MÉMOIRES
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES
DE LIÈGE

CINQUIÈME SÉRIE
TOME XI
FASCICULE 1

LE PROBLÈME DU QUOTIENT DANS LES CATÉGORIES

PAR

JACQUES MERSCH
Chargé de Recherches du F. N. R. S.

PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS DE LA FONDATION UNIVERSITAIRE DE BELGIQUE,
DU MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA CULTURE
ET DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ :
UNIVERSITÉ
7 PLACE DU XX AOÛT
LIÈGE. BELGIQUE

LE PROBLÈME DU QUOTIENT DANS LES CATÉGORIES

PAR

JACQUES MERSCH
Chargé de Recherches du F. N. R. S.

Ce mémoire reprend la deuxième partie de notre thèse de doctorat, défendue le 3 avril 1963 à l'Université de Liège.

Cependant, nous avons ramené le cadre logique à la théorie classique des ensembles de Zermelo-Fraenkel et adopté la définition des ordinaux due à Robinson.

Ceci a été rendu possible par l'introduction d'un chapitre sur les microcosmes, inspiré d'ailleurs des ensembles inaccessibles de Tarski [21] (*) et des univers de Grothendieck [12].

Le problème abordé ici est un problème de structure algébrique des catégories. Cette structure est notamment utilisée en cohomologie non abélienne [5] et dans la théorie des espaces fibrés [4].

Le problème du quotient dans les catégories revêt aussi l'intérêt suivant. Si nous distinguons les « petites » catégories dont les éléments forment un ensemble et qui servent d'auxiliaires pour définir certains concepts (diagrammes, limites inductives, faisceaux, etc.), et les catégories qui sont en elles-mêmes un objet d'étude, nous constatons que ces dernières sont en pratique, soit des catégories dont les objets sont les ensembles munis d'une certaine structure et dont les éléments sont les homomorphismes (par exemple les catégories des groupes ou des espaces topologiques), soit des quotients de celles-ci (par exemple la catégorie des espaces de Hopf [7]).

Le but de notre travail a été d'introduire l'étude de cette question qui pose encore d'importants problèmes, comme celui de caractériser les injections et les surjections dans les espaces de Hopf. Signalons en passant que les problèmes traités dans cette thèse sont indépendants des catégories quotients définies par A. Grothendieck pour généraliser le langage modulo C de J. P. Serre [13].

(*) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

Au chapitre I, après avoir défini les microcosmes et en avoir donné les premières propriétés, nous rappelons les notions générales concernant les catégories.

Nous introduisons alors l'étude des endomorphismes constants et des objets ponctuels, ce qui nous permettra de donner, au chapitre III, un critère d'existence de solutions aux problèmes universels.

Au chapitre II, nous étudions la notion d'espèce de structure, déjà définie par N. Bourbaki dans un cadre restreint et complexe [2], et améliorée par P. Dedecker [6].

Les espèces de structures nous permettent de donner un sens géométrique aux problèmes universels. Nous pouvons alors définir les objets libres, étendant à une catégorie quelconque la notion de groupe libre, et étudier leurs rapports avec les foncteurs adjoints de D. M. Kan [15].

Le chapitre IV est consacré aux équivalences sur les objets d'une catégorie représentée. Nous y donnons une définition intrinsèque de la saturation.

Une équivalence sur un objet pose un problème universel à la solution duquel nous attribuons le nom de quotient. Dans les catégories particularisées (ensembles, groupes, espaces topologiques, etc.), on retrouve d'ailleurs la définition usuelle. Nous en étudions les premières propriétés, démontrant notamment la transitivité des quotients et leur existence dans le cas des structures covariantes, théorème d'où l'on peut tirer une preuve de l'impossibilité de transporter de manière fonctorielle une structure de groupe par une application.

Toute surjection ne déterminant pas un quotient, nous avons introduit, au chapitre V, les quotients successifs d'ordre α. Nous en avons déduit des critères d'existence des bornes inférieures et supérieures d'une famille de surjections de même source.

Enfin, le dernier chapitre concerne la catégorie des catégories. Nous montrons que toute équivalence y admet un quotient qui est un objet-libre engendré par un système multiplicatif, et complétons ainsi les résultats de Maria Hasse [14]. Nous y étudions également les conditions pour que la catégorie quotient ait pour classe sous-jacente le quotient ensembliste.

Depuis notre défense de thèse, dans son séminaire de Topologie et de Géométrie Différentielle, C. Ehresmann a étudié des questions fort voisines, surtout de celles de notre dernier chapitre. Nous avons jugé utile d'indiquer en note sa terminologie.

Nous tenons à témoigner notre profonde gratitude à Monsieur le Professeur O. Rozet qui a eu la bienveillance d'accepter de patronner nos recherches. Il a confié la direction de nos travaux à Monsieur le Professeur P. Dedecker que nous remercions vivement pour l'intérêt qu'il y a porté et les suggestions qu'il nous a faites. Nous ne saurions assez remercier Monsieur le Professeur L. Nollet qui a accepté la tâche ingrate de revoir notre manuscrit et nous a conseillé maintes améliorations. Que le Fonds National de la Recherche Scientifique trouve ici l'expression de notre reconnaissance pour l'octroi de son mandat d'Aspirant qui nous a permis de préparer ce mémoire.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS

1.1. — **Microcosmes.**

1.1.1. — En théorie des catégories, on utilise couramment des expressions comme *la catégorie des groupes* ou *la catégorie des ensembles*. Mais ces concepts ne sont pas définis en toute généralité, puisqu'on ne peut parler par exemple de l'ensemble des groupes. Pour garder une certaine précision, il semble donc nécessaire de limiter son champ d'action et de considérer seulement, au lieu de la totalité des groupes, un certain ensemble de groupes. L'ennui est que les opérations usuelles font facilement sortir de l'ensemble primitivement considéré.

Les microcosmes, tout comme les univers de Grothendieck [12] dont ils sont inspirés, sont des ensembles qui jouissent de propriétés particulières, choisies pour éviter la plupart des difficultés dont nous venons de parler.

DÉFINITION 1.1.2. — *Un microcosme* $\mathfrak{M}$ *est un ensemble tel que si* X *appartient à* $\mathfrak{M}$, *alors les éléments de* X, *l'ensemble des parties de* X *et les parties de* $\mathfrak{M}$ *équipotentes à* X *appartiennent aussi à* $\mathfrak{M}$.

Remarque. — Un *univers* de Grothendieck est un microcosme tel que si X est un élément de $\mathfrak{M}$, l'ensemble union des éléments de X appartient à $\mathfrak{M}$ (*).

(*) Il faut aussi que le couple (X, Y) appartienne à $\mathfrak{M}$ si et seulement si X et Y sont des éléments de $\mathfrak{M}$. Mais la définition du couple adoptée ici — $(X, Y) = \{X, \{X, Y\}\}$ — permet de se passer de cette condition (cf. note (*) p. 17).

DÉFINITION 1.1.3. — *Le cardinal* $\mathfrak{m}$ *associé à un microcosme* $\mathfrak{M}$ *est la borne supérieure des cardinaux des éléments de* $\mathfrak{M}$.

La proposition suivante résume les principales opérations pour lesquelles un microcosme est en quelque sorte fermé. Nous y désignons, par $\mathrm{pr}_1 X$, l'ensemble $\{x \mid (\exists y)\,[(x, y) \in X]\}$, par $\mathrm{pr}_2 X$, l'ensemble $\{x \mid (\exists\, y)\,[(y, x) \in X]\}$, par X^Y, l'ensemble des applications de Y dans X, par $\{X\}$, l'ensemble à un seul élément : X, par card X, le nombre cardinal de X, par $\mathfrak{P}(X)$ l'ensemble des parties de X, par **N** et $\varnothing$ respectivement, l'ensemble des entiers non négatifs et l'ensemble vide, par $\cup$, $\prod$ et sup, les symboles de l'union du produit et de la borne supérieure.

PROPOSITION 1.1.4. — *Si* $\mathfrak{M}$ *est un microcosme de cardinal associé* $\mathfrak{m}$, *alors*

1° $\mathfrak{M}$ *contient tous les ordinaux inférieurs à* $\mathfrak{m}$ *et, en particulier, s'il n'est pas vide, il contient* **N**.

2° $X \in \mathfrak{M} \Rightarrow X \subset \mathfrak{M}$, $\{X\} \in \mathfrak{M}$, *card* $X \in \mathfrak{M}$, $pr_i\, X \in \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2)$ *et le graphe de toute application de* X *dans* $\mathfrak{M}$ *appartient à* $\mathfrak{M}$.

3° $X \subset \mathfrak{M}$ *et card* $X < \mathfrak{m} \Rightarrow X \in \mathfrak{M}$.

4° X *et* $Y \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow (X, Y) \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow X \times Y \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow X^Y \in \mathfrak{M}$.

5° *si* $(X_i)_{i \in I}$ *est une famille d'éléments non vides de* $\mathfrak{M}$, *indexée par un ensemble* I *de* $\mathfrak{M}$, *alors* $\cup\, X_i \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow \prod X_i \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow$ *sup* (*card* X_i) $\in \mathfrak{M}$.

6° $\mathfrak{m}$ *est un cardinal dominant strictement supérieur au cardinal de chaque élément de* $\mathfrak{M}$.

Les définitions entraînent immédiatement les deux premières affirmations du 2° et la première du 4°. En effet, $X \in \mathfrak{M} \Rightarrow X \subset \mathfrak{M}$ est une autre manière d'exprimer que les éléments d'un ensemble de $\mathfrak{M}$ appartiennent à $\mathfrak{M}$ (transitivité de $\mathfrak{M}$). L'ensemble $\{X\}$ est un élément de $\mathfrak{P}\mathfrak{P}(X)$ et donc de $\mathfrak{M}$. Enfin le couple (X, Y) est l'ensemble à deux éléments $\{\{X\}, \{X, Y\}\}$ et, en tenant compte de la transitivité de $\mathfrak{M}$, on a bien $(X, Y) \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow X$ et $Y \in \mathfrak{M}$.

De même, le 3° résulte de la définition du cardinal associé $\mathfrak{m}$, car, si le cardinal de X est plus petit que $\mathfrak{m}$, il existe un élément Y de $\mathfrak{M}$ tel que X soit équipotent à une partie de Y, c'est-à-dire à un élément de $\mathfrak{P}(Y)$ et donc de $\mathfrak{M}$.

Revenons à l'ordre de l'énoncé. Si X est un élément de $\mathfrak{M}$, ce microcosme contient l'ensemble vide $\varnothing$ qui appartient à $\mathfrak{P}(X)$. Or $\varnothing$ est l'ordinal 0, nous pouvons dès lors appliquer le principe de la récurrence transfinie. Supposons que les ordinaux inférieurs à un ordinal α appartiennent à $\mathfrak{M}$. Comme ceux-ci sont exactement les éléments de α, cet ordinal est inclus dans $\mathfrak{M}$. Si α est de plus inférieur à $\mathfrak{m}$, il est élément de $\mathfrak{M}$ en vertu du 3°.

Enfin, si $\mathfrak{M}$ n'est pas vide, il contient un élément X et par suite aussi $\mathfrak{P}(X)$, $\mathfrak{P}\mathfrak{P}(X)$, etc. Comme le cardinal d'un élément de cette suite est strictement supérieur aux précédents, leur borne supérieure ne saurait être finie et $\mathfrak{m}$ est donc infini. En vertu de ce qui précède **N** est alors inclus dans $\mathfrak{M}$, ce qui achève la démonstration du 1°.

Le cardinal de X est le plus petit ordinal équipotent à X. Il est donc inférieur à $\mathfrak{m}$ et élément de $\mathfrak{M}$.

Si X appartient à $\mathfrak{M}$, $pr_i X$ est inclus dans $\mathfrak{M}$, car les projections d'un couple de $\mathfrak{M}$ sont des éléments de $\mathfrak{M}$. Or le cardinal de $pr_i X$ est inférieur ou égal à celui de X. Dès lors le 3° permet d'affirmer que $pr_i X$ appartient à $\mathfrak{M}$.

Avant de démontrer la dernière assertion du 2°, passons à la fin du 4°. De l'alinéa précédent on tire : $X \times Y \in \mathfrak{M} \Rightarrow X$ et $Y \in \mathfrak{M}$. D'autre part, si X et Y sont des éléments de $\mathfrak{M}$, $X \times Y$ est inclus dans $\mathfrak{M}$. Si X ou Y est infini, $\text{card}\,(X \times Y) = \sup\,(\text{card}\, X, \text{card}\, Y)$; sinon $X \times Y$ est fini. De toute manière, $\text{card}\,(X \times Y)$ est inférieur à $\mathfrak{m}$ et $X \times Y$ appartient donc à $\mathfrak{M}$.

La dernière affirmation du 4° résulte de ce que X^Y est équipotent à l'ensemble des graphes d'applications de Y dans X, qui forme une partie de $\mathfrak{P}(X \times Y)$, et de ce que X, Y, et F appartiennent à $\mathfrak{M}$ si et seulement si (X, Y, F) lui appartient.

Revenons au 2°. Le graphe de l'application $f = (\mathfrak{M}, F, X)$ est aussi celui de la corestriction $f' = (F(X), F, X)$ qui est un élément de $F(X)^X$.

Nous pouvons désormais passer à l'examen des deux derniers points. Le produit $\prod X_i$ est un ensemble d'applications de I dans $\cup X_i$; en vertu de ce qui précède on a donc : $\cup X_i \in \mathfrak{M} \Rightarrow \prod X_i \in \mathfrak{M}$. D'ailleurs, pour tout j dans I, le cardinal de X_j est inférieur à celui de $\prod X_i$: on peut en effet choisir un élément x_i dans chaque X_i et définir une injection $f : X_j \to \prod X_i$ en posant $f(x) = (y_i)_{i \in I}$, $y_j = x$ et $y_i = x_i$ pour $i \neq j$. Il en résulte que sup (card X_i) est inférieur ou égal à card $\prod X_i$ et est un élément de $\mathfrak{M}$. Pour fermer le cycle, il suffit de montrer la relation : sup (card $X_i) \in \mathfrak{M} \Rightarrow \cup X_i \in \mathfrak{M}$. Or on a : card $\cup X_i \leqslant$ card $I \times$ sup card X_i, $\cup X_i$ est donc équipotent à une partie du produit de deux ensembles de $\mathfrak{M}$ et lui appartient.

Enfin, si X est un élément de $\mathfrak{M}$, son cardinal étant strictement inférieur à celui de $\mathfrak{P}(X)$ est strictement inférieur à $\mathfrak{m}$ = sup card Y ($Y \in \mathfrak{M}$). De plus, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des cardinaux strictement inférieurs à $\mathfrak{m}$, en vertu du 4° $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ l'est aussi et $\mathfrak{m}$ est dominant.

1.1.5. — *Remarque.* — Si $\mathfrak{M}$ est un univers, le cardinal associé $\mathfrak{m}$ est fortement inaccessible, c'est-à-dire $\mathfrak{m}$ est dominant et, si une famille de cardinaux inférieurs à $\mathfrak{m}$ est indexée par un ensemble dont le cardinal est plus petit que $\mathfrak{m}$, sa borne supérieure ne peut être égale à $\mathfrak{m}$.

En effet, la borne supérieure d'une famille de cardinaux est l'union de ces cardinaux. Elle appartient donc à l'univers et doit être inférieure à $\mathfrak{m}$.

Or Kuratowski [16] a démontré que si l'on ajoutait l'axiome : *aucun cardinal n'est fortement inaccessible* à un système convenable d'axiomes, on ne changeait rien à la cohérence du système. Si l'on veut parler d'univers possédant un élément infini, on doit donc poser l'axiome :

Tout ensemble est élément d'un univers [12].

Mais cet axiome entraîne l'existence de cardinaux inaccessibles aussi grands que l'on veut. Or Tarski a démontré que cette hypothèse était suffisamment forte pour rendre redondants les axiomes de l'ensemble des parties et du choix [21].

D'autre part, même du point de vue pratique, l'axiome ci-dessus ne nous met pas à l'abri des difficultés : certaines opérations, utilisées dans la théorie des catégories, font encore sortir d'un univers donné. Par exemple, prendre l'ensemble des couples (X_0, Y) où X_0 est un élément fixe et où Y varie dans l'univers, ou prendre l'ensemble des applications de l'univers, de source X_0 (l'étoile de X_0).

Dès lors, il ne nous paraît pas utile d'introduire cet axiome tant qu'il ne se révélera pas indispensable, c'est pourquoi nous nous sommes limités à des microcosmes, car ils jouissent de la propriété suivante :

Théorème 1.1.6. — *Tout ensemble est élément d'un microcosme.*

Soit A un ensemble. Par récurrence ordinale transfinie, nous allons définir un microcosme qui contienne A pour élément. Dans cette construction, les lettres grecques représenteront des ordinaux. Posons :

$$A_0 = \{A\},$$
$$A_{\beta+1} = \{x \mid (\exists\, y)[y \in A_\beta \text{ et } (x \in y \text{ ou } x = \mathfrak{P}(y)]\},$$
$$B_0 = \cup\, A_\beta\ (\beta \in \mathbf{N}),$$
$$\aleph_\alpha = \sup \operatorname{card} x\ (x \in B_0),$$
$$B_{\beta+1} = \{x \mid x \subset B_\beta \text{ et } \operatorname{card} x < \aleph_\alpha\}$$

et, si γ est un ordinal limite,

$$B_\gamma = \cup\, B_\beta\ (\beta < \gamma),$$
$$\mathfrak{M} = B_{\aleph_{\alpha+1}}.$$

Nous allons montrer que $\mathfrak{M}$ est le plus petit microcosme contenant A et que son cardinal associé est $\aleph_\alpha$.

Si x est un élément de B_0, il existe un entier β tel que x appartienne à A_β. Mais alors, les éléments de x et l'ensemble des parties de x sont des éléments de $A_{\beta+1}$ et donc de B_0.

Désignons par $P(\xi)$ la propriété : $(\beta \leqslant \gamma \leqslant \xi) \Rightarrow [B_\beta \subset B_\gamma$ et

$(x \in B_\beta \Rightarrow x \subset B_\beta)]$, et montrons par récurrence transfinie qu'elle est vraie quel que soit l'ordinal ξ. En premier lieu, l'alinéa précédent entraîne $P(0)$. Ensuite $P(\xi)$ entraîne $P(\xi + 1)$, car, si x est un élément de B_ξ, il est inclus dans B_ξ par hypothèse, et de cardinal inférieur à $\aleph_\alpha$ par construction ; il appartient donc à $B_{\xi+1}$. D'ailleurs, si x est un élément de $B_{\xi+1}$, il est par construction inclus dans B_ξ dont nous venons de démontrer l'inclusion dans $B_{\xi+1}$. Enfin, si ζ est un ordinal limite et si $\xi < \zeta$ entraîne $P(\xi)$, alors $P(\zeta)$ est immédiatement vérifiée puisque $B_\zeta = \cup B_\xi$.

D'autre part, si x est un élément de B_β, il est équipotent à un élément de B_0 et le cardinal de $\mathfrak{P}(x)$ est ainsi inférieur à $\aleph_\alpha$. Or x est inclus dans un B_γ dont l'indice est inférieur à β. Les parties de x le sont aussi et appartiennent donc à B_β. Il en résulte que $\mathfrak{P}(x)$ est un élément de $B_{\beta+1}$, et même de B_β si β est un ordinal limite.

En résumé, pour tout ordinal limite β, si x appartient à B_β, les éléments de x et l'ensemble des parties de x appartiennent aussi à B_β. Pour montrer que $\mathfrak{M}$ est un microcosme, il reste à verifier que toute partie de $\mathfrak{M}$ dont le cardinal est inférieur à $\aleph_\alpha$, est un élément de $\mathfrak{M}$.

Soit Y une telle partie de $\mathfrak{M}$. Tout élément y de Y appartient donc à $\mathfrak{M}$ et figure dans un B_β d'indice β inférieur à $\aleph_{\alpha+1}$. Associons alors à y l'un de ces ordinaux β, par exemple le plus petit, que nous désignerons par β_y.

Appelons γ la borne supérieure des β_y $(y \in Y)$. Comme les B_β sont emboîtés, Y est inclus dans B_γ et appartient à $B_{\gamma+1}$. Or β_y est inférieur à $\aleph_{\alpha+1}$, son cardinal l'est donc aussi et, par suite, est inférieur ou égal à $\aleph_\alpha$. Dès lors, card γ est aussi inférieur ou égal à $\aleph_\alpha$ et $\gamma + 1$ est plus petit que $\aleph_{\alpha+1}$. Il en résulte que $B_{\gamma+1}$ est inclus dans $\mathfrak{M}$ et que Y est élément de $\mathfrak{M}$.

De toute évidence, le cardinal associé à $\mathfrak{M}$ est bien $\aleph_\alpha$. De plus, $\mathfrak{M}$ est le plus petit microcosme auquel A appartienne, car il doit contenir $A_0 = \{A\}$ et, s'il contient A_β ou B_β, il doit contenir

$A_{\beta+1}$ ou $B_{\beta+1}$. Par récurrence, on voit qu'il doit contenir tous les B_β, ce qui prouve en outre que leur suite transfinie est stationnaire (*).

1.1.7. — Dans ce qui suit, nous choisirons une fois pour toutes un microcosme $\mathfrak{M}$ qui contienne **N** et tout autre ensemble qui plaira au lecteur. Nous appellerons $\mathfrak{M}$-ensemble un élément de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}i$-ensemble (i pour inclusion) une partie de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$-groupe un groupe dont l'ensemble sous-jacent est un $\mathfrak{M}$-ensemble, $\mathfrak{M}i$-groupe un groupe dont l'ensemble sous-jacent est un $\mathfrak{M}i$-ensemble, etc.

1.2. — Systèmes multiplicatifs.

DÉFINITIONS 1.2.1. — *Un système multiplicatif* $\mathfrak{N}$ *est un ensemble* $\mathfrak{N}^o$ *muni d'une loi de composition* (m, n) $\rightsquigarrow$ mn *non nécessairement partout définie.*

Une unité est un élément idempotent (**) e *du système tel que, si un composé* me *ou* em *est défini, il est égal à* m.

Une unité à droite (resp. à gauche) d'un élément m *est une unité composable à droite (resp. à gauche) avec* m.

Un système multiplicatif $\mathfrak{N}$ *à unités est un système multiplicatif tel que tout élément possède au moins une unité à droite et une unité à gauche.*

Au lieu de dire que m appartient à l'ensemble $\mathfrak{N}^o$, nous dirons aussi que m appartient au système $\mathfrak{N}$.

(*) Si l'on adopte pour l'égalité un symbole primitif, ou si on l'introduit par voie de définition, ou si l'on adopte une autre définition des ordinaux et des cardinaux que celle de Robinson [19] adoptée ici, très peu de choses seront à changer dans l'énoncé ou la démonstration de la proposition 1.1.4 et du théorème 1.1.6. Il en sera de même si l'on adopte pour le couple la définition de Rosser [20] ou tout autre définition constructive. Mais si l'on introduit le couple, comme Bourbaki [2], par un symbole primitif, et si l'on ajoute à la définition de $\mathfrak{M}$ que le couple (X, Y) appartient à $\mathfrak{M}$ si et seulement si X et Y sont des éléments de $\mathfrak{M}$, on peut construire B_0 de telle sorte qu'il vérifie aussi cette propriété, mais rien n'empêchera qu'un ensemble X, inclus dans B_0 et de cardinal inférieur à $\aleph_\alpha$, soit un couple dont les projections aient un cardinal supérieur à $\aleph_\alpha$.

(**) Nous appelons idempotent un élément e composable avec lui-même et tel que ee = e.

1.2.2. — Étant donnée une suite ordonnée finie $m_1 \dots m_p$ d'éléments de $\mathfrak{N}^o$, il y a $(2p-2)! / p!(p-1)!$ manières de les composer en respectant l'ordre, mais ces composés ne sont pas nécessairement tous définis pour la loi de composition de $\mathfrak{N}$. Nous dirons que le système $\mathfrak{N}$ est

1° *faiblement associatif* si les composés qui sont définis sont égaux.

2° *associatif* si l'existence de l'un des composés entraîne l'existence et l'égalité de tous les autres. Il revient au même de l'exiger seulement des suites à trois éléments.

3° *fortement associatif* s'il est associatif et si l'existence des composés mn et np entraîne celle de (mn)p.

4° *Unitalement associatif* si, lorsque l'un des trois éléments m, n, p est une unité et que l'un des composés (mn)p ou m(np) est défini, l'autre l'est. Ils sont alors nécessairement égaux.

Dans un système multiplicatif unitalement associatif, un élément possède au plus une unité à droite et une unité à gauche. Si un composé mn y est défini, l'unité à droite de m et l'unité à gauche de n sont simultanément définies et sont alors égales ; il en est de même des unités à droite de n et de mn et aussi des unités à gauche de m et de mn.

Définition 1.2.3. — *Un système multiplicatif unitaire* (*) (en abrégé SMU) *est un système multiplicatif à unités, unitalement associatif.*

L'unique unité à droite (resp. à gauche) d'un élément m s'appelle alors *source* de m (resp. *but* de m) et se note souvent e_m (resp. ${}_me$), on écrit alors $m : e_m \to {}_me$ (**).

(*) Dans le séminaire de C. Ehresmann [8] un SMU est appelé graphe multiplicatif.

(**) Les notations de C. Ehresmann [8] sont $\alpha(m)$ et $\beta(m)$ au lieu de e_m et de ${}_me$.

1.3. — **Catégories.**

DÉFINITION 1.3.1. — *Une catégorie est un système multiplicatif à unités, fortement associatif.*

Les éléments d'une catégorie $\mathscr{A}$ sont appelés *morphismes* ; les unités de $\mathscr{A}$ forment un sous-ensemble $\mathscr{A}_e$ de $\mathscr{A}^o$. Si a et b sont des morphismes, le composé ab est défini si et seulement si $e_a = {}_be$.

Si ab est une unité, a est appelé *inverse à gauche* ou *rétraction* de b ; celui-ci est appelé *inverse à droite* ou *section* de a. Si a admet une rétraction et une section elles sont égales et notées a^{-1}. On dit alors que a est un *isomorphisme* ou une *isojection* et que a^{-1} (qui est aussi un isomorphisme) est son *inverse.*

Une catégorie dont tous les éléments admettent un inverse est appelée un *groupoïde* (*).

Si e et e′ sont deux unités telles qu'il existe un isomorphisme de source e et de but e′, on dit que e et e′ sont isomorphes et l'on écrit $e \sim e'$. Un morphisme simplifiable à gauche est appelé *monomorphisme* ou *injection*, un morphisme simplifiable à droite est appelé *épimorphisme* ou *surjection* et un morphisme simplifiable à droite et à gauche est appelé *bimorphisme* ou *bijection.*

Il est souvent commode de compléter la structure de $\mathscr{A}$ par la donnée d'un ensemble $\mathscr{A}_0$ en correspondance biunivoque avec l'ensemble des unités $\mathscr{A}_e$. Les éléments de $\mathscr{A}_0$ sont appelés *objets* de $\mathscr{A}$. Si A est un objet, l'unité correspondante se désigne par id_A et s'appelle identité de A ou application identique de A. Au lieu de $a : id_A \to id_B$, on écrit aussi $a : A \to B$. Ce sont alors A et B que l'on appelle la source et le but de a. Le couple $(\mathscr{A}, \mathscr{A}_0)$ se nomme alors *catégorie concrète.*

Les propriétés des unités peuvent se traduire, par l'intermédiaire de la correspondace biunivoque, en propriétés des objets et réciproquement. Nous convenons une fois pour toutes que ce qui

(*) Plusieurs auteurs appellent *groupoïde* ou *groupoïde partiel* ce que nous avons appelé système multiplicatif. Mais dans les ouvrages sur les catégories, ce mot est toujours entendu dans le sens de groupoïde de Brandt que nous lui donnons.

sera exigé des uns sera implicitement exigé des autres, ce qui nous permet de ne pas faire de distinction, dans le langage théorique, entre les mots *objet* et *unité*. Ceci ne change rien à la théorie et revient d'ailleurs à concrétiser la catégorie en prenant pour $\mathscr{A}_0$ l'ensemble $\mathscr{A}_e$ lui-même.

1.3.2. — Nous désignerons par $\mathscr{A}(A, B)$ le sous-ensemble de $\mathscr{A}^0$ formé des morphismes de source A et de but B. Il est alors aisé de voir qu'une catégorie est entièrement déterminée par la donnée

1° d'un ensemble $\mathscr{A}_0$ d'éléments appelés objets ;

2° pour tout couple (A, B) d'objets de $\mathscr{A}_0$, d'un ensemble $\mathscr{A}(A, B)$ d'éléments appelés morphismes, de telle manière qu'à deux couples distincts correspondent deux ensembles disjoints ;

3° d'une loi de composition des morphismes déterminée pour chaque triple (A, B, C) d'objets de $\mathscr{A}_0$, par une application $\mathscr{A}(A, B) \times \mathscr{A}(B, C) \rightarrow \mathscr{A}(A, C)$, de telle manière que la loi de composition soit associative et que pour tout objet A, $\mathscr{A}(A, A)$ contienne une unité.

On voit en outre que, dans une catégorie, $\mathscr{A}(A, A)$ est un monoïde unitaire.

1.3.3. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie déterminée par la loi $(a, b) \rightsquigarrow ab$. On appelle *catégorie duale* de $\mathscr{A}$, et l'on note $\mathscr{A}^*$, la catégorie qui a le même ensemble sous-jacent et est définie par la loi $(b, a) \rightsquigarrow b * a = ab$. Ceci revient à prendre $\mathscr{A}^*(A, B) = \mathscr{A}(B, A)$. On voit que $\mathscr{A}^{**} = \mathscr{A}$.

Nous dirons que deux propriétés sont *duales* si elles se déduisent l'une de l'autre par passage à la catégorie duale (ex. : être source de a et être but de a). Nous dirons qu'une propriété est *auto-duale* si elle est sa propre duale (ex. : être une unité).

1.3.4. — On définit une *topologie* sur $\mathscr{A}^0$ en prenant pour fermés les ensembles qui, avec un morphisme, contiennent sa source et son but. Lorsque nous parlerons de *connexion* dans une catégorie, c'est toujours à cette topologie que nous nous reférerons. Deux objets A et B de $\mathscr{A}$ appartiennent à la même composante connexe si et seulement s'il existe une suite finie $A_0, \ldots, A_n$ d'objets de $\mathscr{A}$ tels que $A_0 = A$, $A_n = B$ et $\mathscr{A}(A_i, A_{i+1}) \cup \mathscr{A}(A_{i+1}, A_i) \neq \varnothing$. Une *catégorie discrète* est donc une catégorie qui ne possède que des unités.

1.4. — Foncteurs.

DÉFINITION 1.4.1. — *Un foncteur covariant ou plus simplement un foncteur* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{L}$, *défini sur la catégorie* $\mathscr{A}$ *et à valeurs dans la catégorie* $\mathscr{L}$, *est une application* $\mathrm{F}^{\mathrm{o}} : \mathscr{A}^{\mathrm{o}} \to \mathscr{L}^{\mathrm{o}}$ *qui associe, à tout objet* A *de* $\mathscr{A}$, *un objet* $\mathbf{F}\mathrm{A} = \mathbf{F}^{\mathrm{o}}\mathrm{A}$ *de* $\mathscr{L}$, *et, à tout morphisme* a *de* $\mathscr{A}$, *un morphisme* $\mathbf{F}\mathrm{a} = \mathbf{F}^{\mathrm{o}}\mathrm{a}$ *de* $\mathscr{L}$, *de telle manière que* $\mathbf{F}(\mathrm{ab}) = \mathbf{F}\mathrm{a}\mathbf{F}\mathrm{b}$.

Ceci entraîne entre autres qu'au morphisme $\mathrm{a} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ soit associé un morphisme $\mathbf{F}\mathrm{a} : \mathbf{F}\mathrm{A} \to \mathbf{F}\mathrm{B}$ et que l'image d'un isomorphisme en soit un autre.

Un *foncteur contravariant* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{L}$ est une application $\mathrm{F}^{\mathrm{o}} : \mathscr{A}^{\mathrm{o}} \to \mathscr{L}^{\mathrm{o}}$ qui détermine un foncteur covariant $\mathscr{A}^* \to \mathscr{L}$ ou, ce qui revient au même, un foncteur covariant $\mathscr{A} \to \mathscr{L}^*$.

1.4.2. — Étant donnés deux foncteurs de variance quelconque $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{L}$ et $\mathbf{G} : \mathscr{L} \to \mathscr{P}$, on définit un *foncteur composé* $\mathbf{GF} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ par l'application $\mathbf{G}^{\mathrm{o}}\mathbf{F}^{\mathrm{o}}$. Si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ ont la même variance, le foncteur $\mathbf{GF}$ est covariant ; sinon il est contravariant.

La loi de composition $(\mathbf{G}, \mathbf{F}) \rightsquigarrow \mathbf{GF}$, définie ci-dessus, est associative et possède des unités. Elle détermine donc une structure de catégorie sur certains ensembles de foncteurs.

DÉFINITIONS 1.4.3. — *La catégorie* $\mathscr{C}$ *des* $\mathfrak{M}$*-catégories est celle dont les objets sont les* $\mathfrak{M}$*-catégories et dont les morphismes sont les foncteurs entre ces catégories.*

La catégorie $\mathscr{C}\mathrm{i}$ *des* $\mathfrak{M}\mathrm{i}$*-catégories est celle dont les objets sont* *les $\mathfrak{M}$i-catégories et dont les morphismes sont les foncteurs entre ces catégories.*

$\mathscr{C}$ est donc une $\mathfrak{M}$i-catégorie, mais $\mathscr{C}$i ne l'est point. Les foncteurs de $\mathscr{C}$ sont des $\mathfrak{M}$-foncteurs, mais les foncteurs de $\mathscr{C}$i ne sont pas des $\mathfrak{M}$i-foncteurs ; cependant leurs graphes sont des $\mathfrak{M}$i-ensembles.

