} dm \int_0^{\sigma_a} \left[\left(\frac{\delta T}{T}\right)_a + \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{na} \right] \frac{d\delta L}{dm} dt \quad (5.2)$$

les indices a et na signifiant « adiabatique » et « non adiabatique ». Toutefois, les températures effectives de nos étoiles définies par

$$L = 4\pi\sigma R^2 T_e^4$$

(σ étant la constante de Stéfán), sont fort élevées (respectivement 127.000, 136.000, 152.000 et 161.000 degrés pour chacune des quatre étoiles étudiées) si bien qu'aucune ionisation significative, soit pour la capacité calorifique, soit pour l'opacité ne peut se produire entre M_a et M^* et l'effet du deuxième terme de (5.2) sera très faible. D'ailleurs, la masse de la région où les termes non adiabatiques sont importants n'est qu'une fraction extrêmement petite de la masse totale et ceci réduit encore le rôle relatif du second terme de (5.2) d'autant plus que, dans nos modèles, ξ_a , $\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_a$, $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_a$ etc. ne croissent qu'assez peu du centre à la surface.

On peut donc se contenter de l'expression

$$\sigma' = -\frac{1}{2\sigma_a^2} \frac{\int_0^{M_a} \left(\frac{\delta T}{T}\right)_a \left(\delta\varepsilon - \frac{d\delta L}{dm}\right)_a dm}{\int_0^M r^2 \xi_a^2 dm} \quad (5.3)$$

Le niveau M_a peut être fixé par la condition que $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{na}$ soit

du même ordre que $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_a$ et l'on a, d'après les équations générales [57]

$$i\sigma\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{na} = -\frac{1}{\Gamma_1 C_v T} \frac{d}{dm} (\delta L)$$

On va donc rechercher la valeur de $m(r)$ telle que

$$\left| \sigma_a \left(\frac{\delta T}{T} \right)_a \right| \simeq \left| \frac{1}{\Gamma_1 C_v T} \frac{d\delta L}{dm} \right| = \left| \frac{L}{\Gamma_1 C_v T} \frac{d\left(\frac{\delta L}{L}\right)}{dm} \right| \quad (5.5)$$

L étant constante dans la zone superficielle.

C_v désigne la chaleur spécifique à volume constant généralisée qui tient compte des effets de la radiation et est reliée à la chaleur spécifique ordinaire c_v par la relation

$$C_v = \frac{c_v}{\beta} [\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)].$$

La grandeur $\frac{\delta L}{L}$ ne peut être déterminée que numériquement et il en va de même de sa dérivée. On écrira, au point i ($r = r_i$)

$$\left(\frac{d}{dm} \frac{\delta L}{L} \right)_i = \left(\frac{\Delta\left(\frac{\delta L}{L}\right)}{\Delta m} \right)_i = \frac{\left(\frac{\delta L}{L}\right)_{i+1} - \left(\frac{\delta L}{L}\right)_{i-1}}{4\pi\rho r_i^2(r_{i+1} - r_{i-1})}$$

Nous avons appliqué le critère (5.5) aux points $x = 0,96$ ($r = 0,96 R$) et $x = 0,98$ ($r = 0,98 R$) de chaque étoile. Le tableau 5.1 montre que, bien qu'elle commence à croître sensiblement, la contribution des termes non adiabatiques reste négligeable. L'extrapolation indique que l'on peut certainement appliquer l'approximation adiabatique jusqu'en $x = 0,99$. A ce point correspond une masse de 0,99999 M . On voit donc que la valeur exacte adoptée pour M_a n'aura guère d'importance.

Nous allons d'abord examiner le terme $\frac{d\delta L}{dm} \left(\frac{\delta T}{T}\right)_a$ de l'équation (5.1). Dans ce terme, il faut a priori inclure les contributions de

TABLE 5.1

Comparaison du terme adiabatique et du terme non adiabatique

$\frac{M}{M_\odot}$	$\left \sigma_a \left(\frac{\delta T}{T} \right)_a \right $	T	$\frac{L}{\Gamma_1 C_v T}$	$\Delta \left(\frac{\delta L}{L} \right)$	Δm	$\frac{L}{\Gamma_1 C_v T} \frac{d}{dm} \frac{\delta L}{L}$
174	5,40 (—3)	3,99 (6)	1,25 (24)	5,92 (—1)	8,91 (30)	8,33 (—8)
306	3,63 (—3)	4,29 (6)	1,61 (24)	3,98 (—1)	1,51 (31)	4,23 (—8)
1515	1,43 (—3)	4,69 (6)	3,62 (24)	1,59 (—1)	5,94 (31)	9,07 (—9)
6645	6,57 (—4)	4,86 (6)	7,12 (24)	6,77 (—2)	2,04 (32)	2,36 (—9)
$x = 0,96$						
174	5,60 (—3)	1,96 (6)	2,57 (24)	6,63 (—1)	1,08 (30)	1,51 (—6)
306	3,86 (—3)	2,10 (6)	3,34 (24)	4,48 (—1)	1,83 (30)	8,04 (—7)
1515	1,47 (—3)	2,30 (6)	7,49 (24)	1,88 (—1)	7,18 (30)	1,93 (—7)
6645	6,73 (—3)	2,38 (6)	1,35 (25)	8,61 (—2)	2,57 (31)	4,88 (—8)
$x = 0,98$						

tous les modes de transfert de l'énergie. Ainsi, dans le noyau convectif qui contient la plus grande partie de la matière, le flux convectif doit être envisagé. Par ailleurs, près de la surface, les ondes progressives pourraient jouer un rôle. La conduction, par contre, est entièrement négligeable.

CALCUL DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT

i. — *L'opacité par diffusion.*

Pour construire les configurations d'équilibre, nous avons admis que l'opacité était uniquement due à la diffusion par les électrons et que la section efficace de diffusion par électron était donnée par la formule classique de Thomson

$$\sigma_0 = \frac{8\pi e^4}{3 m_e^2 c^4}$$

qui conduit au coefficient d'absorption habituel constant

$$\kappa = \frac{\sigma_0 N_e}{\rho} = \frac{8\pi e^4}{3 m_e^2 c^4} \frac{1 + X}{2 m_H} \quad (5.6)$$

Aux hautes températures, la section efficace de Klein-Nishina doit être préférée à la section efficace de Thomson, κ cesse d'être indépendant de la fréquence comme de la température. Sampson [58] a repris soigneusement le problème. Deux effets opposés se manifestent : tout d'abord, la section efficace décroît quand la température augmente, ce qui abaisse l'opacité. Mais, aux températures très élevées, les créations de paires augmentent le nombre d'électrons N_e et l'opacité augmente fortement.

On peut écrire avec Sampson

$$\kappa = \frac{\sigma_0 N_e}{\rho} \bar{G}(T) \quad (5.7)$$

kT (keV)	$\bar{G}(T)$	κ
1	1	0,4008
2	0,95005	0,3808
4	0,9044	0,3625
6	0,8626	0,3457
9	0,8067	0,3233
14	0,7279	0,2917
20	0,6525	0,2615
30	0,5590	0,2240
50	0,4408	0,1767

N_e étant le nombre d'électrons par cm^3 et $\bar{G}(T)$ une fonction de T tabulée ci-contre. La formule (5.7) peut s'écrire, pour un gaz de charge atomique Z et masse atomique M_A

$$\frac{M_A}{Z} \kappa = 0,40077 \frac{N_e}{N_A} \left(\frac{Z\rho}{M_A} \right)^{-1} \bar{G}(T)$$

N_A désignant le nombre d'Avogadro.

Si les électrons présents sont dus uniquement à l'ionisation, c'est-à-dire, si la création de paires est négligeable, $N_e = \frac{N_A \rho Z}{M_A}$

et

$$\frac{M_A}{Z} \kappa = 0,40077 \bar{G}(T) \quad (5.8)$$

rendant bien la valeur 0,4 pour l'hydrogène dès que la température est assez basse.

En toute rigueur, nous aurions dû utiliser la formule (5.8) au lieu de (5.6) dans la construction de nos modèles. Mais, à l'époque, nous disposions d'une calculatrice électronique avec laquelle le calcul des modèles avec enveloppe à opacité non constante aurait été beaucoup plus compliqué, pour obtenir des modèles sans doute peu différents. Nous avons préféré conserver nos modèles, mais en corrigeant le flux radiatif en fonction des opacités réelles. Puisque ce flux est donné par

$$\frac{L_R(r)}{4\pi r^2} = - \frac{dT}{dr} \cdot \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}$$

nous calculons la valeur corrigée $L'(r)$ telle que

$$\kappa L'_R(r) = 0,4 L_R(r) \quad (5.9)$$

Dans l'enveloppe radiative, où κ n'est plus guère différent de 0,4, nous avons imposé une luminosité constante L égale à la valeur de $L'_R(r)$ donnée par l'expression (5.9) au point r_f de transition entre le noyau convectif et l'enveloppe radiative, puisque la génération d'énergie y est négligeable. De même que, dans les modèles à opacité constante, on a

$$L = L_R(r_f)$$

on aura maintenant

$$L' = L'_R(r_f).$$

Dans nos domaines de températures, $L'_R(r)$ est toujours supérieur à $L_R(r)$. La différence entre les deux diminue évidemment quand on s'approche de la surface.

La loi (5.8) peut être représentée (à $\sim 1/4$ % près) par les formules suivantes

$kT < 9 \text{ keV}$	$\log \kappa = - 0,1033 \quad kT - 0,398$
$9 < kT < 20$	$\log \kappa = - 0,00836 \quad kT - 0,4157$
$20 < kT < 30$	$\log \kappa = - 0,0067 \quad kT - 0,449$
$30 < kT < 50$	$\log \kappa = - 0,0052 \quad kT - 0,494$

Cette méthode a cependant l'inconvénient d'introduire des

discontinuités gênantes si l'on calcule $\delta\kappa$. Aussi a-t-on utilisé pour cela une formule parabolique à peine moins précise

$$\kappa = 0,4 - 0,0094318 kT + 0,00011839 (kT)^2 \quad 0 < kT < 30 \text{ keV} \quad (5.10)$$

Afin de fixer les idées, nous avons donné, dans la table, quelques valeurs comparées de $L(r)$ et $L'(r)$. On remarque que, en toute rigueur, $L(R)$ est un peu différent de la luminosité. Ceci est dû aux petites imperfections numériques intervenant dans l'intégration du système d'équations de la structure interne et des calculs dérivés.

TABLEAU 5.3

Quelques valeurs de $L_R(r)$ et $L'_R(r)$

x	q	$L_R(r)$	$L'_R(r)$
174 M_\odot			
0,18	0,109	1,59 (39)	1,74 (39)
0,24	0,221	2,44 (39)	3,40 (39)
0,28	0,312	3,41 (39)	4,64 (39)
0,32	0,410	4,41 (39)	5,87 (39)
0,36	0,507	5,38 (39)	7,00 (39)
0,40	0,601	6,26 (39)	7,97 (39)
0,44	0,689	7,02 (39)	8,68 (39)
0,50	0,795	7,85 (39)	9,43 (39)
0,54	0,853	8,20 (39)	9,62 (39)
1	1	8,26 (39)	9,62 (39)
306 M_\odot			
0,16	0,086	2,02 (39)	3,00 (39)
0,22	0,193	4,48 (39)	6,48 (39)
0,26	0,282	6,49 (39)	9,12 (39)
0,30	0,379	8,68 (39)	1,19 (40)
0,34	0,478	1,08 (40)	1,45 (40)
0,38	0,573	1,29 (40)	1,68 (40)
0,44	0,701	1,55 (40)	1,96 (40)
0,50	0,804	1,75 (40)	2,12 (40)
0,58	0,902	1,90 (40)	2,20 (40)
1	1	1,92 (40)	2,20 (40)

TABLEAU 5.3 (suite)

x	q	$L_R(r)$	$L'_R(r)$
$1515 M_\odot$			
0,16	0,111	1,66 (40)	2,63 (40)
0,20	0,192	2,87 (40)	4,43 (40)
0,24	0,288	4,31 (40)	6,44 (40)
0,28	0,391	5,85 (40)	8,45 (40)
0,32	0,494	7,38 (40)	1,03 (41)
0,36	0,591	8,81 (40)	1,20 (41)
0,42	0,719	1,07 (41)	1,39 (41)
0,48	0,817	1,21 (41)	1,51 (41)
0,56	0,907	1,33 (41)	1,59 (41)
0,64	0,959	1,40 (41)	1,59 (41)
1	1	1,43 (41)	1,56 (41)
$6645 M_\odot$			
0,14	0,0934	6,74 (40)	1,13 (41)
0,20	0,222	1,59 (41)	2,55 (41)
0,24	0,327	2,36 (41)	3,66 (41)
0,28	0,436	3,14 (41)	4,70 (41)
0,32	0,541	3,89 (41)	5,61 (41)
0,36	0,637	4,58 (41)	6,36 (41)
0,40	0,720	5,18 (41)	6,95 (41)
0,46	0,819	5,87 (41)	7,53 (41)
0,54	0,909	6,52 (41)	7,92 (41)
0,78	0,996	7,12 (41)	7,61 (41)
1	1	7,12 (41)	7,56 (41)

ii. — *Influence de la convection.*

Le flux convectif H est donné immédiatement par la relation

$$4\pi r^2 H = \mathcal{L} = \int_0^m \varepsilon dm - L_R(r). \quad (5.11)$$

Ici, une petite difficulté apparaît, provenant de l'emploi des modèles à opacité constante pour représenter nos étoiles. Si l'on remplace simplement $L_R(r)$ par $L'_R(r)$ en laissant la génération d'énergie inchangée, \mathcal{L} est remplacé par la quantité correspondante \mathcal{L}' . Nous avons indiqué dans la table 5.4 quelques valeurs de \mathcal{L} et \mathcal{L}' .

TABLEAU 5.4. — Quelques valeurs de \mathcal{L} et \mathcal{L}'

x	q	$\int \varepsilon dm$	\mathcal{L}	\mathcal{L}'
		174M $_{\odot}$		
0,18	0,109	3,00 (39)	1,79 (39)	1,25 (39)
0,24	0,221	5,04 (39)	2,60 (39)	1,64 (39)
0,28	0,312	6,23 (39)	2,82 (39)	1,59 (39)
0,32	0,410	7,15 (39)	2,74 (39)	1,28 (39)
0,36	0,507	7,70 (39)	2,32 (39)	7,00 (38)
0,40	0,601	8,02 (39)	1,76 (39)	5,00 (37)
0,44	0,689	8,19 (39)	1,18 (39)	—
0,50	0,795	8,26 (39)	4,10 (38)	—
0,54	0,853	8,28 (39)	8,00 (37)	—
		306 M $_{\odot}$		
0,16	0,086	5,10 (39)	3,08 (39)	2,09 (39)
0,22	0,193	1,03 (40)	5,78 (39)	3,78 (39)
0,26	0,282	1,35 (40)	6,98 (39)	4,35 (39)
0,30	0,379	1,57 (40)	7,05 (39)	3,83 (39)
0,34	0,478	1,72 (40)	6,38 (39)	2,72 (39)
0,38	0,573	1,81 (40)	5,23 (39)	1,29 (39)
0,44	0,701	1,87 (40)	3,17 (39)	—
0,50	0,804	1,88 (40)	1,36 (39)	—
		1515 M $_{\odot}$		
0,16	0,111	4,08 (40)	2,41 (40)	1,45 (40)
0,20	0,192	6,63 (40)	3,76 (40)	2,20 (40)
0,24	0,288	9,34 (40)	5,03 (40)	2,90 (40)
0,28	0,391	1,15 (41)	5,65 (40)	3,04 (40)
0,32	0,494	1,30 (41)	5,58 (40)	2,63 (40)
0,36	0,591	1,38 (41)	4,97 (40)	1,82 (40)
0,42	0,719	1,42 (41)	3,55 (40)	3,50 (39)
0,48	0,817	1,43 (41)	2,22 (40)	—
0,56	0,907	1,43 (41)	9,67 (39)	—
		6645 M $_{\odot}$		
0,14	0,093	1,58 (41)	9,05 (40)	4,51 (40)
0,20	0,222	3,47 (41)	1,88 (41)	9,22 (40)
0,24	0,327	4,82 (41)	2,45 (41)	1,15 (41)
0,28	0,436	5,94 (41)	2,80 (41)	1,24 (41)
0,32	0,541	6,69 (41)	2,80 (41)	1,08 (40)
0,36	0,637	7,05 (41)	2,46 (41)	6,80 (40)
0,40	0,720	7,20 (41)	2,03 (41)	2,64 (40)
0,46	0,819	7,27 (41)	1,40 (41)	—
0,54	0,909	7,27 (41)	7,45 (40)	—

Naturellement, \mathcal{L}' finit par devenir négatif puisque nous n'avons fait qu'une modification de $L_R(r)$. La transformation abrupte utilisée rend \mathcal{L}' très faible avant la transition du noyau convectif à l'enveloppe radiative. Un calcul rigoureux donnerait certainement une chute de \mathcal{L}' beaucoup moins brusque. En tout état de cause, c'est ici que devrait intervenir le rajustement des modèles, dont les noyaux convectifs pourraient être un peu moins étendus.

De toute façon, ce qui importe ici, c'est de remarquer que le transport d'énergie par convection est loin d'écraser le flux radiatif. Or, comme on va le montrer, la vie moyenne d'un élément convectif est beaucoup plus longue que la période d'oscillation. Il est donc très raisonnable de supposer que la convection ne pourra pas adapter continuellement ses caractéristiques à la pulsation. Sa contribution à la relation (5.1) sera peu importante et le sera d'autant moins que le flux radiatif est considérable.

Suivons donc un élément qui, par convection, quitte le milieu qui l'entoure, de caractéristiques P , ρ , T , et qui s'élève d'une hauteur Δr . Sa pression interne, qui équilibre toujours la pression externe, atteint la valeur

$$P + \Delta P = P + \frac{dP}{dr} \Delta r$$

L'élément va voir sa température et sa densité se modifier en conséquence. Si ces modifications internes sont adiabatiques, la différence entre la température de l'élément, après son ascension de r à $r + \Delta r$, et celle du milieu ambiant, est égale à

$$\Delta T = \left(1 - \frac{1}{\Gamma_2}\right) \frac{dP}{dr} \frac{T}{P} \Delta r - \frac{dT}{dr} \Delta r = -D \Delta r \quad (5.12)$$

en utilisant la notation D de Ledoux ([⁵¹], p. 456). Cette quantité est positive, sinon la convection ne se maintiendrait pas. Multipliant ΔT par la densité ρ , la chaleur spécifique à pression constante C_p et la vitesse d'ascension v , on obtient le flux convectif

$$H = -C_p \rho v D \Delta r \quad (5.13)$$

C_p doit être calculée en tenant compte de la pression de radiation.

Si c_v désigne la chaleur spécifique à volume constant du gaz seul, les deux chaleurs spécifiques « généralisées » valent

$$C_v = \frac{c_v}{\beta} [\beta + 12(\gamma - 1) (1 - \beta)]$$

$$C_p = \frac{\Gamma_1 c_v}{\beta^2} [\beta + 12(\gamma - 1) (1 - \beta)]$$

Par exemple, pour $\beta = 0,5$ $C_v = 9c_v$ et $C_p = 25,67c_v$ et pour $\beta = 0,1$, $C_v = 73 c_v$ et $C_p = 986 c_v$.

La différence entre la densité du milieu ambiant et celle de l'élément est égale à

$$-\Delta\rho = -\frac{1}{\Gamma_1} \frac{\rho}{P} \frac{dP}{dr} \Delta r + \frac{d\rho}{dr} \Delta r$$

ou encore

$$-\Delta\rho = \frac{\rho}{T} \left[\left(1 - \frac{1}{\Gamma_1} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{dT}{dr} + \frac{d\beta}{dr} \frac{T}{\beta} \right] \Delta r$$

$$= \frac{\rho}{T} \left[1 + \frac{4(1-\beta)}{\beta} \right] (-D) \Delta r. \quad (5.14)$$

en exprimant le gradient de β en fonction du gradient de pression et du gradient de température et en tenant compte des relations courantes entre Γ_1 et Γ_2 .

L'énergie cinétique de l'élément lui est fournie par le travail de la force ascensionnelle. Ceci s'exprime par la relation

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \left[1 + \frac{4(1-\beta)}{\beta} \right] \frac{\rho}{T} (-D) \Delta r \cdot \frac{Gm(r)}{r^2} \cdot \frac{1}{2} \Delta r \quad (5.15)$$

Éliminant $(-D \Delta r)$ entre (5.15) et (5.13), il vient

$$v^3 = \frac{H Gm(r) \Delta r}{\rho r^2 C_p T} \left[1 + \frac{4(1-\beta)}{\beta} \right]$$

Après quelques calculs élémentaires, cette expression se réduit à

$$v^3 = \frac{(\gamma - 1) (4 - 3\beta)}{[\beta + 12(\gamma - 1) (1 - \beta)] \Gamma_1} \cdot \frac{H \Delta r V}{\rho r} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1} \frac{H \Delta r V}{\rho r}$$

V étant la variable homologue rencontrée plus haut.

On peut prendre pour valeur moyenne de Δr , la moitié de la hauteur de mélange, parcouru que franchit un élément avant de

se dissoudre dans le milieu ambiant. La valeur de la hauteur de mélange est malheureusement des plus incertaines. Au laboratoire, cette longueur est habituellement de l'ordre des dimensions de l'enceinte où la convection est observée. Dans le cas stellaire, cela reviendrait à choisir le rayon. Ceci semble exagéré [10] et l'on adopte souvent comme valeur une fraction du rayon ou encore de la hauteur d'échelle. C'est ce dernier choix que nous avons retenu. Nous écrirons

$$\Delta r \simeq -\frac{1}{2} P \frac{dr}{dP} = \frac{1}{2} \frac{r}{V}$$

Alors

$$v^3 = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1} \frac{H}{2\rho} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\Gamma_1} \frac{\mathcal{L}}{8\pi\rho r^2}.$$

La durée de vie d'un élément convectif est donc

$$\tau = \Delta r \cdot v^{-1} = \frac{1}{2} r v^{-1} V^{-1}$$

On a calculé τ en quelques points de l'étoile de $174 M_{\odot}$ et de celle de $6645 M_{\odot}$. Dans la première, pour $x = 0,36$, on a

$$v \simeq 4,4 \times 10^4 \text{ cm sec}^{-1}, \Delta r = 1,2 \times 10^{10} \text{ cm}, \tau \simeq 3 \times 10^5 \text{ sec.}$$

Dans la seconde, pour $x = 0,32$, on a

$$v \simeq 1,1 \times 10^5 \text{ cm sec}^{-1}, \Delta r = 5,4 \times 10^{10} \text{ cm}, \tau \simeq 5 \times 10^5 \text{ sec.}$$

Les points choisis sont bien représentatifs de la zone convective. D'autre part, les calculs faits en d'autres points conduisent à des résultats semblables. Il s'ensuit que τ est nettement plus grand que la période d'oscillation et que la convection ne s'adaptant pas à la pulsation, ne jouera aucun rôle dans le calcul de σ' . Enfin, mentionnons que D calculé au point $x = 0,36$ de l'étoile de $174 M_{\odot}$ vaut $2,4 \times 10^{-10}$. On constate que l'excès du gradient adiabatique sur le gradient réel est extrêmement faible, si bien que l'on peut, dans le calcul de la structure de l'étoile remplacer le gradient réel par le gradient adiabatique, approximation toujours adoptée et qui justifie l'équation (1.5).

iii. — *L'influence du flux d'énergie radiatif.*

Dans l'équation (5.1), le terme

$$A = \int \frac{M_a \delta T}{T} \frac{d\delta L_R(r)}{dm} dm \quad (5.16)$$

peut se calculer plus pratiquement sous la forme

$$\int_{m=0}^{m=M_a} \frac{\delta T}{T} d\delta L_R(r)$$

ce qui permet une intégration par voie graphique.

Le calcul de $\delta L_R(r)$ se fait à partir de la relation

$$L_R(r) = -\frac{4ac}{3} \cdot \frac{4\pi r^2}{\kappa \rho} T^3 \cdot \frac{dT}{dr}.$$

On en tire immédiatement

$$\frac{\delta L_R(r)}{L_R(r)} = 2 \frac{\delta r}{r} - \frac{\delta \rho}{\rho} + 3 \frac{\delta T}{T} + \frac{\delta \left(\frac{dT}{dr} \right)}{\frac{dT}{dr}} - \frac{\delta \kappa}{\kappa} \quad (5.17)$$

où l'on a

$$\frac{\delta \left(\frac{dT}{dr} \right)}{\frac{dT}{dr}} = \frac{\delta \left(\rho r^2 \frac{dT}{dm} \right)}{\rho r^2 \frac{dT}{dm}} = \frac{\frac{dT}{dm} \delta(\rho r^2) + \rho r^2 \frac{d\delta T}{dm}}{\rho r^2 \frac{dT}{dm}} = \frac{\delta \rho}{\rho} + 2 \frac{\delta r}{r} + \frac{d\delta T}{dr}.$$

Enfin, si l'on tient compte de la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \frac{d\delta T}{dr} &= \frac{1}{T} \frac{d\delta T}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta T}{T} \right) + \frac{\delta T}{T} = \\ &= \frac{1}{T} \frac{d\delta T}{dr} = \frac{1}{T} \frac{d\delta T}{dr} + \frac{\delta T}{T} = \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta T}{T} \right) r + \frac{\delta T}{T} = -\frac{n+1}{V} r \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta T}{T} \right) + \frac{\delta T}{T}, \end{aligned}$$

l'expression (5.17) s'écrit définitivement

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_R(r)}{L_R(r)} &= 4 \frac{\delta r}{r} + 4 \frac{\delta T}{T} - \frac{n+1}{V} r \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta T}{T} \right) - \frac{\delta \kappa}{\kappa} \\ &= 4 \xi + 4 \frac{\delta T}{T} - \frac{n+1}{V} x \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta T}{T} \right) - \frac{\delta \kappa}{\kappa} \end{aligned} \quad (5.18)$$

TABLEAU 5.5

Valeurs de $\frac{\delta L_R(r)}{L_R(r)}$, $\frac{\delta \chi}{\chi}$, $\frac{\delta L'_R(r)}{L'_R(r)}$

z	$\frac{\delta T}{T}$	$\frac{\delta L_R(r)}{L_R(r)}$	$\delta L_R(r)$	$\frac{\delta \chi}{\chi}$	$\frac{\delta L'_R(r)}{L'_R(r)}$	$\delta L'_R(r)$
			174 M \odot			
0.1	-1,119	-2,56 (-1)	-6,24 (37)	3,84 (-1)	-6,40 (-1)	-2,30 (38)
0.2	-1,145	-2,90 (-1)	-4,59 (38)	3,66 (-1)	-6,56 (-1)	-1,48 (39)
0.3	-1,192	-3,45 (-1)	-1,39 (39)	3,34 (-1)	-6,88 (-1)	-3,62 (39)
0.4	-1,265	-4,65 (-1)	-2,91 (39)	2,91 (-1)	-7,55 (-1)	-6,02 (39)
0.5	-1,347	-6,48 (-1)	-5,09 (39)	2,41 (-1)	-8,88 (-1)	-8,38 (39)
0.6	-1,526	-9,51 (-1)	-7,86 (39)	1,91 (-1)	-1,14	-1,10 (40)
0.7	-1,736	-1,40	-1,16 (40)	1,42 (-1)	-1,53	-1,47 (40)
0.8	-2,015	-2,06	-1,71 (40)	9,76 (-2)	-2,16	-2,08 (40)
0.9	-2,381	-3,07	-2,53 (40)	5,14 (-2)	-3,12	-3,00 (40)
1	-2,851	-4,55	-3,76 (40)	0	-4,55	-4,38 (40)
			306 M \odot			
0.1	-1,084	-1,62 (-1)	-8,95 (37)	3,87 (-1)	-5,49 (-1)	-4,63 (38)
0.2	-1,105	-1,86 (-1)	-6,62 (38)	3,71 (-1)	-5,57 (-1)	-2,89 (39)
0.3	-1,143	-2,31 (-1)	-2,01 (39)	3,38 (-1)	-5,70 (-1)	-6,78 (39)
0.4	-1,202	-3,09 (-1)	-4,28 (39)	2,93 (-1)	-6,02 (-1)	-1,07 (40)
0.5	-1,287	-4,38 (-1)	-7,65 (39)	2,41 (-1)	-6,79 (-1)	-1,44 (40)
0.6	-1,404	-6,46 (-1)	-1,24 (40)	1,88 (-1)	-8,34 (-1)	-1,84 (40)
0.7	-1,563	-9,70 (-1)	-1,86 (40)	1,38 (-1)	-1,11	-2,44 (40)
0.8	-1,770	-1,45	-2,78 (40)	9,22 (-2)	-1,54	-3,39 (40)
0.9	-2,036	-2,14	-4,11 (40)	4,73 (-2)	-2,19	-5,19 (40)
1	-2,370	-3,15	-6,05 (40)	0	-3,15	-6,93 (40)