1.4.4. — Un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{L}$ sera dit *fidèle* (resp. *pleinement fidèle*) si, pour tous les objets A et B de $\mathscr{A}$, l'application $\mathscr{A}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \rightarrow \mathscr{L}(\mathbf{FA}, \mathbf{FB})$, définie par $\mathrm{f} \leadsto \mathbf{F}\mathrm{f}$, est injective (resp. bijective).

Nous dirons que $\mathbf{F}$ *préserve* (resp. *copréserve*) les monomorphismes, les épimorphismes ou les isomorphismes si l'image (resp. l'image inverse) par $\mathbf{F}^{\mathrm{o}}$ d'un monomorphisme, d'un épimorphisme ou d'un isomorphisme en est un autre.

Si $\mathscr{A}$ est une $\mathfrak{M}$-catégorie, au lieu de dire que $\mathbf{F} : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{L}$ est un foncteur, nous dirons parfois que $\mathbf{F}$ est un *diagramme* de schéma $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}$.

1.4.5. — Soit $(\mathscr{A}_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}}$ une famille de catégories.

On appelle *catégorie produit*, et l'on désigne par $\prod \mathscr{A}_{\mathrm{i}}$, la catégorie dont les morphismes sont les familles $(\mathrm{a}_{\mathrm{i}})$ telles que, pour chaque i, a_{i} soit un élément de $\mathscr{A}_{\mathrm{i}}$, et dont la loi de composition est la suivante : le composé $(\mathrm{a}_{\mathrm{i}})\,(\mathrm{b}_{\mathrm{i}})$ est défini si et seulement si $\mathrm{a}_{\mathrm{i}}\mathrm{b}_{\mathrm{i}}$ l'est pour tout i dans $\mathscr{J}$, il vaut alors $(\mathrm{a}_{\mathrm{i}}\mathrm{b}_{\mathrm{i}})$.

On appelle *catégorie somme*, et l'on désigne par $\oplus \mathscr{A}_{\mathrm{i}}$, la catégorie dont les morphismes sont les couples (a, i) tels que $\mathrm{a} \in \mathscr{A}_{\mathrm{i}}$, et dont la loi de composition est la suivante : le composé (a, i) (b, j) est défini si et seulement si $\mathrm{i} = \mathrm{j}$ et si ab est défini dans $\mathscr{A}_{\mathrm{i}}$, il vaut alors (ab, i).

Remarquons que les catégories $\prod \mathscr{A}_{\mathrm{i}}$ et $\oplus \mathscr{A}_{\mathrm{i}}$, munies des projections ou des inclusions canoniques jouent le rôle de produits ou de sommes directes dans les catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$i (cf. § 3.4).

Soient $\mathscr{H}$ une partie de $\mathscr{J}$ et $(\mathscr{A}_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}}$ une famille de catégories.

On appelle *section principale*, un foncteur $\mathbf{S} : \prod_{\mathscr{H}} (\mathscr{A}_i) \to \prod_{\mathscr{I}} (\mathscr{A}_i)$ tel que $\mathbf{S}(a_i)_{\mathscr{H}} = (a_i')_{\mathscr{I}}$, où $a_i' = a_i$ si $i \in \mathscr{H}$, et sinon, où a_i' est une unité de $\mathscr{A}_i$ nécessairement indépendante de la famille $(a_i)_{\mathscr{H}}$.

Soit $\mathbf{F} : \prod_{\mathscr{I}} (\mathscr{A}_i) \to \mathscr{P}$ un foncteur. Le foncteur $\mathbf{FS}$ est appelé la *restriction* de $\mathbf{F}$ aux variables de $\mathscr{H}$ obtenue en fixant les autres variables sur les unités a_i'.

1.4.6. — On dit que la catégorie $\mathscr{B}$ est une *sous-catégorie* de la catégorie $\mathscr{A}$ si $\mathscr{B}^o$ est un sous-ensemble de $\mathscr{A}^o$ et si l'inclusion détermine un foncteur de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{A}$. La loi de composition dans $\mathscr{B}$ est donc induite par celle de $\mathscr{A}$ et les unités de $\mathscr{B}$ sont des unités de $\mathscr{A}$.

Cette dernière condition peut aussi s'exprimer : si b est un morphisme de $\mathscr{B}$, sa source et son but dans $\mathscr{A}$ sont également sa source et son but dans $\mathscr{B}$. Elle est d'ailleurs importante : si la catégorie $\mathscr{A}$ est formée d'une unité A et d'un morphisme $a : A \to A$ tel que $aa = a$, le sous-ensemble $\{a\}$, muni de la loi induite, est une catégorie réduite à une unité, qui n'est pas une sous-catégorie de $\mathscr{A}$.

Si le foncteur d'inclusion est pleinement fidèle, on dit que la sous-catégorie $\mathscr{B}$ est une *sous-catégorie pleine.*

On remarquera que l'image ensembliste d'une catégorie par un foncteur n'est généralement pas une sous-catégorie.

1.4.7. — L'intersection $\mathscr{B}$ d'une famille $(\mathscr{B}_i)$ de sous-catégories de $\mathscr{A}$, munie de la loi induite, est une sous-catégorie de $\mathscr{A}$. En effet, si b est un élément de $\mathscr{B}$, sa source et son but dans $\mathscr{A}$ appartiennent à chaque $\mathscr{B}_i$ et donc à $\mathscr{B}$. De plus, si $b : B \to B'$ et $b' : B' \to B''$ sont des éléments de $\mathscr{B}$, leur composé $b'b$ appartient à chaque $\mathscr{B}_i$ et donc à $\mathscr{B}$.

Ceci permet de définir la sous-catégorie $E(\mathscr{B}^o)$ de $\mathscr{A}$ *engendrée* par un sous-ensemble $\mathscr{B}^o$ de $\mathscr{A}^o$: $E(\mathscr{B}^o)$ est l'intersection de l'ensemble des sous-catégories de $\mathscr{A}$ contenant $\mathscr{B}^o$. Cet ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient $\mathscr{A}$.

On peut construire explicitement $E(\mathscr{B}^o)$: désignons par $\mathscr{B}^1$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{B}^o$, de leurs sources et de leurs buts. Soit alors $\mathscr{B}^2$ l'ensemble des composés dans $\mathscr{A}$ d'un nombre fini non nul d'éléments de $\mathscr{B}^1$. Munie de la loi induite par celle de $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}^2$ est une sous-catégorie de $\mathscr{A}$. Elle est visiblement la plus petite qui contienne $\mathscr{B}^o$ et est donc $E(\mathscr{B}^o)$.

1.4.8. — On définit un *préordre* entre les objets d'une catégorie $\mathscr{A}$ en posant : $A \leqslant B \Leftrightarrow \mathscr{A}(A, B) \neq \varnothing$. On désigne alors par $[\mathscr{A} \leqslant A]$ (resp. $[\mathscr{A} \geqslant A]$) la sous-catégorie pleine de $\mathscr{A}$ déterminée par les objets inférieurs à A (resp. supérieurs à A).

1.4.9. — Nous désignerons par $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}\mathfrak{i}$ les catégories des $\mathfrak{M}$-ensembles et des $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$-ensembles. $\mathscr{E}$ est une $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$-catégorie, mais non $\mathscr{E}\mathfrak{i}$. Pour toute $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$-catégorie $\mathscr{A}$, nous pouvons définir un foncteur $\mathbf{H} : \mathscr{A}^* \times \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$ en posant pour tous les morphismes $a : A' \to A$, $b : B \to B'$ et $f : A \to B$ de $\mathscr{A}$, $\mathbf{H}(A, B) = \mathscr{A}(A, B)$ et $\mathbf{H}(a, b)f = bfa$ [15]. Nous poserons également $\mathbf{H}(\mathrm{id}_A, b) = b_A$ et $\mathbf{H}(a, \mathrm{id}_B) = a^B$. Nous avons la relation $\mathbf{H}(a, b) = a^{B'}b_A = b_{A'}a^B$. D'ailleurs, pour $f : A \to B$, nous désignerons par f_* l'application de l'ensemble de tous les morphismes de but A dans celui des morphismes de but B définie par $a \rightsquigarrow fa$ et par f^* l'application de l'ensemble des morphismes de source B dans celui des morphismes de source A définie par $b \rightsquigarrow bf$ (cf. § 1.6.1). Lorsqu'il n'y aura pas risque de confusion, nous écrirons aussi, pour tout objet C de $\mathscr{A}$, f_* ou f^* au lieu de f_C ou f^C.

Enfin, nous désignerons par $\mathbf{H}_A$ (resp. par $\mathbf{H}^A$) la restriction de $\mathbf{H}$ obtenue en fixant sur A la première variable (resp. la seconde). Nous aurons dès lors $\mathbf{H}_A X = \mathbf{H}(A, X)$ et $\mathbf{H}_A a = a_*$ (resp. $\mathbf{H}^A X = \mathbf{H}(X, A)$ et $\mathbf{H}^A a = a^*$).

1.5. — Transformations naturelles.

Définitions 1.5.1. — *Une transformation naturelle ou morphisme de foncteurs est un triple* $(\mathbf{G}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{F})$ *où* $\mathbf{F}$ *et* $\mathbf{G}$ *sont deux* *foncteurs de même variance d'une catégorie* $\mathscr{A}$ *dans une catégorie* $\mathscr{L}$, *et* Φ, *une famille de morsphismes de* $\mathscr{L}$, ($\Phi_A : \mathbf{F}A \to \mathbf{G}A$), *indexée par les objets* A *de* $\mathscr{A}$, *qui, pour tout morphisme* $a : A \to A'$ *de* $\mathscr{A}$, *vérifie la relation* $\Phi_{A'}\,\mathbf{F}a = \mathbf{G}a\,\Phi_A$ *ou* $\Phi_A\mathbf{F}a = \mathbf{G}a\Phi_{A'}$ *suivant que* **F** *et* **G** *sont covariants ou contravariants.*

Une équivalence naturelle ou isomorphisme de foncteurs est une transformation naturelle (**G**, Φ, **F**) *telle que* Φ *soit une famille d'isomorphismes.*

On définit donc une transformation naturelle entre deux foncteurs covariants **F** et **G** : $\mathscr{A} \to \mathscr{L}$ par une loi qui associe, à tout objet A de $\mathscr{A}$, un morphisme $\Phi_A : \mathbf{F}A \to \mathbf{G}A$ de $\mathscr{L}$, de telle sorte que les diagrammes du type ci-contre soient commutatifs. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on désigne souvent (**G**, Φ, **F**) par $\Phi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ ou simplement par Φ.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}A \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "\mathbf{F}a"'] & \mathbf{G}A \arrow[d, "\mathbf{G}a"] \\ \mathbf{F}A' \arrow[r, "\Phi_{A'}"] & \mathbf{G}A' \end{tikzcd}$$

1.5.2. — La notion d'équivalence naturelle est très large comme le montre l'exemple suivant : soit $\mathscr{A}$ la catégorie dont les objets sont les éléments A_i d'une famille (A_i), et telle que $\mathscr{A}(A_i, A_j)$ soit toujours réduit à un seul élément noté α_{ji} (en particulier $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1}$ et $\alpha_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$).

Soient alors **id** le foncteur identique de $\mathscr{A}$ et $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ le foncteur qui envoie tout morphisme de $\mathscr{A}$ sur A_0 où 0 est un indice particulier. On obtient une équivalence naturelle $\Phi : \mathbf{id} \to \mathbf{F}$ en posant $\Phi_{A_i} = \alpha_{0i}$.

On notera cependant qu'une équivalence naturelle $\Phi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ détermine une bijection $f : \mathscr{L}(\mathbf{F}A, \mathbf{F}B) \to \mathscr{L}(\mathbf{G}A, \mathbf{G}B)$ définie par $f(a) = \Phi_B a \Phi_A^{-1}$.

1.5.3. — Soient **F**, **G** et **H**, trois foncteurs de même variance de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}$, et $\Phi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ et $\Psi : \mathbf{G} \to \mathbf{H}$ deux transformations naturelles.

On peut définir une *transformation composée* $\Psi\Phi : \mathbf{F} \to \mathbf{H}$ en posant, pour tout objet A de $\mathscr{A}$, $(\Psi\Phi)_A = \Psi_A\Phi_A$. Cette loi détermine une structure de catégorie sur l'ensemble des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}$.

DÉFINITION 1.5.4. — *La catégorie $\mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{L}]$ des foncteurs de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}$ est celle dont les objets sont les foncteurs covariants de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}$, et les morphismes, les transformations naturelles entre ces foncteurs.*

Nous désignerons par $\mathscr{F}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ l'ensemble $\mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{L}]\,(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ des transformations naturelles entre les foncteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}$. On peut d'ailleurs justifier cette notation en désignant par $\mathscr{F}$ la somme directe des catégories $\mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{L}]$ pour $\mathscr{A}$ et $\mathscr{L}$ appartenant à $\mathscr{C}$ ou même à $\mathscr{C}\mathfrak{i}$.

Comme le composé $\Phi\Psi$ de deux transformations naturelles est défini par $\Phi_A\Psi_A = (\Phi\Psi)_A$, les isomorphismes de $\mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{L}]$ sont les équivalences naturelles. De plus, si Φ est une famille d'injections ou de surjections, elle détermine un monomorphisme ou un épimorphisme de $\mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{L}]$.

1.5.5. — Soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{L}$ et $\mathscr{P}$ trois catégories ; $\mathbf{F}$ et $\mathbf{F}' : \mathscr{A} \to \mathscr{L}$ et $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}' : \mathscr{L} \to \mathscr{P}$ des foncteurs ; $\Phi : \mathbf{F} \to \mathbf{F}'$ et $\Psi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ des transformations naturelles. On définit une transformation naturelle $\Psi \nabla \Phi : \mathbf{GF} \to \mathbf{G'F'}$ en posant pour tout objet A de $\mathscr{A}$:

$$(\Psi \nabla \Phi)_A = \Psi_{\mathbf{F'A}}\mathbf{G}(\Phi_A) = \mathbf{G}'(\Phi_A)\Psi_{\mathbf{FA}} ;$$

la dernière égalité résulte de la naturalité de Ψ appliquée au morphisme $\Phi_A : \mathbf{FA} \to \mathbf{F'A}$ de $\mathscr{L}$.

Vérifions que $\Psi \nabla \Phi$ est une transformation naturelle. Soit $\mathbf{a} : A \to B$ un morphisme de $\mathscr{A}$. On a :

$$(\Psi \nabla \Phi)_B\mathbf{GFa} = \Psi_{\mathbf{F'B}}\mathbf{G}(\Phi_B)\mathbf{GFa} = \Psi_{\mathbf{F'B}}\mathbf{G}(\Phi_B\mathbf{Fa}) =$$

$$\Psi_{\mathbf{F'B}}\mathbf{G}(\mathbf{F'a}\Phi_A) = \mathbf{G}'(\mathbf{F'a})\Psi_{\mathbf{F'A}}\mathbf{G}(\Phi_A) = \mathbf{G'F'a}(\Psi \nabla \Phi)_A.$$

Si Ψ est la transformation naturelle identique du foncteur $\mathbf{G}$, ou Φ celle du foncteur $\mathbf{F}$, $\Psi \nabla \Phi$ se désigne aussi par $\mathbf{G}\Phi$ ou $\Psi\mathbf{F}$, et l'on a : $(\mathbf{G}\Phi)_A = \mathbf{G}(\Phi_A)$ et $(\Psi\mathbf{F})_A = \Psi_{\mathbf{F}A}$. En particulier, $\mathrm{id}_\mathbf{G} \nabla \mathrm{id}_\mathbf{F} = \mathrm{id}_{\mathbf{GF}}$.

La loi de composition ∇ est associative. En effet, soient $\mathcal{T}$ une quatrième catégorie, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}' : \mathscr{P} \to \mathcal{T}$ deux foncteurs et $\Theta : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ une transformation naturelle. On a :

$$(\Theta \nabla (\Psi \nabla \Phi))_A = \Theta_{\mathbf{G'F'}A}\mathbf{H}(\Psi \nabla \Phi)_A = \Theta_{\mathbf{G'F'}A}\mathbf{H}(\Psi_{\mathbf{F'}A})\mathbf{HG}(\Phi_A) =$$
$$(\Theta \nabla \Psi)_{\mathbf{F'}A}\mathbf{HG}(\Phi_A) = ((\Theta \nabla \Psi) \nabla \Phi)_A.$$

Cette loi est même fortement associative et possède pour unités les transformations naturelles identiques des foncteurs identités.

Définitions 1.5.6. — *La catégorie $\mathscr{N}$ des $\mathfrak{M}$-transformations naturelles est celle dont les objets sont les $\mathfrak{M}$-catégories, dont les morphismes sont les $\mathfrak{M}$-transformations naturelles et dont la loi de composition est la loi ∇.*

La catégorie $\mathscr{N}\mathrm{i}$ des transformations naturelles de $\mathscr{C}\mathrm{i}$ est celle dont les objets sont les $\mathfrak{M}\mathrm{i}$-catégories, dont les morphismes sont les transformations naturelles entre foncteurs de $\mathscr{C}\mathrm{i}$ et dont la loi de composition est la loi ∇.

$\mathscr{N}$ est une $\mathfrak{M}\mathrm{i}$-catégorie, mais non $\mathscr{N}\mathrm{i}$. Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{L}$ appartiennent à $\mathfrak{M}$ (ou si elles y sont incluses), $\mathscr{N}(\mathscr{A}, \mathscr{L})$ (ou $\mathscr{N}\mathrm{i}(\mathscr{A}, \mathscr{L})$) est l'ensemble sous-jacent à $\mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{L}]$.

1.5.7. — Soient de nouveau $\mathscr{A}$, $\mathscr{L}$ et $\mathscr{P}$ trois catégories ; $\mathbf{F}, \mathbf{F}', \mathbf{F}'' : \mathscr{A} \to \mathscr{L}$ et $\mathbf{G}, \mathbf{G}', \mathbf{G}'' : \mathscr{L} \to \mathscr{P}$ des foncteurs ; $\Phi : \mathbf{F} \to \mathbf{F}'$, $\Phi' : \mathbf{F}' \to \mathbf{F}''$, $\Psi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ et $\Psi' : \mathbf{G}' \to \mathbf{G}''$ des transformations naturelles.

Pour tout objet A de $\mathscr{A}$, on a :

$$(\Psi'\Psi \nabla \Phi'\Phi)_A = (\Psi'\Psi)_{\mathbf{F''}A}\mathbf{G}((\Phi'\Phi)_A) = \Psi'_{\mathbf{F''}A}\Psi_{\mathbf{F''}A}\mathbf{G}(\Phi_A)\mathbf{G}(\Phi'_A) =$$
$$\Psi'_{\mathbf{F''}A}\mathbf{G}'(\Phi'_A)\Psi_{\mathbf{F'}A}\mathbf{G}(\Phi_A) = (\Psi' \nabla \Phi')_A(\Psi \nabla \Phi)_A.$$

On en tire :

$$\Psi'\Psi \nabla \Phi'\Phi = (\Psi' \nabla \Phi')(\Psi \nabla \Phi).$$

Avec la relation $\mathrm{id}_\mathbf{G} \nabla \mathrm{id}_\mathbf{F} = \mathrm{id}_{\mathbf{GF}}$ du paragraphe 1.5.5, ceci permet de déduire :

THÉORÈME 1.5.8. — *Si l'on munit les ensembles* $\mathcal{N}\mathfrak{i}(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ *— dont les éléments sont les morphismes de foncteurs entre deux* $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$*-catégories* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{L}$ *— de la structure de catégorie donnée par* $\mathcal{F}[\mathcal{A}, \mathcal{L}]$, *la loi de composition* ∇ *détermine alors un foncteur* $\mathcal{F}[\mathcal{A}, \mathcal{L}] \times \mathcal{F}[\mathcal{L}, \mathcal{P}] \to \mathcal{F}[\mathcal{A}, \mathcal{P}]$.

Si nous prenons la restriction de ce foncteur en fixant la première variable sur un foncteur $\mathbf{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ (cf. § 1.4.5), nous obtenons un foncteur $\mathbf{F}^1 : \mathcal{F}[\mathcal{L}, \mathcal{P}] \to \mathcal{F}[\mathcal{A}, \mathcal{P}]$ défini par $\Phi \rightsquigarrow \Phi\mathbf{F}$. Si nous fixons la seconde variable sur $\mathbf{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{P}$, nous obtenons un foncteur $\mathbf{G}_1 : \mathcal{F}[\mathcal{A}, \mathcal{L}] \to \mathcal{F}[\mathcal{A}, \mathcal{P}]$ défini par $\Phi \rightsquigarrow \mathbf{G}\Phi$. Les restrictions de $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{G}_1$ aux objets, c'est-à-dire aux ensembles $\mathcal{C}\mathfrak{i}(\mathcal{L}, \mathcal{P})$ ou $\mathcal{C}\mathfrak{i}(\mathcal{A}, \mathcal{P})$, sont les applications $\mathbf{F}^*$ et $\mathbf{G}_*$ définies au paragraphe 1.4.9. Lorsqu'aucune confusion n'en résultera, nous désignerons aussi les foncteurs $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{G}_1$ par $\mathbf{F}^*$ et $\mathbf{G}_*$.

1.5.9. — Comme une transformation naturelle identique $\mathrm{id}_\mathbf{H}$ est égale à son carré $\mathrm{id}_\mathbf{H}\,\mathrm{id}_\mathbf{H}$, la relation du paragraphe 1.5.7 nous donne, sous réserve que ces expressions soient définies,

$$\mathbf{H}(\Psi\Phi) = (\mathbf{H}\Psi)(\mathbf{H}\Phi) \text{ et } (\Psi\Phi)\mathbf{H} = (\Psi\mathbf{H})(\Phi\mathbf{H}).$$

De plus, si Φ et Ψ sont des équivalences naturelles, en prenant leurs inverses pour Φ' et Ψ', on voit que $\Psi \nabla \Phi$ est aussi une équivalence naturelle et que son inverse est $\Psi^{-1} \nabla \Phi^{-1}$.

Enfin, si nous désignons un composé $\Phi_1\Phi_2 \ldots \Phi_n$ de transformations naturelles par $\bigcirc_{i=1}^n \Phi_i$, et un composé $\Phi_1 \nabla \Phi_2 \nabla \ldots \nabla \Phi_n$ par $\nabla_{i=1}^n \Phi_i$, nous obtenons la formule générale de permutabilité de $\bigcirc$ et ∇ :

$$\nabla_{i=1}^n \bigcirc_{j=1}^m \Phi_{ij} = \bigcirc_{j=1}^m \nabla_{i=1}^n \Phi_{ij}.$$

Plus précisément, si l'un des deux membres est défini, l'autre l'est aussi et ils sont égaux.

Cette formule est évidente pour $n = 1$ et pour $m = 1$, et résulte du paragraphe 1.5.7 pour $n = m = 2$. Supposons-la vraie pour $n = r \geqslant 2$ et $m = s \geqslant 2$; nous aurons :

$$\nabla_{i=1}^{r+1} \bigcirc_{j=1}^s \Phi_{ij} = [\nabla_{i=1}^r (\bigcirc_{j=1}^s \Phi_{ij})] \nabla (\bigcirc_{j=1}^s \Phi_{r+1,j})$$
$$= (\bigcirc_{j=1}^s \nabla_{i=1}^r \Phi_{ij}) \nabla (\bigcirc_{j=1}^s \Phi_{r+1,j}) = \bigcirc_{j=1}^s[(\nabla_{i=1}^r \Phi_{ij}) \nabla \Phi_{r+1,j}] =$$
$$\bigcirc_{j=1}^s \nabla_{i=1}^{r+1} \Phi_{ij} ;$$

comme le même raisonnement reste valable en permutant $\circ$ et ∇, la formule est démontrée.

1.5.10. — Soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{L}$ et $\mathscr{P}$ trois catégories. Nous noterons $a : A \to B$ et $b : B \to C$ deux morphismes de $\mathscr{A}$, et $l : L \to M$ un morphisme de $\mathscr{L}$. De plus nous ne ferons pas de distinction entre un objet X et id_X.

Si $\mathbf{F} : \mathscr{A} \times \mathscr{L} \to \mathscr{P}$ est un foncteur, nous savons déjà que la restriction de $\mathbf{F}$ obtenue en fixant la première variable sur A est un foncteur $\mathbf{F}(A, \ )$ de $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{P}$ (cf. § 1.4.5). Les expressions $\mathbf{F}(a, M)\mathbf{F}(A, l) = \mathbf{F}(B, l)\mathbf{F}(a, L)$ et $\mathbf{F}(b, L)\mathbf{F}(a, L) = \mathbf{F}(ba, L)$ expriment que la famille $(\mathbf{F}(a, L))_{L \in \mathscr{L}^0}$ détermine une transformation naturelle $\mathbf{F}(a, \ ) : \mathbf{F}(A, \ ) \to \mathbf{F}(B, \ )$, et que ces transformations sont compatibles avec la loi de composition dans $\mathscr{A}$. Autrement dit, la loi $a \rightsquigarrow \mathbf{F}(a, \ )$ détermine un foncteur $\tilde{\mathbf{F}} : \mathscr{A} \to \mathscr{F}[\mathscr{L}, \mathscr{P}]$.

Si $\Phi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ est un morphisme de $\mathscr{F}[\mathscr{A} \times \mathscr{L}, \mathscr{P}]$, la restriction de la famille (Φ_{AL}) obtenue en fixant A est une transformation naturelle $\Phi_A : \mathbf{F}(A, \ ) \to \mathbf{G}(A, \ )$ et la naturalité de Φ entraîne aussitôt que la famille (Φ_A) détermine une transformation naturelle $\widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathbf{F}} \to \widetilde{\mathbf{G}}$.

On définit ainsi un foncteur

$$\mathbf{S} : \mathscr{F}[\mathscr{A} \times \mathscr{L}, \mathscr{P}] \to \mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{F}[\mathscr{L}, \mathscr{P}]].$$

Réciproquement, on peut associer à un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{F}[\mathscr{L}, \mathscr{P}]$ le foncteur $\hat{\mathbf{F}} : \mathscr{A} \times \mathscr{L} \to \mathscr{P}$ défini par $\hat{\mathbf{F}}(A, L) = \mathbf{F}(A)\,(L)$, et à un morphisme $\Phi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ de $\mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{F}[\mathscr{L}, \mathscr{P}]]$ la transformation naturelle $\hat{\Phi}$ obtenue en posant $\hat{\Phi}_{AL} = (\Phi_A)_L$. Le foncteur ainsi déterminé est l'inverse de $\mathbf{S}$. En composant avec le foncteur $\mathscr{A} \times \mathscr{L} \to \mathscr{L} \times \mathscr{A}$, on obtient des isomorphismes dits canoniques :

$$\mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{F}[\mathscr{L}, \mathscr{P}]] \to \mathscr{F}[\mathscr{A} \times \mathscr{L}, \mathscr{P}] \to \mathscr{F}[\mathscr{L}, \mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{P}]].$$

On peut d'ailleurs vérifier qu'ils sont naturels si on considère $\mathscr{F}[\ ,\mathscr{F}[\ ,\ ]]$ et $\mathscr{F}[\ \times\ ,\ ]$ comme des foncteurs de $\mathscr{C}^* \times \mathscr{C}^* \times \mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$.

1.6. — Sous-objets et objets-quotients.

1.6.1. — Désignons par $\mathscr{I}$ la catégorie formée d'une seule flèche, c'est-à-dire celle qui possède deux unités 0 et 1 et un seul morphisme non unité $\alpha : 0 \to 1$. La catégorie $\mathscr{F}[\mathscr{I}, \mathscr{A}]$ sera notée $\mathscr{A}^\#$ et appelée la *catégorie des morphismes* de $\mathscr{A}$. Les objets de $\mathscr{A}^\#$ sont les morphismes de $\mathscr{A}$.

Les morphismes de $\mathscr{A}^\#(a, b)$ sont en correspondance biunivoque avec les quadruples (b, y, x, a) de morphisme de $\mathscr{A}$ qui vérifient $bx = ya$; nous les identifierons avec ces quadruples sur lesquels la loi de composition est donnée par $(c, t, z, b)\,(b, y, x, a) = (c, ty, zx, a)$.

Nous désignerons par $\mathscr{A}/A$ (resp. $\mathscr{A}\backslash A$) la sous-catégorie pleine de $\mathscr{A}^\#$ déterminée par les foncteurs $\mathbf{F} : \mathscr{I} \to \mathscr{A}$ tels que $\mathbf{F}(1) = A$ (resp. $\mathbf{F}(0) = A$). Les objets de cette catégorie sont donc les morphismes de but A (resp. de source A) et ses morphismes sont en correspondance biunivoque avec les triples (c, x, b) d'éléments de $\mathscr{A}$ tels que le but de b et de c soit A et que $cx = b$ (resp. tels que b et c aient pour source A et que $c = xb$). Ici encore, nous identifierons un morphisme de $\mathscr{A}/A$ ou de $\mathscr{A}\backslash A$ avec le triple correspondant.

La catégorie $\mathscr{A}/A$ est munie d'un foncteur surjectif, dit canonique, $\mathbf{P} : \mathscr{A}/A \to [\mathscr{A} \leqslant A]$ (cf. § 1.4.8), défini par $\mathbf{P}(c, x, b) = x$. Il est surjectif, car son application sous-jacente l'est. En effet, si $x : B \to C$ appartient à $[\mathscr{A} \leqslant A]$, on peut prendre un morphisme $c : C \to A$, car $\mathscr{A}(C, A)$ n'est pas vide ; x est alors l'image par $\mathbf{P}$ du morphisme (c, x, cx) de $\mathscr{A}/A$.

De la même manière, la catégorie $\mathscr{A}\backslash A$ est munie d'un foncteur surjectif canonique $\mathbf{P} : \mathscr{A}\backslash A \to [\mathscr{A} \geqslant A]$ défini par $\mathbf{P}(c, y, b) = y$.

Il est utile de remarquer que pour tout morphisme $f : A \to B$, les applications f_* et f^* définies au paragraphe 1.4.9 se prolongent en foncteurs que nous désignerons abusivement par le même signe : $f_* : \mathscr{A}/A \to \mathscr{A}/B$ et $f^* : \mathscr{A}\backslash B \to \mathscr{A}\backslash A$. Ce prolongement est défini par $f_*(c, x, b) = (fc, x, fb)$ et $f^*(c, y, b) = (cf, y, bf)$.

1.6.2. — La relation de préordre entre les objets de $\mathscr{A}/A$ (cf. § 1.4.8) induit une relation de préordre sur l'ensemble $\mathscr{J}$ des injections de but A. Elle est déterminée en posant $u \leqslant u'$ s'il existe un morphisme v tel que $u = u'v$. Alors v est injectif et unique [13]. Si l'on a de plus $u' \leqslant u$, c'est-à-dire s'il existe un v' tel que $u' = uv'$, alors v et v' sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Dans ce cas u et u' sont dits *équivalents*.

Il est donc possible de choisir un sous-ensemble $\mathscr{S}$ de $\mathscr{J}$ qui contienne une et une seule injection de chaque classe d'équivalence de telle manière que l'élément choisi dans la classe des isomorphismes de A dans A soit id_A. Un élément $u : S \to A$ de cet ensemble est appelé *sous-objet* de A. Sa source S est appelée le *Sous-Objet* de A associé à u.

Par dualité, nous obtenons une relation de préordre entre surjections de source A en posant $u \leqslant u'$ si $u = vu'$. Alors v est surjectif et unique. De la même manière, on définit les surjections équivalentes et l'ensemble des *objets-quotients* de A, $u : A \to Q$. Le but Q est appelé l'*Objet-Quotient* de A associé à u.

La relation de préordre induit une relation d'ordre entre sous-objets (resp. entre objets-quotients). Si $a' : A' \to A$ et $b' : B' \to A$ sont deux sous-objets, au lieu de $a' \leqslant b'$, on écrit souvent lorsque cela ne prête pas à confusion $A' \subset B'$.

1.6.3. — Si le choix du sous-objet $u : S \to A$ ou de l'objet quotient $u' : A \to Q$ s'impose de manière naturelle, il est souvent déterminé par le Sous-Objet S ou l'Objet-Quotient Q. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on dit alors, en laissant tomber les majuscules, que u est l'*inclusion canonique* du sous-objet S dans A et u' la *projection canonique* de A sur l'objet-quotient Q.

Ainsi, dans la catégorie $\mathscr{E}$ des $\mathfrak{M}$-ensembles, un Sous-Objet de A est un sous-ensemble de A et un Objet-Quotient une partition de A ; dans la catégorie $\mathscr{C}\imath$ des $\mathfrak{M}\imath$-catégories, un sous-objet est le foncteur inclusion d'une sous-catégorie.

1.6.4. — Soit a : $A \to B$ un morphisme de la catégorie $\mathscr{A}$. S'il existe un plus petit sous-objet de B à travers lequel se factorise a, on l'appelle l'*image* de a et on le note im a. Sa source se nomme l'*Image* de a et se note Im a ou a(A) (*).

Par dualité, l'éventuel plus petit objet-quotient de A à travers lequel se factorise a s'appelle la *coïmage* de a et se note coïm a : $A \to$ Coïm a.

Ces définitions entraînent immédiatement que im a = a si a est un monomorphisme, et que coïm a = a si a est un épimorphisme.

Par exemple, si $\mathscr{A}$ est la catégorie des ensembles, ou celle des groupes, ou celle des espaces topologiques du microcosme $\mathfrak{M}$, a(A) est l'image de l'application a au sens ordinaire. La Coïmage de a est l'ensemble, le groupe, ou l'espace topologique quotient de A par la relation d'équivalence associée à a (deux points sont équivalents s'ils ont même image par a).

Par contre, dans la catégorie $\mathscr{C}$ des $\mathfrak{M}$-catégories, l'image ensembliste d'un foncteur n'est pas une sous-catégorie. Cependant, l'ensemble image d'un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ engendre une sous-catégorie de $\mathscr{P}$ (cf. § 1.4.7) qui est la catégorie Image de **F**.

1.7. — **Morphismes constants.**

DÉFINITION 1.7.1. — *Un endomorphisme constant d'un objet* A *d'une catégorie* $\mathscr{A}$ *est un morphisme* $c : A \to A$ *tel que, pour tout objet* B *de* $\mathscr{A}$, *pour tout* f *et tout* g *dans* $\mathscr{A}(B, A)$, *on ait* $fc = gc$.