x	$\frac{\delta T}{T}$	$\frac{\delta L_R(r)}{L_R(r)}$	$\delta L_R(r)$	$\frac{\delta x}{x}$	$\frac{\delta L'_R(r)}{L'_R(r)}$	$\delta L'_R(r)$
			1515 M_\odot			
0,1	-1,035	-4,95 (-2)	-2,32 (38)	3,80 (-1)	-4,29 (-1)	-3,27 (39)
0,2	-1,048	-6,01 (-2)	-1,73 (39)	3,79 (-1)	-4,39 (-1)	-1,94 (40)
0,3	-1,071	-8,16 (-2)	-5,40 (39)	3,45 (-1)	-4,27 (-1)	-4,04 (40)
0,4	-1,106	-1,19 (-1)	-1,20 (40)	2,91 (-1)	-4,10 (-1)	-5,46 (40)
0,5	-1,155	-1,81 (-1)	-2,25 (40)	2,33 (-1)	-4,13 (-1)	-6,43 (40)
0,6	-1,221	-2,79 (-1)	-3,83 (40)	1,75 (-1)	-4,54 (-1)	-7,24 (40)
0,7	-1,304	-4,29 (-1)	-6,12 (40)	1,25 (-1)	-5,54 (-1)	-8,71 (40)
0,8	-1,408	-6,49 (-1)	-9,27 (40)	8,00 (-2)	-7,29 (-1)	-1,14 (41)
0,9	-1,536	-9,58 (-1)	-1,37 (41)	3,90 (-2)	-9,97 (-1)	-1,56 (41)
I	-1,690	-1,38	-1,98 (41)	0	-1,38	-2,16 (41)
			6645 M_\odot			
0,1	-1,016	-1,90 (-2)	-5,17 (38)	3,53 (-1)	-3,72 (-1)	-1,74 (40)
0,2	-1,024	-2,44 (-2)	-3,88 (39)	3,77 (-1)	-4,01 (-1)	-1,02 (41)
0,3	-1,037	-3,58 (-2)	-1,26 (40)	3,53 (-1)	-3,89 (-1)	-2,01 (41)
0,4	-1,058	-5,59 (-2)	-2,90 (40)	2,94 (-1)	-3,50 (-1)	-2,43 (41)
0,5	-1,086	-8,89 (-2)	-5,55 (40)	2,29 (-1)	-3,18 (-1)	-2,48 (41)
0,6	-1,122	-1,41 (-1)	-9,60 (40)	1,68 (-1)	-3,09 (-1)	-2,46 (41)
0,7	-1,168	-2,18 (-1)	-1,54 (41)	1,16 (-1)	-3,34 (-1)	-2,61 (41)
0,8	-1,211	-3,29 (-1)	-2,34 (41)	7,21 (-2)	-4,01 (-1)	-3,03 (41)
0,9	-1,288	-4,79 (-1)	-3,41 (41)	3,38 (-2)	-5,13 (-1)	-3,88 (41)
I	-1,364	-6,79 (-1)	-4,83 (41)	0	-6,79 (-1)	-5,13 (41)

où

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta T}{T} \right) = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta P}{P} \right) + \frac{\delta P}{P} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \right).$$

toutes ces quantités s'obtenant soit de l'intégration de l'équation de pulsation, soit des modèles eux-mêmes. Du point de vue pratique, ceci a entraîné le calcul, à l'aide du calculateur électronique, de toute une série de données telles que $\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \right)$, $\frac{d\beta}{dr}$, etc., sur lesquelles il est inutile de s'étendre ici.

Nous avons donné dans le tableau 5.5 quelques valeurs de $\frac{\delta L(r)}{L(r)}$ et $\delta L(r)$ calculées en traitant κ comme indépendant de T.

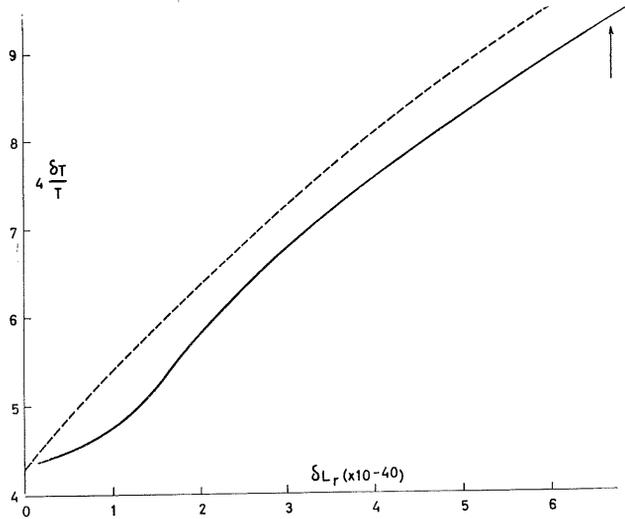


Fig. 5.1. — Représentation de $\delta L_R(r)$ en fonction de $4 \frac{\delta T}{T}$ dans l'étoile de $306 M_{\odot}$. La courbe en trait interrompu correspond à $\delta L(r)$ calculée avec une opacité indépendante de T ($\kappa = 0,4$). La courbe en trait plein représente $\delta L'(r)$, calculée avec une opacité variant avec T ($\kappa = 0,4 - 0,0094318 kT + 0,00011839 [kT]^2$). Le point d'arrêt ($\frac{\delta T}{T} = 2,370$) en haut de la figure correspond à la surface de l'étoile. La flèche indique la limite supérieure d'intégration dans $\int \frac{\delta T}{T} d\delta L(r)$ ($x = 0,99$, $m = M_n$).

Si l'on veut, dans nos modèles corrigés, tenir compte du fait que κ n'est pas indépendant de T mais est donné par la relation (5.10)

$$\kappa = 0,4 - 0,0094318 kT + 0,00011839 (kT)^2 \quad (kT \text{ en keV})$$

on a

$$\delta\kappa = [-0,0094318 kT + 0,00023678(kT)^2] \frac{\delta T}{T}$$

En reprenant les mêmes notations que précédemment, réservant la notation $L(r)$ à la luminosité calculée avec opacité constante et $L'(r)$ à celle calculée à partir de l'expression (5.9), on a

$$\frac{\delta L'_R(r)}{L'_R(r)} = \frac{\delta L_R(r)}{L_R(r)} - \frac{\delta\kappa}{\kappa} \quad (5.19)$$

On trouvera dans le tableau 5.5 quelques valeurs de $\frac{\delta\kappa}{\kappa}$, $\frac{\delta L'_R(r)}{L'_R(r)}$ et $\delta L'_R(r)$. La figure 5.2, enfin donne la représentation de $\delta L_R(r)$ en fonction de $\frac{\delta T}{T}$ dans le cas de l'étoile de $306 M_\odot$. C'est $\delta L'_R(r)$ qui a été adoptée dans l'évaluation de l'expression (5.16) (table 5.6). Celle-ci n'est guère affectée par le comportement un peu irrégulier de $\delta L'_R(r)$, dû à l'utilisation des formules approchées pour κ et $\delta\kappa$.

TABLEAU 5.6

$$\text{Valeurs de } A = \int \frac{\delta T}{T} d \delta L'_R(r)$$

$\frac{M}{M_\odot}$	A
174	8,26 (40)
306	1,15 (41)
1515	2,82 (41)
6645	5,75 (41)

A l'exception du modèle le plus massif, les valeurs de (5.16) sont à peine plus petites si l'on utilise pour calculer cette expression $\delta L_R(r)$ au lieu de $\delta L'_R(r)$. Ceci diminuerait très légèrement la stabilité. Toutefois, la différence est faible et sans importance pratique.

iv. — *Les variations de la génération d'énergie nucléaire.*

Des considérations développées plus haut, il ressort que seuls le cycle du carbone et la réaction proton-proton sont importants dans la génération d'énergie. Nous avons, pour faciliter la tâche du lecteur, repris ici les réactions en question avec, en regard, le symbole K_{ij} ou λ_k correspondant

$H^1(p, \beta^+\nu)H^2$	K_{11}
$H^2(p, \gamma)He^3$	K_{12}
$He^3(\alpha, \gamma)Be^7$	K_{34}
$Be^7(p, \gamma)B^8$	K_{17}
$B^8(\beta^+\nu)Be^{8*}$	λ_8
$Be^{8*}(\alpha)He^4$	λ_8^*
$C^{12}(p, \gamma)N^{13}$	$K_{12,1}$
$N^{13}(\beta^+\nu)C^{13}$	λ_{13}
$N^{13}(p, \gamma)O^{14}$	$K_{N^{13},1}$
$C^{13}(p, \gamma)N^{14}$	$K_{C^{13},1}$
$O^{14}(\beta^+\nu)N^{14}$	λ_{14}
$N^{14}(p, \gamma)O^{15}$	$K_{14,1}$
$O^{15}(\beta^+\nu)N^{15}$	λ_{15}
$N^{15}(p, \alpha)C^{12}$	$K_{15,1}$

Reprenant les notations de l'expression (2.19), les équations exprimant l'évolution de l'abondance de chaque noyau intéressé s'écrivent, si X_i désigne l'abondance du noyau i ($X_{H^1} = X_1$, $X_{He^4} = X_4$).

$$\begin{aligned} \frac{dX_{H^1}}{dt} = & - 2K_{11}\rho X_{H^1}^2 - \frac{K_{12}}{2}\rho X_{H^1}X_{H^2} - \frac{K_{17}}{7}\rho X_{H^1}X_{Be^7} \\ & - \frac{K_{12,1}}{12}\rho X_{H^1}X_{C^{12}} - \frac{K_{N^{13},1}}{13}\rho X_{H^1}X_{N^{13}} - \frac{K_{C^{13},1}}{13}\rho X_{H^1}X_{C^{13}} \quad (5.20) \\ & - \frac{K_{14,1}}{14}\rho X_{H^1}X_{N^{14}} - \frac{K_{15,1}}{15}\rho X_{H^1}X_{N^{15}}. \end{aligned}$$

$$\frac{dX_{H^2}}{dt} = 2K_{11}\rho X_{H^1}^2 - K_{12}\rho X_{H^1}X_{H^2} \quad (5.21)$$

$$\frac{dX_{\text{He}^3}}{dt} = \frac{3}{2}K_{12}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{H}^2} - \frac{K_{34}}{4}\rho X_{\text{He}^3}X_{\text{He}^4} \quad (5.22)$$

$$\frac{dX_{\text{He}^4}}{dt} = \lambda_8^*X_{\text{Be}^{8*}} - \frac{1}{3}K_{34}\rho X_{\text{He}^3}X_{\text{He}^4} + \frac{4}{15}K_{15,1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{N}^{15}} \quad (5.23)$$

$$\frac{dX_{\text{Be}^7}}{dt} = \frac{7}{12}K_{34}\rho X_{\text{He}^3}X_{\text{He}^4} - K_{17}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{Be}^7} \quad (5.24)$$

$$\frac{dX_{\text{B}^8}}{dt} = \frac{8}{7}K_{17}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{Be}^7} - \lambda_8 X_{\text{B}^8} \quad (5.25)$$

$$\frac{dX_{\text{Be}^{8*}}}{dt} = \lambda_8 X_{\text{B}^8} - \lambda_8^*X_{\text{Be}^{8*}} \quad (5.26)$$

$$\frac{dX_{\text{C}^{12}}}{dt} = -K_{12,1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{C}^{12}} + \frac{4}{5}K_{15,1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{N}^{15}} \quad (5.27)$$

$$\frac{dX_{\text{N}^{13}}}{dt} = \frac{13}{12}K_{12,1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{C}^{12}} - \lambda_{13}X_{\text{N}^{13}} - K_{\text{N}^{13},1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{N}^{13}} \quad (5.28)$$

$$\frac{dX_{\text{C}^{13}}}{dt} = \lambda_{13}X_{\text{N}^{13}} - K_{\text{C}^{13},1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{C}^{13}} \quad (5.29)$$

$$\frac{dX_{\text{O}^{14}}}{dt} = \frac{14}{13}K_{\text{N}^{13},1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{C}^{13}} - \lambda_{14}X_{\text{O}^{14}} \quad (5.30)$$

$$\frac{dX_{\text{N}^{14}}}{dt} = \frac{14}{13}K_{\text{C}^{13},1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{C}^{13}} - K_{14,1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{N}^{14}} + \lambda_{14}X_{\text{O}^{14}} \quad (5.31)$$

$$\frac{dX_{\text{O}^{15}}}{dt} = \frac{15}{14}K_{14,1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{N}^{14}} - \lambda_{15}X_{\text{O}^{15}} \quad (5.32)$$

$$\frac{dX_{\text{N}^{15}}}{dt} = \lambda_{15}X_{\text{O}^{15}} - K_{15,1}\rho X_{\text{H}^1}X_{\text{N}^{15}} \quad (5.33)$$

Dans les équations (5.23) et (5.27), nous avons négligé le rôle de la chaîne 3α puisque celle-ci n'aura sensiblement modifié la composition chimique qu'après un temps très long vis-à-vis des périodes d'oscillation. La chaîne proton-proton et le cycle du carbone ont fonctionné assez longtemps pendant la contraction gravifique pour que les noyaux intermédiaires aient pu atteindre leur abondance d'équilibre et que toutes les réactions d'une chaîne se déroulent au même rythme quand les étoiles arrivent sur la

séquence principale. En effet, dans la chaîne proton-proton, les réactions ($H^2 + H^1$) et ($He^3 + He^4$) sont très rapides. Au centre du plus petit des quatre objets étudiés, la vie moyenne de He^3 dans la réaction ($He^3 + He^4$) est de 200 secondes.

Il en va de même en ce qui concerne le cycle du carbone : aux températures relativement basses, la réaction ($N^{14} + H^1$) est la plus lente mais, comme nous l'avons dit, au-dessus de 150-200 millions de degrés, cette réaction devient plus rapide que les désintégrations de O^{14} et O^{15} . Nous indiquons dans la table 5.7 quelques valeurs de la vie moyenne de N^{14} au travers de l'étoile de $174 M_{\odot}$; cette vie moyenne est extrêmement courte vis-à-vis de la durée de la contraction gravifique. Bien que le cycle du carbone n'apparaisse que dans les dernières phases de la contraction, il est si rapide que les abondances des isotopes de carbone, d'oxygène et d'azote ont atteint leurs valeurs d'équilibre à l'arrivée sur la séquence principale.

TABLEAU 5.7

x	$\bar{\tau}_{H^1}(N^{14})$
0	5,5
0,18	2,1 (1)
0,24	6,0 (1)
0,28	1,4 (2)
0,32	3,9 (2)
0,36	1,2 (3)
0,40	4,1 (3)
0,44	1,7 (4)
0,54	1,2 (6)

Il nous reste à considérer un autre facteur . la convection brasse la matière du noyau, tendant à uniformiser la composition chimique, mais le temps caractéristique de la convection est assez long en comparaison des vies moyennes des éléments intervenant dans le cycle du carbone ou la chaîne proton-proton pour admettre qu'au sein même des courants de convection, les abondances relatives

s'adaptent aux conditions locales de température et de densité au moins dans la partie du noyau la plus importante du point de vue de la génération d'énergie. Ainsi, considérons un courant ascendant. Il va emporter vers l'extérieur une quantité de O^{14} et de O^{15} mais ceux-ci se désintègrent. La température diminuant au cours de l'ascension, les réactions ($C^{12} + H^1$) et ($N^{14} + H^1$) vont se ralentir et, au sommet de sa course, l'élément se sera enrichi en C^{12} et en N^{14} . Le phénomène opposé se produira dans les courants descendants. Le même effet se produira pour la chaîne $p - p$, par suite des modifications des abondances de H^2 et de He^3 au cours du mouvement des éléments convectifs.

Nous admettrons donc qu'en chaque point de l'étoile, les abondances ne sont pas trop différentes des valeurs d'équilibre correspondantes. Celles-ci s'obtiennent des équations (5.21), (5.22) et (5.24) à (5.33) en annulant leur premier membre.

Pour les noyaux intervenant dans la chaîne $p - p$, il vient

$$\begin{aligned} X_{H^2} &= \frac{2X_{H^1}K_{11}}{K_{12}}, & X_{He^3} &= \frac{12K_{11}X_{H^1}^2}{K_{34}X_{He^4}}, & X_{Be^7} &= \frac{7K_{11}X_{H^1}}{K_{17}}, \\ X_{B^8} &= \frac{8K_{11}\rho X_{H^1}^2}{\lambda_8}, & X_{Be^{8*}} &= \frac{8K_{11}\rho X_{H^1}^2}{\lambda_8^*} \end{aligned} \quad (5.34)$$

et, pour le cycle du carbone

$$\begin{aligned} X_{N^{13}} &= \frac{13K_{12,1}\rho X_{H^1}X_{C^{12}}}{12(\lambda_{13} + K_{N^{13},1}\rho X_{H^1})}, & X_{C^{13}} &= \frac{13\lambda_{13}K_{12,1}X_{C^{12}}}{12K_{C^{13},1}(\lambda_{13} + K_{N^{13},1}\rho X_{H^1})}, \\ X_{O^{14}} &= \frac{7K_{N^{13},1}\rho^2 X_{H^1}^2 K_{12,1}X_{C^{12}}}{6\lambda_{14}(\lambda_{13} + K_{N^{13},1}\rho X_{H^1})}, & X_{N^{14}} &= \frac{7K_{12,1}X_{C^{12}}}{6K_{14,1}}, \\ X_{O^{15}} &= \frac{5K_{12,1}\rho X_{C^{12}}X_{H^1}}{4\lambda_{15}}, & X_{N^{15}} &= \frac{5K_{12,1}X_{C^{12}}}{4K_{15,1}}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Au cours des oscillations, la vitesse des réactions et, par conséquent, l'abondance des divers isotopes vont subir des modifications qui seront données par les variations des équations (5.20) à (5.33). Cependant, H^1 a une vie moyenne très longue ($\gtrsim 10^{14}$ se-

condes) et les fluctuations de son abondance seront à peu près en quadrature de phase avec les variations de ρ et T [48] [49]. Elles seront, de plus, d'amplitude très faible ($\sim K_{11}\rho X_{\text{H}^1}$). Aussi, considérera-t-on X_{H^1} comme une constante. De même, le calcul montre que dès que X_{He^4} dépasse $K_{11}\rho X_{\text{H}^1}$, ce qui est le cas et de loin, ses fluctuations seront sans importance [4]. On ignorera donc les équations (5.20) et (5.23). Posons, pour l'amplitude des oscillations de ρ

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = q \quad (5.36)$$

et pour celles des variations relatives de

$$\frac{\delta K_{ij}}{K_{ij}} = q_{ij} = \nu_{ij} \frac{\delta T}{T} \quad (5.37)$$

En effet, dans un petit domaine de température, on peut écrire

$$K_{ij} \propto T^{\nu_{ij}} \quad (5.38)$$

avec

$$\nu_{ij} = \frac{1}{3}(\tau_{ij} - 2)$$

Remarquons que c'est cette même représentation de K_{ij} qui entraîne la formule

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^\nu \quad (5.39)$$

fréquemment utilisée pour calculer le taux de génération d'énergie dans les étoiles ordinaires (masses relativement petites, températures modérées).

Appelons δX_i la fluctuation de X_i (adoptant ainsi la même notation pour l'élongation que pour l'amplitude, ce qui ne donne pas lieu à confusion). En prenant les variations des équations (5.21), (5.22) et (5.24) à (5.33) et linéarisant, il vient, pour la chaîne $p - p$ où l'on a écrit, pour simplifier, σ au lieu de σ_a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{\text{H}^2}}{X_{\text{H}^2}} \right) + K_{12}\rho X_{\text{H}^1} \left(\frac{\delta X_{\text{H}^2}}{X_{\text{H}^2}} \right) &= 2K_{11}\rho \frac{X_{\text{H}^1}^2}{X_{\text{H}^2}} (q + q_{11}) e^{i\sigma t} \\ &- K_{12}\rho X_{\text{H}^1} (q + q_{12}) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{\text{He}^3}}{X_{\text{He}^3}} \right) + \frac{1}{4} K_{34} \rho X_{\text{He}^4} \left(\frac{\delta X_{\text{He}^3}}{X_{\text{He}^3}} \right) &= \frac{3}{2} K_{12} \rho \frac{X_{\text{H}^1}}{X_{\text{He}^3}} \left(\frac{\delta X_{\text{H}^2}}{X_{\text{H}^2}} \right) X_{\text{H}^2} \\ &= \frac{3}{2} K_{12} \rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{H}^2}}{X_{\text{He}^3}} (q + q_{12}) e^{i\sigma t} - \frac{1}{4} K_{34} \rho X_{\text{He}^4} (q + q_{34}) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{\text{Be}^7}}{X_{\text{Be}^7}} \right) + K_{17} \rho X_{\text{H}^1} \left(\frac{\delta X_{\text{Be}^7}}{X_{\text{Be}^7}} \right) - \frac{7}{12} K_{34} \rho \frac{X_{\text{He}^4} X_{\text{He}^3}}{X_{\text{Be}^7}} \left(\frac{\delta X_{\text{He}^3}}{X_{\text{He}^3}} \right) \\ = \frac{7}{12} K_{34} \rho \frac{X_{\text{He}^3} X_{\text{He}^4}}{X_{\text{Be}^7}} (q + q_{34}) e^{i\sigma t} - K_{17} \rho X_{\text{H}^1} (q + q_{17}) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{\text{B}^8}}{X_{\text{B}^8}} \right) + \lambda_8 \left(\frac{\delta X_{\text{B}^8}}{X_{\text{B}^8}} \right) - \frac{8}{7} K_{17} \rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{Be}^7}}{X_{\text{B}^8}} \left(\frac{\delta X_{\text{Be}^7}}{X_{\text{Be}^7}} \right) = \\ \frac{8}{7} K_{17} \rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{Be}^7}}{X_{\text{B}^8}} (q + q_{17}) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{\text{Be}^{8*}}}{X_{\text{Be}^{8*}}} \right) + \lambda_8^* \left(\frac{\delta X_{\text{Be}^{8*}}}{X_{\text{Be}^{8*}}} \right) - \lambda_8 \left(\frac{\delta X_{\text{B}^8}}{X_{\text{B}^8}} \right) = 0 \quad (5.44)$$

et, pour le cycle du carbone,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{\text{C}^{12}}}{X_{\text{C}^{12}}} \right) + K_{12,1} \rho X_{\text{H}^1} \left(\frac{\delta X_{\text{C}^{12}}}{X_{\text{C}^{12}}} \right) - \frac{4}{5} K_{15,1} \rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{N}^{15}}}{X_{\text{C}^{12}}} \left(\frac{\delta X_{\text{N}^{15}}}{X_{\text{N}^{15}}} \right) \\ = -K_{12,1} \rho X_{\text{H}^1} (q + q_{12,1}) e^{i\sigma t} + \frac{4}{5} K_{15,1} \rho X_{\text{H}^1} \frac{X_{\text{N}^{15}}}{X_{\text{C}^{12}}} (q + q_{15,1}) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{\text{N}^{13}}}{X_{\text{N}^{13}}} \right) + \lambda_{13} \left(\frac{\delta X_{\text{N}^{13}}}{X_{\text{N}^{13}}} \right) + K_{\text{N}^{13},1} \rho X_{\text{H}^1} \left(\frac{\delta X_{\text{N}^{13}}}{X_{\text{N}^{13}}} \right) - \frac{13}{12} K_{12,1} \rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{C}^{12}}}{X_{\text{N}^{13}}} \left(\frac{\delta X_{\text{C}^{12}}}{X_{\text{C}^{12}}} \right) \\ = \frac{13}{12} K_{12,1} \rho X_{\text{H}^1} \frac{X_{\text{C}^{12}}}{X_{\text{N}^{13}}} (q + q_{12,1}) e^{i\sigma t} - K_{\text{N}^{13},1} \rho X_{\text{H}^1} (q + q_{\text{N}^{13},1}) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{\text{C}^{13}}}{X_{\text{C}^{13}}} \right) - \lambda_{13} \frac{X_{\text{N}^{13}}}{X_{\text{C}^{13}}} \left(\frac{\delta X_{\text{N}^{13}}}{X_{\text{N}^{13}}} \right) + K_{\text{C}^{13},1} \rho X_{\text{H}^1} \left(\frac{\delta X_{\text{C}^{13}}}{X_{\text{C}^{13}}} \right) \\ = -K_{\text{C}^{13},1} \rho X_{\text{H}^1} (q + q_{\text{C}^{13},1}) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{\text{O}^{14}}}{X_{\text{O}^{14}}} \right) - \frac{14}{13} K_{\text{N}^{13},1} \rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{N}^{13}}}{X_{\text{O}^{14}}} \left(\frac{\delta X_{\text{N}^{13}}}{X_{\text{N}^{13}}} \right) + \lambda_{14} \left(\frac{\delta X_{\text{O}^{14}}}{X_{\text{O}^{14}}} \right) \\ = \frac{14}{13} K_{\text{N}^{13},1} \rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{N}^{13}}}{X_{\text{O}^{14}}} (q + q_{\text{N}^{13},1}) e^{i\sigma t} \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{N^{14}}}{X_{N^{14}}} \right) - \frac{14}{13} K_{C^{13},1} \rho \frac{X_{H^1} X_{C^{13}}}{X_{N^{14}}} \left(\frac{\delta X_{C^{13}}}{X_{C^{13}}} \right) - \lambda_{14} \frac{X_{O^{14}}}{X_{N^{14}}} \left(\frac{\delta X_{O^{14}}}{X_{O^{14}}} \right) \\
+ K_{14,1} \rho X_{H^1} \left(\frac{\delta X_{N^{14}}}{X_{N^{14}}} \right) = - K_{14,1} \rho X_{H^1} (q + q_{14,1}) e^{i\sigma t} \\
+ \frac{14}{13} K_{C^{13},1} \rho \frac{X_{H^1} X_{C^{13}}}{X_{N^{14}}} (q + q_{C^{13},1}) e^{i\sigma t}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{O^{15}}}{X_{O^{15}}} \right) - \frac{15}{14} K_{14,1} \rho X_{H^1} \frac{X_{N^{14}}}{X_{O^{15}}} \left(\frac{\delta X_{N^{14}}}{X_{N^{14}}} \right) + \lambda_{15} \left(\frac{\delta X_{O^{15}}}{X_{O^{15}}} \right) \\
= \frac{15}{14} K_{14,1} \rho X_{H^1} \frac{X_{N^{14}}}{X_{O^{15}}} (q + q_{14,1}) e^{i\sigma t}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta X_{N^{15}}}{X_{N^{15}}} \right) - \lambda_{15} \frac{X_{O^{15}}}{X_{N^{15}}} \left(\frac{\delta X_{O^{15}}}{X_{O^{15}}} \right) + K_{15,1} \rho X_{H^1} \left(\frac{\delta X_{N^{15}}}{X_{N^{15}}} \right) \\
= - K_{15,1} \rho X_{H^1} (q + q_{15,1}) e^{i\sigma t}.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Dans toutes ces équations, les X_i représentent les abondances dans l'état non perturbé. Puisqu'elles sont données ici par les relations d'équilibre (5.34) et (5.35), on pourrait modifier l'écriture de nombreux coefficients, certains d'entre eux étant même égaux à d'autres. Nous ne l'avons pas fait pour leur conserver la forme générale et, dans le groupe du cycle du carbone, pour repérer d'éventuelles erreurs dans la programmation ou le calcul des solutions à l'aide de la calculatrice électronique.