Le morphisme $fc = gc$ est alors désigné par $c_B : B \to A$.

Par dualité, on a la notion d'*endomorphisme coconstant* $d : A \to A$ tel que $df = dg$ pour tout B, tout f et tout $g : A \to B$ de $\mathscr{A}$.

(*) Dans les catégories qui possèdent une famille de morphismes nuls, on définit ordinairement l'image comme le noyau du conoyau de a, ce qui ne coïncide pas avec la définition donnée ci-dessus. Nous pensons qu'il serait préférable de garder la terminologie ker coker a pour cette autre image et de prouver la relation im a = ker coker a dans les catégories abéliennes.

Proposition 1.7.2. — *La classe des endomorphismes constants d'un objet* A *d'une catégorie* $\mathscr{A}$ *est en correspondance biunivoque avec celle des sections du foncteur canonique* $\mathbf{P} : \mathscr{A}/\mathrm{A} \to [\mathscr{A} \leqslant \mathrm{A}]$.

Soit en effet $c : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ un endomorphisme constant. On détermine une section $\mathbf{F} : [\mathscr{A} \leqslant \mathrm{A}] \to \mathscr{A}/\mathrm{A}$ du foncteur $\mathbf{P}$ en posant, pour tout objet $\mathrm{B} \leqslant \mathrm{A}$ et tout morphisme $f : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ de $[\mathscr{A} \leqslant \mathrm{A}]$, $\mathbf{F}(\mathrm{B}) = c_{\mathrm{B}}$ et $\mathbf{F}(f) = (c_{\mathrm{C}}, f, c_{\mathrm{B}})$. Réciproquement, si $\mathbf{F}$ est une section de $\mathbf{P}$, $c = \mathbf{F}(\mathrm{A})$ est une application constante, car quel que soit le morphisme $f : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ de $\mathscr{A}$, on a : $\mathbf{F}(f) = (\mathbf{F}\mathrm{A}, f, \mathbf{F}\mathrm{B})$ et dès lors $fc = f\mathbf{F}\mathrm{A} = \mathbf{F}\mathrm{B}$. Ces deux applications étant inverses l'une de l'autre, la proposition est démontrée.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir la proposition duale.

Un endomorphisme qui se factorise au travers d'un endomorphisme constant est un endomorphisme constant. Nous sommes donc autorisés à poser la définition suivante :

Un morphisme $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ de $\mathscr{A}$ est *constant* (resp. *coconstant*) s'il se factorise à travers un endomorphisme constant (resp. coconstant).

Si P est un objet d'une catégorie $\mathscr{A}$, les deux énoncés suivants sont équivalents :

1° id_{P} est un endomorphisme constant (resp. coconstant).

2° pour tout objet A, $\mathscr{A}(\mathrm{A}, \mathrm{P})$ (resp. $\mathscr{A}(\mathrm{P}, \mathrm{A})$) possède au plus un élément.

Définitions 1.7.3. — *Un objet ponctuel ou point de la catégorie* $\mathscr{A}$ *est un objet* P *tel que, pour tout objet* A, $\mathscr{A}(\mathrm{A}, \mathrm{P})$ *possède un et un seul élément.*

Un objet coponctuel ou copoint de $\mathscr{A}$ *est un objet* Q *tel que, pour tout objet* A *de* $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}(\mathrm{Q}, \mathrm{A})$ *possède un et un seul élément.*

Un objet nul est un objet à la fois ponctuel et coponctuel.

Si la catégorie $\mathscr{A}$ possède un objet nul, $\mathscr{A}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ n'est jamais vide, car il contient un morphisme unique qui se factorise à travers P et que l'on appelle *morphisme nul.* Les objets ponctuels, coponctuels ou nuls, sont isomorphes entre eux.

Si la catégorie $\mathscr{A}$ possède un objet ponctuel P, un objet V de $\mathscr{A}$ sera dit *vide* si $\mathscr{A}(P, V)$ est vide. Si V est un objet vide et A un objet tel que $\mathscr{A}(A, V) \neq \varnothing$, alors A est un objet vide. Si A n'est pas vide, les endomorphismes constants de A sont exactement les morphismes qui se factorisent à travers P, car ces derniers se factorisent à travers l'application constante id_P et sont par suite constants. Réciproquement, si $c : A \to A$ est un endomorphisme constant, si f appartient à $\mathscr{A}(P, A)$ et si c_A est l'unique morphisme de $\mathscr{A}(A, P)$, on a $cfc_P = c$ et c se factorise donc à travers P.

Nous dirons qu'une catégorie $\mathscr{A}$ admet dans $\mathscr{B}^o$ des sommes directes (resp. des produits directs) jusqu'à l'ordre α (α étant un cardinal et $\mathscr{B}^o$ un sous-ensemble de $\mathscr{A}^o$), si toute famille d'objets de $\mathscr{B}^o$ dont le cardinal est inférieur à α possède une somme directe (resp. un produit direct) (nous rappellerons la définition du produit et de la somme directe au paragraphe 3.4).

Proposition 1.7.4. — *Si $\mathscr{A}$ est une catégorie qui admet dans $\mathscr{B}^o$ des sommes directes jusqu'à l'ordre α, s'il existe un ensemble $\mathscr{Q}$ de cardinal inférieur à α formé d'objets Q de $\mathscr{B}^o$ tels que id_Q soit un endomorphisme constant, et si, pour tout objet A de $\mathscr{A}$, il existe un objet Q_A de $\mathscr{Q}$ et un morphisme $f_A : A \to Q_A$, alors la catégorie $\mathscr{A}$ possède un point.*

Par dualité, *si $\mathscr{A}$ est une catégorie qui admet dans $\mathscr{B}^o$ des produits directs jusqu'à l'ordre α, s'il existe un ensemble $\mathscr{Q}$ de cardinal inférieur à α, formé d'objets Q de $\mathscr{B}^o$ tels que id_Q soit un endomorphisme coconstant, et si, pour tout objet A de $\mathscr{A}$, il existe un objet Q_A de $\mathscr{Q}$ et un morphisme $f_A : Q_A \to A$, alors la catégorie $\mathscr{A}$ possède un copoint.*

Démontrons la proposition directe. Si $(P, (p_Q))$ est la somme directe des objets de $\mathscr{Q}$, il existe, pour tout objet A de $\mathscr{A}$, un morphisme $p_{Q_A}f_A : A \to P$. Dès lors, l'objet Q_P est tel que $\mathscr{A}(A, Q_P)$ possède pour unique élément le morphisme $f_P p_{Q_A} f_A$. Il est donc un point.

1.7.5. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie, nous désignerons par $[\mathscr{A}, \omega]$ la catégorie obtenue en ajoutant un point à $\mathscr{A}$, c'est-à-dire la sur-catégorie de $\mathscr{A}$ qui possède un objet ω supplémentaire et, pour tout objet A de $\mathscr{A}$, un unique morphisme $A \to \omega$. De la même manière, nous désignerons par $[\omega, \mathscr{A}]$ la catégorie obtenue en ajoutant un copoint à $\mathscr{A}$.

1.7.6. — *Exemple.* — Dans la catégorie $\mathscr{C}$ des $\mathfrak{M}$-catégories, un objet ponctuel est une catégorie réduite à une unité. Un foncteur de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}$ est donc constant si et seulement si son image ensembliste est réduite à un point.

Cette notion est donc indépendante du choix du microcosme $\mathfrak{M}$. Soit $l : L \to M$ un morphisme de $\mathscr{L}$, nous désignerons par $C_L^{\mathscr{A}\mathscr{L}}$ ou plus simplement par $C_L : \mathscr{A} \to \mathscr{L}$ le foncteur constant qui a pour image l'unité L, et par $\Gamma_l^{\mathscr{A}\mathscr{L}}$ ou plus simplement par Γ_l la transformation naturelle définie par une famille de morphismes égaux à l. La loi $L \rightsquigarrow C_L$, $l \rightsquigarrow \Gamma_l$ détermine un foncteur dit canonique $\mathbf{C} : \mathscr{L} \to \mathscr{F}[\mathscr{A}, \mathscr{L}]$.

On peut d'ailleurs voir que $\mathbf{C}$ est naturel si on considère les expressions qu'il relie comme des foncteurs de $\mathscr{C}^* \times \mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$.

Chapitre II

ESPÈCES DE STRUCTURES

Soit $\mathscr{A}$ une catégorie. Nous désignerons par $\tilde{\mathscr{A}}$ le groupoïde de $\mathscr{A}$ (*), c'est-à-dire la sous-catégorie des isomorphismes de $\mathscr{A}$.

Définitions 2.1. — *Une espèce de structure* S *sur la catégorie* $\mathscr{A}$ *est un foncteur* $\mathrm{S} : \tilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$ [6].

Une structure d'espèce S *ou* S-*structure sur l'objet* A *de* $\mathscr{A}$ *est un élément* s *de* SA.

Si s est une S-structure sur A, le couple (A, s) sera noté A_s et appelé objet S-structuré. Nous dirons que la S-structure s de A est transportée sur la S-structure t de B par l'isomorphisme $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ de $\mathscr{A}$ si la bijection Sf applique s sur t.

La catégorie $\mathscr{E}\mathfrak{i}$ dépend du microcosme $\mathfrak{M}$, les espèces de structures en dépendent donc aussi. Cependant, si $\mathfrak{M}'$ est un microcosme plus grand que $\mathfrak{M}$ et si $\mathscr{E}'\mathfrak{i}$ est la catégorie des $\mathfrak{M}'\mathfrak{i}$-ensembles, une espèce de structure $\mathrm{S} : \tilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$ détermine de manière univoque une espèce de structure $\mathrm{S}' : \tilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{E}'\mathfrak{i}$ où S′ est le composé de S avec l'inclusion de $\mathscr{E}\mathfrak{i}$ dans $\mathscr{E}'\mathfrak{i}$. Dans ce sens, on peut dire qu'une espèce de structure est indépendante du choix du microcosme $\mathfrak{M}$.

2.2. — *Exemples* :

1) *La structure d'espace topologique* : soient A un $\mathfrak{M}$-ensemble

(*) $\tilde{\mathscr{A}}$ est noté $\mathscr{A}_\gamma$ dans le séminaire de C. Ehresmann [8].

et SA l'ensemble des familles $\mathcal{O}$ de parties de A qui vérifient la relation :

$$(\forall\, \mathcal{O}')\, [\mathcal{O}' \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{X \in \mathcal{O}'} X \in \mathcal{O}] \text{ et } A \in \mathcal{O}$$

$$\text{et } (\forall\, X)\, (\forall\, Y)\, [(X \in \mathcal{O} \text{ et } Y \in \mathcal{O}) \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{O}].$$

Il est immédiat qu'à toute bijection $f : A \to B$ on peut associer la bijection $Sf : SA \to SB$ obtenue par extension de f à $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))$ et que l'application $S : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}\mathfrak{i}$ est sous-jacente à un foncteur. Ce foncteur détermine la structure d'espace topologique sur la catégorie des $\mathfrak{M}$-ensembles. Un élément $\mathcal{O}$ de SA est aussi appelé ensemble des ouverts d'une topologie sur A.

2) *La structure de monoïde* : soient A un $\mathfrak{M}$-ensemble, SA l'ensemble des graphes fonctionnels d'applications $m : A \times A \to A$ tels que l'on ait $m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$ pour tout triple a, b, c d'éléments de A. A une bijection $f : A \to B$ on peut encore associer son extension à $\mathfrak{P}(A \times A \times A)$ et vérifier que l'application $S : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}\mathfrak{i}$ ainsi obtenue détermine un foncteur.

3) *Les structures de point final et de point initial* relatives à un diagramme $\mathbf{D} : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ dans une $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$-catégorie $\mathcal{A}$: étant donnés deux foncteurs $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{A}$, nous désignerons par $\mathcal{F}\mathfrak{i}^{gr}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ l'ensemble des graphes des familles Φ qui déterminent une transformation naturelle $(\mathbf{G}, \Phi, \mathbf{F})$ de $\mathcal{F}\mathfrak{i}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. Une famille Φ étant une application de $\mathcal{D}_0$ dans $\mathcal{A}$, donc dans $\mathfrak{M}$, son graphe est un élément de $\mathfrak{M}$, et $\mathcal{F}\mathfrak{i}^{gr}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ est un $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$-ensemble. L'application qui associe à $(\mathbf{G}, \Phi, \mathbf{F})$ le graphe de Φ, détermine une bijection b de $\mathcal{F}\mathfrak{i}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ sur $\mathcal{F}\mathfrak{i}^{gr}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$. A toute application

$$f : \mathcal{F}\mathfrak{i}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \to \mathcal{F}\mathfrak{i}(\mathbf{F}', \mathbf{G}')$$

nous associerons l'application

$$f^{gr} : \mathcal{F}\mathfrak{i}^{gr}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \to \mathcal{F}\mathfrak{i}^{gr}(\mathbf{F}', \mathbf{G}')$$

composée de f et des bijections b.

Posons maintenant, pour tout objet A de $\mathcal{A}$, $SA = \mathcal{F}\mathfrak{i}^{gr}(\mathbf{D}, \mathbf{C}_A)$ où $\mathbf{C}_A$ est un foncteur constant (cf. § 1.7.6), et, pour tout isomorphisme f de $\mathcal{A}$, $Sf = \Gamma_{f*}^{gr}$ (c'est-à-dire que Sf envoie le graphe de la transformation déterminée par $(\Phi_D)_{D\in\mathscr{D}}$ sur le graphe de celle qui est déterminée par $(f\Phi_D)_{D\in\mathscr{D}})$. Nous obtenons ainsi un foncteur $\mathbf{S} : \tilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$ qui est appelé structure de point final relative à $\mathbf{D}$.

Si nous avions posé $\mathbf{S}A = \mathscr{F}\mathfrak{i}^{gr}(C_A, \mathbf{D})$ et $\mathbf{S}f = \Gamma_f^{*gr}$, nous aurions obtenu la structure de point initial. Ces structures sont indépendantes du microcosme $\mathfrak{M}$ (cf. § 2.1).

4) La *structure bilinéaire* associée au produit $A \times B$ de deux $\mathfrak{M}$-groupes abéliens : elle s'obtient en associant à tout groupe G l'ensemble $\mathbf{S}G = \text{bilin}\,(A \times B, G)$, et à tout isomorphisme $f : G \to G'$ l'application $\gamma \rightsquigarrow f\gamma$, ce qui détermine un foncteur $\mathbf{S}$ de la catégorie $\mathscr{G}$ des $\mathfrak{M}$-groupes dans $\mathscr{E}\mathfrak{i}$.

2.3. — Nous allons construire des catégories en relation étroite avec une espèce de structure $\mathbf{S}$ sur $\mathscr{A}$. La première idée est de prendre une copie de chaque objet A de $\mathscr{A}$ pour toute $\mathbf{S}$-structure sur A. Plus précisément, nous désignerons par $\langle \mathbf{S} \rangle$ la catégorie dont les objets sont les objets $\mathbf{S}$-structurés A_s, dont les morphismes sont les triples $(B_t, f, A_s) : A_s \to B_t$ où f, s et t sont des éléments respectifs de $\mathscr{A}(A, B)$, $\mathbf{S}A$ et $\mathbf{S}B$, et dont la loi de composition est définie par $(C_r, g, B_t)\,(B_t, f, A_s) = (C_r, gf, A_s)$.

Si $\mathscr{A}$ est une $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$-catégorie, $\langle \mathbf{S} \rangle$ l'est aussi, car tout élément de $\mathscr{A}$ appartient à $\mathfrak{M}$ et tout ensemble $\mathbf{S}A$ est inclus dans $\mathfrak{M}$. Par conséquent les couples A_s et les triples (B_t, f, A_s) appartiennent à $\mathfrak{M}$ et $\langle \mathbf{S} \rangle^o$ est inclus dans $\mathfrak{M}$.

Les isomorphismes de la catégorie $\langle \mathbf{S} \rangle$ sont évidemment les triples (B_t, f, A_s) où f est un isomorphisme de $\mathscr{A}$. Or nous voudrions nous limiter aux isomorphismes qui transportent la structure de la source sur celle du but et que nous appellerons *isomorphismes purs*. Nous sommes donc amenés à poser :

DÉFINITION 2.4. — *Une catégorie de l'espèce de structure* $\mathbf{S}$ *est une sous-catégorie* $\mathscr{S}$ *de* $\langle \mathbf{S} \rangle$ *telle que, pour tout isomorphisme* $f : A \to B$ *de* $\mathscr{A}$, *tout point* s *de* $\mathbf{S}A$ *et tout point* t *de* $\mathbf{S}B$, *l'on ait :*

$$\mathbf{S}fs = t \iff (B_t, f, A_s) \text{ et } (A_s, f^{-1}, B_t) \in \mathscr{S}.$$

Toutes les catégories de l'espèce de structure $\mathbf{S}$ ont pour groupoïde associé celui dont les morphismes sont les triples (B_t, f, A_s) où f est un isomorphisme pur de $\mathbf{S}$, c'est-à-dire tel que $\mathbf{S}fs = t$, ou, ce qui revient au même, tel que $\mathbf{S}f^{-1}t = s$. Ce groupoïde, que nous désignerons par $\tilde{\mathscr{A}}_{\mathbf{S}}$, est donc la plus petite catégorie de l'espèce de structure $\mathbf{S}$. Si $\mathscr{A}$ est une $\mathfrak{M}$i-catégorie, $\mathscr{S}$ l'est aussi.

2.5. — La loi $\mathbf{S} \rightsquigarrow \tilde{\mathscr{A}}_{\mathbf{S}}$ permet de déterminer un foncteur $\mathbf{J}$ de la catégorie des espèces de structures sur $\mathscr{A}$ — c'est-à-dire de la catégorie $\mathscr{F}[\tilde{\mathscr{A}}, \mathscr{E}\mathrm{i}]$ — dans la catégorie des groupoïdes, en associant à une transformation naturelle $\Phi : \mathbf{S} \to \mathbf{S}'$ le foncteur $\mathbf{J}(\Phi) : \tilde{\mathscr{A}}_{\mathbf{S}} \to \tilde{\mathscr{A}}_{\mathbf{S}'}$ défini par $\mathbf{J}(\Phi)\,(B_t.\ f, A_s) = (B_{\Phi_{B}t}, f, A_{\Phi_{A}s})$.

Ce foncteur est injectif, car son application sous-jacente est injective.

2.6. — La catégorie $\langle \mathbf{S} \rangle$ est munie d'un foncteur pleinement fidèle $\mathbf{P} : \langle \mathbf{S} \rangle \to \mathscr{A}$ défini par $(B_t, f, A_s) \rightsquigarrow f$. Il en résulte que toute catégorie $\mathscr{S}$ de l'espèce $\mathbf{S}$ est munie d'un foncteur fidèle $\mathscr{S} \to \mathscr{A}$, restriction de $\mathbf{P}$.

Soient s et t deux structures d'espèce $\mathbf{S}$ sur un objet A. Nous dirons que la structure s est *plus fine* que la structure t, relativement à la catégorie $\mathscr{S}$ de l'espèce $\mathbf{S}$, et nous écrirons $s \leqslant t$, si $(A_t, \mathrm{id}_A, A_s)$ est un morphisme de $\mathscr{S}$. La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre entre les $\mathbf{S}$-structures de A.

2.7. — *Exemple.* — Si $\mathbf{S}$ est la structure d'espace topologique, on peut prendre pour catégorie $\mathscr{S}$ d'espèce $\mathbf{S}$ celle des applications continues, ou des applications ouvertes, ou des homéomorphismes-dans, ou simplement celle des homéomorphismes-sur qui forme le groupoïde associé à $\mathbf{S}$. Dans les deux premiers cas, la notion de structure plus fine correspond à celle de topologie plus fine ; dans les deux derniers, deux structures comparables sont égales.

Définition 2.8. — *Soient* **K** *et* **S** *deux espèces de structures sur une catégorie* $\mathscr{A}$. *Une subordination de la structure* **K** *à la structure* **S** *est une transformation naturelle* $\Phi : \mathbf{S} \to \mathbf{K}$ [6].

Si s est une **S**-structure sur l'objet A de $\mathscr{A}$, la **K**-structure $\Phi_A s$ sur A est appelée *structure déduite* de s par Φ. Si Φ est injective, on dit que l'espèce de structure **K** est *moins riche* que l'espèce **S**. Si Φ est un isomorphisme, on dit que les espèces **K** et **S** sont équivalentes.

2.9. — Soit Φ une subordination de **K** à **S** déterminée par une famille d'applications $\Phi_A : \mathbf{S}A \to \mathbf{K}A$. Pour alléger les notations, nous laisserons tomber l'indice A. Si s est un point de **S**A, Φs désignera donc son image par Φ_A.

La transformation naturelle Φ détermine un foncteur $\mathbf{F}_\Phi : \langle \mathbf{S} \rangle \to \langle \mathbf{K} \rangle$, défini par $\mathbf{F}_\Phi(B_t, f, A_s) = (B_{\Phi t}, f, A_{\Phi s})$ pour tout triple (B_t, f, A_s) de $\langle \mathbf{S} \rangle$.

Soient $\mathscr{S}$ une catégorie de l'espèce **S**, $\mathscr{I}$ l'ensemble image de $\mathscr{S}$ par $\mathbf{F}_\Phi$ et $\mathscr{K}$ la sous-catégorie de $\langle \mathbf{K} \rangle$ qui est l'Image de $\mathbf{F}_\Phi$ (cf. § 1.6.4). Les morphismes de $\mathscr{K}$ sont donc les composés dans $\langle \mathbf{K} \rangle$ d'un nombre fini d'éléments de $\mathscr{I}$. La restriction de $\mathbf{F}_\Phi$ à $\mathscr{S}$ détermine un foncteur $\mathbf{P}_\Phi : \mathscr{S} \to \mathscr{K}$.

Si les applications Φ_A sont toutes surjectives, la catégorie $\mathscr{K}$ contient les isomorphismes purs. Formellement, pour tout isomorphisme $f : A \to B$ de $\mathscr{A}$, tout point k de **K**A et tout point l de **K**B, on a :

$$\mathbf{K}fk = l \quad \Rightarrow \quad (B_l, f, A_k) \text{ et } (A_k, f^{-1}, B_l) \in \mathscr{K}. \qquad *$$

En effet, si s est un point de $\Phi^{-1}(k)$ et si t égale $\mathbf{S}f(s)$, les triples (B_t, f, A_s) et (A_s, f^{-1}, B_t) sont des éléments de $\mathscr{S}$ tels que $\Phi s = k$ et $\Phi t = \Phi(\mathbf{S}f)s = (\mathbf{K}f)\Phi s = \mathbf{K}fk = l$.

Mais $\mathscr{K}$ n'est généralement pas une structure de l'espèce **K**. Pour tout objet A de $\mathscr{A}$, désignons par ρA la relation d'équivalence sur **K**A définie par k est équivalent à l (notation $k \sim l$) si (A_l, id, A_k) et (A_k, id, A_l) sont des morphismes de $\mathscr{K}$.

Notons $\Psi_A : \mathbf{K}A \to \mathbf{Q}A$ la projection canonique de **K**A sur son quotient par ρA. Nous allons montrer que l'on peut définir une espèce de structure **Q** telle que la famille $\Psi = (\Psi_A)$ détermine une subordination de **Q** à **K**.

Cela nous permettra ultérieurement de construire une catégorie d'espèce **Q** que l'on dira associée à $\mathscr{S}$ par Φ.

Démontrons d'abord que si $f: A \to B$ est un isomorphisme de $\mathscr{A}$, l'application **K**f est compatible avec les relations d'équivalence ρA et ρB.

Si le morphisme (A_l, id, A_k) appartient à $\mathscr{K}$, il est le composé dans $\mathscr{K}$ d'une suite finie $t_1, t_2, ..., t_n$ d'éléments de $\mathscr{I}$. Chaque t_i est l'image par $\mathbf{P}_\Phi$ d'un morphisme s_i de $\mathscr{S}$. Soient A_s la source de s_n et A_t le but de s_1 ; il résulte de la définition de $\mathbf{P}_\Phi$ que $\Phi s = k$ et $\Phi t = l$.

Comme les triples $s_0 = (B_{\mathbf{S}ft}, f, A_t)$ et $s_{n+1} = (A_s, f^{-1}, B_{\mathbf{S}fs})$ sont des éléments de $\mathscr{S}$ (ce qui serait vrai même si $\mathscr{S}$ vérifiait seulement la condition $*$ et comme $\Phi(\mathbf{S}f)s = (\mathbf{K}f)\Phi s = \mathbf{K}fk$ et que $\Phi(\mathbf{S}f)t = \mathbf{K}fl$, la suite $\mathbf{P}_\Phi(s_0), t_1, ..., t_n, \mathbf{P}_\Phi(s_{n+1})$ d'éléments de $\mathscr{I}$ a pour composé le morphisme $(B_{\mathbf{K}fl}, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fk})$ qui est donc un élément de $\mathscr{K}$.

De même, si (A_k, id, A_l) est un morphisme de $\mathscr{K}$, $(B_{\mathbf{K}fk}, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fl})$ en est un autre. Il en résulte que $k \sim l$ (mod. ρA) entraîne $\mathbf{K}fk \sim \mathbf{K}fl$ (mod. ρB). En d'autres termes, comme nous l'avions annoncé, **K**f est compatible avec les relations d'équivalence ρA et ρB.

Par passage au quotient, **K**f donne une application $\mathbf{Q}f : \mathbf{Q}A \to \mathbf{Q}B$. La loi $f \rightsquigarrow \mathbf{Q}f$ définit un foncteur **Q** de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{E}$i et la famille de surjections $(\Psi_A)_{A \in \mathscr{A}_0}$ détermine une transformation naturelle de **K** dans **Q**.

On peut alors construire la catégorie $\mathscr{Q}$ image de $\mathscr{K}$ par $\mathbf{F}\Psi$.

Proposition 2.10. — *Dans les conditions décrites ci-dessus, $\mathscr{Q}$ est une catégorie de l'espèce* **Q** *et le foncteur $\mathbf{P}_\Psi : \mathscr{K} \to \mathscr{Q}$ est pleinement fidèle.*

Puisque $\mathscr{K}$ vérifie la condition $*$, en vertu de ce qui précède $\mathscr{Q}$ la vérifie également. Pour montrer que $\mathscr{Q}$ est une catégorie de l'espèce **Q**, il suffit donc de prouver que $\mathbf{Q}fq = r$ si $f: A \to B$ est un isomorphisme de $\mathscr{A}$, si q est un élément de $\mathbf{Q}$A et r un élément de $\mathbf{Q}$B et si les triples (B_r, f, A_q) et (A_q, f^{-1}, B_r) appartiennent à $\mathscr{Q}$.

Remarquons tout d'abord que si (B_l, f, A_k) est un morphisme de $\mathscr{K}$, si j est équivalent à k (mod. ρA) et m équivalent à l (mod. ρB), la définition des relations d'équivalence entraîne que (B_m, f, A_j), égal à $(B_m, \mathrm{id}, B_l)\,(B_l, f, A_k)\,(A_k, \mathrm{id}, A_j)$, est aussi un morphisme de $\mathscr{K}$. Il en résulte que si $t = (B_r, f, A_q)$ est un élément de $\mathscr{Q}$, quels que soient les éléments k et l tels que $\Psi k = q$ et $\Psi l = r$, t est l'image par $\mathbf{P}_\Psi$ du triple (B_l, f, A_k) qui appartient nécessairement à $\mathscr{K}$.

Si (A_q, f^{-1}, B_r) est aussi un élément de $\mathscr{Q}$, il est donc l'image par $\mathbf{P}_\Psi$ du triple (A_k, f^{-1}, B_l) de $\mathscr{K}$. Comme d'autre part $(B_{\mathbf{K}\mathrm{f}k}, f, A_k)$ et $(A_k, f^{-1}, B_{\mathbf{K}\mathrm{f}k})$ appartiennent aussi à $\mathscr{K}$, on obtient par composition les morphismes $(B_{\mathbf{K}\mathrm{f}k}, \mathrm{id}, B_l)$ et $(B_l, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}\mathrm{f}k})$. Ceci prouve que l et $\mathbf{K}\mathrm{f}k$ sont équivalents (mod. ρB), c'est-à-dire que leurs images par Ψ_B sont égales. On a donc $r = \Psi l = \Psi(\mathbf{K}\mathrm{f})k = (\mathbf{Q}\mathrm{f})\Psi k = \mathbf{Q}\mathrm{f}q$, ce que nous voulions démontrer.

Il nous reste encore à vérifier que le foncteur $\mathbf{P}_\Psi$ est pleinement fidèle, c'est-à-dire que sa restriction à $\mathscr{K}(A_k, B_l)$ est une bijection sur $\mathscr{Q}(A_{\Psi k}, B_{\Psi l})$. Or c'est une injection, puisque deux triples distincts de $\mathscr{K}(A_k, B_l)$ diffèrent par leur élément central, et c'est une surjection en vertu de la remarque que nous avons faite deux alinéas plus haut.

2.11. — La catégorie $\mathscr{Q}$ est appelée l'*associée* de la catégorie $\mathscr{S}$ par la subordination Φ déterminée, rappelons-le, par une famille de surjections. Le caractère pleinement fidèle de $\mathbf{P}_\Psi$ montre qu'elle est presque l'image de $\mathscr{S}$ par $\mathbf{P}_\Phi$, ce qui est précisé par les considérations suivantes :

Soit $\mathscr{B}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(\langle \mathbf{S} \rangle, \mathscr{S})$ où $\mathbf{S}$ est une espèce de structure sur $\mathscr{A}$ et $\mathscr{S}$ une catégorie d'espèce $\mathbf{S}$, et dont un morphisme $\langle\Theta\rangle : (\langle \mathbf{S} \rangle, \mathscr{S}) \to (\langle \mathbf{R} \rangle, \mathscr{R})$ est une transformation naturelle $\Theta : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ telle que l'image ensembliste de $\mathscr{S}$ par $\mathbf{F}_\Theta$ soit comprise dans $\mathscr{R}$.

En gardant les notations ci-dessus, si Θ vérifie la condition : pour tout objet A de $\mathscr{A}$ et tout couple (s, t) de points de SA, $\Phi s = \Phi t$ entraîne $\Theta s = \Theta t$, alors $\langle\Theta\rangle$ se factorise à travers $\langle\Psi\Phi\rangle$.

En effet, la condition entraîne la factorisation de Θ_A à travers Φ_A. Ceci détermine une transformation naturelle $\Xi : \mathbf{K} \to \mathbf{R}$. Un morphisme de $\mathscr{K}$ est le composé d'une suite $t_1, \ldots, t_n$ d'éléments images par $\mathbf{F}_\Phi$ de morphismes de $\mathscr{S}$; l'image de chaque t_i par $\mathbf{F}_\Xi$ se trouvant dans $\mathscr{R}$, leur composé s'y trouve aussi et l'image de $\mathscr{K}$ est incluse dans $\mathscr{R}$.

D'autre part, si k et l sont deux points de KA équivalents modulo ρA, les triples (A_l, id, A_k) et (A_k, id, A_l) appartiennent à $\mathscr{K}$. Dès lors, leurs images par $\mathbf{F}_\Xi$, $(A_{\Xi l}, \mathrm{id}, A_{\Xi k})$ et $(A_{\Xi k}, \mathrm{id}, A_{\Xi l})$ appartiennent à $\mathscr{R}$. Comme $\mathscr{R}$ est une catégorie d'espèce **R**, ceci entraîne $\Xi\, l = \Xi\, k$, ce qui prouve que Ξ se factorise à travers Ψ.

2.12. — *Exemples.* — La structure de groupe abélien est subordonnée à la structure de corps par la transformation naturelle qui associe à un corps son groupe additif. Cette transformation n'est ni injective, car deux corps peuvent avoir le même groupe additif, ni surjective, car un corps possède au moins deux éléments. Par contre, une transformation naturelle analogue subordonne la structure de groupe abélien à celle d'anneau et cette transformation est surjective, car tout groupe abélien peut être muni d'une structure d'anneau en ajoutant par exemple la multiplication nulle. Si $\mathscr{S}$ est la catégorie des anneaux et des homomorphismes d'anneaux, la catégorie associée par cette transformation naturelle est celle des groupes et des homomorphismes de groupes. La relation d'équivalence ρA définie au paragraphe 2.9 est alors l'identité.

La structure de groupe abélien est moins riche que celle d'anneau relativement à la transformation naturelle qui associe à un groupe l'anneau à multiplication nulle dont il est le groupe additif, elle est équivalente à la structure d'anneau à multiplication nulle. Elle est moins riche que celle de groupe relativement à la transformation naturelle d'inclusion des groupes abéliens dans les groupes. Elle est équivalente à celle de $\mathbf{Z}$-module, etc.

Un isomorphisme $f : A \to B$ transporte les $\mathbf{S}$-structures de A sur les $\mathbf{S}$-structures de B. Pour définir le transport par un morphisme quelconque, il faut prolonger $\mathbf{S}$ en un foncteur de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{E}\mathrm{i}$.

DÉFINITIONS 2.13. — *Une espèce de structure covariante sur une catégorie* $\mathscr{A}$ *est un foncteur* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$.

Une espèce de structure contravariante sur une catégorie $\mathscr{A}$ *est un foncteur contravariant* $\mathbf{G} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$.

Le foncteur $\mathbf{F}$, par restriction à $\tilde{\mathscr{A}}$, et le foncteur $\mathbf{G}$, par restriction à $\tilde{\mathscr{A}}$ et composition avec la symétrie $f \rightsquigarrow f^{-1}$ de $\tilde{\mathscr{A}}$, déterminent une espèce de structure au sens du paragraphe 2.1, dite *sous-jacente* à $\mathbf{F}$ ou à $\mathbf{G}$.