Le groupe des équations (5.40) à (5.44), qui se rapporte à la chaîne $p - p$, a été étudié dans un travail antérieur [4]. Si l'on néglige les termes décroissant exponentiellement au cours du temps et si l'on néglige σ' devant λ_8 et λ_3^* , ce qui est toujours permis, et devant $K_{12} \rho X_{H^1}$ ce qui l'est sauf dans les couches assez extérieures où ε est très petit, on obtient

$$\frac{\delta X_{H^2}}{X_{H^2}} = \frac{2K_{11} X_{H^1}}{K_{12} X_{H^2}} (q_{11} - q_{12}) e^{i\sigma t} \tag{5.52}$$

$$\frac{\delta X_{He^3}}{X_{He^3}} = \frac{3K_{11} \rho X_{H^1}^2 (q_{11} - q_{34}) e^{i\sigma t}}{X_{He^3} (i\sigma + \frac{1}{4} K_{34} \rho X_{He^4})} \tag{5.53}$$

$$\frac{\delta X_{\text{Be}^7}}{X_{\text{Be}^7}} = \left\{ \frac{7K_{11}K_{34}\rho^2 X_{\text{H}^1}^2 X_{\text{He}^4}(q_{11} - q_{34})}{4(i\sigma + \frac{1}{4} K_{34}\rho X_{\text{He}^4})} \right. \quad (5.54)$$

$$- 7K_{11}\rho X_{\text{H}^1}^2(q_{17} - q_{34}) \left. \right\} \frac{e^{i\sigma t}}{(i\sigma + K_{17}\rho X_{\text{H}^1} X_{\text{Be}^7})}$$

$$\frac{\delta X_{\text{B}^8}}{X_{\text{B}^8}} = \left[-8K_{11}\rho X_{\text{H}^1}^2(q + q_{17}) + \frac{2K_{17}K_{34}K_{11}\rho^3 X_{\text{H}^1}^3 X_{\text{He}^4}(q_{34} - q_{11})}{(i\sigma + \frac{1}{4} K_{34}\rho X_{\text{He}^4})(i\sigma + K_{17}\rho X_{\text{H}^1})} \right. \\ \left. - \frac{8}{7} \frac{K_{17}K_{11}\rho^2 X_{\text{H}^1}^3(q_{34} - q_{17})}{i\sigma + K_{17}\rho X_{\text{H}^1}} \right] \frac{e^{i\sigma t}}{\lambda_8 X_{\text{B}^8}} \quad (5.55)$$

$$\frac{\delta X_{\text{Be}^{8*}}}{X_{\text{Be}^{8*}}} = [\dots] \frac{e^{i\sigma t}}{\lambda_8^* X_{\text{Be}^{8*}}} \quad (5.56)$$

Le groupe des équations (5.44) à (5.50) qui concerne le cycle du carbone a dû être traité numériquement ; pour cela, comme les termes transitoires s'amortissent très rapidement, on a retenu uniquement la solution proportionnelle à $e^{i\sigma t}$ et l'on a posé

$$\frac{\delta X_{\text{C}^{12}}}{X_{\text{C}^{12}}} = (\mathcal{C}_{12} + i\mathcal{C}'_{12})e^{i\sigma t}, \quad \frac{\delta X_{\text{N}^{13}}}{X_{\text{N}^{13}}} = (\mathcal{N}_{13} + i\mathcal{N}'_{13})e^{i\sigma t}, \text{ etc.}$$

La première équation du groupe s'écrit alors sous la forme :

$$i\sigma\mathcal{C}_{12} - \sigma\mathcal{C}'_{12} + K_{12,1}\rho X_{\text{H}^1}(\mathcal{C}_{12} + i\mathcal{C}'_{12}) \\ - \frac{4}{5} K_{15,1}\rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{N}^{15}}}{X_{\text{C}^{12}}} (\mathcal{N}_{15} + i\mathcal{N}'_{15}) = -K_{12,1}\rho X_{\text{H}^1}(q + q_{12,1}) \\ + \frac{4}{5} K_{15,1}\rho \frac{X_{\text{N}^1} X_{\text{N}^{15}}}{X_{\text{C}^{12}}} (q + q_{15,1})$$

qui se sépare en deux équations :

$$K_{12,1}\rho X_{\text{H}^1}\mathcal{C}_{12} - \sigma\mathcal{C}'_{12} - \frac{4}{5} K_{15,1}\rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{N}^{15}}}{X_{\text{C}^{12}}} \mathcal{N}_{15} = -K_{12,1}\rho X_{\text{H}^1}(q + q_{12,1}) \\ + \frac{4}{5} K_{15,1}\rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{N}^{15}}}{X_{\text{C}^{12}}} (q + q_{15,1}) \\ \sigma\mathcal{C}_{12} + K_{12,1}\rho X_{\text{H}^1}\mathcal{C}'_{12} - \frac{4}{5} K_{15,1}\rho \frac{X_{\text{H}^1} X_{\text{N}^{15}}}{X_{\text{C}^{12}}} \mathcal{N}'_{15} = 0$$

TABLEAU 5.8

Valeurs des abondances des différents noyaux intervenant dans le cycle du carbone, rapportées à l'abondance de C^{12} prise comme unité (dans l'étoile de $174 M_{\odot}$)

x	$\frac{X_{N^{13}}}{X_{C^{12}}}$	$\frac{X_{C^{13}}}{X_{C^{12}}}$	$\frac{X_{O^{14}}}{X_{C^{12}}}$	$\frac{X_{N^{14}}}{X_{C^{12}}}$	$\frac{X_{O^{15}}}{X_{C^{12}}}$	$\frac{X_{N^{15}}}{X_{C^{12}}}$
0	2,68 (1)	4,31 (—3)	2,29 (2)	1,14 (1)	4,10 (2)	1,70 (—4)
0,18	2,76 (1)	1,64 (—2)	5,86 (1)	1,21 (1)	1,10 (2)	1,96 (—4)
0,24	2,62 (1)	4,26 (—2)	1,93 (1)	1,27 (1)	4,03 (1)	2,18 (—4)
0,28	2,27 (1)	8,34 (—2)	7,03	1,33 (1)	1,78 (1)	2,39 (—4)
0,32	1,59 (1)	1,49 (—1)	1,81	1,40 (1)	6,96	2,65 (—4)
0,36	8,02	2,15 (—1)	2,96 (—1)	1,49 (1)	2,42	2,98 (—4)
0,40	2,91	2,54 (—1)	3,05 (—2)	1,60 (1)	7,41 (—1)	3,39 (—4)
0,44	8,27 (—1)	2,68 (—1)	2,12 (—3)	1,74 (1)	1,99 (—1)	3,92 (—4)
0,50	8,87 (—2)	2,71 (—1)	2,04 (—5)	2,04 (1)	2,10 (—2)	5,01 (—4)
0,54	1,59 (—2)	2,71 (—1)	5,73 (—7)	2,31 (1)	3,75 (—4)	6,07 (—4)

Finalement, on doit résoudre un système de 14 équations linéaires à 14 inconnues. Ceci a été fait en une dizaine de points de chaque étoile, à l'aide du calculateur électronique de l'Université. Le programme était conçu de façon à calculer les K_{ij} , q_{ij} et X_i et à fournir ces résultats sous forme de données au programme de résolution des équations proprement dit. Nous avons donné ici, à titre d'exemple, les résultats concernant l'étoile de $174 M_{\odot}$. La table 5.8 contient les abondances des divers isotopes. O^{14} et O^{15} sont les plus abondants dans les régions centrales mais cèdent le pas à N^{14} et C^{12} au fur et à mesure que l'on s'approche de l'extérieur. Quant à la table 5.9, on y trouve l'évolution des $\frac{\delta X_i}{X_i}$ à travers l'étoile.

La génération d'énergie est donnée par l'expression

$$\varepsilon = 6,03 \times 10^{23} \left(\sum Q_{ij} K_{ij} \rho \frac{X_i X_j}{A_i A_j} + \sum Q_k \lambda_k \frac{X_k}{A_k} \right)$$

où Q_{ij} et Q_k représentent les quantités d'énergie libérées par les réactions et désintégrations en question. On en déduit

$$\delta\varepsilon = 6,03 \times 10^{23} \left[\Sigma Q_{ij} K_{ij} \rho \frac{X_i X_j}{A_i A_j} \left(q + q_{ij} + \frac{\delta X_i}{X_i} + \frac{\delta X_j}{X_j} \right) + \Sigma Q_k \lambda_k \frac{X_k}{A_k} \left(\frac{\delta X_k}{X_k} \right) \right] \quad (5.57)$$

TABLEAU 5.9

Évolution des $\frac{\delta X_i}{X_i}$ (partie réelle seulement) au travers de l'étoile de $174 M_\odot$

x	$\frac{\delta X_{C^{12}}}{X_{C^{12}}}$	$\frac{\delta X_{N^{13}}}{X_{N^{13}}}$	$\frac{\delta X_{C^{13}}}{X_{C^{13}}}$	$\frac{\delta X_{O^{14}}}{X_{O^{14}}}$
0	1,04 (1)	1,08 (1)	2,17 (1)	-8,53 (-1)
0,18	9,42	9,28	2,09 (1)	-3,03
0,24	7,79	6,26	1,84 (1)	-6,32
0,28	6,55	2,94	1,55 (1)	-1,01 (1)
0,32	5,17	-5,81 (-1)	1,25 (1)	-1,37 (1)
0,36	2,73	-2,31	1,15 (1)	-1,53 (1)
0,40	2,24	-2,08	1,29 (1)	-1,56 (1)
0,44	1,93	-3,03	1,17 (1)	-1,73 (1)
0,50	2,69 (-1)	-4,04	1,69	-1,97 (1)
0,54	5,06 (-2)	-4,40	2,73 (-1)	-2,13 (1)

x	$\frac{\delta X_{N^{14}}}{X_{N^{14}}}$	$\frac{\delta X_{O^{15}}}{X_{O^{15}}}$	$\frac{\delta X_{N^{16}}}{X_{N^{16}}}$
0	1,08 (1)	-6,54 (-1)	1,15 (1)
0,18	9,87	-2,22	1,07 (1)
0,24	8,13	-4,36	9,11
0,28	6,81	-6,06	7,90
0,32	5,62	-7,97	6,58
0,36	2,95	-1,12 (1)	4,09
0,40	6,38 (-1)	-1,35 (1)	2,56
0,44	-1,10 (-2)	-1,46 (1)	2,44
0,50	-5,38 (-3)	-1,61 (1)	2,81
0,54	-1,86 (-4)	-1,73 (1)	3,29

Y introduisant les relations (5.52) à (5.56) où l'on néglige les parties imaginaires qui altèrent un tout petit peu σ mais n'intéressent pas σ' , on trouve, pour la chaîne proton-proton [4]

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{pp} = 6,03 \times 10^{23} K_{11} \rho X_{\text{H}^1}^2 Q \left\{ q + \frac{Q_{11} + Q_{12}}{Q} q_{11} \right. \\ \left. + \frac{Q_{34}}{Q} \left[q_{34} + \frac{q_{11} - q_{34}}{1 + \left(\frac{4\sigma}{K_{34} \rho X_{\text{He}^4}} \right)^2} \right] + \frac{Q_{17} + Q_8 + Q_8^*}{Q} \right. \\ \left. \left[q_{17} + \frac{q_{34} - q_{17}}{1 + \left(\frac{\sigma}{K_{17} \rho X_{\text{H}^1}} \right)^2} + \frac{q_{11} - q_{34}}{1 + \left(\frac{4\sigma}{K_{34} \rho X_{\text{He}^4}} \right)^2} \cdot \frac{1 - \frac{4\sigma^2}{K_{34} K_{17} \rho^2 X_{\text{He}^4} X_{\text{H}^1}}}{1 + \left(\frac{\sigma}{K_{17} \rho X_{\text{H}^1}} \right)^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q = \Sigma Q_{ij} + \Sigma Q_k = 19,1 \text{ MeV}, \quad Q_{11} + Q_{12} = 0,3497Q, \\ Q_{34} = 0,0827 Q, \quad Q_{17} + Q_8 + Q_8^* = 0,5676Q. \end{aligned}$$

On peut écrire cette expression sous la forme

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\delta\rho}{\rho} + \nu_e \frac{\delta T}{T}$$

ν_e étant un « exposant effectif » qui tient compte des déphasages dans les oscillations des diverses abondances. On a, en général

$$\nu_e = \Sigma \alpha_{ij} \frac{Q_{ij}}{Q} \nu_{ij}$$

où les α_{ij} désignent des facteurs de poids et ν_{ij} l'exposant défini par la relation (5.38). ν_e diffère donc de la quantité ν' apparaissant dans la représentation (5.39) de la loi de génération d'énergie nucléaire.

Dans le cas du cycle du carbone, ne disposant que de résultats numériques, nous avons appliqué telle quelle la formule (5.57) plutôt que de passer par l'intermédiaire de l'exposant effectif ν_e . On obtient alors

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{\text{CN}} (\text{ergs g}^{-1} \text{ sec}^{-1}) = \\ = 9,66 \times 10^{17} \left\{ 0,1625 K_{12,1} \rho X_{\text{C}^{12}} \left(\frac{\delta\rho}{\rho} + \nu_{12,1} \frac{\delta T}{T} + \frac{\delta X_{\text{C}^{12}}}{X_{\text{C}^{12}}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0,3581 K_{N^{13},1} \rho X_{N^{13}} \left(\frac{\delta \rho}{\rho} + \nu_{N^{13},1} \frac{\delta T}{T} + \frac{\delta X_{N^{13}}}{X_{N^{13}}} \right) \\
& + 0,5800 K_{C^{13},1} \rho X_{C^{13}} \left(\frac{\delta \rho}{\rho} + \nu_{C^{13},1} \frac{\delta T}{T} + \frac{\delta X_{C^{13}}}{X_{C^{13}}} \right) + 0,5250 K_{14,1} \rho X_{N^{14}} \\
& \left(\frac{\delta \rho}{\rho} + \nu_{14,1} \frac{\delta T}{T} + \frac{\delta X_{N^{14}}}{X_{N^{14}}} \right) + 0,3307 K_{15,1} \rho X_{N^{15}} \left(\frac{\delta \rho}{\rho} + \nu_{15,1} \frac{\delta T}{T} + \frac{\delta X_{N^{15}}}{X_{N^{15}}} \right) \\
& + 1,326 \cdot 10^{-4} X_{N^{13}} \frac{\delta X_{N^{13}}}{X_{N^{13}}} + 3,373 \cdot 10^{-3} X_{O^{14}} \frac{\delta X_{O^{14}}}{X_{O^{14}}} \\
& + 6,479 \cdot 10^{-4} X_{O^{15}} \frac{\delta X_{O^{15}}}{X_{O^{15}}} \}
\end{aligned}$$

après avoir remplacé X_{H^1} par sa valeur pratiquement égale à 1.

On trouvera dans la table suivante une série de valeurs de ε_{pp} , $\delta\varepsilon_{pp}$, $\int \varepsilon_{pp} dm$, ε_{CN} , $\delta\varepsilon_{CN}$ et $\int \varepsilon_{CN} dm$.

TABLEAU 5.10

x	ε_{pp}	$\delta\varepsilon_{pp}$	$\int \varepsilon_{pp} dm$	ε_{CN}	$\delta\varepsilon_{CN}$	$\int \varepsilon_{CN} dm$
174 M_{\odot}						
0	7,37 (4)	-5,56 (5)	0	2,51 (4)	-1,43 (4)	0
0,18	4,27 (4)	-3,67 (5)	2,07 (39)	2,15 (4)	-4,26 (4)	8,84 (38)
0,24	2,83 (4)	-2,56 (5)	3,39 (39)	1,63 (4)	-6,50 (4)	1,61 (39)
0,28	2,03 (4)	-1,90 (5)	4,18 (39)	1,14 (4)	-6,35 (4)	2,05 (39)
0,32	1,40 (4)	-1,36 (5)	4,73 (39)	6,83 (3)	-4,68 (4)	2,36 (39)
0,36	9,20 (3)	-9,37 (4)	5,14 (39)	3,52 (3)	-2,85 (4)	2,53 (39)
0,40	5,80 (3)	-6,21 (4)	5,36 (39)	1,39 (3)	-1,20 (4)	2,61 (39)
0,44	3,49 (3)	-3,95 (4)	5,49 (39)	3,99 (2)	-3,85 (3)	2,63 (39)
0,50	1,49 (3)	-1,75 (4)	5,57 (39)	3,82 (1)	-5,20 (2)	2,63 (39)
0,54	7,88 (2)	-9,38 (3)	5,59 (39)	6,11	-9,19 (1)	2,63 (39)
306 M_{\odot}						
0	7,47 (4)	-4,95 (5)	0	4,31 (4)	-1,35 (4)	0
0,16	4,67 (4)	-3,72 (5)	2,95 (39)	4,03 (4)	-3,84 (4)	2,15 (39)
0,22	3,13 (4)	-2,65 (5)	5,62 (39)	3,47 (4)	-7,71 (4)	4,64 (39)
0,26	2,26 (4)	-1,98 (5)	7,24 (39)	2,75 (4)	-1,05 (5)	6,23 (39)
0,30	1,56 (4)	-1,42 (5)	8,12 (39)	1,85 (4)	-1,02 (5)	7,61 (39)
0,34	1,03 (4)	-9,73 (4)	8,86 (39)	1,06 (4)	-7,14 (4)	8,37 (39)
0,38	6,52 (3)	-6,45 (4)	9,33 (39)	5,08 (3)	-4,12 (4)	8,79 (39)
0,44	3,05 (3)	-3,25 (4)	9,67 (39)	9,60 (2)	-8,72 (3)	9,00 (39)
0,50	1,29 (3)	-1,45 (4)	9,80 (39)	9,80 (1)	-1,22 (3)	9,02 (39)
0,58	3,43 (2)	-4,04 (3)	9,83 (39)	2,31	-2,52 (1)	9,02 (39)

TABLEAU 5.10 (suite)

x	ε_{pp}	$\delta\varepsilon_{pp}$	$\int \varepsilon_{pp} dm$	ε_{CN}	$\delta\varepsilon_{CN}$	$\int \varepsilon_{CN} dm$
$1515 M_{\odot}$						
0	6,72 (4)	-3,31 (5)	0	8,73 (4)	-8,07 (3)	0
0,16	3,74 (4)	-2,54 (5)	1,56 (40)	7,46 (4)	-3,08 (4)	2,52 (40)
0,20	2,74 (4)	-2,06 (5)	2,36 (40)	7,11 (4)	-5,95 (4)	4,27 (40)
0,24	1,90 (4)	-1,52 (5)	3,04 (40)	6,32 (4)	-1,13 (5)	6,30 (40)
0,28	1,26 (4)	-1,04 (5)	3,50 (40)	4,85 (4)	-1,71 (5)	7,98 (40)
0,32	7,98 (3)	-6,83 (4)	3,81 (40)	2,99 (4)	-1,59 (5)	9,15 (40)
0,36	4,86 (3)	-4,32 (4)	3,99 (40)	1,52 (4)	-1,00 (5)	9,79 (40)
0,42	2,15 (3)	-2,04 (4)	4,11 (40)	3,42 (3)	-3,10 (4)	1,01 (41)
0,48	8,81 (2)	-8,91 (3)	4,15 (40)	3,77 (2)	-3,85 (3)	1,02 (41)
0,56	2,32 (2)	-2,35 (3)	4,16 (40)	1,65 (1)	-1,36 (2)	1,02 (41)
0,64	4,94 (1)	-5,60 (2)	4,17 (40)	1,29	-2,44	1,02 (41)
$6645 M_{\odot}$						
0	5,84 (4)	-2,57 (5)	0	8,67 (4)	-4,12 (3)	0
0,14	3,47 (4)	-1,79 (5)	5,49 (40)	8,55 (4)	-1,45 (4)	1,03 (41)
0,20	2,09 (4)	-1,42 (5)	1,01 (41)	8,19 (4)	-4,33 (4)	2,47 (41)
0,24	1,39 (4)	-1,04 (5)	1,25 (41)	7,47 (4)	-9,62 (4)	3,56 (41)
0,28	8,78 (3)	-6,92 (4)	1,41 (41)	5,89 (4)	-1,71 (5)	4,53 (41)
0,32	5,32 (3)	-4,34 (4)	1,51 (41)	3,64 (4)	-1,84 (5)	5,19 (41)
0,36	3,11 (3)	-2,63 (4)	1,56 (41)	1,79 (4)	-1,10 (5)	5,49 (41)
0,40	1,75 (3)	-1,54 (4)	1,58 (41)	6,95 (3)	-5,63 (4)	5,63 (41)
0,46	6,97 (2)	-6,50 (3)	1,59 (41)	8,59 (2)	-9,00 (3)	5,68 (41)
0,54	1,80 (2)	-1,70 (3)	1,59 (41)	2,46 (1)	-2,98 (2)	5,68 (41)

A la lecture de ces résultats, nous remarquons d'abord l'importance que prennent ε_{CN} et $\delta\varepsilon_{CN}$ quand on envisage des étoiles de plus en plus massives (voir également fig. 3.4, 3.5, 3.6). Nous voyons également l'influence de la faible sensibilité du cycle du carbone à la température et à la densité, par suite du rôle considérable des désintégrations de O^{14} et de O^{15} . D'une part, au centre des étoiles les plus massives $\frac{\delta\varepsilon_{CN}}{\varepsilon_{CN}}$ est fort petit pour croître vers l'extérieur. D'autre part ε_{CN} et $\delta\varepsilon_{CN}$ restent importants dans une plus grande partie de ces étoiles que ε_{pp} et $\delta\varepsilon_{pp}$.

Connaissant $\delta\varepsilon_{pp}$ et $\delta\varepsilon_{CN}$ on calcule par voie graphique

$$\int_0^M \frac{\delta T}{T} \delta\varepsilon dm \simeq M \int_0^{q_f} \frac{\delta T}{T} \delta\varepsilon_{pp} dq + M \int_0^{q_f} \frac{\delta T}{T} \delta\varepsilon_{CN} dq.$$

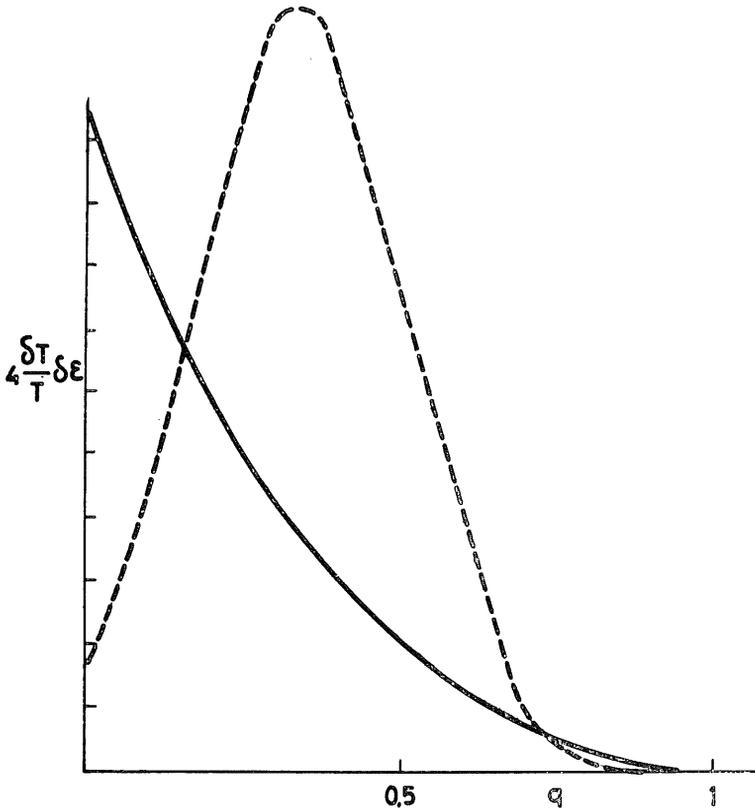


Fig. 5.2. — Représentation de $\left(\frac{\delta T}{T}\right) \cdot (\delta\varepsilon_{pp})$ (courbe en trait plein) et $\left(\frac{\delta T}{T}\right) \cdot (\delta\varepsilon_{CN})$ (courbe en trait interrompu) en fonction de q pour $M = 174 M_{\odot}$. 1 division en ordonnée correspond à 2×10^5 pour la première courbe et à 4×10^4 pour la seconde.

L'intégrand diminuant rapidement quand on s'approche de la surface, on peut négliger pour cette partie de σ' , les remarques faites sur la limite supérieure d'intégration.

Nous avons obtenu les valeurs suivantes :

TABLEAU 5.11

Valeurs de $\int \frac{\delta T}{T} \delta \varepsilon dm$

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\int \frac{\delta T}{T} \delta \varepsilon_{pp} dm$	$\int \frac{\delta T}{T} \delta \varepsilon_{cN} dm$	$\int \frac{\delta T}{T} \delta \varepsilon dm$
174	5,87 (40)	1,09 (40)	6,96 (40)
306	9,30 (40)	3,03 (40)	1,23 (41)
1515	3,18 (41)	2,22 (41)	5,40 (41)
6645	9,91 (41)	9,40 (41)	1,93 (42)

v. — *Dissipation par ondes progressives.*

Dans ce qui précède, nous avons toujours admis que l'étoile possédait une surface parfaitement définie, caractérisée par la relation $P = 0$. Au cours de l'oscillation, la condition $\delta P = 0$ qui s'applique à cette surface, assure la réflexion parfaite des ondes qui sont toutes stationnaires.

En fait, il est probable que, comme le soleil, toute étoile possède une chromosphère puis une couronne qui finit par se fondre dans le milieu interstellaire. Cependant, il existe une discontinuité de densité entre l'atmosphère et la couronne et c'est cette discontinuité qui constitue réellement la surface de l'étoile. La condition $\delta P = 0$ ne s'imposant plus dans cette situation, les ondes peuvent prendre un caractère progressif. On peut montrer ([51], page 497) que, dans une atmosphère plane isotherme et à gravité constante, les ondes progressives ne peuvent apparaître que si la période \mathcal{P} de l'oscillation est plus petite que la valeur critique

$$\mathcal{P}_c \simeq \frac{\sqrt{T}}{g} \text{ jours}$$

\mathcal{P}_c étant calculée dans les couches superficielles.

Dans le cas de l'étoile de $174 M_{\odot}$ qui possède une température effective de 120000° , on trouve

$$\mathcal{P}_c = 70 \text{ sec.}$$

La valeur de \mathcal{P}_c est du même ordre pour l'étoile de $6645 M_\odot$. Or, comme nous l'avons vu au chapitre IV, les périodes des oscillations adiabatiques sont de l'ordre d'une heure. Pour que \mathcal{P}_c atteigne cette valeur, il faudrait des températures de l'ordre de plusieurs centaines de millions de degrés, ce qui est impossible même dans la couronne.

Admettons néanmoins que des ondes progressives apparaissent. L'énergie perdue de ce fait par période est égale à

$$\Delta K_P \simeq -\pi \rho R^2 (\sigma \delta r)_a^2 \lambda$$

où λ désigne la longueur d'onde.

Le coefficient d'amortissement associé est alors donné par la formule

$$\sigma'_P = -\frac{1}{\sigma_a^2} \cdot \frac{\sigma_a \Delta K_P}{2\pi \int_0^M (\delta r)_a^2 dm}$$

qu'il faut ajouter à σ' calculé à partir de l'expression (5.1). Laissant de côté le facteur $2\sigma_a^2 \int_0^M (\delta r)_a^2 dm$ qui intervient ici comme dans (5.1), il nous faut calculer

$$\frac{\sigma_a \Delta K_P}{\pi} = -R^2 \rho \sigma_a^3 (\delta r)_a^2 \lambda = -R^2 \rho (\delta r)_a^2 \cdot 2\pi \sigma_a^2 \sqrt{\frac{P\Gamma_1}{\rho}} \quad (5.58)$$

en écrivant

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\sigma_a} = \frac{2\pi}{\sigma_a} \sqrt{\frac{\Gamma_1 P}{\rho}}$$

où v désigne la vitesse du son.

En utilisant les résultats de la théorie des atmosphères stellaires :

$$P \simeq \frac{2}{3} \frac{x}{g}, \quad g \simeq \frac{GM}{R^2}, \quad P = \frac{\mathcal{R} \rho T}{\beta \mu}$$

l'expression (5.58) devient

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\pi} \Delta K_P &= \frac{4\pi GM_\odot R_\odot^2}{3x \sqrt{2\mathcal{R}}} \cdot \frac{\xi_a^2 \sigma_a^2 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \sqrt{\beta \Gamma_1}}{\sqrt{T}} = \\ &= 1,24 \times 10^{44} \xi_a^2 \sigma_a^2 \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \sqrt{\frac{\Gamma_1 \beta}{T}} \end{aligned}$$

Si l'on se place dans la photosphère, T est égal à T_{eff} et l'on obtient les résultats consignés dans la deuxième colonne du tableau 5.12.

TABLEAU 5.12

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$\frac{\sigma}{\pi} \Delta K_P$ ($T = T_{eff}$)	$\frac{\sigma}{\pi} \Delta K_P$ ($T = 10 T_{eff}$)
174	7,63 (39)	2,41 (39)
306	1,07 (40)	3,38 (39)
1515	3,19 (40)	1,01 (40)
6645	1,14 (41)	3,59 (40)

Mais il est pratiquement certain que les ondes progressives prennent naissance là où T est beaucoup plus grand que T_{eff} , peut-être d'un facteur 100 ! Nous avons refait les calculs avec $T = 10 T_{eff}$, nous rappelant que la valeur ainsi trouvée de ΔK_P pourrait être encore excessive.