Soit $f : A \to B$ un morphisme. A une $\mathbf{F}$-structure s de A (resp. à une $\mathbf{G}$-structure t de B) f associe la $\mathbf{F}$-structure $\mathbf{F}fs$ de B (resp. la $\mathbf{G}$-structure $\mathbf{G}ft$ de A), que l'on dit transportée de s par f (resp. transportée de t par f). Pour rappeler ce fait, on dit que les $\mathbf{F}$-structures (resp. les $\mathbf{G}$-structures) *se transportent de manière covariante* (resp. *contravariante*). L'on dit aussi que les structures d'espèce $\mathbf{S} : \tilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$ peuvent se transporter si $\mathbf{S}$ peut être prolongé à la catégorie $\mathscr{A}$. Un tel transport est toujours relatif au prolongement choisi. Un morphisme (B_t, f, A_s) de $\langle \mathbf{F} \rangle$ (resp. de $\langle \mathbf{G} \rangle$) est dit *pur* si $t = \mathbf{F}fs$ (resp. si $s = \mathbf{G}ft$).

2.14. — *Exemples.*

1) Les structures d'espace topologique peuvent être transportées de manière covariante par le foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$ défini, pour toute application $f : A \to B$, par l'application $\mathbf{F}f$ qui associe, à une topologie sur A, la topologie sur B dont les ouverts sont les parties de B qui ont un ouvert de A pour image réciproque par f.

Elles peuvent être transportées de manière contravariante par le foncteur $\mathbf{G} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$ défini, pour toute application $f : A \to B$, par l'application $\mathbf{G}f$ qui associe, à une topologie sur B, la topologie sur A dont les ouverts sont les images réciproques par f des ouverts de B.

On remarquera que $(\mathbf{F}f)(\mathbf{G}f) = \mathrm{id}_{\mathbf{S}B}$ si et seulement si l'application f est surjective, et que $(\mathbf{G}f)(\mathbf{F}f) = \mathrm{id}_{\mathbf{S}A}$ si et seulement si f est injective. De toute manière, $(\mathbf{F}f)(\mathbf{G}f)$ transforme une topologie de B en une topologie plus fine et $(\mathbf{G}f)(\mathbf{F}f)$ transforme une topologie de A en une topologie moins fine. De plus, $(\mathbf{F}f)(\mathbf{G}f)(\mathbf{F}f) = \mathbf{F}f$ et $(\mathbf{G}f)(\mathbf{F}f)(\mathbf{G}f) = \mathbf{G}f$.

2) Les structures de point final peuvent se transporter de manière covariante en posant, pour tout morphisme $f : A \to B$, $\mathbf{F}f = \Gamma^{gr}_{f*}$. Semblablement, les structures de point initial peuvent se transporter de manière contravariante.

3) Les structures bilinéaires peuvent se transporter de manière covariante en posant $\mathbf{F}f(\gamma) = f\gamma$.

Définitions 2.15. — *Une catégorie de l'espèce de structure covariante* **F** *sur* $\mathscr{A}$ *est une catégorie* $\mathscr{S}$ *de l'espèce* $\mathbf{S} : \tilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$ *sous-jacente à* **F** *qui, pour tout morphisme* $f : A \to B$ de $\mathscr{A}$, *tout* s *de* **F**A *et tout* t *de* **F**B, *vérifie la condition* :

$$(B_t, f, A_s) \in \mathscr{S} \Leftrightarrow (B_t, \mathrm{id}_B, B_{\mathbf{F}fs}) \in \mathscr{S}.$$

Une catégorie de l'espèce de structure contravariante **G** *sur* $\mathscr{A}$ *est une catégorie* $\mathscr{S}$ *de l'espèce* $\mathbf{S} : \tilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$ *sous-jacente à* **G** *qui, pour tout morphisme* $f : A \to B$ *de* $\mathscr{A}$, *tout* s *de* **G**A *et tout* t *de* **G**B, *vérifie la condition* :

$$(B_t, f, A_s) \in \mathscr{S} \Leftrightarrow (A_{\mathbf{G}ft}, \mathrm{id}_A, A_s) \in \mathscr{S}.$$

Une catégorie $\mathscr{S}$ de l'espèce covariante **F** (resp. contravariante **G**) est donc une catégorie de l'espèce **S** sous-jacente, telle que le triple (B_t, f, A_s) soit un morphisme de $\mathscr{S}$ si et seulement si la structure t (resp. la structure transportée de t par f) est moins fine (cf. § 2.5) que la structure transportée de s par f (resp. la structure s). En particulier, si (B_t, f, A_s) est un morphisme pur, il appartient à $\mathscr{S}$ puisque l'unité $(B_t, \mathrm{id}_B, B_t)$ (resp. $(A_s, \mathrm{id}_A, A_s)$) est nécessairement un élément de $\mathscr{S}$.

2.16. — Si l'on appelle $\mathscr{S}$*-comparaison* un triple de $\mathscr{S}$ dont l'élément central est une unité, — un tel triple permet en effet de comparer deux structures sur un même objet, — on peut également dire que $\mathscr{S}$ est une catégorie de l'espèce covariante **F** (resp. contravariante **G**) si c'est une catégorie de l'espèce **S** sous-jacente, telle que ses morphismes soient exactement les éléments de $\langle \mathbf{S} \rangle$ qui se factorisent en cp (resp. en pc) où p désigne un morphisme pur et c une $\mathscr{S}$-comparaison. Cette factorisation est d'ailleurs unique.

2.17. — Toutes les catégories de l'espèce covariante **F** (resp. contravariante **G**) ont pour sous-catégorie la catégorie $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}$ (resp. $\mathscr{A}^{\mathbf{G}}$) formée des morphismes purs. La loi $\mathbf{F} \rightsquigarrow \mathscr{A}_{\mathbf{F}}$ (resp. $\mathbf{G} \rightsquigarrow \mathscr{A}^{\mathbf{G}}$) permet de déterminer un foncteur **J** de la catégorie des espèces de structures covariantes sur $\mathscr{A}$ (resp. contravariantes) dans celle des catégories, en associant, à toute transformation naturelle $\Phi : \mathbf{F} \to \mathbf{F}'$, le foncteur $\mathbf{J}(\Phi) : \mathscr{A}_{\mathbf{F}} \to \mathscr{A}_{\mathbf{F}'}$ (resp. $\mathbf{J}(\Phi) : \mathscr{A}^{\mathbf{G}} \to \mathscr{A}^{\mathbf{G}'}$) défini par $(\mathrm{B}_t, \mathrm{f}, \mathrm{A}_s) \rightsquigarrow (\mathrm{B}_{\Phi_{\mathrm{B}} t}, \mathrm{f}, \mathrm{A}_{\Phi_{\mathrm{A}} s})$.

Ce foncteur **J** est injectif et détermine, pour chaque espèce de structure $\mathbf{S} : \tilde{\mathscr{A}} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$, une bijection entre les prolongements covariants (resp. contravariants) de **S** et les catégories $\mathscr{S}$ de l'espèce **S** qui vérifient la condition : pour tout morphisme $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ (resp. $\mathrm{f} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$) et toute **S**-structure s de A, il existe une et une seule **S**-structure t de B telle que $(\mathrm{B}_t, \mathrm{f}, \mathrm{A}_s)$ appartienne à $\mathscr{S}$ (resp. telle que $(\mathrm{A}_s, \mathrm{f}, \mathrm{B}_t)$ appartienne à $\mathscr{S}$).

2.18. — Dans le cas de structures covariantes ou contravariantes, on peut définir la subordination en reprenant mot à mot le paragraphe 2.8. Les constructions du paragraphe 2.9 peuvent d'ailleurs s'étendre : si nous gardons les mêmes notations, mais en supposant que **K** et **S** sont des espèces de structures covariantes et $\mathscr{S}$ une catégorie de l'espèce covariante **S**, la catégorie $\mathscr{K}$ jouit alors de la propriété : si f, k et l sont des éléments respectifs de $\mathscr{A}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, KA et KB, alors :

$$(\mathrm{B}_l, \mathrm{f}, \mathrm{A}_k) \in \mathscr{I} \Rightarrow (\mathrm{B}_l, \mathrm{id}, \mathrm{B}_{\mathbf{K}\mathrm{f}k}) \in \mathscr{I},$$
$$(\mathrm{B}_l, \mathrm{id}, \mathrm{B}_{\mathbf{K}\mathrm{f}k}) \in \mathscr{K} \Rightarrow (\mathrm{B}_l, \mathrm{id}, \mathrm{A}_k) \in \mathscr{K}. \qquad **$$

En effet, si (B_t, f, A_s) est un élément de $\mathscr{S}$ dont l'image par $\mathbf{P}_\Phi$ est (B_l, f, A_k), le triple $(B_t, \mathrm{id}, B_{\mathbf{S}fs})$ qui appartient alors à $\mathscr{S}$, a pour image par $\mathbf{P}_\Phi$ l'élément $(B_l, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fk})$, puisque $\Phi(\mathbf{S}f)s = (\mathbf{K}f)\Phi s = \mathbf{K}fk$.

Pour vérifier la deuxième partie, il suffit de montrer que tout morphisme pur, $t = (B_{\mathbf{K}fk}, f, A_k)$, est élément de $\mathscr{K}$. Or, si s est un élément de $\Phi^{-1}(k)$, le triple $(B_{\mathbf{S}fs}, f, A_s)$ appartient à $\mathscr{S}$ et son image $\mathbf{P}_\Phi$ est t, puisque $\Phi(\mathbf{S}f)s = (\mathbf{K}f)\Phi s = \mathbf{K}fk$.

Désignons par $\mathscr{I}'$ l'ensemble des triples $(B_l, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fk})$ tels que (B_l, f, A_k) appartienne à $\mathscr{K}$. Soit $\mathscr{K}'$ la sous-catégorie de $\langle \mathbf{K} \rangle$ engendrée par $\mathscr{K}^o \cup \mathscr{I}'$ (cf. § 1.4.7). La catégorie $\mathscr{K}'$ jouit de la propriété : si f, k et l sont des éléments respectifs de $\mathscr{A}(A, B)$, KA et KB, alors :

$$(B_l, f, A_k) \in \mathscr{K}' \Leftrightarrow (B_l, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fk}) \in \mathscr{K}'.$$

L'implication de droite à gauche provient du fait que $\mathscr{K}'$ contient $\mathscr{K}$ et ainsi tous les morphismes purs. Établir l'autre implication revient à démontrer que tout morphisme de $\mathscr{K}'$ se factorise en un produit cp d'une $\mathscr{K}'$-comparaison (cf. § 2.16) et d'un morphisme pur. Or, la définition de $\mathscr{I}'$ entraîne que tout morphisme de $\mathscr{K}$ se factorise en un produit de la forme cp. De plus, un morphisme de $\mathscr{K}'$ est le composé d'une suite finie d'éléments qui sont, soit un morphisme de $\mathscr{K}$, soit une $\mathscr{K}'$-comparaison appartenant à $\mathscr{I}'$. Dès lors, si nous prouvons qu'un composé tc d'un élément de $\mathscr{K}$ et d'une $\mathscr{K}'$-comparaison appartenant à $\mathscr{I}'$ peut aussi se mettre sous la forme ct, comme le composé de $\mathscr{K}'$-comparaisons en est une autre, une récurrence finie amènera un élément quelconque de $\mathscr{K}'$ à prendre la forme cp.

Considérons donc un composé $(C_m, g, B_l)\,(B_l, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fk})$ d'un morphisme de $\mathscr{K}$ et d'un triple tel que (B_l, f, A_k) appartienne à $\mathscr{K}$. Le triple $(C_m, gf, A_k) = (C_m, g, B_l)\,(B_l, f, A_k)$ est un élément de $\mathscr{K}$ et, par conséquent, $(C_m, \mathrm{id}, C_{\mathbf{K}(gf)k})$ appartient à $\mathscr{I}'$. En outre, le morphisme $(C_{\mathbf{K}(gf)k}, g, B_{\mathbf{K}fk})$ est pur et appartient donc à $\mathscr{K}$. Nous obtenons alors la décomposition désirée, car

$$(C_m, g, B_l)\,(B_l, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fk}) = (C_m, \mathrm{id}, C_{\mathbf{K}(gf)k})\,(C_{\mathbf{K}(gf)k}, g, B_{\mathbf{K}fk}).$$

C'est à partir de $\mathscr{K}'$ que l'on va définir les relations d'équivalences sur les ensembles $\mathbf{K}A$ en posant, comme au paragraphe 2.9, k est équivalent à l modulo ρA si (A_k, id, A_l) et (A_l, id, A_k) sont des triples de $\mathscr{K}'$. Nous désignerons de nouveau le quotient par $\Psi_A : \mathbf{K}A \to \mathbf{Q}A$.

$\mathbf{Q}$ est alors une espèce de structure covariante sur $\mathscr{A}$, car si $f : A \to B$ est un morphisme de $\mathscr{A}$ et si k et l sont des points de $\mathbf{K}A$ équivalents modulo ρA, comme $(B_{\mathbf{K}fk}, f, A_k)$ appartient à $\mathscr{K}'$, on obtient, par composition avec (A_k, id, A_l), le triple $(B_{\mathbf{K}fk}, f, A_l)$ de $\mathscr{K}'$. Il en résulte que $(B_{\mathbf{K}fk}, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fl})$ est un triple de $\mathscr{K}'$. Semblablement $(B_{\mathbf{K}fl}, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fk})$ est aussi un triple de $\mathscr{K}'$ et $\mathbf{K}fl$ est équivalent à $\mathbf{K}fk$ modulo ρB. Dès lors $\mathbf{K}f$ donne lieu à un morphisme $\mathbf{Q}f : \mathbf{Q}A \to \mathbf{Q}B$.

Soit alors $\mathscr{Q}$ la catégorie image de $\mathscr{K}'$ par $\mathbf{F}_\Psi$. Nous avons vu au paragraphe 2.10 qu'elle était l'image ensembliste de $\mathscr{K}'$. Elle jouit dès lors de la propriété $**$ où l'on remplace $\mathscr{I}$ et $\mathscr{K}$ par $\mathscr{Q}$. Autrement dit, $\mathscr{Q}$ est une catégorie de l'espèce covariante $\mathbf{Q}$.

La catégorie $\mathscr{Q}$ est appelée catégorie *associée* à $\mathscr{S}$ par la subordination Φ.

2.19. — Soit alors $\mathscr{B}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(\langle \mathbf{S} \rangle, \mathscr{S})$ où $\mathbf{S}$ est une espèce de structure covariante sur $\mathscr{A}$ et $\mathscr{S}$ une catégorie de l'espèce covariante $\mathbf{S}$, et dont un morphisme $\langle \Theta \rangle : (\langle \mathbf{S} \rangle, \mathscr{S}) \to (\langle \mathbf{R} \rangle, \mathscr{R})$ est une transformation naturelle $\Theta : \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ telle que l'image de $\mathscr{S}$ par $\mathbf{F}_\Theta$ soit comprise dans $\mathscr{R}$.

Dans les conditions précédentes, si la transformation Θ est telle que pour tout couple (s, t) de points de $\mathbf{S}A$, $\Phi_A s = \Phi_A t$ entraîne $\Theta_A s = \Theta_A t$, le morphisme $\langle \Theta \rangle$ se factorise à travers $\langle \Psi\Phi \rangle$.

En effet, cette condition signifie que Θ se factorise en $\Xi\,\Phi$ à travers une certaine transformation naturelle $\Xi : \mathbf{K} \to \mathbf{R}$. Comme $\mathscr{I}$ est l'image de $\mathscr{S}^0$ par $\mathbf{F}_\Phi$, l'image de $\mathscr{I}$ par $\mathbf{F}_\Xi$ sera comprise dans $\mathscr{R}$.

Or, un morphisme (B_l, f, A_k) de $\mathscr{K}$ est le composé dans $\langle \mathbf{K} \rangle$ d'une suite finie d'éléments de $\mathscr{I}$; son image par le foncteur $\mathbf{F}_\Xi$ est donc un élément (B_q, f, A_p) de $\mathscr{R}$. Et comme $\mathscr{R}$ est une catégorie de l'espèce covariante $\mathbf{R}$, $(B_q, \mathrm{id}, B_{\mathbf{R}fp})$ est un élément de $\mathscr{R}$, image par $\mathbf{F}_\Xi$ du morphisme $(B_l, \mathrm{id}, B_{\mathbf{K}fk})$. Finalement l'image de $\mathscr{K}'$ par $\mathbf{F}_\Xi$ est comprise dans $\mathscr{R}$.

Mais alors, deux éléments k et l de $\mathbf{K}A$, équivalents modulo ρA, ont même image par Ξ_A. En effet, les triples (A_l, id, A_k) et (A_k, id, A_l) de $\mathscr{K}'$ ont respectivement pour image dans $\mathscr{R}$ les triples $(A_{\Xi l}, \mathrm{id}, A_{\Xi k})$ et $(A_{\Xi k}, \mathrm{id}, A_{\Xi l})$, et comme $\mathscr{R}$ est une catégorie de l'espèce $\mathbf{R}$, cela entraîne $\Xi\, l = \Xi\, k$.

Autrement dit, Ξ_A se factorise à travers Ψ_A et la transformation naturelle Θ se factorise en $\Lambda\Psi\Phi$ où Λ est un morphisme de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$. Comme la catégorie $\mathscr{Q}$ est l'image ensembliste de $\mathscr{K}'$ par $\mathbf{F}_\Psi$, son image par $\mathbf{F}_\Lambda$ est comprise dans $\mathscr{R}$. En d'autres termes, comme nous l'avions annoncé, $\langle \Theta \rangle$ se factorise à travers $\langle \Psi\Phi \rangle$.

2.20. — *Exemple.* — Soient $\mathbf{S}$ l'espèce de structure d'espace topologique et $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ les prolongements de $\mathbf{S}$ définis au paragraphe 2.14. La catégorie des applications continues est une catégorie de l'espèce covariante $\mathbf{F}$ et aussi une catégorie de l'espèce contravariante $\mathbf{G}$. Il n'en est pas ainsi de la catégorie des applications ouvertes ni de celle des homéomorphismes.

CHAPITRE III

PROBLÈMES UNIVERSELS

DÉFINITION 3.1. — *Le problème universel associé à une espèce de structure covariante ou contravariante* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$ *est le suivant :*

Trouver un objet U *muni d'une* **F**-*structure* u, *de telle façon que les* **F**-*structures sur un objet quelconque* X *puissent s'obtenir d'une et d'une seule manière par transport de* u.

Autrement dit, si **F** est une espèce covariante (resp. contravariante), on demande que l'application $\mathscr{A}(\mathrm{U}, \mathrm{X}) \to \mathbf{F}\mathrm{X}$ (resp. $\mathscr{A}(\mathrm{X}, \mathrm{U}) \to \mathbf{F}\mathrm{X}$) déterminée par $\mathrm{f} \rightsquigarrow \mathbf{F}\mathrm{f}u$ soit une bijection.

Nous devons à A. Grothendieck le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Si* U_u *et* V_v *sont solutions des problèmes universels posés par les espèces de structures covariantes* (*resp. contravariantes*) **F** *et* $\mathbf{G} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$, *et si* Φ *est une subordination de* **G** *à* **F**, *alors il existe un et un seul morphisme* $\mathrm{f} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ (*resp.* $\mathrm{f} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$) *tel que* $\Phi_{\mathrm{U}} u = \mathbf{G}\mathrm{f}v$.

Corollaire. — *Les solutions éventuelles d'un problème universel sont isomorphes.*

Dans le cas covariant, ceci résulte de la bijection $\mathscr{A}(\mathrm{V}, \mathrm{U}) \to \mathbf{G}\mathrm{U}$. Le corollaire s'en déduit, car si $\mathbf{F} = \mathbf{G}$, en prenant pour Φ l'identité, on a un et un seul morphisme $\mathrm{f} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ tel que $u = \mathbf{F}\mathrm{f}v$ et un et un seul $\mathrm{g} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ tel que $v = \mathbf{F}\mathrm{g}u$. Par suite, $\mathbf{F}\mathrm{fg}u$ égale u et fg, seul morphisme qui transporte u sur u, est l'identité.

Si $\mathscr{A}$ est une $\mathfrak{M}\mathrm{i}$-catégorie, un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$ est dit *représentable* s'il est isomorphe à un foncteur $\mathbf{H}_{\mathrm{A}}$ ou $\mathbf{H}^{\mathrm{A}}$ (cf. § 1.4.9).

Proposition 3.3. — *Si $\mathscr{A}$ est une $\mathfrak{M}$i-catégorie et si $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}$i est un foncteur covariant (resp. contravariant), les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *Le problème universel défini par* **F** *admet une solution.*

2° *La catégorie $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}$ (resp. $\mathscr{A}^{\mathbf{F}}$) possède un objet coponctuel (resp. ponctuel)* (cf. § 1.7.3).

3° *Le foncteur* **F** *est représentable.*

Supposons **F** covariant.

1° $\Rightarrow$ 3°. Si U_u est une solution, on définit une équivalence naturelle $\Phi : \mathbf{H}_{\mathrm{U}} \to \mathbf{F}$ en posant : Φ_{X} est la bijection canonique $\mathscr{A}(\mathrm{U}, \mathrm{X}) \to \mathbf{F}\mathrm{X}$.

3° $\Rightarrow$ 2°. Il suffit d'envisager le cas $\mathbf{F} = \mathbf{H}_{\mathrm{U}}$. Si $u : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ est un isomorphisme, U_u est un objet coponctuel, car si s appartient à $\mathscr{A}(\mathrm{U}, \mathrm{A})$, alors $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}(\mathrm{U}_u, \mathrm{A}_s)$ contient pour unique élément le triple $(\mathrm{A}_s, su^{-1}, \mathrm{U}_u)$.

2° $\Rightarrow$ 1°. Dire que $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}(\mathrm{U}_u, \mathrm{A}_s)$ possède un et un seul élément revient à dire qu'il existe un et un seul morphisme $\mathrm{f} : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ tel que $\mathbf{F}\mathrm{f}u = s$.

3.4. — *Exemples.*

1) Le problème universel posé par l'espèce de structure contravariante des espaces topologiques (cf. § 2.14) n'admet pas de solution, car on ne peut trouver un espace topologique tel que tout autre espace topologique s'en déduise d'une et une seule manière par le procédé de l'image inverse.

2) Une solution du problème universel posé par l'espèce de structure de point final (resp. de point initial) relative à un diagramme $\mathbf{D} : \mathscr{D} \to \mathscr{A}$ à valeurs dans une $\mathfrak{M}$i-catégorie $\mathscr{A}$ est une *limite inductive* ou *limite directe* de ce diagramme (resp. une *limite projective* ou *limite inverse*). Si $\mathscr{D}$ est une catégorie discrète, on l'appelle aussi une *somme directe* (resp. un *produit direct*) de la famille d'éléments de $\mathscr{A}_0$ définie par **D**.

3) Il existe toujours une solution du problème universel posé

par l'espèce de structure bilinéaire relative au produit de deux groupes abéliens, c'est leur *produit tensoriel.*

3.5. — Revenons à l'exemple nº 2, une limite inductive d'un diagramme $\mathbf{D} : \mathscr{D} \to \mathscr{A}$ est donc formée d'un objet U de la $\mathfrak{M}$i-catégorie $\mathscr{A}$ et du graphe associé à une transformation naturelle $\Phi : \mathbf{D} \to \mathbf{C}_U$, $\mathbf{C}_U$ étant un foncteur constant (cf. § 1.7.6). Une limite inductive est donc déterminée par la donnée de Φ. S'il en existe, les limites inductives sont isomorphes, et les transformations naturelles qui les déterminent sont isomorphes dans la catégorie $\mathscr{F}i\backslash\mathbf{D}$ (cf. § 1.6.1). On peut donc en choisir une que l'on nomme abusivement *la* limite inductive de $\mathbf{D}$. C'est une transformation naturelle $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}$ formée de morphismes ayant même but. On nomme ce but la *Limite Inductive* de $\mathbf{D}$, on le note $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D}$ et on appelle aussi $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}$ l'*inclusion canonique* de $\mathbf{D}$ dans $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D}$.

L'expression : $(A, (a_D)_{D \in \mathscr{D}_0})$ *est la limite inductive de* $\mathbf{D}$, signifie : A est égal à $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D}$ et (a_D) est la famille de morphismes de but A qui détermine $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}$. Le morphisme a_D est alors appelé l'*inclusion canonique* de $\mathbf{D}(D)$ dans A.

La transformation $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}$ est telle que, pour chaque objet A de $\mathscr{A}$, toute transformation naturelle $\Phi : \mathbf{D} \to \mathbf{C}_A$ se factorise de manière unique à travers $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}$ (pour la loi ∇). Le résultat de la factorisation est une transformation naturelle constante (cf. § 1.7.6) ; elle est donc déterminée par un morphisme que l'on note $\widehat{\underrightarrow{\lim}}\, \Phi : \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D} \to A$.

Lorsque $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}$ existe, cette transformation détermine un foncteur $\underrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{D}} : [\mathscr{D}, \omega] \to \mathscr{A}$ qui prolonge $\mathbf{D}$. Si $\mathbf{D}' : \mathscr{D} \to \mathscr{A}$ est un autre foncteur qui admet une limite inductive $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}' : \mathbf{D}' \to \mathbf{C}\, (\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}')$, et si $\Phi : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ est une transformation naturelle, elle détermine la transformation $\Phi^{*gr} : \mathbf{S}' \to \mathbf{S}$ (cf. § 2.2) entre les structures de point final relatives à $\mathbf{D}'$ et à $\mathbf{D}$. En vertu du théorème 3.2, il existe alors un morphisme unique $f : \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D} \to \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D}'$ tel que $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}' \nabla \Phi = \Gamma_f \nabla \underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}$. Ce morphisme est désigné par $\underrightarrow{\lim}\, \Phi$.

Si nous désignons par $\underrightarrow{\mathscr{L}}(\mathscr{D}, \mathscr{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{D}, \mathscr{A}]$ dont les objets sont les diagrammes qui admettent une limite inductive, nous obtenons donc un foncteur $\underrightarrow{\mathbf{L}} : \underrightarrow{\mathscr{L}}(\mathscr{D}, \mathscr{A}) \to \mathscr{F}\mathrm{i}[[\mathscr{D}, \omega], \mathscr{A}]$ en associant, à un diagramme $\mathbf{D}$, le foncteur $\underrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{D}}$ et, à une transformation naturelle $\Phi = (\Phi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathscr{D}}$, la transformation naturelle $(\Phi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in[\mathscr{D},\omega]}$ où $\Phi_{\omega} = \varinjlim \Phi$. Par restriction à l'élément ω, on obtient le foncteur $\varinjlim : \underrightarrow{\mathscr{L}}(\mathscr{D}, \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$, défini par $\mathbf{D} \rightsquigarrow \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D}$ et $\Phi \rightsquigarrow \varinjlim \Phi$.

3.6. — Soit maintenant $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ un foncteur. Nous désignerons par $\underrightarrow{\mathscr{L}}_{\mathbf{F}}(\mathscr{D}, \mathscr{A})$ la sous-catégorie pleine de $\underrightarrow{\mathscr{L}}(\mathscr{D}, \mathscr{A})$ dont les objets sont les diagrammes tels que $\mathbf{FD}$ admette une limite inductive. En désignant abusivement par le même symbole un foncteur et sa restriction à $\underrightarrow{\mathscr{L}}_{\mathbf{F}}(\mathscr{D}, \mathscr{A})$, nous obtenons une transformation naturelle $\Lambda : \underrightarrow{\mathbf{L}}\mathbf{F}_{*} \to \mathbf{F}_{*}\underrightarrow{\mathbf{L}}$ entre les foncteurs :

$$\underrightarrow{\mathscr{L}}_{\mathbf{F}}(\mathscr{D}, \mathscr{A}) \xrightarrow{\mathbf{F}_*} \underrightarrow{\mathscr{L}}(\mathscr{D}, \mathscr{P}) \xrightarrow{\underrightarrow{\mathbf{L}}} \mathscr{F}\mathrm{i}[[\mathscr{D}, \omega], \mathscr{P}]$$

et $$\underrightarrow{\mathscr{L}}_{\mathbf{F}}(\mathscr{D}, \mathscr{A}) \xrightarrow{\underrightarrow{\mathbf{L}}} \mathscr{F}\mathrm{i}[[\mathscr{D}, \omega], \mathscr{A}] \xrightarrow{\mathbf{F}_*} \mathscr{F}\mathrm{i}[[\mathscr{D}, \omega], \mathscr{P}],$$

en posant que, pour tout foncteur $\mathbf{D} : \mathscr{D} \to \mathscr{A}$, $\Lambda_{\mathbf{D}} : \underrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{FD}} \to \mathbf{F}\underrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{D}}$ est la transformation naturelle déterminée par une famille de morphismes tous unités, sauf celui d'indice ω qui vaut $\widehat{\varinjlim}\,(\mathbf{F} \varinjlim \mathbf{D}) : \varinjlim \mathbf{FD} \to \mathbf{F} \varinjlim \mathbf{D}$.

On peut traiter de la même manière le cas des limites projectives et obtenir un foncteur $\Lambda' : \mathbf{F}_{*}\underleftarrow{\mathbf{L}} \to \underleftarrow{\mathbf{L}}\mathbf{F}_{*}$.

Nous dirons que le foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ est *semi-compatible avec les limites inductives* (resp. projectives) des diagrammes de schéma $\mathscr{D}$, si Λ admet une rétraction (resp. Λ' une section).

Si le foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ est contravariant, on garde les mêmes définitions, mais en travaillant sur la catégorie duale de $\mathscr{A}$. Ainsi, dans le premier cas, on obtient un foncteur $\Lambda : \underrightarrow{\mathbf{L}}\mathbf{F}_{*} \to \mathbf{F}_{*}\underleftarrow{\mathbf{L}}$.

3.7. — Dans ce paragraphe, nous désignerons par

$$\sharp : \mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{A} \times \mathscr{B}, \mathscr{P}] \to \mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{A}, \mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{B}, \mathscr{P}]]$$

le foncteur canonique défini au paragraphe 1.5.10, et par $\natural$ son inverse. Nous écrirons $\Phi^{\#}$ et $\Psi^{\natural}$ au lieu de $\#(\Phi)$ et $\natural(\Psi)$.

Il résulte des définitions que l'image par le foncteur $\#$ d'une transformation naturelle constante $\Gamma_l = \Gamma(l)$ en est une autre. Plus précisément, c'est la transformation déterminée par le morphisme constant Γ_l de $\mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{B}, \mathscr{P}]$. Symboliquement, on peut écrire : $\Gamma_l^{\#} = \Gamma(\Gamma_l)$. De la même manière, si $\mathbf{C}_\mathrm{P}$ est un foncteur constant de $\mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{A} \times \mathscr{B}, \mathscr{P}]$, on a $\mathbf{C}_\mathrm{P}^{\#} = \mathbf{C}(\mathbf{C}_\mathrm{P})$.

Soit $\mathbf{D} : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{P}$ un diagramme tel que $\mathbf{D}^{\#} : \mathscr{A} \to \mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{B}, \mathscr{P}]$ admette limite une inductive $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}^{\#} : \mathbf{D}^{\#} \to \mathbf{C}_\mathbf{L}$. $\mathbf{L} = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D}^{\#}$ est donc un foncteur de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{P}$. Dans ces conditions, les limites inductives de $\mathbf{D}$ et de $\mathbf{L}$ existent simultanément et sont liées dans ce cas par les relations :

$$\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D} = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{L} = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D}^{\#} \quad \text{et} \quad \Gamma(\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{L}) \,.\, \underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}^{\#} = (\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D})^{\#}$$

(pour être tout-à-fait rigoureux, nous devrions dire : il existe un isomorphisme $\mathrm{p} : \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D} \to \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{L}$ tel que $\Gamma(\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{L}) \,.\, \underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}^{\#} = (\Gamma(\mathrm{p}) \,.\, \underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D})^{\#}$). La dernière relation peut encore s'écrire : $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{L} = \widehat{\underrightarrow{\lim}}\, (\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D})^{\#}$.

En d'autres termes, ceci signifie que l'inclusion canonique de $\mathbf{D}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ dans $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D}$ est le composé de l'inclusion canonique de $\mathbf{D}^{\#}(\mathrm{A})$ dans $\mathbf{L}$, prise au point B, et de l'inclusion canonique de $\mathbf{L}(\mathrm{B})$ dans $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{L}$.

Supposons d'abord que le diagramme $\mathbf{D}$ admette une limite inductive $\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}(\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D})$. On en déduit que $(\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D})^{\#}$ est un foncteur de $\mathbf{D}^{\#}$ dans $\mathbf{C}(\mathbf{C}(\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, \mathbf{D}))$ et se factorise de manière unique en $\Gamma_\Psi \,.\, \underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}^{\#}$, Ψ désignant la transformation naturelle $\widehat{\underrightarrow{\lim}}\, (\underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D})^{\#}$. Nous allons montrer que toute transformation naturelle $\Phi : \mathbf{L} \to \mathbf{C}_\mathrm{P}$ où $\mathbf{C}_\mathrm{P}$ est un foncteur constant de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{P}$, se factorise de manière unique à travers Ψ.

Or, dans ce cas, $\Gamma_\Phi \,.\, \underrightarrow{\lim}\, \mathbf{D}^{\#}$ est une transformation naturelle de $\mathbf{D}^{\#}$ dans $\mathbf{C}(\mathbf{C}_\mathrm{P})$.

Sa correspondante par le foncteur $\natural$ est une transformation naturelle entre les foncteurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{C}_{\mathrm{P}} : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{P}$. Elle se factorise donc de manière unique en $\Gamma_{\Theta} . \varinjlim \mathbf{D}$. En prenant alors l'image par le foncteur $\sharp$, nous obtenons : $\Gamma_{\Phi} . \varinjlim \mathbf{D}^{\sharp} = \Gamma^{\sharp}_{\Theta} . (\varinjlim \mathbf{D})^{\sharp} = \Gamma(\Gamma_{\Theta}) . \Gamma_{\Psi} . \varinjlim \mathbf{D}^{\sharp} = \Gamma(\Gamma_{\Theta} . \Psi) . \varinjlim \mathbf{D}^{\sharp}$. Dès lors, $\Phi = \Gamma_{\Theta} . \Psi = \widehat{\varinjlim} (\Gamma_{\Phi} . \varinjlim \mathbf{D}^{\sharp})$, et Ψ est bien une limite inductive de $\mathbf{L}$.

Réciproquement, si le diagramme $\mathbf{L}$ admet une limite inductive $\varinjlim \mathbf{L} : \mathbf{L} \to \mathbf{C}(\varinjlim \mathbf{L})$, on peut considérer une transformation naturelle $\Phi : \mathbf{D} \to \mathbf{C}_{\mathrm{P}}$ de $\mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{A} \times \mathscr{B}, \mathscr{P}]$. Dans ce cas, la transformation $\Phi^{\sharp} : \mathbf{D}^{\sharp} \to \mathbf{C}(\mathbf{C}_{\mathrm{P}})$ de $\mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{A}, \mathscr{F}\mathrm{i}[\mathscr{B}, \mathscr{P}]]$ se factorise de manière unique en $\Gamma_{\Psi} . \varinjlim \mathbf{D}^{\sharp}$ où Ψ est une transformation naturelle de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{P}}$. Mais alors Ψ se factorise à son tour de manière unique en $\Gamma_{\Theta} . \varinjlim \mathbf{L}$ et l'on obtient :

$$\Phi^{\sharp} = \Gamma(\Gamma_{\Theta} . \varinjlim \mathbf{L}) . \varinjlim \mathbf{D}^{\sharp} = \Gamma(\Gamma_{\Theta}) . \Gamma(\varinjlim \mathbf{L}) . \varinjlim \mathbf{D}^{\sharp}$$

et
$$\Phi = \Gamma_{\Theta} . (\Gamma(\varinjlim \mathbf{L}) . \varinjlim \mathbf{D}^{\sharp})^{\natural}.$$

Comme cette factorisation est unique, le deuxième facteur du second membre est bien une limite inductive de $\mathbf{D}$.

3.8. — En nous basant sur la proposition 1.7.4, nous pouvons trouver des conditions d'existence de solution à un problème universel.

Soit $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$ une espèce de structure covariante. Un objet structuré E_s (où $s \in \mathbf{F}\mathrm{E}$) sera dit une *quasi-solution* du problème universel posé par $\mathbf{F}$ si, pour tout objet X de $\mathscr{A}$, l'application $\mathscr{A}(\mathrm{E}, \mathrm{X}) \to \mathbf{F}\mathrm{X}$ déterminée au paragraphe 3.1, est injective. Il revient au même de dire que l'application identique de E_s est coconstante dans la catégorie $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}$ (cf. § 1.7.1).

Proposition 3.9. — *Soit* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathrm{i}$ *une espèce de structure covariante. Supposons que*

1° *la catégorie* $\mathscr{A}$ *admette dans* $\mathscr{B}^{\mathrm{o}}$ *des produits directs jusqu'à l'ordre* α, 2° *le foncteur* **F** *soit semi-compatible avec les produits directs d'ordre inférieur à* α,

3° *il existe un ensemble* $\mathscr{I}$ *de cardinal inférieur à* α, *constitué d'objets* **F**-*structurés de* $\mathscr{B}^{\circ}$ *qui soient des quasi-solutions du problème universel posé par* **F**, *et tel que pour tout objet structuré* A_s, *il existe un objet structuré* $A'_{s'}$ *dans* $\mathscr{I}$ *et un morphisme pur* $a : A'_{s'} \rightarrow A_s$.

Dans ces conditions, **F** *admet une solution pour son problème universel.*

En effet, désignons par $\mathscr{B}^{\circ}_{\mathbf{F}}$ l'ensemble des objets **F**-structurés de $\mathscr{B}^{\circ}$ et montrons que la catégorie $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}$ admet, dans $\mathscr{B}^{\circ}_{\mathbf{F}}$, des produits directs jusqu'à l'ordre α. Soient $\mathbf{I} = (B_i, s_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{B}^{\circ}_{\mathbf{F}}$, de cardinal inférieur à α, et $\Delta' : \prod \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} \prod$ la section du foncteur Λ' du paragraphe 3.6, dont l'existence est assurée par le 2° ($\prod$ est évidemment le foncteur $\underleftarrow{\mathbf{L}}$ associé à la catégorie discrète d'ensemble sous-jacent I). Posons $B = \prod B_i$, $s = (\Delta'_{\mathbf{I}})_{\omega}((s_i)_{i \in I})$, et désignons par p_i et q_i les i-èmes projections de B et de $\prod \mathbf{FI} = \prod (\mathbf{F}B_i)$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & B \arrow[d, "p_i"] \\ & B_i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{F}C \arrow[r, "\mathbf{F}f"] \arrow[dr, "\mathbf{F}f_i"'] & \mathbf{F}B \arrow[r, shift right, "(\Lambda'_{\mathbf{I}})_{\omega}"'] \arrow[d, "\mathbf{F}p_i"] & \Pi(\mathbf{F}B_i) \arrow[l, shift right, "(\Delta'_{\mathbf{I}})_{\omega}"'] \arrow[dl, "q_i"] \\ & \mathbf{F}B_i & \end{tikzcd}$$

On a : $\mathbf{F}p_i s = \mathbf{F}p_i(\Delta'_{\mathbf{I}})_{\omega}((s_i)) = q_i((s_i)) = s_i$. Le triple $\tilde{p}_i = ((B_i, s_i), p_i, B_s)$ est donc un élément de $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}$. Nous allons montrer que $(B_s, (\tilde{p}_i)_{i \in I})$ est un produit direct de **I**.

Considérons un objet C_r de $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}$ et, pour tout i dans I, un morphisme $\tilde{f}_i = ((B_i, s_i), f_i, C_r)$ appartenant à $\mathscr{A}^{\mathbf{F}}$. Posons $f = \widehat{\prod} (f_i)$. Pour chaque i de I, on a $q_i(\Lambda'_{\mathbf{I}})_{\omega}\mathbf{F}fr = \mathbf{F}f_i r = s_i$. Il en résulte : $(\Lambda'_{\mathbf{I}})_{\omega}\mathbf{F}fr = (s_i)$ et $\mathbf{F}fr = (\Delta'_{\mathbf{I}})_{\omega}(\Lambda'_{\mathbf{I}})_{\omega}\mathbf{F}fr = s$. Le triple $\tilde{f} = (B_s, f, C_r)$ appartient donc à $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}$. De plus, $\tilde{p}_i\tilde{f} = \tilde{f}_i$ et $\tilde{f}$ est le seul morphisme de $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}$ à jouir de cette propriété, puisque f est le seul morphisme de $\mathscr{A}$ à vérifier les relations $p_i f = f_i$.

Dès lors, en appliquant le proposition 1.7.4, on voit que $\mathscr{A}_{\mathbf{F}}$

possède un copoint, et la proposition 3.3 entraîne que **F** admet une solution pour son problème universel.

3.10. — *Exemple.* — La proposition 3.9 donne une preuve indirecte de l'existence du produit tensoriel de deux $\mathfrak{M}$-groupes abéliens A et B. Soit $\mathscr{G}$ la catégorie des $\mathfrak{M}$-groupes abéliens ; la catégorie des $\mathfrak{M}i$-groupes abéliens admet dans $\mathscr{G}^o$ des produits directs jusqu'à l'ordre $\mathfrak{m}$. La structure bilinéaire est semi-compatible avec les produits directs, car si $(f_i : A \times B \rightarrow G_i)_{i \in I}$ est une famille d'applications bilinéaires, $\widehat{\prod} f_i : A \times B \rightarrow \prod G_i$ est aussi bilinéaire. Enfin, la troisième condition est vérifiée, car, si $f : A \times B \rightarrow G$ est bilinéaire, sa corestriction $f' : A \times B \rightarrow G'$ au sous-groupe engendré par $f(A \times B)$ est aussi bilinéaire, et (G', f') est une quasi-solution, puisque deux homomorphismes de G' dans un groupe H, dont les composés avec f' sont égaux, sont nécessairement égaux. D'autre part, G' est isomorphe à un groupe quotient du groupe libre L engendré par l'ensemble $(A \times B)^o$. On peut donc prendre pour $\mathscr{I}$ l'ensemble des couples (G', f') où G' est un groupe quotient de L, et où $f' : A \times B \rightarrow G'$ est une application bilinéaire telle que $f'(A \times B)$ engendre G'. Il faut bien sûr vérifier que card $\mathscr{I}$ est inférieur à $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire que $\mathscr{I}$ appartient au microcosme $\mathfrak{M}$. Or on a : $G' \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}(L)$ et card $G' \leqslant$ card L, et par suite : card bilin $(A \times B, G') \leqslant \operatorname{card} L^{A \times B}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\operatorname{card} \mathscr{I} &\leqslant \operatorname{card} \bigcup_{G' \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}(L)} \operatorname{bilin}(A \times B, G') \\ &\leqslant \operatorname{card} \mathfrak{P}\mathfrak{P}(L) \operatorname{card} L^{A \times B} < \mathfrak{m}.\end{aligned}$$

3.11. — Le groupe libre L_E (abélien ou non), engendré par un ensemble E de générateurs, jouit de la propriété caractéristique suivante : toute application de E dans un groupe G se prolonge de manière unique en un homomorphisme de L_E dans G.

Par analogie, nous dirons ce qui suit. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{M}$ deux $\mathfrak{M}i$-catégories et $\mathbf{F} : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{M}$ un foncteur (nous poserons $\mathbf{F}a = a^{\#}$). A tout objet M de $\mathscr{M}$, on peut associer le foncteur $\mathbf{L}_M : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{E}i$ défini, pour tout morphisme $a : A \rightarrow B$ de $\mathscr{A}$, par $\mathbf{L}_M A = \mathscr{M}(M, A^{\#})$ et $\mathbf{L}_M a$ est l'application $a^{\#}_{*}$ (cf. § 1.4.8).

Ce foncteur pose le problème universel suivant : trouver un objet L_M de $\mathscr{A}$, et un morphisme $l_M : M \to L^{\sharp}_M$ de $\mathscr{M}$ tels que, pour tout objet A de $\mathscr{A}$ et tout morphisme $m : M \to A^{\sharp}$ de $\mathscr{M}$, il existe dans $\mathscr{A}$ un et un seul morphisme $m^{\natural} : L_M \to A$ qui vérifie $m = m^{\natural\sharp} l_M$.

S'il en existe, les solutions de ce problème sont déterminées à un isomorphisme près. On en choisit une à laquelle on réserve les notations L_M et l_M. Le couple (L_M, l_M) est alors appelé l'*objet-libre* de $\mathscr{A}$ engendré par M relativement à **F**, le **F**-*reflet-libre* de M ou encore le **F**-*reflet-direct* de M ; L_M se nomme l'*Objet-Libre* engendré par M, le **F**-*Reflet-Libre* de M ou encore le **F**-*Reflet-Direct* de M, et l_M l'inclusion canonique de M dans $L^{\sharp}_M$ (*). Une condition nécessaire et suffisante pour que l_M soit un monomorphisme est qu'il existe un monomorphisme de M vers un objet de la forme $A^{\sharp}$.

Par dualité, on peut associer à un objet M de $\mathscr{M}$ le foncteur contravariant $\mathbf{D}_M : \mathscr{A} \to \mathscr{E}i$ défini, pour tout objet A et tout morphisme a de $\mathscr{A}$, par $\mathbf{D}_M A = \mathscr{M}(A^{\sharp}, M)$ et $\mathbf{D}_M a = a^{\sharp *}$.

Ce foncteur pose le problème universel de trouver un objet D_M de $\mathscr{A}$ et un morphisme $d_M : D^{\sharp}_M \to M$ de $\mathscr{M}$ tels que, pour tout objet A de $\mathscr{A}$ et tout morphisme $m : A^{\sharp} \to M$ de $\mathscr{M}$, il existe dans $\mathscr{A}$ un et un seul morphisme $m^{\natural} : A \to D_M$ qui vérifie $m = d_M m^{\natural\sharp}$.

Si ce problème est résoluble, on choisit une solution à laquelle on réserve les notations D_M et d_M. Le couple (D_M, d_M) s'appelle l'*objet-inverse* de $\mathscr{A}$ engendré par M relativement à **F**, ou le **F**-*reflet-inverse* de M ; D_M est l'*Objet-Inverse* ou le **F**-*Reflet-Inverse*, et d_M, la projection canonique de $D^{\sharp}_M$ sur M. Cette projection est un épimorphisme si et seulement s'il existe un épimorphisme d'un objet de la forme $A^{\sharp}$ vers M.

3.12. — *Exemples.*

1) Le groupe libre engendré par un ensemble est l'Objet-Libre

(*) Dans [8], si **F** est l'inclusion dans $\mathscr{A}$ d'une sous-catégorie pleine $\mathscr{A}'$, ce que nous nommons *Objet-Libre* ou *Objet-Inverse* est appelé $\mathscr{A}'$-*projection* ou $\mathscr{A}'$-*éjection*.

engendré par cet ensemble relativement au foncteur qui associe à un groupe l'ensemble sous-jacent.

2) Si l'on appelle groupe dérivé G' d'un groupe G le quotient de G par le sous-groupe de ses commutateurs, le groupe G' est l'Objet-Libre engendré par G relativement à l'inclusion de la catégorie des $\mathfrak{M}$-groupes abéliens dans celle des $\mathfrak{M}$-groupes quelconques. Remarquons que l'inclusion canonique est ici une surjection.

3) Rappelons qu'un ensemble préordonné $\mathscr{I}$ peut être considéré comme une catégorie (notée abusivement $\mathscr{I}$) dont les objets sont les éléments de $\mathscr{I}$ et les morphismes les couples $(j, i) : i \rightarrow j$ tels que i soit inférieur à j. On peut étendre l'ordre de $\mathscr{I}$ à $\mathfrak{P}(\mathscr{I})$, en écrivant $A \leqslant B$ pour deux parties A et B de $\mathscr{I}$, lorsque tout point de A est inférieur ou égal à tout point de B. L'Objet-Inverse engendré par une partie A de $\mathscr{I}$, relativement à l'inclusion canonique de $\mathscr{I}$ dans $\mathfrak{P}(\mathscr{I})$, est la borne inférieure de A ; l'Objet-Libre, la borne supérieure.

4) Soit A un ensemble. La topologie engendrée par un ensemble $\mathscr{G}$ de parties de A est l'Objet-Libre engendré par le foncteur $\mathbf{F}$, défini sur la catégorie des topologies sur A ordonnées par la relation $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$, et à valeurs dans celle des éléments de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))$ ordonnés par inclusion, qui associe à une topologie $\mathcal{T}$ l'ensemble de ses ouverts.

5) Soient E un espace topologique, $\mathscr{F}$ l'ensemble de ses fermés, $\mathscr{O}$ celui de ses ouverts. L'adhérence d'une partie A de E est l'Objet-Libre engendré par le foncteur inclusion de $\mathscr{F}$ dans $\mathfrak{P}(E)$ munis de la relation $\subset$. L'intérieur de A est l'Objet-Inverse engendré par le foncteur inclusion de $\mathscr{O}$ dans $\mathfrak{P}(E)$.

6) Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{A}$ deux $\mathfrak{M}$-catégories. Soit $\mathbf{C} : \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{F}[\mathscr{D}, \mathscr{A}]$ le foncteur canonique défini au paragraphe 1.7.6. La limite projective d'un diagramme $\mathbf{D} : \mathscr{D} \rightarrow \mathscr{A}$ est l'objet-inverse engendré par $\mathbf{D}$ relativement à $\mathbf{C}$; sa limite inductive est l'objet-libre engendré par $\mathbf{D}$.

7) Soit $\mathscr{B}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathfrak{M}$-groupes

abéliens et les couples de $\mathfrak{M}$-groupes abéliens, dont les morphismes sont déterminés par $\mathscr{B}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, $\mathscr{B}((\mathrm{A}, \mathrm{B}), (\mathrm{C}, \mathrm{D})) = \mathrm{Hom}(\mathrm{A}, \mathrm{C}) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{B}, \mathrm{D})$, $\mathscr{B}(\mathrm{A}, (\mathrm{B}, \mathrm{C})) = \varnothing$ et $\mathscr{B}((\mathrm{A}, \mathrm{B}), \mathrm{C}) =$ bilin $(\mathrm{A} \times \mathrm{B}), \mathrm{C})$, et dont la loi de composition résulte de la composition des applications. Soit $\mathbf{F} : \mathscr{G} \to \mathscr{B}$ l'inclusion de la catégorie des groupes abéliens dans $\mathscr{B}$. L'Objet-Libre engendré par (A, B) relativement à $\mathbf{F}$ est le produit tensoriel $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$.

3.13. — Considérons trois $\mathfrak{M}$í-catégories, $\mathscr{A}$, $\mathscr{M}$ et $\mathscr{P}$, et deux foncteurs $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{M}$ et $\mathbf{G} : \mathscr{M} \to \mathscr{P}$. Supposons que (M, p) soit le **G**-reflet-libre d'un objet P de $\mathscr{P}$, et (A, m), le **F**-reflet-libre de M. Nous allons montrer que (A, q) où q égale (**G**m)p, est isomorphe au **GF**-reflet-libre de P.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{A} \arrow[d, "\mathrm{z}"'] \arrow[d, bend left, "\mathrm{t}"] \\
\mathrm{X}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{F}\mathrm{A} \arrow[d, "\mathbf{F}\mathrm{z}"'] \arrow[d, bend left, "\mathbf{F}\mathrm{t}"] \\
\mathrm{M} \arrow[ur, "\mathrm{m}"] \arrow[r, "\mathrm{y}"'] & \mathbf{F}\mathrm{X}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{P} \arrow[r, "\mathrm{q}"] \arrow[d, "\mathrm{p}"'] \arrow[dr, "\mathrm{x}"] & \mathbf{GF}\mathrm{A} \arrow[d, "\mathbf{GF}\mathrm{z}"'] \arrow[d, bend left, "\mathbf{GF}\mathrm{t}"] \\
\mathbf{G}\mathrm{M} \arrow[ur, "\mathbf{G}\mathrm{m}"] \arrow[r, "\mathbf{G}\mathrm{y}"'] & \mathbf{GF}\mathrm{X}
\end{tikzcd}
$$

Soient X un objet de $\mathscr{A}$ et $\mathrm{x} : \mathrm{P} \to \mathbf{GF}\mathrm{X}$ un morphisme de $\mathscr{P}$. Soient $\mathrm{y} : \mathrm{M} \to \mathbf{F}\mathrm{X}$ le morphisme de $\mathscr{M}$ tel que $\mathrm{x} = (\mathbf{G}\mathrm{y})\mathrm{p}$ et $\mathrm{z} : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ le morphisme de $\mathscr{A}$ tel que $\mathrm{y} = \mathbf{F}\mathrm{zm}$. On a $(\mathbf{GF}\mathrm{z})\mathrm{q} = (\mathbf{GF}\mathrm{z})\,(\mathbf{G}\mathrm{m})\mathrm{p} = (\mathbf{G}\mathrm{y})\mathrm{p} = \mathrm{x}$, et il reste à démontrer l'unicité d'un z vérifiant $(\mathbf{GF}\mathrm{z})\mathrm{q} = \mathrm{x}$.

Soit $\mathrm{t} : \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ un autre morphisme de $\mathscr{A}$. Comme il existe un seul z tel que $(\mathbf{F}\mathrm{z})\mathrm{m} = \mathrm{y}$, le morphisme $(\mathbf{F}\mathrm{t})\mathrm{m}$ est distinct de y ; et comme il n'y a qu'un seul y tel que $(\mathbf{G}\mathrm{y})\mathrm{p} = \mathrm{x}$, le morphisme $(\mathbf{GF}\mathrm{t})\,(\mathbf{G}\mathrm{m})\mathrm{p}$ est différent de x. Le composé $(\mathbf{GF}\mathrm{t})\mathrm{q}$ est donc aussi distinct de x.

D'autre part, si (M, p) est le **G**-reflet-libre de P et (A, q) son **GF**-reflet-libre, on démontre de la même façon que si m est le morphisme tel que $(\mathbf{G}\mathrm{m})\mathrm{p} = \mathrm{q}$, alors (A, m) est le **F**-reflet-libre de M. Nous obtenons donc :

Théorème 3.14. — *Transitivité des objets-libres et inverses. — Soient* $\mathscr{A}$, $\mathscr{M}$ *et* $\mathscr{P}$ *trois* $\mathfrak{M}$i*-catégories,* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{M}$ *et* $\mathbf{G} : \mathscr{M} \to \mathscr{P}$ *deux foncteurs, et* (M, p) *le* **G**-*reflet-libre* (*resp. inverse*) *d'un objet* P *de* $\mathscr{P}$. *Si le* **F**-*reflet-libre* (*resp. inverse*) (A, m) *de* M *ou le* **GF**-*reflet-libre* (*resp. inverse*) (B, q) *de* P *existe, l'autre existe aussi et il y a un isomorphisme* $s : A \to B$ *tel que* $q = (\mathbf{GF}s)(\mathbf{G}m)p$ (*resp.* $q(\mathbf{GF}s) = p(\mathbf{G}m)$).

Les objets-directs et inverses sont intimement liés aux foncteurs adjoints de Kan [[15]]. Le théorème suivant montre qu'ils constituent en quelque sorte une étude locale, élément par élément, d'une structure qui, lorsqu'elle existe globalement, s'exprime par un foncteur adjoint.

Théorème 3.15. — *Soit* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{M}$ *un foncteur entre* $\mathfrak{M}$i*-catégories. Il existe un objet-libre* (*resp. inverse*) *de* $\mathscr{A}$ *engendré par chaque objet de* $\mathscr{M}$ *relativement à* **F** *si et seulement si* **F** *admet un adjoint à gauche* **L** (*resp. à droite* **D**).

En effet, avec les notations du paragraphe 3.11, on définit le foncteur $\mathbf{L} : \mathscr{M} \to \mathscr{A}$ en associant, à un objet M de $\mathscr{M}$, l'objet L_M de $\mathscr{A}$ et, à un morphisme $m : M \to N$ de $\mathscr{M}$, le seul morphisme a de $\mathscr{A}$ tel que $a^{\#}l_M = l_N m$. La définition des objets-libres entraîne alors l'existence d'une bijection $\mathscr{A}(\mathbf{L}M, A) \to \mathscr{M}(M, \mathbf{F}A)$ qui est visiblement une équivalence naturelle. La réciproque résulte des définitions.

Théorème 3.16. — *Soient* $\mathbf{G} : \mathscr{A} \to \mathscr{M}$ *un foncteur entre* $\mathfrak{M}$i*-catégories, et* $\mathbf{F} : \mathscr{M} \to \mathscr{E}$i *une espèce de structure covariante* (*resp. contravariante*) *qui admette* U_u *pour solution au problème universel qu'elle pose. La solution* V_v *du problème universel posé par* **FG** *et le* **G**-*reflet-libre* (L, l) *de* U (*resp. le* **G**-*reflet-inverse* (D, d)) *existent simultanément ; il y a alors un isomorphisme* $s : L \to V$ *tel que* $(\mathbf{G}s)l$ *transporte* u *sur* v (*resp. un isomorphisme* $s : V \to D$ *tel que* $d(\mathbf{G}s)$ *transporte* v *sur* u).

En effet, si V_v existe, $(\mathbf{G}V)_v$ est un objet **F**-structuré de $\mathscr{M}$

et il existe un unique morphisme $l : U \to V$ qui transporte u sur v. Nous allons montrer que (V, l) est un $\mathbf{G}$-reflet-libre de U. Si $m : U \to \mathbf{G}A$ est un morphisme de $\mathscr{M}$ et si w égale $(\mathbf{F}m)u$, il existe un unique morphisme $m^\natural : V \to A$ qui transporte v sur w. Le morphisme $(\mathbf{F}m^\natural)l$ transportant u sur w doit donc être égal à m. Réciproquement, si (L, l) est un $\mathbf{G}$-reflet-libre de U et si $v = (\mathbf{F}l)u$, L_v est solution du problème universel posé par $\mathbf{FG}$, car si A_w est un objet $\mathbf{FG}$-structuré de $\mathscr{A}$, il existe un morphisme unique $m : U \to \mathbf{F}A$ qui transporte u sur w. Il lui correspond un unique morphisme $m^\natural : V \to A$ tel que $(\mathbf{F}m^\natural)l = m$; dès lors, $\mathbf{F}m^\natural$ et par suite $m^\natural$ transportent v sur w.

3.17. — Soit $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ un foncteur. Désignons $\mathbf{F}(a)$ par $a^\#$. Soient A un objet de $\mathscr{A}$, $p : P \to A^\#$ un sous-objet de $A^\#$ et $q : A^\# \to Q$ un objet-quotient de $A^\#$. On appelle *sous-objet* de A *engendré* par p relativement à $\mathbf{F}$ (resp. objet-quotient de A, reflet-inverse de q), le plus petit sous-objet s de A (resp. objet-quotient) tel que p se factorise à travers $s^\#$.

Par exemple, le sous-groupe engendré par un sous-ensemble est le sous-objet engendré relativement au foncteur qui associe à un groupe l'ensemble sous-jacent.

Supposons que $\mathbf{F}$ soit un foncteur fidèle (cf. § 1.4.4) et que P engendre un objet libre (L, l) relativement à $\mathbf{F}$. Si m est un morphisme de source P, désignons par $m^\natural$ le morphisme de $\mathscr{A}$ tel que $m^{\natural\#}l = m$. Dans ces conditions, *l'image de* $p^\natural$ *dans* $\mathscr{A}$ *et le sous-objet de* A *engendré par* p *existent simultanément et sont alors isomorphes.*

En effet, si $s : S \to A$ est l'image de $p^\natural$ et si x est un sous-objet de A tel que l'on ait un y dans $\mathscr{P}$ qui vérifie $p = x^\# y$, on a $x^\# y^{\natural\#} l = x^\# y = p = p^{\natural\#} l$. Comme l est injectif (cf. § 3.11), $x^\# y^{\natural\#}$ est égal à $p^{\natural\#}$. La fidélité de $\mathbf{F}$ entraîne $xy^\natural = p^\natural$ et par suite s est inférieur ou égal à x. Réciproquement, si $s : S \to A$ est le sous-objet engendré par p et si x est un sous-objet de A tel qu'il y ait un z dans $\mathscr{A}$ qui vérifie $p^{\natural} = xz$, on a : $x^{\sharp}z^{\sharp}l = p^{\natural\sharp}l = p$. Le composé cp se factorise donc à travers $x^{\sharp}$ et s est inférieur ou égal à x.

Par dualité, si **F** est un foncteur fidèle et si Q admet un reflet-inverse (D, d), *la coïmage de* $q^{\natural}$ *et le reflet-inverse de* q *existent simultanément et sont alors isomorphes.*

Chapitre IV

PROBLÈME UNIVERSEL DU QUOTIENT

Définitions 4.1. — *Une représentation d'une* $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$*-catégorie* $\mathscr{A}$ *est un foncteur* $\mathbf{R} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$.

Une catégorie représentée est un couple $(\mathscr{A}, \mathbf{R})$ *où* $\mathscr{A}$ *est une* $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$*-catégorie et* $\mathbf{R}$ *une représentation de* $\mathscr{A}$.

Soit $(\mathscr{A}', \mathbf{R}')$ une autre catégorie représentée ; un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ sera dit *compatible avec les représentations* $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$ si $\mathbf{R}$ égale $\mathbf{R}'\mathbf{F}$. Si $\mathbf{R}''$ est une représentation de $\mathscr{A}''$ et $\mathbf{F}' : \mathscr{A}' \to \mathscr{A}''$ un foncteur compatible avec $\mathbf{R}'$ et $\mathbf{R}''$, alors $\mathbf{F}'\mathbf{F}$ est compatible avec $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}''$. La catégorie dont les objets sont les catégories représentées et dont les morphismes sont les foncteurs compatibles, n'est autre chose que la catégorie $\mathscr{C}\mathfrak{i}/\mathscr{E}\mathfrak{i}$. Par abus de notations, nous écrirons parfois $\mathscr{A}$ au lieu de $(\mathscr{A}, \mathbf{R})$.

4.2. — *Exemples.*

1) Si $\mathscr{S}$ est une catégorie d'une espèce de structure $\mathbf{S}$ sur $\mathscr{E}\mathfrak{i}$, la projection canonique $\mathbf{P} : \mathscr{S} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$ est une représentation fidèle de $\mathscr{A}$, dite aussi représentation canonique.

2) Soit $\mathscr{A}$ une $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$-catégorie, on définit une représentation de $\mathscr{A}$, appelée représentation but $\mathbf{B} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$, en associant, à chaque objet A de $\mathscr{A}$, l'ensemble des morphismes de but A et, à tout morphisme $f : A \to B$ de $\mathscr{A}$, l'application f_*.

3) A tout objet A d'une $\mathfrak{M}\mathfrak{i}$-catégorie $\mathscr{A}$ on peut associer la représentation $\mathbf{H}_A : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$. Cette représentation est surtout utile lorsque A est un point de $\mathscr{A}$.

4) Une représentation $\mathbf{R} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$ est un foncteur compatible avec $\mathbf{R}$ et avec la représentation identique de $\mathscr{E}\mathfrak{i}$.

5) Le foncteur qui associe à un anneau topologique sa structure de groupe abélien sous-jacente est compatible avec les représentations canoniques.

4.3. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie représentée par le foncteur $\mathbf{R} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$. Si $f : A \to B$ est un morphisme de $\mathscr{A}$, nous écrirons A^o et f^o au lieu de $\mathbf{R}A$ et $\mathbf{R}f$. De plus, malgré l'abus de langage, au lieu de dire que a est un point de A^o, nous dirons que a est un point de A et nous écrirons $a \in A$. De même, nous écrirons $f(a)$ au lieu de $f^o(a)$.

Définition 4.4. — *Une équivalence sur un objet* A *d'une catégorie représentée* $\mathscr{A}$ *est un couple* $\rho = (A, \rho^o)$ *où* ρ^o *est une relation d'équivalence sur l'ensemble* A^o.

Deux points a et a' de A^o, équivalents modulo ρ^o, seront également dits équivalents modulo ρ (notation : $a \sim a'$ (mod. ρ)). Un morphisme $f : A \to B$ de $\mathscr{A}$ *compatible avec* ρ est par définition un morphisme tel que des points équivalents modulo ρ aient même image par f.

Nous désignerons par Comp (ρ) l'ensemble des morphismes de $\mathscr{A}$ compatibles avec ρ. Il est clair que le composé gf d'un morphisme f compatible avec ρ et d'un morphisme g de $\mathscr{A}$ est un morphisme de Comp (ρ). Si nous posons, pour tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathscr{A}$, $\mathbf{C}_\rho(X)$ est l'ensemble des morphismes de but X compatibles avec ρ, et $\mathbf{C}_\rho(f)$ est la restriction de f_*, nous définissons donc un foncteur $\mathbf{C}_\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}\mathfrak{i}$.

Nous dirons que le morphisme $f : A \to B$ *sépare* les points a et a' de A si $f(a)$ est distinct de $f(a')$.

Définition 4.4. — *Une équivalence saturée sur un objet* A *est une équivalence* ρ *telle que deux points* a *et* a' *de* A *non équivalents modulo* ρ *soient toujours séparés par au moins un morphisme* f *compatible avec* ρ.

Les équivalences sur un objet A de $\mathscr{A}$ forment un treillis complet pour la relation d'ordre : ρ est plus fine que σ (notation $\rho \leqslant \sigma$) si ρ^0 est plus fine que σ^0, c'est-à-dire si deux points a et a' de A^0, équivalents modulo ρ^0, le sont aussi modulo σ^0. Il en résulte que si ρ est plus fine que σ, Comp (σ) est contenu dans Comp (ρ).

La borne inférieure ρ d'une famille (ρ_i) d'équivalences saturées est saturée, car si a et a' sont deux points de A non équivalents modulo ρ, il existe un i tel que ces points ne soient pas équivalents modulo ρ_i. On peut donc trouver un morphisme f, compatible avec ρ_i, et à fortiori avec ρ, qui les sépare. Enfin, nous noterons $1 = (A, 1^0)$ la borne inférieure de toutes les équivalences sur un objet A ; 1^0 est ainsi la relation d'équivalence discrète sur A^0.

4.5. — La *saturée* dans $\mathscr{A}$ d'une équivalence ρ est par définition la borne inférieure des équivalences saturées moins fines que ρ. De telles équivalences existent effectivement, par exemple l'équivalence $\rho_1 = (A, \rho_1^0)$ où ρ_1^0 est la relation d'équivalence solide. La saturée de ρ est donc l'équivalence, notée $\rho_{\mathscr{A}}$, telle que l'on ait pour deux points a et a' de A :

$$a \sim a' \ (\text{mod. } \rho_{\mathscr{A}}) \iff (\forall \mathrm{f})\ (\mathrm{f} \in \mathrm{Comp}\ (\rho) \Rightarrow \mathrm{f}(a) = \mathrm{f}(a')).$$

Il en résulte encore que

$$\rho \leqslant \sigma \Rightarrow \mathrm{Comp}\ (\sigma) \subset \mathrm{Comp}\ (\rho) \Rightarrow \rho_{\mathscr{A}} \leqslant \sigma_{\mathscr{A}}.$$

4.6. — *Exemples.*

1) Soit $\mathrm{f} : A \to B$ un morphisme de $\mathscr{A}$. On lui associe une équivalence σ_f sur sa source, définie, pour tous les points a et a' de A, par la relation :

$$a \sim a' \ (\text{mod. } \sigma_f) \iff \mathrm{f}(a) = \mathrm{f}(a').$$

Cette équivalence est saturée, car f est un morphisme compatible avec σ_f qui sépare les points de A non équivalents modulo σ_f. C'est à elle que nous réserverons le nom d'*équivalence associée* à f.

2) Au morphisme $\mathrm{f} : A \to B$ on associe également une équi-

valence β_f sur son but, définie, pour tous les points b et b' de B, par la relation :

$$b \sim b' (\text{mod. } \beta_f) \iff ((b = b') \text{ ou } (b \text{ et } b' \in \mathrm{f}^o(\mathrm{A}^o)).$$

Cette équivalence n'est généralement pas saturée, comme on le voit en prenant pour $\mathscr{A}$ la catégorie des $\mathfrak{M}$-groupes munie de sa représentation canonique et pour $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ l'inclusion d'un sous-groupe non invariant A dans un groupe B.