Les résultats correspondants constituent la dernière colonne du tableau 5.12. Tous ces calculs ont été faits en utilisant l'opacité due à la diffusion par les électrons. Ceci semble raisonnable quand on examine l'importance des processus absorbants ou diffusants en fonction de ρ et T mais naturellement, la contribution des sources d'opacité autres que la diffusion peut encore diminuer un peu nos résultats. Quoi qu'il en soit, l'amortissement dû aux ondes progressives, s'il existe, n'est pas très important.

vi. — *Coefficient de stabilité vibrationnelle et masse limite.*

Pour obtenir le coefficient de stabilité vibrationnelle σ' , il suffit de grouper les résultats des sections (iii), (iv), et (v)

$$\sigma' = -\frac{1}{2\sigma_a^2} \times \frac{1}{\int_0^M r^2 \xi_a^2 dm} \left[\int_0^M \frac{\delta T}{T} \delta \varepsilon dm - \int_0^{Ma} \frac{\delta T}{T} d\delta L'_R(r) - \frac{\sigma}{\pi} \Delta K_P \right]_a = -\frac{N}{2\sigma_a^2 D}$$

le premier terme placé entre crochets jouant un rôle déstabilisant, puisqu'il s'avère positif et les deux autres termes stabilisant l'oscillation.

Nous avons donné deux groupes de valeurs de σ' , l'un contenant la contribution des ondes progressives (tableau 5.13, colonne 3), l'autre la négligeant.

TABLEAU 5.13

Stabilité vibrationnelle des étoiles formées à partir d'hydrogène pur

$\frac{M}{M_{\odot}}$	$N (\times 10^{-40})$		D ($\times 10^{-57}$)	$\sigma' (\times 10^{13})$		$ \sigma'^{-1} (\times 10^{-12})$	
	(A)	(S)		(A)	(S)	(A)	(S)
174	-1,54	-1,30	3,68	5,03	4,24	1,99	2,36
306	0,53	0,87	10,47	-0,95	-1,56	10,5	6,42
1515	24,8	25,8	193,7	-8,47	-8,82	1,19	1,14
6645	132	136	2852	-9,55	-9,79	1,05	1,02

(A) avec ondes progressives

(S) sans ondes progressives

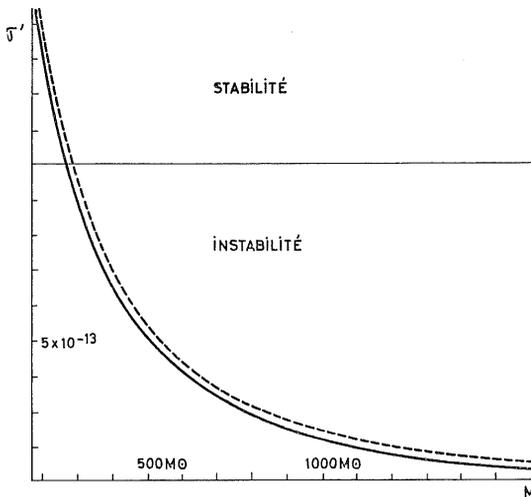


Fig. 5.3. — Stabilité vibrationnelle des étoiles d'hydrogène pur.

Cas (S) : courbe en trait plein.

Cas (A) : courbe en trait interrompu.

Par interpolation graphique (figure 5.4), nous trouvons que la masse au-delà de laquelle $N > 0$ c'est-à-dire au delà de laquelle les étoiles deviennent vibrationnellement instables est de $260 M_{\odot}$ si l'on écarte l'amortissement dû aux ondes progressives et de $280 M_{\odot}$ si l'on tient compte de cette source de dissipation. Répétons encore que nous l'avons probablement surestimée.

L'instabilité ne croît pas rapidement avec la masse : le temps que met l'amplitude pour augmenter d'un facteur e n'est que dix fois plus court dans l'étoile de $6645 M_{\odot}$ que dans celle de $306 M_{\odot}$.

Dans les étoiles de composition chimique normale, les calculs de Schwarzschild et Härm indiquent une instabilité plus énergique : dès qu'elle s'installe, elle grandit plus rapidement avec la masse.

La différence de comportement est due à deux facteurs principaux : le premier provient de la faible sensibilité des réactions nucléaires à la température dans nos étoiles alors que, dans les modèles de Schwarzschild et Härm, ϵ varie comme ρT^{14} .

La seconde cause réside dans le fait que $\frac{\xi_{\text{SURFACE}}}{\xi_{\text{CENTRE}}}$ etc., varient plus lentement dans nos étoiles massives que dans les étoiles massives ordinaires, l'instabilité apparaissant pour une valeur de β_c plus faible que celle correspondant à l'instabilité des modèles de Schwarzschild-Härm.

CONCLUSIONS

En 1959, Schwarzschild et Härm ont étudié la stabilité vibrationnelle d'étoiles massives possédant une composition chimique représentative des abondances moyennes observées dans l'univers : 75 pour-cent en masse d'hydrogène, 22 pour-cent d'hélium et 3 pour-cent d'éléments plus lourds. Leurs modèles sont essentiellement du même type que ceux utilisés dans le présent travail. Ces auteurs ont obtenu une masse critique comprise entre 60 et 65 masses solaires. Toutefois, ils ont estimé la dissipation due aux ondes progressives pour des conditions photosphériques de température et de densité, ce qui, nous l'avons dit dans notre chapitre V, exagère l'action stabilisante de ces ondes. Mais, si l'on adopte des valeurs coronales pour ρ et T , ce qui est certainement plus réaliste, la masse critique se réduira à une valeur comprise entre 55 et 60 masses solaires.

Notons que les effets de l'instabilité vibrationnelle ne sont jamais catastrophiques. Si nous considérons une étoile dépassant nettement la masse critique de Schwarzschild et Härm, 100 masses solaires par exemple, nous savons que, sur la séquence principale, cette étoile serait fortement instable, l'amplitude croissant d'un facteur e en un millier d'années. Mais, en fait, une telle étoile n'atteindra pas la séquence principale à la position d'équilibre calculée à partir des modèles hydrostatiques. Au cours de sa contraction gravifique, l'instabilité vibrationnelle se manifesterait au moment où les réactions nucléaires contribueront suffisamment à la luminosité, c'est-à-dire un peu avant l'arrivée prévue sur la séquence principale. A partir de ce moment, l'étoile continuera à se contracter en oscillant et elle tendra à revenir vers la masse critique, en per-

dant progressivement de la matière. Ce phénomène prendra quelques milliers d'années et n'aura pas un caractère cataclysmique. L'étoile sera peut-être encore vibrationnellement instable à son arrivée sur la séquence principale, mais elle aura déjà diminué quelque peu son instabilité. L'observation suggère d'ailleurs l'existence de quelques étoiles atteignant 95 masses solaires mais il n'est pas du tout exclu qu'elles soient entourées d'une enveloppe en expansion, témoin de l'éjection de matière. L'article de Schwarzschild et Härm contient une remarque concernant la masse critique d'étoiles « d'hydrogène pur » qu'ils estiment égale à 85 masses solaires. En fait, il s'agit d'étoiles où l'abondance d'hélium est réduite à zéro, celle des éléments plus lourds restant égale à trois pour-cent. Elles contiennent donc 97 % d'hydrogène. Dans ce cas, l'accroissement de la masse critique est simplement dû à la diminution de poids moléculaire moyen.

C'est là un problème tout à fait distinct de celui que nous avons traité : en effet, nous avons voulu étudier la stabilité d'étoiles formées initialement d'hydrogène rigoureusement pur, les autres éléments n'apparaissant qu'à l'état de traces dues à leur formation à partir de l'hydrogène lui-même (10^{-3} en masse d'hélium, 10^{-11} de carbone, d'oxygène et d'azote). Sur cette base, nous avons trouvé que, sur la séquence principale, la masse maximum d'une étoile vibrationnellement stable est comprise entre 250 et 300 fois la masse du soleil. Cette valeur est nettement différente de celle qui avait été trouvée dans un travail précédent [4] où l'on avait utilisé l'approximation du modèle standard et où l'on ignorait l'apparition du cycle du carbone. La valeur obtenue à l'époque était d'un millier de masses solaires. L'écart entre les deux résultats provient essentiellement du fait que, pour une masse donnée, le rapport de l'amplitude des oscillations à la surface à leur amplitude dans la région centrale est considérablement plus grand dans le modèle standard que dans nos modèles convectifs. Par exemple, dans une étoile de 320 masses solaires répondant au modèle standard, le rapport vaut 2,41 alors que, dans l'étoile de 306 masses solaires

étudiée dans ces pages, il n'est que de 1,58. Comme le terme stabilisant $\frac{d}{dm} \left(\frac{\delta L}{L} \right) \cdot \frac{\delta T}{T}$ prend la plus grande importance dans les couches extérieures, on conçoit bien qu'une étoile de cette masse puisse être stable si elle répondait au modèle standard alors que chez nous, elle est instable.

Le temps caractéristique d'instabilité $\tau = |(\sigma')^{-1}|$, durée nécessaire pour accroître l'amplitude d'un facteur e , est de l'ordre de 10^{12} secondes, ce qui est comparativement long, et il varie peu avec la masse considérée : pour l'étoile de 306 masses solaires, il vaut $6,4 \times 10^{12}$ secondes et dans celle de 6645 masses solaires, 10×10^{12} secondes. Ce temps n'est pas très différent des temps caractéristiques de la contraction gravifique. Ainsi, l'étoile va avoir une évolution du même genre que celle décrite plus haut pour les étoiles de composition chimique usuelle. D'autre part, nos étoiles sont le siège d'une production continue de carbone qui ne devient appréciable qu'aux environs immédiats de la séquence principale. Si on les maintient dans les conditions de leur modèle d'équilibre, le temps nécessaire pour doubler l'abondance de carbone est d'environ 5×10^{10} secondes. Cependant, l'accroissement important de la quantité de carbone tendra à déplacer l'équilibre vers de plus basses températures, évolution qui, à son tour, diminuera assez rapidement le rythme de l'accumulation de carbone. Il est vraisemblable que le temps nécessaire pour modifier significativement les abondances de carbone et d'hélium sera beaucoup plus long que 10^{10} secondes et sans doute ces durées seront-elles du même ordre que le temps τ caractéristique de l'instabilité vibrationnelle.

Par ailleurs, quand l'abondance du carbone s'accroît et que la température diminue, le cycle du carbone et la chaîne proton-proton deviennent plus sensibles à la température et l'instabilité vibrationnelle tendra à s'accroître, τ diminuant. Ainsi, il semble qu'après avoir atteint la séquence principale, les étoiles de masse supérieure à la masse critique évolueront tout en oscillant, avec des taux comparables pour l'évolution et pour l'amplification des pulsa-

tions. Dans la suite, le rythme d'évolution séculaire doit se ralentir tandis que l'accroissement des amplitudes d'oscillation devient plus rapide. Quand ce dernier effet conduira, aux phases d'expansion (ξ positif) à des vitesses du même ordre de grandeur que la vitesse d'échappement, il permettra aux étoiles d'expulser des couches successives de matière afin de réduire leur masse à une valeur inférieure à la masse critique. Les étoiles fortement instables vis-à-vis des oscillations perdront donc de la masse, tant pendant la contraction conduisant à la séquence principale que pendant l'évolution ultérieure. Comme, dans les couches extérieures, la vitesse de libération n'augmente que lentement avec la profondeur alors que la vitesse d'oscillation ne diminue que faiblement, une couche représentant quelques millièmes de la masse totale pourrait être expulsée en une seule oscillation. Ce phénomène, sans être catastrophique, se répétera néanmoins de nombreuses fois et sera assez spectaculaire. Il est bien évident qu'une telle évolution sera fort différente de l'évolution habituelle de la séquence principale vers les géantes.

Les étoiles dont la masse est inférieure à la valeur critique de $260 M_{\odot}$ deviendront elles-mêmes instables au cours de leur évolution puisque M_c va en diminuant avec le temps. Même une étoile de $50 M_{\odot}$ qui ne contient pas de C^{12} sur la séquence principale par suite de sa température relativement faible mais qui en accumulera quand He^4 sera assez abondant, pourrait bien avoir une évolution du type précédent.

Il est certainement exclu que l'évolution de nos étoiles les conduise aux objets étudiés par Schwarzschild et Härm. Ceux-ci ont une température centrale de 40 millions de degrés. Pour que nos étoiles atteignent cet état, leur température doit diminuer considérablement, ce qui entre bien dans le cadre des remarques que nous venons de faire, mais alors il faudra un temps extrêmement long pour accumuler 3 pourcent en masse de carbone. Au rythme calculé dans les conditions d'équilibre, il faudrait 10^{19} secondes soit 3×10^{11} années ! La diminution de température ne favorisera pas la production de carbone.

L'évolution des étoiles vibrationnellement stables se fera par une accumulation progressive d'hélium et d'un peu de carbone accompagnée d'une diminution de température. Quand l'hélium sera assez abondant, la réaction 3α jouera un rôle important dans la génération d'énergie, ne produisant cependant pas assez de carbone pour atteindre la composition des étoiles normales. La forte sensibilité de la chaîne 3α à la température fera décroître la masse critique vis-à-vis des oscillations radiales jusqu'à une valeur très faible, peut-être une dizaine de fois la masse du soleil.

Dans le cadre d'une théorie de la formation des éléments chimiques à partir d'hydrogène pur dans les étoiles, il serait très utile de poursuivre la discussion actuelle de leur évolution, passé les points critiques que nous avons soulevés dans ce travail.

Nous tenons à remercier M. le Professeur P. Ledoux pour ses nombreux conseils et les fructueuses discussions que nous avons eues ensemble.

Nous remercions également M. le Professeur P. Swings pour l'hospitalité de l'Institut d'Astrophysique, M. Linsman pour l'aide que nous avons trouvée au Centre de Calcul de l'Université et l'I. I. S. N. pour le mandat qu'il a bien voulu nous accorder.

APPENDICE A

CALCUL DES MODÈLES D'ÉTOILES

(voir Chapitre I)

La façon la plus pratique d'intégrer les équations différentielles ou les systèmes d'équations différentielles à l'aide de machines à calculer électroniques consiste à employer la méthode de Runge-Kutta ou l'une de ses variantes.

La système d'équations différentielles de la structure interne a été intégré par la méthode de Runge-Kutta-Gill à l'aide du calculateur du Centre de Calcul de l'Université.