3) Considérons encore la catégorie des $\mathfrak{M}$-groupes munie de sa représentation canonique. Soient A un sous-groupe d'un groupe G, ρ^o la relation d'équivalence des classes à droite de G suivant A et $\rho = (\mathrm{G}, \rho^o)$ l'équivalence sur G définie par ρ^o. La saturée de ρ est définie par la relation d'équivalence des classes à droite de G suivant la fermeture invariante B de A dans G.

En effet, soit $\mathrm{f} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un homomorphisme compatible avec ρ ; pour tout point g de G et tout point a de A, on a donc $\mathrm{f}(g) = \mathrm{f}(ga)$. Dès lors, si b est un élément de B, c'est-à-dire s'il existe un g' dans G et un a' dans A tels que $b = g'a'g'^{-1}$, l'on a $\mathrm{f}(gb) = \mathrm{f}(g'a'g'^{-1}b) = \mathrm{f}(g'a')\mathrm{f}(g'^{-1}b) = \mathrm{f}(g')\mathrm{f}(g'^{-1}b) = \mathrm{f}(b)$, ce qui prouve que b et gb sont équivalents modulo la saturée de ρ. D'autre part, B étant un sous-groupe invariant, on peut passer au groupe quotient et l'application canonique de G sur son quotient sépare les éléments non équivalents modulo ρ, ce qui achève la démonstration.

4) Soit $\mathscr{A}$ la catégorie des $\mathfrak{M}$-groupes topologiques séparés munie de sa représentation canonique. Soient A un sous-groupe invariant du groupe G et $\rho = (\mathrm{G}, \rho^o)$ l'équivalence définie comme ci-dessus. Sa saturée est l'équivalence définie par les classes à droite de G suivant l'adhérence de A dans G. La démonstration en est similaire.

4.7. — Comme nous venons de le voir, une équivalence $\rho = (\mathrm{A}, \rho^o)$ sur un objet A d'une catégorie $\mathscr{A}$ représentée par le foncteur $\mathbf{R} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}i$ définit un foncteur $\mathbf{C}_\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{E}i$ tel que $\mathbf{C}_\rho(\mathrm{X})$

soit l'ensemble des morphismes $f : A \to X$ compatibles avec ρ. A ce foncteur correspond le problème universel suivant :

Trouver un objet U de $\mathscr{A}$ et un morphisme $u : A \to U$, compatible avec ρ, tel que tout morphisme compatible avec ρ se factorise de manière unique à travers u.

On sait que les solutions éventuelles de ce problème sont isomorphes. Comme u est nécessairement surjectif, on peut choisir l'objet-quotient isomorphe à u et le noter $p_\rho : A \to A/\rho$ ou éventuellement $p_\rho^{\mathscr{A}} : A \to A /_{\mathscr{A}} \rho$. On dit que A/ρ est le *Quotient* de A par ρ et que p_ρ est le *quotient* de A par ρ ou encore la *projection canonique* de A sur A/ρ.

L'application p^o n'est généralement pas surjective, mais elle est compatible avec la relation d'équivalence ρ^o. Or celle-ci admet dans $\mathscr{E}$i un quotient $q^o : A^o \to A^o/\rho^o$. On a donc une factorisation unique : $p_\rho^o = r^o q^o$. Si l'application r^o est bijective, le quotient p_ρ est appelé *quotient strict.*

La définition du quotient entraîne que deux points a et a' de A qui sont séparés par un morphisme f compatible avec ρ, le sont aussi par p_ρ. On en déduit le critère suivant :

PROPOSITION 4.8. — *Soient* $\rho = (A, \rho^o)$ *une équivalence sur un objet* A *de* $\mathscr{A}$ *qui admette un quotient* $p : A \to A/\rho$ *et* $p^o = r^o q^o$ *la factorisation à travers le quotient ensembliste* q^o. *L'équivalence* σ_p *associée à* p *coïncide avec la saturée de* ρ *et l'équivalence* ρ *est saturée si et seulement si* r^o *est injective.*

Comme le problème du quotient ne dépend de ρ que par l'intermédiaire de $\mathbf{C}_\rho$, on a :

PROPOSITION 4.9. — *Soient* ρ *et* σ *deux équivalences sur un objet* A *de* $\mathscr{A}$ *telles que* ρ *admette un quotient, alors* σ *admet le même quotient que* ρ *si et seulement si elle a la même saturée.*

4.10. — Soit ρ une équivalence sur un objet A de $\mathscr{A}$ qui admette un quotient $p : A \to A/\rho$. Si σ est une autre équivalence sur A, moins fine que ρ, on définit une équivalence σ/ρ sur le

Quotient de A par ρ en posant : deux points x et x' de A/ρ sont équivalents modulo σ/ρ s'ils sont égaux ou s'il existe une image réciproque de x par p^0 équivalente modulo σ à une image réciproque de x' par p^0. Comme ρ est plus fine que σ, on en déduit que toute image réciproque de x est équivalente modulo σ à toute image réciproque de x'.

Si $\rho_{\mathscr{A}}$ est plus fine que σ, σ/ρ égale $\sigma/\rho_{\mathscr{A}}$. Si τ est une troisième équivalence sur A, moins fine que σ, τ/ρ est moins fine que σ/ρ. La loi qui associe, à un morphisme f compatible avec σ et par suite avec ρ, le morphisme f' tel que $f = f'p$, établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble des morphismes compatibles avec σ et celui des morphismes compatibles avec σ/ρ. Il en résulte que l'on a :

$$\sigma/\rho \leqslant \sigma_{\mathscr{A}}/\rho \leqslant (\sigma/\rho)_{\mathscr{A}} = (\sigma_{\mathscr{A}}/\rho)_{\mathscr{A}}.$$

La première inégalité provient de ce que σ est plus fine que $\sigma_{\mathscr{A}}$; la deuxième, du fait que deux points de A qui ne sont séparés par aucun morphisme compatible avec ρ, ont des images par p qui ne sont séparées par aucun morphisme compatible avec σ/ρ. L'égalité s'obtient en passant à la saturée dans les inégalités précédentes.

Si ρ est saturée, deux points de A non équivalents modulo σ ont des images distinctes dans A/ρ, non équivalentes modulo σ/ρ ; si p^0 est une application surjective, deux points de A/ρ séparés par un morphisme f compatible avec σ/ρ (cf. § 4.3) proviennent de deux points de A séparés par le morphisme fp compatible avec σ. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 4.11. — *Soient ρ et σ deux équivalences sur un objet* A *de* $\mathscr{A}$ *telles que ρ admette un quotient $p : A \to A/\rho$ et que ρ soit plus fine que σ. Alors* 1°) *si ρ et σ/ρ sont saturées, il en est de même de σ ;* 2°) *si la représentation* $\mathbf{R} : \mathscr{A} \to \mathscr{E}$i *préserve les surjections* (cf. § 1.4.4) *et si σ est saturée, σ/ρ l'est aussi ;* 3°) *σ/ρ est égale à* 1 *si et seulement si σ et ρ ont la même saturée.*

Si σ admet aussi un quotient $q : A \to A/\sigma$, q est compatible avec ρ. En tenant compte des résultats du paragraphe 4.10, on en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 4.12. — *Transitivité des quotients : soient* ρ *et* σ *deux équivalences sur un objet* A *de* $\mathscr{A}$, *telles que* ρ *soit plus fine que* σ *et admette un quotient* $p : A \to A/\rho$. *Lorsque l'un des quotients* A/σ *ou* $(A/\rho) \,/\, (\sigma/\rho)$ *est défini, l'autre l'est aussi et ils sont isomorphes.*

4.13. — Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux catégories représentées par les foncteurs $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$, et $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ un foncteur. Dans ce qui suit, les représentations $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$ seront ordinairement liées par une transformation naturelle $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}'\mathbf{F}$ ou $\Psi : \mathbf{R}'\mathbf{F} \to \mathbf{R}$, déterminée par une famille d'applications injectives. Pour rappeler cette propriété, nous écrirons simplement $\Phi : \mathbf{R} \subset \mathbf{R}'\mathbf{F}$ ou $\Psi : \mathbf{R}'\mathbf{F} \subset \mathbf{R}$.

Si $\mathbf{F}$ est un foncteur compatible avec les représentations $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$, c'est-à-dire si $\mathbf{R}$ égale $\mathbf{R}'\mathbf{F}$, la transformation naturelle identique de $\mathbf{R}$ vérifie simultanément ces deux propriétés.

Comme précédemment, nous écrirons $\mathbf{F}f = f^{\#}$, $\mathbf{R}f = f^{o}$, $\mathbf{R}'f' = f'^{o}$, $f(a) = f^{o}(a)$ et $a \in A$ au lieu de $a \in A^{o}$.

Si l'on a une transformation $\Phi : \mathbf{R} \subset \mathbf{R}'\mathbf{F}$ et si $\rho = (A, \rho^{o})$ est une équivalence sur un objet A de $\mathscr{A}$, nous appellerons *image de* ρ *par* $(\mathbf{F}, \Phi)$ ou *image de* ρ *par* $\mathbf{F}$ quand aucune confusion ne sera à craindre, et nous désignerons par $\rho^{\#} = (A^{\#o}, \rho^{\#o})$, l'équivalence sur $A^{\#}$ obtenue en posant : deux éléments de $A^{\#}$ sont équivalents modulo $\rho^{\#}$ s'ils sont égaux ou s'ils sont images par l'injection Φ_A de deux éléments équivalents modulo ρ.

Si l'on a une transformation $\Psi : \mathbf{R}'\mathbf{F} \subset \mathbf{R}$, nous appellerons *image de* ρ *par* $(\mathbf{F}, \Psi)$ ou plus simplement par $\mathbf{F}$, et nous désignerons encore par $\rho^{\#} = (A^{\#}, \rho^{\#o})$, l'équivalence sur $A^{\#}$ obtenue en posant : deux éléments de $A^{\#}$ sont équivalents modulo $\rho^{\#}$ si leurs images par l'injection Ψ_A sont équivalentes modulo ρ. Si σ est une deuxième équivalence sur A, moins fine que ρ, $\rho^{\#}$ est plus fine que $\sigma^{\#}$.

Si $\mathbf{F}$ est un foncteur compatible avec $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$, les deux manières de prendre l'image de ρ par $\mathbf{F}$ coïncident et l'on a : $\rho^{\#} = (A^{\#}, \rho^{o})$.

PROPOSITION 4.14. — *Soient* $\mathscr{A}$ *et* $\mathscr{A}'$ *deux catégories représentées par* $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{R}'$, ρ *une équivalence sur un objet* A *de* $\mathscr{A}$, $f : A \to B$ *un morphisme de* $\mathscr{A}$ *et* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ *un foncteur. Dans ces conditions,* 1° *si l'on a une transformation naturelle* $\Phi : \mathbf{R} \subset \mathbf{R'F}$, f *est compatible avec* ρ *si et seulement si* $f^{\#}$ *est compatible avec* $\rho^{\#}$;

2° *si l'on a une transformation naturelle* $\Psi : \mathbf{R'F} \subset \mathbf{R}$, *alors* a) *si* f *est compatible avec* ρ, $f^{\#}$ *est compatible avec* $\rho^{\#}$, b) *si* ρ *est saturée,* $\rho^{\#}$ *l'est aussi,* c) $\rho^{\#}_{\mathscr{A}'}$ *est plus fine que* $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}$, d) *si* $\rho^{\#}$ *admet un quotient* $p' : A^{\#} \to A^{\#}/\rho^{\#}$, *alors :* $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}/\rho^{\#} = 1$ *est équivalent à* $\rho^{\#}_{\mathscr{A}} = \rho^{\#}_{\mathscr{A}'}$.

Les démonstrations se font en chassant sur les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} A^{o} \arrow[r, "\Phi_A"] \arrow[d, "f^{o}"] & A^{\#o} \arrow[d, "f^{\#o}"] \\ B^{o} \arrow[r, "\Phi_B"] & B^{\#o} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A^{\#o} \arrow[r, "\Psi_A"] \arrow[d, "f^{\#o}"] & A^{o} \arrow[d, "f^{o}"] \\ B^{\#o} \arrow[r, "\Psi_B"] & B^{o} \end{tikzcd}$$

Si l'on a une transformation $\Phi : \mathbf{R} \subset \mathbf{R'F}$ et si f est compatible avec ρ, alors deux points a et a' de $A^{\#}$ équivalents modulo $\rho^{\#}$ sont égaux ou sont images de points de A équivalents modulo ρ. Ces derniers ont par hypothèse même image par f^{o}. En vertu de la commutativité du diagramme, a et a' ont même image par $f^{\#o}$ et $f^{\#}$ est compatible avec $\rho^{\#}$.

Réciproquement, si $f^{\#}$ est compatible avec $\rho^{\#}$, deux points de A équivalents modulo ρ ont des images par Φ_A équivalentes modulo $\rho^{\#}$ et par suite ont même image dans $B^{\#o}$. Comme Φ_B est injective, ces points ont même image dans B^{o} et f est compatible avec ρ, ce qui démontre le 1°.

La démonstration du 2° a) est identique. Pour vérifier le 2° b), remarquons que deux points a et a' de $A^{\#}$ non équivalents modulo $\rho^{\#}$ ont des images par Ψ_A non équivalentes modulo ρ et par suite séparées par un morphisme f. Comme Ψ_B est injective, $f^{\#}(a)$ et $f^{\#}(a')$ sont deux points distincts. Par conséquent $f^{\#}$ sépare a et a' et $\rho^{\#}$ est saturée.

Le 2° c) en résulte, car ρ étant plus fine que $\rho_{\mathscr{A}'}$, $\rho^{\#}$ est plus fine que $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}$ et par suite $\rho^{\#}_{\mathscr{A}'}$ est plus fine que la saturée dans $\mathscr{A}'$ de $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}$ (cf. § 4.5). Cette saturée est $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}$ elle-même en vertu du 2° b).

Enfin, le 2° d) est un corollaire du 3° de la proposition 4.11.

4.15. — Supposons que le foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ soit pleinement fidèle (cf. § 1.4.4) et que l'on ait une transformation naturelle $\Phi : \mathbf{R} \subset \mathbf{R}'\mathbf{F}$. Soit ρ une équivalence sur un objet A de $\mathscr{A}$ telle que $\rho^{\#}$ admette dans $\mathscr{A}'$ un quotient $p' : A^{\#} \to A^{\#}/\rho^{\#}$. Si $A^{\#}/\rho^{\#}$ est isomorphe à l'image par $\mathbf{F}$ d'un objet Q de $\mathscr{A}$, alors le quotient de A par ρ existe.

Soit $s' : A^{\#}/\rho^{\#} \to Q^{\#}$ un isomorphisme. Désignons par $q : A \to Q$ le morphisme de $\mathscr{A}$ dont l'image par $\mathbf{F}$ est $s'p'$. Montrons que q est isomorphe au quotient de A par ρ. Si $f : A \to B$ est un morphisme compatible avec ρ, $f^{\#}$ se factorise en $f'p'$. Soit $f_1 : Q \to B$ le morphisme tel que $f_1^{\#} = f's'^{-1}$. Il suffit de voir que $f = f_1 q$. Or ceci résulte du caractère pleinement fidèle de $\mathbf{F}$, puisque

$$\mathbf{F}(f_1 q) = f's'^{-1}s'p' = f^{\#}.$$

Proposition 4.16. — *Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux catégories représentées par les foncteurs* $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{R}'$, *et* ρ *une équivalence sur un objet* A *de $\mathscr{A}$. Dans ces conditions,*

1° *si l'on a une transformation naturelle* $\Phi : \mathbf{R} \subset \mathbf{R}'\mathbf{F}$ *ou une transformation naturelle* $\Psi : \mathbf{R}'\mathbf{F} \subset \mathbf{R}$, *et si les quotients* $p : A \to A/\rho$ *et* $q' : A^{\#} \to A^{\#}/\rho^{\#}$ *existent, alors* a) $p^{\#}$ *se factorise de manière unique en* $r'q'$ *et l'équivalence* $\sigma_{r'}$ *associée à* r' *est moins fine que* $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}/\rho^{\#}$; b) *si* r'^{0} *est une application injective, alors* $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}$ *est plus fine que* $\rho^{\#}_{\mathscr{A}'}$.

2° *si l'on a une transformation naturelle* $\Psi : \mathbf{R}'\mathbf{F} \subset \mathbf{R}$, *si la représentation* $\mathbf{R}'$ *préserve les surjections et si les quotients* p *et* q′ *existent, on a en plus* : a′) *les équivalences* $\sigma_{r'}$ *et* $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}/\rho^{\#}$ *sont égales* ; b′) r'^{0} *est une application injective si et seulement si* $\rho^{\#}_{\mathscr{A}} = \rho^{\#}_{\mathscr{A}'}$.

En effet, p étant compatible avec ρ, $p^{\#}$ l'est avec $\rho^{\#}$ et se factorise de manière unique en $r'q'$. Si x et x' sont deux points de $A^{\#}/\rho^{\#}$ équivalents modulo $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}/\rho^{\#}$, ils sont égaux ou images par q' de deux points y et y' de $A^{\#}$ équivalents modulo $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}$. Si y et y' ne sont pas égaux, ils sont l'image par Φ_A de deux points z et z' de A équivalents modulo ρ (ou ont ces deux points comme image par l'injection Ψ_A). Ces points ont même image dans A/ρ et par suite y et y' ont même image par $p^{\#}$. Ceci entraîne que z et z' ont même image par r' et sont équivalents modulo $\sigma_{r'}$. Nous avons donc démontré le 1° a).

En outre, ceci nous a prouvé que deux points y et y' de $A^{\#}$, équivalents modulo $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}$, ont même image par $p^{\#}$. Si r'^{o} est une application injective, y et y' ont alors même image par q'. Dès lors, ces points sont équivalents modulo $\rho^{\#}_{\mathscr{A}'}$, ce qui démontre le 1° b).

On remarquera d'ailleurs que, dans le cas d'une transformation $\Psi : \mathbf{R}'\mathbf{F} \subset \mathbf{R}$, la proposition 4.14. 2° c) entraîne l'égalité des équivalences $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}$ et $\rho^{\#}_{\mathscr{A}'}$ lorsque r'^{o} est injective.

Nous pouvons passer à l'examen du 2°. Comme q'^{o} est par hypothèse une surjection, deux points x et x' de $A^{\#}/\rho^{\#}$ qui ont même image par r', proviennent de deux points y et y' de $A^{\#}$ qui ont même image par $p^{\#}$. Par suite y et y' ont des images par Ψ_A équivalentes modulo $\rho_{\mathscr{A}}$. Ces points sont donc équivalents modulo $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}$ et x et x' sont équivalents modulo $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}/\rho^{\#}$. Cette relation étant déjà plus fine que $\sigma_{r'}$ en vertu du 1°, elle lui est donc égale.

Pour achever la démonstration, il reste seulement à prouver que $\rho^{\#}_{\mathscr{A}} = \rho^{\#}_{\mathscr{A}'}$ entraîne, dans les conditions du 2°, que l'application r'^{o} est injective. Il revient au même de prouver que $\sigma_{r'} = 1$. Or $\sigma_{r'}$ égale $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}/\rho^{\#}$ et la proposition 4.9 entraîne $\rho^{\#}_{\mathscr{A}}/\rho^{\#} = \rho^{\#}_{\mathscr{A}}/\rho^{\#}_{\mathscr{A}'}$. Cette dernière équivalence étant égale à 1, il en est de même de $\sigma_{r'}$.

4.17. — *Exemples.*

1) Soient $\mathscr{S}$ la catégorie des $\mathfrak{M}$-groupes topologiques séparés, $\mathscr{G}$ la catégorie des $\mathfrak{M}$-groupes et $\mathbf{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{G}$ le foncteur qui associe à un groupe topologique séparé G le groupe $G^{\#}$ sous-jacent. $\mathbf{F}$ est évidemment compatible avec les représentations canoniques. Soient A un sous-groupe topologique de G, ρ^{o} la relation d'équivalence des classes à droite de G suivant A. Désignons par ρ et $\rho^{\#}$ les équivalences (G, ρ^{o}) et $(G^{\#}, \rho^{o})$. Le Quotient $G^{\#}/\rho^{\#}$ est le groupe quotient $G^{\#}/B^{\#}$ où $B^{\#}$ est la fermeture invariante de $A^{\#}$ dans $G^{\#}$. Ce quotient est strict si et seulement si $A^{\#}$ est invariant. Le Quo-

tient G/ρ est le groupe topologique quotient $G/\overline{B}$ où $\overline{B}$ est l'adhérence de la fermeture invariante B de A dans G.

On a la factorisation ci-contre, et r n'est injectif que si B est fermé dans G.

$$\begin{tikzcd} G^{\#} \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & G^{\#}/\overline{B}^{\#} \\ & G^{\#}/B^{\#} = (G/B)^{\#} \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

Si A′ est un autre sous-groupe topologique de G et $\rho' = (G, \rho'^{o})$ l'équivalence des classes à droite de A′, G/ρ et G/ρ' sont égaux si et seulement si $\overline{B}$ et $\overline{B}'$ le sont. Comme la représentation canonique de $\mathcal{S}$ préserve les épimorphismes, la proposition 4.11 montre que, si A est un sous-groupe de A′ et si A est fermé et invariant dans G, alors A′ l'est aussi si et seulement si A'/A l'est dans G/A. Dans ce cas, le théorème 4.12 rappelle que $(G/A)\ /\ (A'/A) = G/A'$.

2) Soit $\mathbf{F} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ le foncteur qui associe à un $\mathfrak{M}$-groupe G son sous-groupe $\hat{G}$ des commutateurs. L'inclusion $\hat{G} \subset G$ détermine une transformation naturelle $\Psi : \mathbf{RF} \subset \mathbf{R}$ où $\mathbf{R}$ désigne la représentation canonique de G. La proposition 4.14 nous rend entre autres le résultat suivant : si H est un sous-groupe de G, $\hat{H} = H \cap \hat{G}$.

3) Soient $\mathcal{U}$ la catégorie des $\mathfrak{M}$-espaces uniformes séparés, $\mathcal{V}$ celle des $\mathfrak{M}$-espaces uniformes complets et $\mathbf{F} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ le foncteur qui associe à un espace uniforme séparé E son complété $\tilde{E}$. L'inclusion de E dans $\tilde{E}$ détermine une transformation naturelle $\Phi : \mathbf{R} \subset \mathbf{R}'\mathbf{F}$ où $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$ sont les représentations canoniques.

Théorème 4.18. — *Quotient dans les espèces de structures covariantes : soient* $\mathbf{F} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_i$ *une espèce de structure covariante sur la catégorie des* $\mathfrak{M}$*-ensembles et* $\mathcal{S}$ *une catégorie d'espèce* $\mathbf{F}$. *Toute équivalence* $\rho = (A_s, \rho^o)$ *sur un objet* A_s *de* $\mathcal{S}$ *admet un quotient strict.*

En effet, ρ^o est une relation d'équivalence sur l'ensemble A, qui admet un quotient $p : A \to A/\rho^o$. Nous allons montrer que $((A/\rho^o)_{\mathbf{F}ps}, p, A_s)$ est isomorphe au quotient de A par ρ. Si (B_t, f, A_s) est un morphisme de $\mathcal{S}$ compatible avec ρ, l'application $f : A \to B$

est compatible avec ρ^o et se factorise en $f = f'p$. D'ailleurs, comme $\mathscr{S}$ est une catégorie d'espèce $\mathbf{F}$, le triple $(B_t, \mathrm{id}, B_{\mathbf{F}fs})$ est un élément de $\mathscr{S}$ et comme $\mathbf{F}f = \mathbf{F}f'\mathbf{F}p$, le triple $(B_t, f', (A/\rho^o)_{\mathbf{F}ps})$ appartient aussi à $\mathscr{S}$. Il en résulte que le triple (B_t, f, A_s) se factorise à travers $((A/\rho^o)_{\mathbf{F}ps}, p, A_s)$, ce que nous voulions démontrer.

Il découle alors de la proposition 4.8 que toute équivalence sur un objet de $\mathscr{S}$ est séparable. Il en est ainsi par exemple lorsque $\mathscr{S}$ est la catégorie des $\mathfrak{M}$-espaces topologiques. Par contre, dans la catégorie des $\mathfrak{M}$-espaces topologiques séparés et dans la plupart des catégories d'une espèce algébrique, telles que les catégories des $\mathfrak{M}$-groupes, des $\mathfrak{M}$-anneaux, des $\mathfrak{M}$-modules, etc., toute équivalence n'est pas séparable, de sorte que ces espèces de structures ne peuvent se prolonger de manière covariante. Comme la catégorie duale de celle des $\mathfrak{M}$-groupes est celle des $\mathfrak{M}$-groupes topologiques compacts, il en résulte qu'*il est impossible de trouver une manière fonctorielle covariante ou contravariante de transporter, par une application, les structures de groupe sur un ensemble.*

Proposition 4.19. — *Soient* $\mathscr{A}$ *et* $\mathscr{A}'$ *deux catégories représentées par les foncteurs* $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{R}'$, *et* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ *un foncteur pleinement fidèle.*

Si l'on a 1° *une transformation naturelle* $\Phi : \mathbf{R} \subset \mathbf{R}'\mathbf{F}$ ou $\Psi : \mathbf{R}'\mathbf{F} \subset \mathbf{R}$, 2° *une équivalence* ρ *sur un objet* A *de* $\mathscr{A}$ *telle que* $A^\sharp$ *admette un quotient* $q' : A^\sharp \to A^\sharp/\rho^\sharp$ *et que* $A^\sharp/\rho^\sharp$ *engendre un Objet-Libre* L *dans* $\mathscr{A}$, — *alors* L *est isomorphe au Quotient de* A *par* ρ.

Si l'on a 1° *une transformation naturelle* $\Phi : \mathbf{R} \subset \mathbf{R}'\mathbf{F}$, 2° *une équivalence sur un objet* A *de* $\mathscr{A}$ *telle que les quotients* $p : A \to A/\rho$ *et* $q' : A^\sharp \to A^\sharp/\rho^\sharp$ *existent,* — *alors* A/ρ *est isomorphe à l'Objet-Libre engendré par* $A^\sharp/\rho^\sharp$.

Pour démontrer la première partie, nommons $p : A \to L$ l'unique morphisme tel que $p^\sharp = l'q'$ (il existe, puisque le foncteur $\mathbf{F}$ est pleinement fidèle). Supposons que $f : A \to B$ soit un morphisme de $\mathscr{A}$ compatible avec ρ. Le morphisme $f^\sharp$ est donc compatible avec $\rho^\sharp$ (cf. proposition 4.14) et se factorise en $q'g'$. Soit alors $g : L \to B$

le morphisme tel que $g' = g^{\#} l'$. On a $g^{\#} p^{\#} = f^{\#}$ et, comme le foncteur **F** est fidèle, ceci entraîne $gp = f$. Le morphisme p est donc bien le quotient de A par ρ.

La deuxième partie est analogue : posons $L = A/\rho$ et $\mathbf{F}p = p^{\#} = l'q'$ (cf. proposition 4.16). Si g' est un morphisme de $A^{\#}/\rho^{\#}$ dans $\mathbf{B}^{\#}$, le composé $f^{\#} = g'q'$ est compatible avec $\rho^{\#}$. Comme **F** est pleinement fidèle, $f^{\#}$ est l'image par **F** d'un morphisme $f : A \to B$ compatible avec ρ (cf. proposition 4.14). Il se factorise donc en gp et l'on a : $g'q' = f^{\#} = g^{\#} p^{\#} = g^{\#} l'q'$. Dès lors $g' = g^{\#} l'$, comme nous voulions le démontrer.

4.20. — *Remarque.* — Cette démonstration montre en outre que la première partie de la proposition 4.19 reste valable si l'on suppose seulement que le foncteur **F** est fidèle et qu'il existe un morphisme $p : A \to L$ tel que $p^{\#} = l'q'$.

Chapitre V

QUOTIENTS D'ORDRE α

5.1. — Dans ce chapitre, nous travaillerons dans une $\mathfrak{M}i$-catégorie $\mathscr{A}$ représentée par le foncteur $\mathbf{R}$, où toutes les équivalences admettent un quotient.

Nous désignerons par $\aleph$ la borne supérieure des cardinaux γ tels que, si $\mathscr{I}$ est un $\mathfrak{M}i$-ensemble bien ordonné dont le cardinal est inférieur à γ, tout système $(a_{ij} : A_j \to A_i)_{j<i}$ d'épimorphismes de $\mathscr{A}$ admette une limite inductive. Il est évident que $\aleph$ est un cardinal infini.

5.2. — Soit $f : A \to B$ un morphisme. Nous dirons que id_A est le zéro-ième quotient de f et f le zéro-ième reste de f. Pour tout ordinal α inférieur à $\aleph$, nous allons définir, par récurrence transfinie, le *α-ième quotient* $f^\alpha : A \to A^\alpha$ et le *α-ième reste* $f_\alpha : A^\alpha \to B$, de telle manière que $f_\alpha f^\alpha = f$. De plus, pour tout ordinal β inférieur à α, nous aurons un épimorphisme $f^{\alpha\beta} : A^\beta \to A^\alpha$ tel que $f^{\alpha\beta} f^\beta = f^\alpha$, $f_\alpha f^{\alpha\beta} = f_\beta$ et, si γ est un ordinal plus petit que β, $f^{\alpha\beta} f^{\beta\gamma} = f^{\alpha\gamma}$.

Supposons ces morphismes déterminés pour les ordinaux inférieurs à α. Si $\alpha = \beta + 1$, nous désignerons par $p : A^\beta \to A^\beta/\sigma_\beta$ le quotient de A^β par l'équivalence σ_β associée au β-ième reste f_β. Le α-ième quotient de f est par définition l'objet-quotient $f^\alpha : A \to A^\alpha$ isomorphe à pf^β. Désignons par $s : A^\beta/\sigma_\beta \to A^\alpha$ l'isomorphisme tel que $f^\alpha = spf^\beta$, et par r le morphisme tel que $f_\beta = rp$. Nous pouvons alors poser $f_\alpha = rs^{-1}$, $f^{\beta\alpha} = sp$ et, pour γ inférieur à β, $f^{\gamma\alpha} = f^{\gamma\beta} f^{\beta\alpha}$. Les conditions imposées sont immédiatement vérifiées.

Si α est un ordinal limite inférieur à $\aleph$, on peut considérer la limite inductive $(L, (l_\beta : A^\beta \to L)_{\beta<\alpha})$ de la famille d'épimorphismes $(f^{\beta\gamma})_{\gamma<\beta<\alpha}$. Les inclusions canoniques l_β sont toutes des épimorphismes. Puisque $l_0 = l_\beta f^{\beta 0}$, il suffit de le vérifier pour $l_0 : A \to L$. Or, si m et $n : L \to X$ sont deux morphismes tels que $ml_0 = nl_0$, alors, pour tout β inférieur à α, on a $ml_\beta f^{\beta 0} = nl_\beta f^{\beta 0}$. Comme $f^{\beta 0}$ est un épimorphisme, on en tire $ml_\beta = nl_\beta$. Dès lors $m = n = \widehat{\underrightarrow{\lim}}\, ml_\beta$. Il est désormais possible de poser $A^\alpha = L$, $f^\alpha = l_0$, $f_\alpha = \widehat{\underrightarrow{\lim}}\, f_\beta$ et $f^{\beta\alpha} = l_\beta$. Les conditions imposées sont encore une fois vérifiées.

5.3. — On remarquera qu'en posant $A = A^0$, $B = A^{\aleph}$, $f^\alpha = f^{\alpha 0}$, $f_\alpha = f^{\aleph\alpha}$ et $f = f^{\aleph 0}$, toutes les conditions se résument à $f^{\alpha\beta} f^{\beta\gamma} = f^{\alpha\gamma}$ $(0 \leqslant \gamma < \beta < \alpha \leqslant \aleph)$.

Si f est un épimorphisme, nous dirons que c'est un *quotient d'ordre* α si son α-ième reste est un isomorphisme et si les restes précédents n'en sont pas. Tous les restes suivants sont alors égaux à f_α. Il peut d'ailleurs arriver que le α-ième reste, sans être un isomorphisme, ait une application injective comme image par la représentation **R**. Dans ce cas, l'équivalence associée est 1 et tous les restes suivants sont aussi égaux à f_α, — mais f n'est un quotient d'aucun ordre.

5.4. — *Exemples.*

1) Nous démontrerons au chapitre VI que dans la catégorie des $\mathcal{M}$-catégories ou dans celle des $\mathcal{M}$-groupoïdes, tout quotient est d'ordre au plus 2.

2) Soit $\mathcal{O}_\nu$ la catégorie des ordinaux inférieurs à un $\mathcal{M}$-ordinal ν, c'est-à-dire celle dont les objets sont les ordinaux inférieurs à ν et les morphismes, les couples $(\beta, \alpha) : \alpha \to \beta$ où α est inférieur à β. Considérons la représentation **R** qui associe à tout ordinal l'ensemble à deux éléments $\{a, b\}$ et à tout morphisme non unité, l'application constante sur a. Tout morphisme de $\mathcal{O}_\nu$ est bijectif et (β, α) est un quotient d'ordre γ si et seulement si $\alpha + \gamma = \beta$.

3) Dans la catégorie des espaces topologiques, une surjection $f: A \to B$ est un quotient d'ordre un si la topologie de B peut se déduire par f de celle de A ; sinon elle n'est pas un quotient.

5.5. — Considérons la catégorie $\mathscr{A}^{\#}$ des morphismes de $\mathscr{A}$ (cf. § 1.6.1). On détermine un foncteur $\mathbf{Q}^1 : \mathscr{A}^{\#} \to \mathscr{A}$ en associant à un morphisme $f: A \to B$, l'objet $A^1 = A/\sigma_f$ et, à un quadruple (f', t', t, f) où f' est un morphisme de A' dans C', le morphisme $t^1 : A^1 \to A'^1$ qui résulte de la factorisation de $f'^1 t$ à travers f^1.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "f^1"] \arrow[dd, "f"'] & & A' \arrow[dr, "f'^1"] \arrow[dd, "f'"'] & \\
& A^1 \arrow[rr, "t^1"] \arrow[dl, "f_1"] & & A'^1 \arrow[dl, "f'_1"] \\
B \arrow[rr, "t'"] & & B' &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $f'^1 t$ est en effet compatible avec σ_f, car $f't$ est égal à $t'f$ et est par suite compatible avec σ_f et, d'autre part, deux points de A' qui ont même image par f' ont déjà même image par f'_1. La fonctorialité de t^1 découle alors de l'unicité de la factorisation.

De plus, si nous désignons par $\mathbf{Pr}_1$ et $\mathbf{Pr}_2$ les foncteurs de $\mathscr{A}^{\#}$ dans $\mathscr{A}$ définis par $(f', t', t, f) \leadsto t$ et $(f', t', t, f) \leadsto t'$, les familles $\Phi^1 = (f^1)_{f \in \mathscr{A}}$ et $\Phi_1 = (f_1)_{f \in \mathscr{A}}$ déterminent des transformations naturelles $\Phi^1 : \mathbf{Pr}_1 \to \mathbf{Q}^1$ et $\Phi_1 : \mathbf{Q}^1 \to \mathbf{Pr}_2$.

Enfin, si l'on a deux foncteurs $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}' : \mathcal{C} \to \mathscr{A}$ et une transformation naturelle $\Phi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$, on obtient un foncteur $\mathbf{T}^1 : \mathcal{C} \to \mathscr{A}$ en associant, à un objet T, le but T^1 du premier quotient de Φ_T et, à un morphisme $t: T \to T'$, l'unique morphisme $t^1 : T^1 \to T'^1$ tel que $t^1 \Phi^1_T = \Phi^1_{T'} \mathbf{T}t$. Ce morphisme vérifie également la relation $\mathbf{T}'t \Phi_{T^1} = \Phi_{T'^1} t^1$.

Les familles $\Phi^1 = (\Phi^1_T)$ et $\Phi_1 = (\Phi_{T^1})$ déterminent alors des transformations naturelles $\Phi^1 : \mathbf{T} \to \mathbf{T}^1$ et $\Phi_1 : \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}'$.

On peut recommencer ces opérations en partant de Φ_1 au lieu de Φ. D'autre part, si α est un ordinal limite, T^α est la Limite Inductive de la famille d'épimorphismes $(\Phi^{\beta\gamma}_T)_{\gamma < \beta < \alpha}$ et le foncteur $\varinjlim$ permet de déterminer t^α. Une récurrence transfinie entraîne donc le résultat suivant où l'on utilise les notations du paragraphe 5.3, et où l'on pose en outre $t = t^0$, $t' = t^{\aleph}$, $T = T^0$ et $T' = T^{\aleph}$.

PROPOSITION 5.6. — *Pour tout quadruple* $q = (f', t', t, f)$ *de* $\mathscr{A}^{\#}$ *et tout ordinal* α *inférieur ou égal à* $\aleph$, *il existe un morphisme unique* $t^\alpha : A^\alpha \to A'^\alpha$ *qui vérifie* $t^\alpha f^\alpha = f'^\alpha t$. *La loi* $q \rightsquigarrow t^\alpha$ *détermine un foncteur* $\mathbf{Q}^\alpha : \mathscr{A}^{\#} \to \mathscr{A}$. *Si* α *et* β *sont des ordinaux vérifiant l'inégalité* $\beta < \alpha \leqslant \aleph$, *la famille* $(f^{\alpha\beta})_{f \in \mathscr{A}}$ *détermine une transformation naturelle* $\Phi^{\alpha\beta} : \mathbf{Q}^\beta \to \mathbf{Q}^\alpha$.

Pour toute transformation naturelle $\Phi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ *de* $\mathscr{N}(\mathfrak{C}, \mathscr{A})$ *et pour tout ordinal* α *inférieur ou égal à* $\aleph$, *il existe un foncteur* $\mathbf{T}^\alpha : \mathfrak{C} \to \mathscr{A}$ *tel que, pour chaque objet* T, $\mathbf{T}^\alpha(T)$ *soit le but* T^α *du* α*-ième quotient de* Φ_T *et que, si* β *est un ordinal inférieur à* α, *la famille* $(\Phi_T^{\alpha\beta})$ *détermine une transformation naturelle* $\Phi^{\alpha\beta} : \mathbf{T}^\beta \to \mathbf{T}^\alpha$. $\mathbf{T}^\alpha$ *est d'ailleurs déterminé par la condition que* $\Phi^{\alpha 0}$ *soit une transformation naturelle.*

En particulier, considérons un quadruple q tel que $B = B'$ et que $t' = id_B$. Supposons en outre que $f = f't$ soit un quotient d'ordre α et t un épimorphisme. Ainsi, $f_\alpha^{-1} f'_\alpha t^\alpha = id$ et t^α est une section. Comme t^α est aussi un épimorphisme, puisque $f'^\alpha t$ en est un, c'est un isomorphisme. Dès lors, $f'_\alpha = f_\alpha (t^\alpha)^{-1}$ est également un isomorphisme et f' est un quotient d'ordre au plus α.

Si nous considérons un quadruple q tel que $A = A'$ et $t = id_A$, et si nous supposons que f est un quotient d'ordre α et t' un épimorphisme, nous aurons $t' = f'_\alpha (t^\alpha f_\alpha^{-1})$. L'ordre de f'_α sera donc au plus égal à celui de t'. En résumé, l'on obtient :

PROPOSITION 5.7. — *Si* f, g *et* h *sont des quotients d'ordre respectif* α, β *et* γ, *et si* $f = gh$, *on a* $\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta + \gamma$.

PROPOSITION 5.8. — *La borne inférieure d'une famille* $(a_i : A \to A_i)_{i \in \mathscr{I}}$ *de quotients d'ordre au plus* α $(\alpha < \aleph)$ *existe et est un quotient d'ordre au plus* α.

Nous désignerons par $a_i^\beta : A \to A_i^\beta$ et $a_{i\beta} : A_i^\beta \to A_i$ le β-ième quotient et le β-ième reste de a_i, et par $a_i^{\gamma\beta} : A_i^\beta \to A_i^\gamma$ le morphisme tel que $a_i^{\gamma\beta} a_i^\beta = a_i^\gamma$. Soit $x : A \to X$ un épimorphisme tel que pour tout élément i de $\mathscr{I}$ il existe un morphisme $y_i : A_i \to X$ qui vérifie $x = y_i a_i$.

$$
\begin{tikzcd}
& A_i^1 \arrow[r, "a_i^{2,1}"] \arrow[d, "p_i^1"] & A_i^2 \arrow[r] \arrow[d, "p_i^2"] & \cdots \arrow[r] & A_i^\alpha \arrow[d, "p_i^\alpha"'] \arrow[ddr, "a_{i\alpha}"] & \\
& A^1 \arrow[r, "a^{2,1}"] \arrow[ddr, "x^1"] & A^2 \arrow[r] \arrow[dd, "x^2"] & \cdots \arrow[r] & A^\alpha \arrow[ddll, "x^\alpha"] & \\
A \arrow[uur, "a_i^1"] \arrow[ur, "a^1"] \arrow[rrrrr, "a_i"] \arrow[drr, "x"'] & & & & & A_i \arrow[ul] \arrow[dlll, "y_i"] \\
& & X & & &
\end{tikzcd}
$$

Nous allons construire par récurrence une famille d'épimorphismes $a^\beta : A \to A^\beta$, montrer que x se factorise à travers chaque a^β et que a^α se factorise à travers tous les a_i. Il en résultera que a^α est isomorphe à la borne inférieure des a_i.

Désignons par σ_i l'équivalence associée à a_i, par σ la borne supérieure des σ_i et par $a^1 : A \to A^1$ le quotient de A par σ. Le morphisme a^1 se factorise à travers a_i^1 en $a^1 = p_i^1 a_i^1$, et le morphisme x étant compatible avec chaque σ_i l'est avec σ et se décompose en $x^1 a^1$.

Nous allons déterminer des objets A^β et des morphismes $a^{\beta\gamma} : A^\gamma \to A^\beta$, $x^\beta : A^\beta \to X$ et $p_i^\beta : A_i^\beta \to A^\beta$ $(i \in \mathscr{I}, \gamma < \beta \leqslant \alpha)$ tels que $A^0 = A$, $a^{\beta 0} = a^\beta$, $a^{\beta\gamma} a^{\gamma\delta} = a^{\beta\delta}$ $(\delta < \gamma < \beta)$, $a^\beta = p_i^\beta a_i^\beta$ et $x = x^\beta a^\beta$.

Nous les avons déjà construits pour $\beta = 1$. S'ils sont construits jusqu'à l'ordinal β, on les construit pour $\beta + 1$ de la manière suivante. On désigne par σ^β la relation d'équivalence sur A^β engendrée par : deux points sont équivalents s'il existe un élément i de $\mathscr{I}$ tel que ces points soient les images par p_i^β de deux points équivalents pour la relation $\sigma_{i\beta}$ associée à $a_{i\beta}$. On pose alors

$a^{\beta+1,\beta} : A^\beta \to A^{\beta+1}$ est le quotient de A^β par σ^β, $a^{\beta+1,\gamma} : A^\gamma \to A^{\beta+1}$ est le composé $a^{\beta+1,\beta}a^{\beta\gamma}$ et $p_i^{\beta+1}$ est le morphisme qui résulte de la factorisation à travers $a_i^{\beta+1,\beta}$ du morphisme $a^{\beta+1,\beta}p_i^\beta$ qui est par construction compatible avec $\sigma_{i\beta}$.

Ceci entraîne déjà $a^{\beta+1,\gamma}a^{\gamma\delta} = a^{\beta+1,\beta}a^{\beta\gamma}a^{\gamma\delta} = a^{\beta+1,\beta}a^{\beta\delta} = a^{\beta+1,\delta}$ et $a^{\beta+1} = a^{\beta+1,\beta}a^\beta = a^{\beta+1,\beta}p_i^\beta a_i^\beta = p_i^{\beta+1}a_i^{\beta+1,\beta}a_i^\beta = p_i^{\beta+1}a_i^{\beta+1}$. Il reste donc à prouver que x se factorise à travers $a^{\beta+1}$.

Or on a $x^\beta p_i^\beta = y_i a_{i\beta}$, car a_i^β est un épimorphisme et $x^\beta p_i^\beta a_i^\beta = x^\beta a^\beta = x = y_i a_i = y_i a_{i\beta} a_i^\beta$. Dès lors $x^\beta p_i^\beta$ est compatible avec $\sigma_{i\beta}$. La définition de σ^β entraîne alors que x^β est compatible avec σ^β et se factorise donc en $x^{\beta+1}a^{\beta+1,\beta}$, et l'on a bien

$$x^{\beta+1}a^{\beta+1} = x^{\beta+1}a^{\beta+1,\beta}a^\beta = x^\beta a^\beta = x.$$

Enfin, si les morphismes sont construits pour tous les ordinaux inférieurs à un ordinal limite β, on désigne par $(A^\beta, (a^{\beta\gamma})_{\gamma<\beta})$ la limite inductive de la famille d'épimorphismes $(a^{\gamma\delta})_{\delta<\gamma<\beta}$. Les $a^{\beta\gamma}$ sont alors des épimorphismes (cf. § 5.2). On pose $x^\beta = \widehat{\varinjlim}\, x^\gamma$ $(\gamma < \beta)$ et en tenant compte du fait que $A_i^\beta = \varinjlim a_i^{\gamma\delta}$, on pose

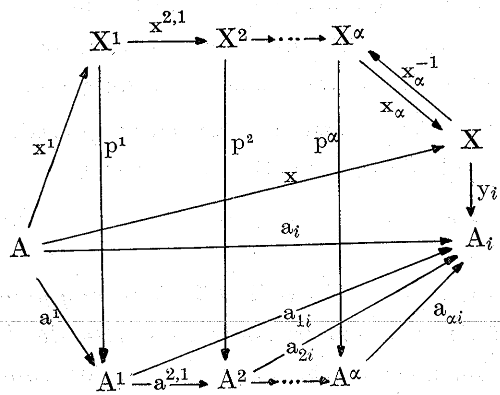
$$p_i^\beta = \varinjlim p_i^\gamma \ (\gamma < \beta).$$

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que l'épimorphisme a^α est inférieur à tous les a_i, c'est-à-dire qu'il se factorise à travers chaque a_i. Or, par hypothèse, $a_{i\alpha}$ est un isomorphisme. Dès lors $a^\alpha = p_i^\alpha a_i^\alpha = p_i^\alpha a_{i\alpha}^{-1} a_i$.

Proposition 5.9. — *Si toutes les surjections de $\mathscr{A}$ sont des quotients d'ordre au plus α $(\alpha < \aleph)$, la borne supérieure d'une famille d'épimorphismes $(a_i : A \to A_i)_{i\in\mathscr{I}}$ existe toujours.*

Nous allons construire, par récurrence, une famille d'épimorphismes $a^\beta : A \to A^\beta$ telle que a_i se factorise à travers a^β en $a_{\beta i}a^\beta$ et que, si $x : A \to X$ est un épimorphisme supérieur à tous les a_i, a^β se factorise en $a^\beta = p^\beta x^\beta$ à travers le β-ième quotient $x^\beta : A \to X^\beta$ de x. Dès lors a^α sera isomorphe à la borne supérieure des a_i, car on aura $p^\alpha x_\alpha^{-1} x = p^\alpha x^\alpha = a^\alpha$.

Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, nous définirons, en même temps que les morphismes a^β, $a_{\beta i}$ et p^β, une famille de morphismes $a^{\beta\gamma} : A^\gamma \to A^\beta$ $(\gamma < \beta)$ tels que $A^0 = A$, $a^{\beta 0} = a^\beta$ et $a^{\beta\gamma}a^{\gamma\delta} = a^{\beta\delta}$ $(\delta < \gamma < \beta)$.



Nous pouvons d'abord prendre $a^0 = p^0 = id_A$. Ensuite, si nous supposons ces morphismes construits jusqu'à l'ordinal β, nous désignerons par $\sigma_{\beta i}$ l'équivalence associée au morphisme $a_{\beta i} : A^\beta \to A^i$ et par σ_β la borne inférieure des $\sigma_{\beta i}$.

Il est dès lors possible de définir le morphisme $a^{\beta+1,\beta} : A^\beta \to A^{\beta+1}$ comme le quotient de A^β par σ_β et de poser $a^{\beta+1,\gamma} = a^{\beta+1,\beta}a^{\beta\gamma}$. Comme σ^β est une équivalence plus fine que $\sigma_{\beta i}$, $a_{\beta i}$ se factorise à travers $a^{\beta+1,\beta}$, en donnant le morphisme $a_{\beta+1,i}$ qui vérifie bien $a_{\beta+1,i}a^{\beta+1} = a_{\beta+1,i}a^{\beta+1,\beta}a^\beta = a_{\beta i}a^\beta = a_i$.

Enfin, pour construire le morphisme $p^{\beta+1}$, désignons par y_i le morphisme tel que $a_i = y_i x$. On en déduit $y_i x_\beta x^\beta = a_i = a_{\beta i}a^\beta = a_{\beta i}p^\beta x^\beta$ et par suite, $y_i x_\beta = a_{\beta i}p^\beta$. Il en résulte que le morphisme $a^{\beta+1,\beta}p^\beta$ est compatible avec l'équivalence associée à x_β : soient x et x' deux points de X^β, y et y' leurs images par p^β, et z et z' leurs images par $a^{\beta+1,\beta}p^\beta$. Si z et z' sont distincts, par définition de σ^β, il existe un i tel que les images a et a' de y et y' par $a_{\beta i}$ soient distinctes. Or a et a' sont les images de x et x' par $a_{\beta i}p^\beta = y_i x_\beta$. Dès lors les images de x et x' par x_β sont nécessairement distinctes.

Le morphisme $a^{\beta+1,\beta}p^{\beta}$ se factorise donc à travers le morphisme $x^{\beta+1,\beta}$ isomorphe au premier quotient de x^{β}, en donnant lieu à un morphisme $p^{\beta+1}$ qui vérifie $p^{\beta+1}x^{\beta+1} = p^{\beta+1}x^{\beta+1,\beta}x^{\beta} = a^{\beta+1,\beta}p^{\beta}x^{\beta} = a^{\beta+1,\beta}a^{\beta} = a^{\beta+1}$.

Pour achever la démonstration, il reste ainsi à construire les morphismes $a^{\beta\gamma}$, $a_{\beta i}$ et p^{β}, dans le cas où β est un ordinal limite et où ces morphismes existent pour les ordinaux inférieurs à β.

Or on peut, comme dans la proposition précédente, désigner par $(A^{\beta}, (a^{\beta\gamma})_{\gamma<\beta})$ la limite inductive de la famille d'épimorphismes $(a^{\gamma\delta})_{\delta<\gamma<\beta}$, et poser $a_{\beta i} = \widehat{\varinjlim}\, a_{\gamma i}\ (\gamma < \beta)$ et $p^{\beta} = \varinjlim p^{\gamma}\ (\gamma < \beta)$.

PROPOSITION 5.10. — *Soient* $\mathbf{T}$ *et* $\mathbf{T}'$ *deux diagrammes de schéma* $\mathcal{T}$ *dans* $\mathscr{A}$ *et* $\Phi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ *une transformation naturelle déterminée par une famille de quotients d'ordre au plus* α $(\alpha < \aleph)$. *Alors, si* $\mathbf{T}$ *admet une limite inductive,* $\mathbf{T}'$ *en admet une aussi et* $\varinjlim \Phi$ *est un quotient d'ordre au plus* α.

Nous garderons les notations du paragraphe 5.3 et de la proposition 5.6. Nous allons construire les limites inductives $l^{\beta} : \mathbf{T}^{\beta} \to \mathbf{C}(T^{\beta})$ des foncteurs $\mathbf{T}^{\beta}$. Nous montrerons ensuite que $\varphi^{\beta 0} = \varinjlim \Phi^{\beta}$ est un quotient d'ordre au plus β. Comme la limite inductive d'une équivalence naturelle est un isomorphisme, et donc un quotient d'ordre 0, $\varinjlim \Phi = \varinjlim \Phi^{\alpha} \varinjlim \Phi_{\alpha}$ sera bien un quotient d'ordre au plus α en vertu de la proposition 5.7.

Soit donc $l^0 : \mathbf{T} \to \mathbf{C}(T^0)$ la limite inductive de $\mathbf{T}$. Considérons l'équivalence σ^0 sur T^0 engendrée par la relation : deux points de $\mathbf{T}T$ qui ont même image par Φ_T ont des images par l^0_T équivalentes modulo σ^0. Désignons par $\varphi^{1,0} : T^0 \to T^1$ le quotient de T^0 par σ^0. Le morphisme $\varphi^{1,0}l^0_T$ est compatible avec l'équivalence associée à Φ_T et se factorise en $l^1_T\Phi^1_T$.

$$\begin{tikzcd}
T^0 \arrow[r, "\varphi^{1,0}"] \arrow[d, "l^0_T"'] & T^1 \arrow[d, "l^1_T"] & \\
\mathbf{T}T \arrow[r, "\Phi^1_T"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_T"'] & T^1T \arrow[r, "\Phi_{1T}"] & T'T
\end{tikzcd}$$

La famille $l^1 = (l^1_T)$ est la limite inductive de $\mathbf{T}^1$. En effet, si X est un objet de $\mathscr{A}$ et $\Xi : T^1 \to C_X$ une transformation naturelle, la transformation $\Xi\Phi^1 : \mathbf{T} \to C_X$ se factorise à travers la limite inductive de $\mathbf{T}$ en $\Gamma_\xi 1^0$. On a donc, pour chaque objet T de $\mathcal{T}$, $\xi 1^0_T = \Xi_T \Phi^1_T$, et ξ est compatible avec σ. Il existe ainsi un seul $\xi' : T^1 \to X$ tel que $\xi'\varphi^{1,0} = \xi$. Comme $\xi' 1^1_T \Phi^1_T = \xi'\varphi^{1,0} 1^0_T = \xi 1^0_T = \Xi_T \varphi^1_T$, on a bien $\Xi = \Gamma_\xi 1^1$. De plus, les égalités $\varphi^{1,0} 1^0_T = 1^0_T \Phi^1_T$ expriment que $\varphi^{1,0} = \varinjlim \Phi^1$.

On construit de la même manière $1^{\beta+1}$ lorsque l'on a déjà 1^β. L'on pose alors $\varphi^{\beta\gamma} = \varinjlim \Phi^{\beta\gamma}$. Pour construire 1^α lorsque α est un ordinal limite, on se sert de la propriété d'associativité des limites inductives (cf. § 3.7).

Désignons par $\mathscr{O}_\alpha$ la catégorie des ordinaux inférieurs à α (cf. § 5.4). Par hypothèse, on a un foncteur $\mathbf{Q} : \mathscr{O}_\alpha \to \mathscr{F}[\mathcal{T}, \mathscr{A}]$ qui associe la transformation $\Phi^{\beta\gamma}$ au morphisme (β, γ) de $\mathscr{O}_\alpha$. En tenant compte de la définition des α-ièmes quotients de Φ_T, on vérifie aisément que ce foncteur admet $(\Phi^{\alpha\beta})_{\beta<\alpha}$ comme limite inductive.

Les isomorphismes du paragraphe 1.5.10 associent à $\mathbf{Q}$ le foncteur $\tilde{\mathbf{Q}} : \mathcal{T} \to \mathscr{F}[\mathscr{O}_\alpha, \mathscr{A}]$ défini par $\tilde{\mathbf{Q}}\mathrm{T}(\beta, \gamma) = \Phi^{\beta\gamma}_T$. En tenant compte de l'hypothèse de récurrence, on vérifie que $\tilde{\mathbf{Q}}$ admet une limite inductive dont le but $\varinjlim \tilde{\mathbf{Q}}$ est le foncteur déterminé par $(\beta, \gamma) \rightsquigarrow \varphi^{\beta\gamma}$ $(\gamma < \beta < \alpha)$ et dont les inclusions canoniques sont les familles $1_T = (1^\beta_T)_{\beta<\alpha} : \tilde{\mathbf{Q}}\mathrm{T} \to \varinjlim \tilde{\mathbf{Q}}$.

D'autre part, $\varinjlim \tilde{\mathbf{Q}}$ est constituée d'une famille d'épimorphismes (cf. § 5.2). Comme α est supposé inférieur à $\aleph$, cette famille admet une limite inductive. Dès lors, deux applications successives des résultats du paragraphe 3.7 montrent que le foncteur $\varinjlim \mathbf{Q} = \mathbf{T}^\alpha$ admet aussi une limite inductive de même but T^α, ce qui démontre le premier point.

L'inclusion canonique de $\tilde{\mathbf{Q}}(\mathrm{T})$ dans $\varinjlim \tilde{\mathbf{Q}}$, prise au point β, est 1^β_T ; celle de $\mathbf{Q}(\beta) = \mathbf{T}^\beta$ dans $\varinjlim \mathbf{Q}$, prise au point T, est $\Phi^{\alpha\beta}_T$. Si nous désignons par $\varphi^{\alpha\beta}$ et 1^α_T les inclusions canoniques de $\varinjlim \tilde{\mathbf{Q}}(\beta) = \mathrm{T}^\beta$ dans T^α et de $\mathbf{T}^\alpha\mathrm{T}$ dans T^α, le paragraphe 3.7

entraîne aussi $1_T^\alpha \Phi_T^{\alpha\beta} = \varphi^{\alpha\beta} 1_T^\beta$. Ceci prouve que l'inclusion canonique $\varphi^{\alpha\beta}$ est la limite inductive de $\Phi^{\alpha\beta}$.

On peut alors en déduire que $\varphi^{\alpha 0}$ est un quotient d'ordre au plus α. Désignons par ψ^β et ψ_β les β-ièmes quotient et reste de $\varphi^{\alpha 0}$. Comme $\varphi^{\alpha 0} = \varphi^{\alpha 1}\varphi^{1,0}$, ψ^1 se factorise en $\xi^1\varphi^{1,0}$. Si ψ^β se factorise en $\xi^\beta\varphi^{\beta 0}$, on a $\psi_{\beta+1}\psi^{\beta+1,\beta}\zeta^\beta = \varphi^{\alpha,\beta+1}\varphi^{\beta+1,\beta}$. Dès lors, deux points de T^β qui ont même image par $\varphi^{\beta+1,\beta}$, ont aussi même image par $\psi^{\beta+1,\beta}\zeta^\beta$ qui se factorise en $\zeta^{\beta+1}\varphi^{\beta+1,0}$. Enfin, si β est un ordinal limite, l'alinéa précédent permet de poser $\zeta^\beta = \varinjlim \zeta^\gamma$, — et ψ^β se factorise encore à travers $\varphi^{\beta 0}$.

Regardons alors ce qui se passe pour l'ordinal α. On a $\psi^\alpha = \zeta^\alpha\varphi^{\alpha 0} = \zeta^\alpha\psi_\alpha\psi^\alpha$; ainsi $\zeta^\alpha\psi_\alpha$ est une identité, et ψ_α étant une section et un épimorphisme est aussi un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Proposition 5.11. — *Supposons que* $f : A \to B$ *et* $g : B \to C$ *soient deux morphismes et supposons que la représentation* $\mathbf{R}$ *préserve les monomorphismes. Dans ces conditions,*

1° *si* f *est un quotient d'ordre* α $(\alpha < \aleph)$, *l'image de* g *et celle de* gf *existent simultanément et sont alors égales.*

2° *si la coïmage de* gf *existe et est un quotient d'ordre* α $(\alpha < \aleph)$ *et si* g *est un monomorphisme, alors* coïm gf *est la coïmage de* f.

Dans le premier cas, il suffit de démontrer que si gf est égal à jq et si j est un monomorphisme, alors il existe un r tel que $g = jr$. Comme j^0 est une injection, q est compatible avec σ_f et se factorise en $q_1 f^1$ à travers le premier quotient f^1 de f, et l'on a $gf_1 = jq_1$. Une récurrence transfinie fort simple montre alors que $q_\alpha = r$.

Dans le deuxième cas, il suffit de démontrer que f se factorise à travers coïm gf, ce qui se fait rigoureusement de la même manière.

5.12. — Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathscr{A}$. Nous appellerons *image par* f *d'un sous-objet* $j : A' \to A$ l'image éventuelle de fj, et *image inverse par* f *d'un sous-objet* $k : B' \to B$, l'éventuelle borne supérieure des sous-objets de A dont l'image directe est inférieure à k.

Supposons que la représentation **R** de la catégorie $\mathscr{A}$ préserve les monomorphismes. Soient $p : A \to A/\rho$ le quotient d'un objet A par une équivalence ρ, $j : B \to A$ un sous-objet de A et ρ' l'équivalence sur B déduite de ρ par j. Supposons en outre que B admette un quotient $q : B \to B/\rho'$. Le morphisme pj étant compatible avec ρ', il se factorise en sq. Comme **R** préserve les monomorphismes, l'image de s et l'image directe de j par p existent simultanément et sont alors égales. Si de plus **R** préserve les épimorphismes et co-préserve les monomorphismes, et si ρ est saturée, alors s est un monomorphisme et coïncide donc avec l'image de j par p.

CHAPITRE VI

PROBLÈME DU QUOTIENT DANS $\mathscr{C}$

6.1. — La catégorie $\mathscr{C}$ de toutes les $\mathfrak{M}$-catégories est représentée canoniquement par le foncteur $\mathbf{R} : \mathscr{C} \to \mathscr{E}i$ qui associe à une catégorie $\mathscr{A}$ l'ensemble $\mathscr{A}^o$ de ses morphismes et à un foncteur $\mathbf{F}$ l'application $\mathbf{F}^o$ sous-jacente.

La représentation $\mathbf{R}$ *préserve les injections et co-préserve les injections et les surjections.*

La co-préservation est évidente, car si l'application $\mathbf{F}^o$ est simplifiable à droite ou à gauche avec toutes les applications, elle l'est à fortiori avec celles qui déterminent un foncteur.

Pour démontrer la préservation, considérons la catégorie $\mathscr{O}_2$ (cf. § 5.4). Elle ne comprend qu'un seul morphisme non unité $(1, 0) : 0 \to 1$. Si a est un élément de $\mathscr{A}$, nous désignerons par $\mathbf{S}_a$ le foncteur défini par $(1, 0) \rightsquigarrow a$. Si $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ est injectif, alors $\mathbf{FS}_a = \mathbf{FS}_b$ entraîne $\mathbf{S}_a = \mathbf{S}_b$, c'est-à-dire $a = b$.

6.2. — *L'image d'un foncteur* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ *existe toujours,* c'est la plus petite sous-catégorie de $\mathscr{P}$ dont l'ensemble sous-jacent contienne $\mathbf{F}^o(\mathscr{A}^o)$, c'est-à-dire la sous-catégorie de $\mathscr{P}$ engendrée par $\mathbf{F}^o(\mathscr{A}^o)$ (cf. § 1.4.7). Cette sous-catégorie se note $\mathbf{F}(\mathscr{A})$ ou $\mathrm{Im}\mathbf{F}$.

6.3. — Un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ est surjectif si son image $\mathbf{F}(\mathscr{A})$ est égale à $\mathscr{P}$, car deux foncteurs qui coïncident sur $\mathbf{F}^o(\mathscr{A}^o)$ coïncident sur les produits d'éléments de $\mathbf{F}^o(\mathscr{A}^o)$ et donc sur $\mathscr{P}$.

Cette condition n'est pas suffisante, comme on le voit en considérant le foncteur d'inclusion de $\mathscr{O}_2$ dans la catégorie $\mathscr{I}$ formée des unités 0 et 1 et des isomorphismes $(1, 0) : 0 \to 1$ et $(0, 1) : 1 \to 0$. Deux foncteurs qui coïncident sur $(1, 0)$ doivent en effet coïncider sur son inverse.

Néanmoins, si $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ est un foncteur surjectif, sa restriction aux unités de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{P}$ est une application surjective. Considérons en effet les foncteurs $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D} : \mathscr{P} \to \mathscr{I}$ où $\mathbf{C}$ est le foncteur constant d'image 0, et où $\mathbf{D}$ est le foncteur qui associe, à un morphisme $p : P \to Q$ de $\mathscr{P}$, l'élément 0, 1, $(0, 1)$, ou $(1, 0)$ suivant que l'on a : P et $Q \in \mathbf{F}(\mathscr{A})$, P et $Q \notin \mathbf{F}(\mathscr{A})$, $P \in \mathbf{F}(\mathscr{A})$ et $Q \notin \mathbf{F}(\mathscr{A})$, ou $P \notin \mathbf{F}(\mathscr{A})$ et $Q \in \mathbf{F}(\mathscr{A})$.

Ces définitions entraînent $\mathbf{CF} = \mathbf{DF}$. Si $\mathbf{F}$ est surjectif, on en déduit $\mathbf{C} = \mathbf{D}$, — ce qui peut seulement avoir lieu si toute unité de $\mathscr{P}$ est dans $\mathbf{F}(\mathscr{A})$.

6.4. — Soit $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ un foncteur. Considérons un ensemble $\mathscr{J}$ de sous-catégories $\mathbf{J}_i : \mathscr{Q}_i \to \mathscr{P}$ telles que $\mathbf{F}$ se factorise en $\mathbf{J}_i\mathbf{F}_i$ et que $\mathbf{F}_i$ soit une surjection. Soit $\mathscr{Q}$ la sous-catégorie de $\mathscr{P}$ engendrée par l'union des ensembles $\mathscr{Q}_i^0$. Alors, la corestriction $\mathbf{F}' : \mathscr{A} \to \mathscr{Q}$ de $\mathbf{F}$ est aussi une surjection, car si $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H} : \mathscr{Q} \to \mathscr{R}$ sont deux foncteurs distincts, ils ne peuvent coïncider sur l'union des $\mathscr{Q}_i^0$. Il existe donc un i tel que les restrictions de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ à $\mathscr{Q}_i$ soient distinctes. Leurs composés avec $\mathbf{F}_i$ le sont alors aussi, or ce sont justement les foncteurs $\mathbf{GF}'$ et $\mathbf{HF}'$.

Il est dès lors facile de voir que *la coïmage d'un foncteur* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ *existe toujours* : elle est isomorphe à la corestriction $\mathbf{F}'$ de $\mathbf{F}$ obtenue en prenant pour $\mathscr{J}$ l'ensemble de toutes les sous-catégories vérifiant la condition ci-dessus. Cet ensemble n'est jamais vide, car il contient toujours $\mathbf{F}(\mathscr{A})$.

Ceci prouve en outre que la coïmage de $\mathbf{F}$ se factorise à travers son image, en donnant un foncteur bijectif $\mathrm{Im}\, \mathscr{A} \to \mathrm{Coïm}\, \mathscr{A}$.

6.5. — Les $\mathfrak{M}$-systèmes multiplicatifs sont les objets structurés d'une espèce de structure $\mathbf{S} : \tilde{\mathscr{E}} \to \mathscr{E}i$. Nous désignerons par $\mathscr{S}m$ la catégorie de l'espèce $\mathbf{S}$ dont les morphismes sont les triples

$\mathbf{f} = (\mathfrak{N}', \mathbf{f}^o, \mathfrak{N}) : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}'$ où $\mathbf{f}^o$ est une application telle que l'image d'un produit soit le produit des images. Lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, nous noterons également $\mathbf{f}$ l'application $\mathbf{f}^o$ sous-jacente.

Nous désignerons par $\mathcal{S}mu$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}m$ dont les objets sont les systèmes multiplicatifs unitaires et dont les morphismes sont tels que l'image d'une unité soit une unité. La catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}mu$.

Soient $\mathfrak{N}$ un système multiplicatif et $\mathfrak{N}'^o$ un sous-ensemble de $\mathfrak{N}^o$. On munit $\mathfrak{N}'^o$ d'une structure multiplicative induite de $\mathfrak{N}$ en posant, pour trois éléments quelconques de $\mathfrak{N}'^o$, $n = n'n''$ si et seulement si cette relation est vérifiée dans $\mathfrak{N}$.

Si $\mathfrak{N}$ est faiblement associatif, il en est de même de $\mathfrak{N}'$. Mais ce n'est pas le cas si $\mathfrak{N}$ est associatif, car si le composé $(nn')n''$ appartient à $\mathfrak{N}'$, il se peut que $n'n''$ n'y appartienne pas.