Les équations (1.11) du noyau convectif ont été intégrées avec un pas différent suivant la valeur de β_c , allant de 0,01 pour $\beta_c = 0,9$ à 0,1 pour $\beta_c = 0,1$. Le point de départ de l'intégration est en $x^* = 0,01$. Les valeurs des fonctions p^* , q^* et t^* sont calculées à l'aide du développement en série

$$p^* = 1 + \sum_i P_i^* x^{*i}, \quad t^* = 1 + \sum_i T_i^* x^{*i}, \quad q^* = \sum_i Q_i^* x^{*i},$$

$$P_1^* = P_3^* = Q_2^* = Q_4^* = T_1^* = T_3^* = 0,$$

$$Q_3^* = \frac{1}{3} \beta_c, \quad P_2^* = -\frac{1}{6} \beta_c^2, \quad T_2^* = \frac{(4 - 3\beta_c) P_2^*}{(16 - 12\beta_c - 1,5\beta_c^2)}$$

$$B_2^* = (1 - \beta_c) (P_2^* - 4T_2^*), \quad Q_5^* = \frac{P_2^* \beta_c + P_2^* - 3T_2^* Q_3^*}{5},$$

$$P_4^* = \frac{-Q_5^* \beta_c - P_2^* Q_3^* \beta_c - B_2^* Q_3^* - 2P_2^* T_2^*}{4},$$

$$T_4^* = \{-6B_2^* P_2^* + 4(4 - 3\beta_c) P_4^* + 2(4 - 3\beta_c) P_2^* T_2^* + 24B_2^* T_2^* - 2T_2^* P_2^* (16 - 12\beta_c - 1,5\beta_c^2) + 6\beta_c B_2^* T_2^*\} \{4(16 - 12\beta_c - 1,5\beta_c^2)\}^{-1}.$$

Les équations (1.13) de l'enveloppe radiative ont été intégrées avec des pas de 0,005. Les valeurs des fonctions au point ($x = 0,96$) de départ de l'intégration sont calculées à l'aide des formules dérivées des équations (1.13) en admettant que la masse de la couche allant de $x = 0,96$ à $x = 1$ est négligeable devant la masse de l'étoile, si bien que $m(r)$ est égal à M . On a alors

$$t' = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} - 1 \right), \quad p' = \frac{t'^4}{4C'}, \quad q' = 1$$

Dans le noyau convectif, on peut calculer $U, V, (n + 1), U', V', (n + 1)'$. Dans l'enveloppe, le formalisme employé ne permet pas de calculer β avant le raccordement avec le noyau convenable et l'on ne peut pas calculer U, V et $(n + 1)$. Le raccordement du noyau et de l'enveloppe se fait dans le système $U', V', (n + 1)'$ en recherchant la valeur du paramètre C' correspondant à β_c .

Le calcul d'un modèle complet composé d'un noyau convectif et de l'enveloppe radiative correspondante nécessitait le calcul de quatre ou cinq intégrations intermédiaires. De même, pour trouver la valeur de T_c répondant à l'équation

$$\int_0^M \varepsilon \, dm = L$$

il fallait faire également avec la machine électronique quelques quadratures intermédiaires.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE PULSATION

(Chapitre IV)

Les équations (4.8) et (4.9)

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} - 3\xi \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\delta P}{P} \right) = \frac{V}{x} \left[\frac{\delta P}{P} + \left(4 + \omega^2 \frac{x^3}{q} \right) \xi \right]$$

ont été intégrées par la méthode de Runge-Kutta. Préalablement à cette intégration, il a fallu recalculer q , Γ_1 et V à partir des valeurs p^* , q^* , t^* , β , p' , q' , t' fournies par le calcul des modèles.

On procède souvent comme suit : s'étant donné une valeur d'essai ω^2 , on intègre les équations du centre jusqu'à un point donné. On les intègre aussi jusqu'à ce point en partant de la surface. Les deux solutions ne se raccordant pas, on reprend une nouvelle valeur ω^2 jusqu'à ce que l'on arrive à un raccordement.

Disposant d'un calculateur électronique, nous avons opéré différemment : nous avons intégré du centre jusqu'à la surface.

Très près de celle-ci, $|\xi|$ et $\left| \frac{\delta P}{P} \right|$ finissent par grandir indéfiniment. Après plusieurs essais, on arrive à une solution où $|\xi|$ et $\left| \frac{\delta P}{P} \right|$ ne commencent à grandir indéfiniment que très près de la surface. La solution ainsi trouvée est la même aux cinq premiers chiffres significatifs que la solution exacte, sauf près de la surface. On calcule alors les valeurs de ξ et $\frac{\delta P}{P}$ par développement en série

à partir de la surface au point d'arrêt de la solution venant du centre et en quelques points plus extérieurs. On vérifie aussi qu'au point de raccordement, la quantité

$$\frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dx}$$

est bien continue. Avec une douzaine d'essais, on obtient ω^2 avec cinq chiffres exacts.

Le point de départ de l'intégration centrale peut être pris au centre même, où $\frac{d\xi}{dx}$ et $\frac{d}{dx} \left(\frac{\xi P}{P} \right)$ sont nulles. Ceci n'enlève guère de précision numérique à l'intégration. Si l'on veut partir d'un point différent du centre, on utilise le développement :

$$\xi = \sum_i a_i x^i$$

avec $a_0 = 1$ si l'on pose $\xi(x = 0)$ égal à 1 ; on a aussi

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = -\frac{6}{10} P_2^* \frac{p_c}{t_c^2} - \frac{6}{10} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \beta} \frac{B_2^* p_c}{\Gamma_1 t_c^2} + \frac{8 P_2^* p_c}{10 \Gamma_1 t_c^2} + \frac{2 \omega^2 P_2^*}{10 Q_3^* t_c}$$

Les valeurs superficielles sont calculées à l'aide du développement

$$\xi = \sum_i c_i z^i, \quad z = 1 - x$$

$$\text{Si l'on pose } \xi(x = 1) = 1, \quad \alpha = 3 - \frac{4}{\Gamma_1}$$

$$c_0 = 1.$$

$$c_1 = \alpha - \frac{\omega^2}{\Gamma_1},$$

$$c_2 = \frac{1}{5} \left[\left(2\alpha + 4 - \frac{2\omega^2}{\Gamma_1} \right) c_1 + \frac{6\omega^2}{\Gamma_1} \right] = \frac{4\alpha}{10} (c_1 + 2) - \frac{4\omega^2}{10\Gamma_1} (c_1 - 1)$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{9} \left[\left(10 + 2\alpha - \frac{2\omega^2}{\Gamma_1} \right) c_2 + \left(6 \frac{\omega^2}{\Gamma_1} - 2 \right) c_1 - \frac{6\omega^2}{\Gamma_1} \right] = \\ &= \frac{4\alpha}{18} (c_2 + 2c_1 + 3) - \frac{4\omega^2}{18\Gamma_1} (c_2 - c_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= \frac{1}{14} \left[\frac{2\omega^2}{\Gamma_1} - \frac{6\omega^2}{\Gamma_1} c_1 + \left(\frac{6\omega^2}{\Gamma_1} - 5 \right) c_2 + \left(18 + 2\alpha - \frac{2\omega^2}{\Gamma_1} \right) c_3 \right] = \\
&= \frac{\alpha}{7} [c_3 + 2c_2 + 3c_1 + 4] - \frac{\omega^2}{7\Gamma_1} [c_3 - c_2]
\end{aligned}$$

Pour que toute la solution soit rapportée à la valeur centrale de ξ prise comme unité, il suffit de multiplier les valeurs obtenues par le développement par le rapport, calculé au point de raccordement ($x = 0,90$), de ξ calculé par l'intégration à ξ fourni par le développement.

RÉFÉRENCES

- [1] LEDOUX P., *Astrophysical Journal*, **94**, 537, 1941.
- [2^a] SCHWARZSCHILD M. et HÄRM R., *Astrophysical Journal*, **128**, 348, 1958.
- [2^b] SCHWARZSCHILD M. et HÄRM R., *Astrophysical Journal*, **129**, 637, 1959.
- [3] EDDINGTON A., *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge, 1926.
- [4] LEDOUX P. et BOURY A., *Mém. Soc. Roy. Liège*, 5^e Série, **3**, 298, 1960.
- [5] LEVÉE R. D. et HILTON P. L., *Mém. Soc. Roy. Sc. Liège*, 5^e Série, **3**, 514, 1960.
- [6] EZER D., *Astrophysical Journal*, **133**, 159, 1951.
- [7] BOURY A. et HUSTIN-BRETON M., *Bull. Acad. Roy. Belg.*, 5^e Série, **47**, 543, 1961.
- [8] CHANDRASEKHAR S., *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Univ. of Chicago Press, 1938.
- [9] CHANDRASEKHAR S., *The Structure, the Composition and the Source of Energy of the Stars*, dans *Astrophysics*, publié sous la direction de J. A. Hynek, Mc Graw Hill, New York, 1951.
- [10] SCHWARZSCHILD M., *Structure and Evolution of the Stars*, Princeton, 1958.
- [11] WRUBEL M. H., *Stellar Interiors*, dans le volume 51 du *Handbuch der Physik*, publié sous la direction de S. Flügge, Springer, Berlin, 1958.
- [12] BOURY A., *Bull. Soc. Roy. Sc. Lg.*, 29^e année, 11-12, 306, 1960.
- [13] BURBIDGE E. M., BURBIDGE G. R., FOWLER W. A. et HOYLE F., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 547, 1957.
- [14] CAMERON A. G. W., *Stellar Evolution, Nuclear Astrophysics and Nucleogenesis*, Atomic Energy of Canada, Chalk River, Ontario, 1957.
- [15] GAMOW G. et CRITCHFIELD C. L., *Theory of Atomic Nucleus and Nuclear Energy Sources*, Clarendon, Oxford, 1949.
- [16] GAMOW G. et TELLER E., *Phys. Rev.* **53**, 608, 1938.
- [17] BETHE H. A., *Phys. Rev.*, **55**, 1261, 1939.
- [18] SALPETER E. E., *Phys. Rev.*, **88**, 547, 1952.
- [19] SALPETER E. E., *Phys. Rev.*, **97**, 1237, 1955.
- [20] SALPETER E. E., *Phys. Rev.*, **107**, 516, 1957.
- [21] REEVES H. et SALPETER E. E., *Phys. Rev.*, **116**, 1505, 1959.
- [22] FOWLER W. A., *Mém. Soc. Roy. Sc. Lg.* 4^e Série, **14**, 88, 1954.
- [23] BOSMAN-CRESPIN D., FOWLER W. A. et HUMBLET J., *Bull. Soc. Roy. Sc. Lg.*, 23^e année, 9-10, 328, 1954.
- [24] FOWLER W. A., BURBIDGE G. R. et BURBIDGE E. M., *Astrophysical Journal Suppl.*, **2**, 167, 1955.
- [25] MARION J. B. et FOWLER W. A., *Astrophysical Journal*, **125**, 221, 1957.

- [26] FOWLER W. A. et CAUGHLAN G. R., *Astrophysical Journal*, **136**, 453, 1962.
- [27] FOWLER W. A., *Astrophysical Journal*, **127**, 551, 1958.
- [28] FOWLER W. A., *Mém. Soc. Roy. Sc. Lg.*, 5^e Série, **3**, 207, 1960.
- [29] HOYLE F., *Astrophysical Journal Suppl.*, **1**, 121, 1954.
- [30] CAMERON A. G. W., *Astrophysical Journal*, **130**, 430, 1959.
- [31] BURBIDGE G. R., Cours d'été de Varenna, 1962 (à paraître).
- [32] BROMLEY D. A. et al., *Phys. Rev.* **105**, 957, 1957.
- [33] STROMINGER D., HOLLANDER J. M. et SEABORG G. I., **30**, 585, 1958.
- [34] HEBBARD D. F. et VOGL J. L. — *Nucl. Phys.*, **21**, 652, 1960.
- [35] HEBBARD D. F. et POVH B., *Nucl. Phys.*, **13**, 642, 1953.
- [36] HENYEV L. G., LELEVIER R. et LEVÉE R. D., *Publ. Astr. Soc. Pac.*, **67**, 396, 1955.
- [37] HAYASHI C., *Publ. Astr. Soc. Japan*, **13**, 450, 1961.
- [38] CAMERON A. G. W. et EZER D., Réunion de l'*Amer. Astron. Soc.* New Haven, 1962.
- [39] CAMERON A. G. W., *Phys. Rev.*, **93**, 932, 1954.
- [40] CAMERON A. G. W., *Astrophysical Journal* **121**, 144, 1955.
- [41] CAMERON A. G. W., *Phys. Rev.*, **99**, 1653, 1955.
- [42] CAMERON A. G. W., *Bull. Phys. Society*, **1** (Sér. II), 191, 1956.
- [43] DUMEZIL-CURIEN P. et SCHATZMAN E., *Annales d'Astrophysique* **14**, 461, 1950.
- [44] SCHATZMAN E., *Annales d'Astrophysique*, **16**, 162, 1953.
- [45] GAMOW G. et SCHOENBERG M., *Phys. Rev.*, **59**, 539, 1959.
- [46] CHIU H. Y. et MORRISON P., *Phys. Rev. Lett.*, **5**, 573, 1960.
- [47] CHIU H. Y. et STABLER R., *Phys. Rev.*, **122**, 1317, 1961.
- [48] CHIU H. Y. — *Phys. Rev.*, **123**, 1040, 1962.
- [49] GELL-MANN M., *Phys. Rev. Lett.*, **6**, 70, 1961.
- [50] ROSSELAND S., *Pulsation Theory of Variable Stars*, Oxford, 1946.
- [51] LEDOUX P. et WALRAVEN Th., *Variable Stars*, dans le vol. 51 du *Handbuch der Physik*, Springer, Berlin, 1958.
- [52] LEDOUX P., *Stellar Stability*, dans le vol. 51 du *Handbuch der Physik*, Springer, Berlin, 1958.
- [53] LEDOUX P., Dans le *Compendium* publié sous la direction de G. Kuiper (à paraître).
- [54] LEDOUX P., Cours d'été à Varenna, 1962 (à paraître).
- [55] LEDOUX P., *Astrophysical Journal*, **104**, 133, 1946.
- [56] MARTIN Y., Mémoire de licence en Sciences Physiques, Liège, 1962 (non publié).
- [57] LEDOUX P. et WHITNEY C. A., *Nuovo Cimento*, N° 1 del Supplemento al Vol. **22**, Sér. X, 131, 1962.
- [58] SAMPSON D. H., *Astrophysical Journal*, **129**, 734, 1958.