Proposition 6.6. — *Toute équivalence ρ sur un objet $\mathfrak{N}$ de $\mathcal{S}m$ admet un quotient.*

En effet, en retournant à la définition des morphismes, on voit que si ρ est saturée dans $\mathcal{S}m$, elle vérifie la condition :

$$m \sim m' \text{ et } n \sim n',\ mn \text{ et } m'n' \text{ définis } \Rightarrow mn \sim m'n'. \qquad (\alpha)$$

Supposons que ρ vérifie cette condition, nous allons définir sur le Quotient $\mathfrak{N}^o/\rho^o$ une structure de système multiplicatif qui en fera le Quotient de $\mathfrak{N}$ par ρ, ce qui prouvera en outre que ρ est saturée (cf. proposition 4.8).

Le composé $\tilde{l}$ de deux classes $\tilde{m}$ et $\tilde{n}$ de $\mathfrak{N}^o/\rho^o$ sera défini s'il existe un m dans $\tilde{m}$ et un n dans $\tilde{n}$ tels que le composé mn soit défini. Dans ce cas, $\tilde{l}$ sera la classe de mn. Ceci a un sens grâce à la condition imposée à ρ. Soit $\mathfrak{N}/\rho$ ce système multiplicatif. Il est évident que l'application canonique de $\mathfrak{N}^o$ sur son quotient détermine un morphisme $\mathbf{p} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}/\rho$ à travers lequel se factorisent tous les morphismes compatibles avec ρ, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 6.7. — *Si* ρ *est une équivalence sur un objet* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{S}m$*, on a :* $(\mathcal{N}/_{\mathcal{S}m}\rho)^{o} = \mathcal{N}^{o}/\rho^{o}_{\mathcal{S}m}$.

Proposition 6.8. — *Tout système multiplicatif* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{S}m$ *engendre un* SMU *libre.*

Il s'agit donc de trouver un SMU $\mathcal{N}_{L}$ et un morphisme $\mathbf{1}: \mathcal{N} \to \mathcal{N}_{L}$ de $\mathcal{S}m$ tels que tout morphisme $\mathbf{f}: \mathcal{N} \to \mathfrak{U}$ de $\mathcal{N}$ vers un SMU $\mathfrak{U}$ se factorise de manière unique en $\mathbf{f} = \mathbf{f}'\mathbf{1}$. Dans ce cas, $\mathbf{f}'$ est nécessairement un morphisme de $\mathcal{S}mu$.

Soient δ et γ deux éléments n'appartenant pas à $\mathcal{N}$. Considérons le système multiplicatif $\mathcal{N}'$ dont l'ensemble sous-jacent est $\mathcal{N}'^{o} = \mathcal{N} \cup \{(m, \delta) \mid m \in \mathcal{N}^{o}$ et ne possède pas d'unité à droite dans $\mathcal{N}\} \cup \{(m, \gamma) \mid m \in \mathcal{N}^{o}$ et ne possède pas d'unité à gauche dans $\mathcal{N}\}$, dont la loi de composition, restreinte à $\mathcal{N}^{o}$, est celle de $\mathcal{N}$, et dont les seuls autres composés définis sont $(m, \gamma)m = m$, $m(m, \delta) = m$, $(m, \gamma)(m, \gamma) = (m, \gamma)$ et $(m, \delta)(m, \delta) = (m, \delta)$.

$\mathcal{N}'$ est un système multiplicatif à unités et l'inclusion $\mathbf{1}: \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ est un morphisme de $\mathcal{S}m$. On peut d'ailleurs voir facilement que $(\mathcal{N}', \mathbf{1})$ est le système multiplicatif à unités, libre, engendré par $\mathcal{N}$.

Considérons maintenant l'équivalence ρ sur $\mathcal{N}'$ engendrée par la relation qui suit. Deux unités e et e' de $\mathcal{N}'$ sont équivalentes lorsqu'il existe deux éléments m et n de $\mathcal{N}'$ dont le composé mn est défini, et que l'une des trois conditions suivantes est remplie : 1° e est unité à droite de m et e' unité à gauche de n, 2° e est unité à gauche de m et e' unité à gauche de mn, 3° e est unité à droite de mn et e' unité à droite de n.

Soit $\mathbf{p}: \mathcal{N}' \to \mathcal{N}'/\rho$ le quotient de $\mathcal{N}'$ par ρ. $\mathcal{N}'/\rho$ est évidemment un SMU. Muni du morphisme $\mathbf{p1}: \mathcal{N} \to \mathcal{N}'/\rho$, c'est bien le SMU libre engendré par $\mathcal{N}$. En effet, si $\mathfrak{U}$ est un SMU et $\mathbf{f}: \mathcal{N} \to \mathfrak{U}$ un morphisme de $\mathcal{S}m$, $\mathbf{f}$ se prolonge de manière unique en $\mathbf{f}': \mathcal{N}' \to \mathfrak{U}$, puisque $\mathfrak{U}$ possède des unités, et $\mathbf{f}'$ est compatible avec ρ, puisque $\mathfrak{U}$ est unitaire.

Corollaire 6.9. — *Toute équivalence* ρ *sur un objet* $\mathfrak{U}$ *de* $\mathcal{S}mu$ *admet un quotient.*

Examinons l'inclusion $\mathbf{1}: \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}'$ du paragraphe précédent. Une unité étant idempotante, si e est une unité de $\mathfrak{N}$, il n'existe pas d'élément (e, γ) ou (e, δ) dans $\mathfrak{N}'$. Dès lors, e est aussi une unité de $\mathfrak{N}'$.

Comme ρ n'identifie que des unités, l'image d'une unité par le morphisme **pl** est une unité. Si $\mathfrak{N}$ est un système multiplicatif unitaire, **pl** est donc un morphisme de $\mathscr{S}mu$.

Le corollaire résulte alors de la remarque 4.20 et de la proposition 6.8. On voit d'ailleurs que ρ est une équivalence saturée dans $\mathscr{S}mu$ (*) si elle vérifie les conditions ($\mathfrak{a}$) et

$$\mathrm{m} \sim \mathrm{n} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e_m} \sim \mathrm{e_n} \text{ et } {}_\mathrm{m}\mathrm{e} \sim {}_\mathrm{n}\mathrm{e}. \qquad (\mathfrak{b})$$

Corollaire 6.10. — *Si ρ est une équivalence sur un objet* $\mathfrak{U}$ *de $\mathscr{S}mu$ et vérifie la condition* ($\mathfrak{b}$), *alors les unités de* $\mathfrak{U}/_{\mathscr{S}m}\rho$ *sont exactement les classes d'équivalences des unités de* $\mathfrak{U}$, *et l'on a* $\mathfrak{U}/_{\mathscr{S}m}\rho = \mathfrak{U}/_{\mathscr{S}mu}\rho$.

Désignons par $\tilde{\mathrm{m}}$ la classe d'équivalence d'un élément m. Si ε est une unité de $\mathfrak{U}$ et si $\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathrm{m}}$ est défini, il existe un élément n équivalent à ε et un élément m′ équivalent à m qui sont composables dans $\mathfrak{U}$. Or, en vertu de la condition ($\mathfrak{b}$), $\mathrm{e_n}$ est équivalent à $\mathrm{e}_\varepsilon = \varepsilon$, et donc à n. Le composé $\mathrm{e_n m'}$ étant défini et égal à m, on en déduit $\tilde{\varepsilon}\tilde{\mathrm{m}} = \tilde{\mathrm{e}}_\mathrm{n}\tilde{\mathrm{m}}' = \tilde{\mathrm{m}}' = \tilde{\mathrm{m}}$. On vérifie de même qu'un composé $\tilde{\mathrm{m}}\tilde{\varepsilon}$ est égal à $\tilde{\mathrm{m}}$. Comme ε est idempotent, il en est de même de $\tilde{\varepsilon}$ qui est bien une unité.

Comme $\mathrm{m} = \mathrm{me_m}$, on a toujours $\tilde{\mathrm{m}} = \tilde{\mathrm{m}}\tilde{\mathrm{e}}_m$. Si $\tilde{\mathrm{m}}$ est une unité, on a dès lors $\tilde{\mathrm{m}} = \tilde{\mathrm{e}}_\mathrm{m}$, et $\tilde{\mathrm{m}}$ est la classe d'équivalence de l'unité $\mathrm{e_m}$.

Il résulte de ceci que $\mathfrak{U}/_{\mathscr{S}m}\rho$ est un système à unités. Il reste à vérifier qu'il est unitalement associatif. Démontrons par exemple que si $\tilde{\mathrm{p}}$ est une unité et si $(\tilde{\mathrm{m}}\tilde{\mathrm{n}})\tilde{\mathrm{p}}$ est défini, alors $\tilde{\mathrm{n}}\tilde{\mathrm{p}}$ est aussi défini.

On peut trouver des éléments m′, n′, p′ et q′ respectivement dans $\tilde{\mathrm{m}}$, $\tilde{\mathrm{n}}$, $\tilde{\mathrm{p}}$ et $\tilde{\mathrm{m}}\tilde{\mathrm{n}}$ de telle manière que les composés m′n′ et q′p′

(*) De telles équivalences sont appelées *bicompatibles* dans le séminaire de C. Ehresmann [8].

soient définis. Mais comme nous venons de le voir, p' est équivalent à ${}_{p'}e$. Comme $m'n'$ est équivalent à q', la condition (b) entraîne alors : ${}_{p'}e = e_{q'} \sim e_{m'n'} \doteq e_{n'}$. Dès lors le composé $\tilde{n}\tilde{p} = \tilde{n}'\tilde{e}_{n'}$ est bien défini.

Corollaire 6.11. — *Si ρ est une équivalence sur un objet $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{S}mu$, on a $(\mathfrak{U}/_{\mathcal{S}mu}\rho)^o = \mathfrak{U}^o/\rho^o_{\mathcal{S}mu}$.*

Ceci se déduit des corollaires 6.7 et 6.10.

Proposition 6.12. — *Tout système multiplicatif unitaire $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{S}mu$ engendre une catégorie libre.*

Soit $\mathcal{U}'$ la catégorie dont les unités sont celles de $\mathfrak{U}$, dont les morphismes non-unités, de source e et de but e', sont les suites finies non vides $(m_1, m_2, ..., m_r)$ d'éléments de $\mathfrak{U}$, telles que le but de m_1 soit e', que le but de m_i soit la source de m_{i-1} pour $2 \leqslant i \leqslant r$ et que la source de m_r soit e', et dont la loi de composition est la juxtaposition des suites [14].

Considérons l'équivalence ρ sur $\mathcal{U}'$ engendrée par la relation : si le composé $m = n_1n_2$ est défini dans $\mathfrak{U}$, deux éléments de $\mathcal{U}'$ de la forme $(m_1, ..., m_{i-1}, m, m_{i+1}, ..., m_r)$ et $(m_1, ..., m_{i-1}, n_1, n_2, m_{i+1}, ..., m_r)$ sont équivalents. Si $\mathbf{p} : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$ est le quotient de $\mathcal{U}'$ par ρ dans $\mathcal{S}mu$, $\mathcal{U}$ est une catégorie. Il suffit de montrer que $\mathcal{U}$ est fortement associative. Or ceci provient du fait que l'équivalence ρ est telle que deux morphismes équivalents ont même source et même but qui sont aussi source et but de leur image dans $\mathcal{U}$. Le composé ab de deux éléments a et b de $\mathcal{U}$ sera donc défini si et seulement si la source de a est égale au but de b.

D'autre part, il est évident que le morphisme $\mathbf{u} : \mathfrak{U} \to \mathcal{U}$ de $\mathcal{S}mu$, composé de l'inclusion de $\mathfrak{U}$ dans $\mathcal{U}'$ et de $\mathbf{p}$, est tel que, si $\mathcal{A}$ est une catégorie et $\mathbf{f} : \mathfrak{U} \to \mathcal{A}$ un morphisme de $\mathcal{S}mu$, alors $\mathbf{f}$ se décompose de manière unique en $\mathbf{f} = \mathbf{Fu}$. Dans ce cas, $\mathbf{F}$ est un foncteur.

6.13. — Le morphisme $\mathbf{u} : \mathfrak{U} \to \mathcal{U}$ est un épimorphisme de $\mathcal{S}m$

et donc de $\mathscr{S}mu$. Pour le montrer, il suffit de vérifier que l'inclusion $\mathbf{j} : \mathfrak{U} \to \mathscr{U}'$ est un épimorphisme de $\mathscr{S}m$.

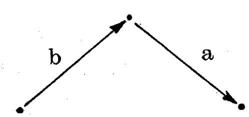
Soient $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ deux morphismes de $\mathscr{U}'$ dans un système multiplicatif $\mathfrak{N}$, tels que $\mathbf{fj} = \mathbf{gj}$. Dès lors $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ coïncident sur toutes les suites à un élément de $\mathscr{U}'$. Mais comme une suite $(m_1, ..., m_r)$ de $\mathscr{U}'$ est le produit dans $\mathscr{U}'$ des suites (m_1), ..., (m_r) à un élément, il résulte de la définition des morphismes que $\mathbf{f}$ coïncide avec $\mathbf{g}$. Ceci ne veut d'ailleurs pas dire que l'application sous-jacente à $\mathbf{u}$ soit surjective.

Le morphisme $\mathbf{u}$ *est un monomorphisme de* $\mathscr{S}m$ *si et seulement si* $\mathfrak{U}$ *est faiblement associatif*. En effet, l'équivalence ρ sur $\mathscr{U}'$ identifie deux suites (m) et (m′) à un élément dans le seul cas où m et m′ sont tous deux composés dans $\mathfrak{U}$ d'une même suite ordonnée $m_1, ..., m_r$ d'éléments de $\mathfrak{U}$.

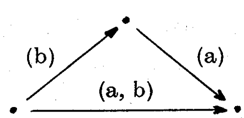
6.14. — *Exemples.*

1) Le morphisme $\mathbf{u} : \mathfrak{U} \to \mathscr{U}$ peut être un bimorphisme de $\mathscr{S}m$ sans déterminer une application surjective, comme l'illustre la figure ci-dessous :

$\mathfrak{U}$:

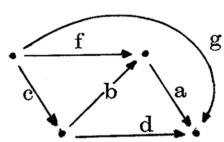


$\mathscr{U}$:



2) $\mathbf{u}$ peut avoir une bijection sous-jacente sans être un isomorphisme : dans le schéma ci-contre, si la loi de composition dans $\mathfrak{U}$ est ab = d, bc = f, af = g, $\mathscr{U}$ aura même ensemble sous-jacent, mais la loi sera complétée par dc = g.

$\mathfrak{U}$:



Théorème 6.15. — *Toute équivalence sur une* $\mathfrak{M}$*-catégorie admet un quotient dans* $\mathscr{C}$ (*).

Ceci découle des propositions 4.19 et 6.12. De plus, on voit

(*) C. Ehresmann appelle quotient ce que nous appelons quotient strict, ce qu'il appelle quotient strict est un quotient tel que $\mathscr{A}/_{\mathscr{C}}\rho = \mathscr{A}/_{\mathscr{S}mu}\rho$ [8].

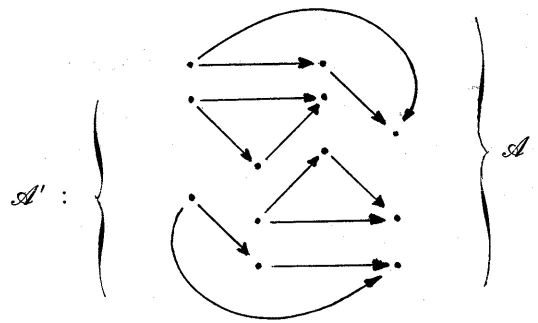
qu'une équivalence $\rho = (\mathscr{A}, \rho^0)$ est saturée dans $\mathscr{C}$ si et seulement si elle vérifie ($\mathfrak{a}$), ($\mathfrak{b}$) et la condition :

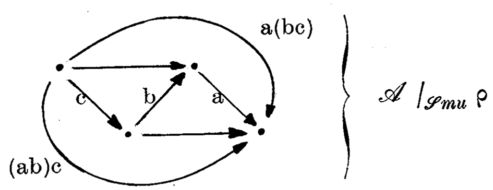
le quotient de $\mathscr{A}$ par ρ dans $\mathscr{S}mu$ est faiblement associatif. ($\mathfrak{c}$)

Cette dernière condition est en effet nécessaire et suffisante pour que le morphisme $\mathbf{u} : \mathscr{A}/_{\mathscr{S}mu}\rho \to \mathscr{A}/_{\mathscr{C}}\rho$, défini au paragraphe 6.12, soit un monomorphisme, et par suite pour que l'application $\mathscr{A}^0/\rho^0 \to (\mathscr{A}/_{\mathscr{C}}\rho)^0$ soit injective (cf. proposition 4.8).

6.16. — L'exemple illustré par la figure ci-dessous montre par quel processus le quotient dans $\mathscr{S}mu$ d'une catégorie par une équivalence saturée dans $\mathscr{S}mu$ peut ne pas être faiblement associatif.

La relation d'équivalence identifie les éléments de $\mathscr{A}$ qui se déduisent l'un de l'autre par une translation verticale.





6.17. — Pour que l'application $\mathbf{P}^0$ sous-jacente au quotient $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}/_{\mathscr{C}}\rho$ soit surjective, il est nécessaire et suffisant qu'une suite d'éléments de $\mathscr{A}/_{\mathscr{S}mu}\rho$ soit toujours équivalente à une suite à un élément pour la relation introduite au paragraphe 6.12. Mais ceci n'entraîne pas que $\mathscr{A}/_{\mathscr{S}mu}\rho$ soit égal à $\mathscr{A}/_{\mathscr{C}}\rho$, — comme le prouve le fait que le quotient dans $\mathcal{S}mu$ de la sous-catégorie $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ du paragraphe 6.16 est le système multiplicatif $\mathfrak{U}$ de l'exemple 2 du paragraphe 6.14.

THÉORÈME 6.18. — *Si* ρ *est une équivalence saturée dans* $\mathcal{C}$, *le Quotient* $\mathcal{A}/_{\mathcal{C}}\rho$ *est égal au Quotient* $\mathcal{A}/_{\mathcal{S}mu}\rho$ *si et seulement si, lorsque* a *et* b *sont deux morphismes de* $\mathcal{A}$ *tels que* e_a *et* ${}_be$ *soient équivalents modulo* ρ, *il existe un morphisme* a' *équivalent à* a *et un morphisme* b' *équivalent à* b *tels que le composé* a'b' *soit défini dans* $\mathcal{A}$.

En effet, ceci est la condition pour que deux éléments de $\mathcal{A}/_{\mathcal{S}mu}\rho$ soient composables si et seulement si le but de l'un est la source de l'autre, ce qui en fait une catégorie.

On remarquera que c'est seulement dans les conditions du théorème 6.18 que l'on a $(\mathcal{A}/_{\mathcal{C}}\rho)^o = \mathcal{A}^o/\rho^o$.

COROLLAIRES 6.19.

1) *Si* ρ *est une équivalence qui vérifie la relation* :

$$e \in \mathcal{A}_0,\ f \in \mathcal{A} \textit{ et } e \sim e_f \ (\textit{mod. } \rho_{\mathcal{S}mu})$$
$$\Rightarrow (\exists f')\ f' \in \mathcal{A},\ e_{f'} = e_f \textit{ et } f' \sim f \ (\textit{mod. } \rho_{\mathcal{S}mu}),$$

alors $\mathcal{A}/_{\mathcal{C}}\rho = \mathcal{A}/_{\mathcal{S}mu}\rho$ (*).

2) *Si* ρ *est une équivalence qui vérifie la relation* :

$$e \in \mathcal{A}_0,\ f \in \mathcal{A} \textit{ et } e \sim {}_fe \ (\textit{mod. } \rho_{\mathcal{S}mu})$$
$$\Rightarrow (\exists f')\ f' \in \mathcal{A},\ {}_{f'}e = {}_fe \textit{ et } f' \sim f \ (\textit{mod. } \rho_{\mathcal{S}mu}),$$

alors $\mathcal{A}/_{\mathcal{C}}\rho = \mathcal{A}/_{\mathcal{S}mu}\rho$.

3) *Si* ρ *est une équivalence telle que deux morphismes équivalents aient même source et même but, alors* $\mathcal{A}/_{\mathcal{C}}\rho = \mathcal{A}/_{\mathcal{S}mu}\rho$.

6.20. — On peut également vérifier que, si $\mathcal{A}$ est un groupoïde ou un groupe, $\mathcal{A}/_{\mathcal{C}}\rho$ l'est aussi.

En désignant par $\mathbf{p} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_{\mathcal{S}mu}\rho$ le quotient de $\mathcal{A}$ par ρ dans $\mathcal{S}mu$, on a pour tout élément $a : A \to B$ de $\mathcal{A}$: $\mathbf{p}(a)\mathbf{p}(a^{-1}) = \mathbf{p}(aa^{-1}) = \mathbf{p}(id_B)$ et $\mathbf{p}(a^{-1})\mathbf{p}(a) = \mathbf{p}(id_A)$.

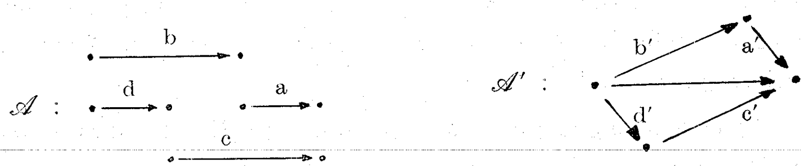
Tout élément de $\mathcal{A}/_{\mathcal{S}mu}\rho$ a donc un inverse (qui n'est pas

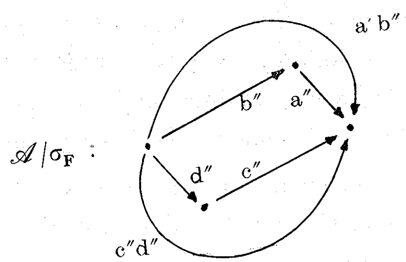
(*) Ce corollaire est la proposition IV, 25 de [8].

nécessairement unique). La catégorie libre engendrée est alors un groupoïde, car la classe de la suite finie $(\mathbf{p}(a_1), \ldots, \mathbf{p}(a_r))$ a pour inverse celle de $(\mathbf{p}(a_r^{-1}), \ldots, \mathbf{p}(a_1^{-1}))$.

D'autre part, un groupe est un groupoïde avec une seule unité, et le passage au quotient ne peut que diminuer le nombre d'unités.

Tout foncteur surjectif $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ ne détermine pas une structure de quotient sur $\mathscr{A}'$, comme le montre l'exemple ci-dessous où $\mathbf{F}$ est le foncteur $a \rightsquigarrow a'$.





Par contre, nous avons la proposition suivante :

Proposition 6.21. — *Tout foncteur surjectif* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ *qui est un quotient est d'ordre au plus deux.*

Soient $\mathbf{Q} : \mathscr{A} \to \mathscr{Q}$ le quotient de $\mathscr{A}$ par l'équivalence $\sigma_\mathbf{F}$ associée à $\mathbf{F}$, et $\mathbf{G} : \mathscr{Q} \to \mathscr{P}$ le morphisme qui résulte de la factorisation de $\mathbf{F}$ à travers $\mathbf{Q}$. La restriction de l'application $\mathbf{G}^0$ aux unités de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{P}$ est une bijection. Elle est en effet surjective, puisque le foncteur $\mathbf{F}$ est surjectif (cf. § 6.3) et elle est aussi injective, car deux unités distinctes de $\mathscr{Q}$ proviennent d'unités distinctes de $\mathscr{A}$ non équivalentes modulo $\sigma_\mathbf{F}$, c'est-à-dire qui ont des images distinctes par $\mathbf{F}$.

Dès lors l'équivalence $\sigma_\mathbf{G}$ répond aux conditions du corollaire 3 du paragraphe 6.19. Le quotient $\mathscr{Q}/_{\mathscr{C}}\sigma_\mathbf{G}$ est égal à $\mathscr{Q}/_{\mathscr{S}mu}\sigma_\mathbf{G}$ et a pour ensemble sous-jacent $\mathscr{Q}^o/\sigma^o_{\mathbf{G}}$. Le foncteur $\mathbf{H} : \mathscr{Q}/_{\mathscr{C}}\sigma_{\mathbf{G}} \to \mathscr{P}$ est donc une application injective. Il est ainsi un isomorphisme ou n'est un quotient d'aucun ordre.

6.22. — Nous appellerons *catégorie nulle* une catégorie qui ne possède que des unités (la notion ne coïncide pas avec celle d'objet nul (cf. § 1.7.3), car les catégories nulles ne sont pas toutes isomorphes). Un *foncteur nul* est un foncteur qui se factorise à travers une catégorie nulle, c'est-à-dire un foncteur dont l'image est une catégorie nulle. Le composé d'un foncteur nul et d'un foncteur quelconque est nul.

Si le foncteur composé $\mathbf{FG}$ est nul, alors $\mathbf{G}$ est nul si $\mathbf{F}$ est injectif et $\mathbf{F}$ est nul si $\mathbf{G}$ est surjectif. En effet, dans le premier cas, $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ envoie un morphisme non-unité sur un morphisme non-unité, et dans le second, on peut considérer le quotient $\mathbf{P}$ du but de $\mathbf{F}$ par l'équivalence ρ définie par la relation : deux éléments de $\mathscr{P}$ sont équivalents si et seulement s'ils sont tous deux des unités.

Cette relation vérifie ($\mathfrak{a}$) et ($\mathfrak{b}$). Le quotient $\mathscr{P}/_{\mathscr{S}mu}\rho$ a donc pour ensemble sous-jacent $\mathscr{P}^o/\rho^o$ et l'on peut identifier les éléments non-unités de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{P}/_{\mathscr{S}mu}\rho$. La loi de composition de $\mathscr{P}/_{\mathscr{S}mu}\rho$ étant alors induite par celle de $\mathscr{P}$ est faiblement associative (cf. § 6.5). Dès lors l'application $\mathscr{P}/_{\mathscr{S}mu}\rho \to \mathscr{P}/_{\mathscr{C}}\rho$ est injective (cf. § 6.15) et $\mathbf{PF}$ est nul si et seulement si $\mathbf{F}$ l'est.

Considérons alors le foncteur constant $\mathbf{C} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}/_{\mathscr{C}}\rho$ qui a pour image l'unique unité ε de $\mathscr{P}/_{\mathscr{C}}\rho$. Les composés $\mathbf{PFG}$ et $\mathbf{CG}$ sont nuls, puisque $\mathbf{FG}$ et $\mathbf{C}$ le sont. Ils sont nécessairement égaux au morphisme constant d'image ε. Comme $\mathbf{G}$ est surjectif, on en déduit $\mathbf{PF} = \mathbf{C}$. Il en résulte que $\mathbf{PF}$ et donc $\mathbf{F}$ sont nuls.

6.23. — Soit $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ un foncteur. On appelle *noyau* de $\mathbf{F}$ (resp. *conoyau* de $\mathbf{F}$) un foncteur $\mathbf{N} : \mathscr{N} \to \mathscr{A}$ (resp. $\mathbf{M} : \mathscr{P} \to \mathscr{M}$) tel que tout foncteur $\mathbf{L} : \mathscr{L} \to \mathscr{A}$ (resp. $\mathbf{L} : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$) dont le composé avec $\mathbf{F}$ soit nul, se factorise de manière unique à travers $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{M}$).

On voit aisément qu'un noyau est toujours injectif et un conoyau toujours surjectif. La sous-catégorie de $\mathscr{A}$ qui est isomorphe aux noyaux de **F** est appelée *le* noyau de **F** et notée $\ker \mathbf{F} : \mathscr{K} \to \mathscr{A}$; la catégorie-quotient de $\mathscr{P}$ qui est isomorphe aux conoyaux de **F** est appelée *le* conoyau de **F** et notée $\operatorname{coker} \mathbf{F} : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$; $\mathscr{K}$ s'appelle alors le Noyau et $\mathscr{Q}$ le Conoyau de **F**. Leur existence est d'ailleurs prouvée par le théorème suivant :

THÉORÈME 6.24. — *Tout foncteur* $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ *admet un noyau et un conoyau.*

Le Noyau est la sous-catégorie de $\mathscr{A}$, image réciproque par **F** des unités de $\mathscr{P}$; le conoyau est le quotient de $\mathscr{P}$ par l'équivalence ρ déterminée par la relation : deux points p et p′ qui appartiennent à la même composante connexe de $\mathbf{F}(\mathscr{A})$ sont équivalents modulo ρ. Cette relation n'est généralement pas saturée, on aurait d'ailleurs pu prendre $\mathbf{F}^{o}(\mathscr{A}^{o})$ au lieu de $\mathbf{F}(\mathscr{A})$.

Soit $\mathbf{L} : \mathscr{P} \to \mathscr{L}$ un foncteur tel que **LF** soit nul. **L** est compatible avec ρ, car il envoie une composante connexe de $\mathbf{F}(\mathscr{A})$ sur une unité de $\mathscr{L}$. **L** se factorise donc à travers $\mathscr{Q} = \mathscr{P}/\rho$. Cette factorisation est unique, car un quotient est surjectif.

Si **F** est injectif, son noyau est nul et $\ker \mathbf{FG} = \ker \mathbf{G}$. Si **G** est surjectif, son conoyau est nul et $\operatorname{coker} \mathbf{FG} = \operatorname{coker} \mathbf{F}$. Mais les réciproques sont inexactes.

6.25. — Il résulte de ce qui précède qu'un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{P}$ admet la décomposition canonique suivante :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K} \arrow[r, "\ker \mathbf{F}"] & \mathscr{A} \arrow[dl, "\operatorname{coker}\ker \mathbf{F}"'] \arrow[dd, "\mathbf{P}"] \arrow[ddrr, "\text{coïm}\, \mathbf{F}"] \arrow[rr, "\mathbf{F}"] & & \mathscr{P} \arrow[r, "\operatorname{coker} \mathbf{F}"] & \mathscr{A} \\
\mathscr{U} \arrow[dr, "\mathbf{Q}"] & & & & \mathscr{V} \arrow[ul, "\ker \operatorname{coker} \mathbf{F}"'] \\
& \mathscr{A}/\sigma_{\mathbf{F}} \arrow[dr, "\mathbf{S}"] & & \mathscr{J} \arrow[uu, "\mathbf{V}"] \arrow[ur, "\mathbf{T}"] & \\
& & \mathscr{I} \arrow[ur, "\mathbf{B}"] \arrow[uuur, "\operatorname{im} \mathbf{F}"] & &
\end{tikzcd}$$

P est le premier quotient de **F**. **Q** résulte de la factorisation de **P** à travers coker ker **F**, car deux points de la même composante connexe de $\mathscr{K}$ ont même image par **F**. **S** provient de ce que le premier reste de **F** a pour image l'image de **F**. **B** est la bijection canonique Im $\mathbf{F} \to$ Coïm **F**. Si l'on désigne par $\mathbf{V} : \mathscr{I} \to \mathscr{P}$ le morphisme tel que $\mathbf{F} = \mathbf{V}$ coïm **F**, on a $\mathbf{VB} =$ im **F**. Or coker **F** im **F** est nul et **B** est surjectif. Dès lors **V** se factorise à travers ker coker **F** en donnant **T**.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Bernays et A. A. Fraenkel, *Axiomatic set theory*, Amsterdam (Brouwer), 1958, 226 pp.

[2] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, *Act. Scient. et ind.*, 1212 (1954), 1243 (1956) et 1258 (1957), Paris (Hermann).

[3] H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra*, *Princeton Math. Series*, 19 (1956), 390 pp.

[4] P. Dedecker, La structure algébrique de l'ensemble des classes d'espaces fibrés, *Bull. Acad. Roy. Belg.*, 42 (1956), pp. 270-290.

[5] P. Dedecker, Groupoïdes de cohomologie à coefficients non abéliens et espaces fibrés, *Colloque de topologie algébrique du C. B. R. M.*, Louvain (1956), pp. 135-148.

[6] P. Dedecker, Introduction aux structures locales, *Colloque de géométrie différentielle globale du C. B. R. M.*, Bruxelles (1959), pp. 103-135.

[7] B. Eckmann et P. J. Hilton, Group-like structures in general categories, *Math. Ann.* 145 (1962), pp. 227-255.

[8] C. Ehresmann, *Séminaire de topologie et de géométrie différentielle*, Faculté des Sciences de Paris, miméographié (1963), 180 pp.

[9] S. Eilenberg et S. Mac Lane, General theory of natural equivalences, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58 (1945), pp. 231-294.

[10] A. Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, *Math. Ann.*, 86 (1922), pp. 230-237.

[11] P. J. Freyd, *Functor theory*, Thesis, Princeton University (1960), 49 pp.

[12] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. de France*, 90 (1963), pp. 323-448.

[13] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku math. J.*, 9 (1957), pp. 119-221.

[14] M. Hasse, Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und Gruppoide, *Math. Nach.*, 22 (1960), pp. 255-270.

[15] D. M. Kan, Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87 (1958), pp. 294-329.

[16] C. Kuratowski, Sur l'état actuel de l'axiomatique de la théorie des ensembles, *Ann. Soc. Math. Polon.*, 3 (1925), pp. 146-147.

[17] A. G. Kurosh, A. Kh. Livshits et E. G. Shul'geifer, Foundations of the theory of categories, *Uspekhi Matem. Nauk*, XV, 6 (96) (1960). Translated in Russian Math. Surveys, *London Math. Soc.*, 15 (1960), pp. 1-46.

[18] S. Mac Lane, Duality for groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 56 (1960), pp. 485-516.

[19] R. M. Robinson, The theory of classes. A modification of Von Neumann's system, *Journal of Symbolic Logic*, 2 (1937), pp. 29-36.

[20] J. B. Rosser, *Logic for Mathematicians*, New-York (1953), 540 pp.

[21] A. Tarski, Über unerreichbare Kardinalzahlen, *Fundamenta Math.*, 30 (1938), pp. 68-89.

[22] M. S. Tsalenko, On the foundations of the theory of categories, *Uspekhi Matem. Nauk*, XV, 6 (96) (1960). Translated in Russian Math. Surveys, *London Math. Soc.*, 15 (1960), pp. 47-51.

TABLE DES MATIÈRES