

Méthodes de surclassement et analyse de robustesse

Sami Ben Mena

Unité de Mathématique. Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux. Passage des Déportés, 2. B-5030 Gembloux (Belgique). E-mail: benmena.s@fsagx.ac.be.

Reçu le 2 mai 2000, accepté le 19 décembre 2000.

En introduction sont mentionnés les arguments en faveur du choix des méthodes de surclassement : domaine d'application, existence d'un logiciel, nombre restreint de travaux sur la robustesse des méthodes de surclassement. Les raisons d'être d'une analyse de robustesse en aide à la décision sont exposées dans un second paragraphe : nature des paramètres, technique utilisée pour leur donner une valeur, techniques utilisées jusque là pour étudier leur variations. Trois définitions sont ensuite proposées pour cerner la notion de conclusion robuste et les nuances associées. Les difficultés inhérentes à l'analyse de robustesse sont résumées dans un quatrième paragraphe. Ensuite, quelques pistes théoriques sont proposées : détermination du sens d'évolution du résultat en fonction de l'évolution des paramètres, technique dite "du microscope", détermination des intervalles de variation maximale de chaque paramètre, méthode d'analyse dite "en étoile", utilisation de valeurs discrètes issues de l'intervalle de variation, utilisation de familles de paramètres, division de l'espace des valeurs possibles des paramètres en sous-domaines. En conclusion, on trouve l'un ou l'autre conseil pratique en vue de l'élaboration d'un logiciel permettant un allègement du travail d'analyse de robustesse.

Mots-clés. Aide à la décision, multicritère, robustesse, sensibilité, surclassement, paramètre, recommandation.

Outranking methods and robustness analysis. The introduction gives the arguments on which the choice of outranking methods is based: application domain, existence of a software, lack of works on the robustness of outranking methods. The reasons for performing a robustness analysis in decision aid are given in the second paragraph: parameters' nature, the technique used in order to give them a value and classical techniques used in order to study their variations. Three definitions are then suggested to understand the notion of a robust conclusion and the associated nuances. The difficulties of robustness analysis are summarized in the fourth paragraph. Then, some theoretical paths are proposed: determination of the direction of result evolution according to parameter evolution, "microscope principle", determination of maximal variation interval for each parameter, "star shape" analysis, use of discrete values coming from variation interval, use of parameter families, partition in domains of the space of possible parameter values where conclusions are sufficiently robust. In conclusion some advice which could facilitate robustness analysis are given.

Keywords. Decision making, multicriteria, robustness, sensitivity, outranking, parameters, recommendations.

1. INTRODUCTION

Contrairement à ce qu'il se passait il y a quelques décennies, les processus de décisions tentent, dans quelque domaine que ce soit, de prendre en compte de plus en plus d'éléments d'ordre non financier. C'est sans doute la raison pour laquelle les méthodes multicritères d'aide à la décision prennent un essor considérable. Parmi celles-ci, se trouvent les méthodes de surclassement (Ben Mena, 2000) qui impliquent d'affecter une valeur à divers paramètres fortement empreints de subjectivité. Cette opération s'avère souvent fastidieuse et son terme imprécis. Il devient alors nécessaire de tester la robustesse des conclusions obtenues par application de l'une ou l'autre méthode. Or, par la complexité des méthodes de surclassements, il est difficile de déduire une tendance au sein du

résultat, à partir d'une variation de plusieurs paramètres. Le présent article s'efforce d'explicitier ces difficultés et de proposer des pistes pour y remédier.

Pourquoi avoir choisi les méthodes dites de surclassement ? Le champ d'application de l'aide multicritère à la décision est assez vaste. Cependant, certaines méthodes peuvent avoir des "domaines de prédilection". Ainsi, par exemple, l'approche par agrégation partielle conviendrait surtout dans la finance et la gestion de l'environnement. En effet, en finance, même si on peut ne se baser que sur des critères quantitatifs, ceux-ci ne sont, en général, pas tous commensurables. Quant à la gestion environnementale, elle comprend de nombreux aspects qualitatifs et donc aussi non commensurables (Schärlig, 1985). D'où, dans les deux cas, on a recours à l'agrégation partielle (Ben Mena, 2000 ; Schärlig 1985). Dans une

faculté d'agronomie, où les méthodes de surclassement sont le plus souvent utilisées, l'étude de ces procédures semble donc s'imposer.

La possibilité d'un remaniement du code de programmation d'un logiciel Electre III (Lejeune, 1998), en vue d'une analyse de robustesse (semi-) informatisée constitue un autre argument en faveur de l'investigation des méthodes de surclassement.

Enfin, une autre bonne raison de s'intéresser à ces méthodes est que très peu de travaux ont été menés quant à l'analyse de la robustesse de leurs résultats.

2. LES RAISONS D'ÊTRE DE L'ANALYSE DE ROBUSTESSE

Toute étude de recherche opérationnelle repose sur deux modèles. Le premier est l'ensemble Ades actions potentielles. Le second est le modèle de préférence, prenant la forme d'un ensemble de critères souvent couplé à une procédure d'agrégation. Ces deux modèles sont exploités par une "procédure de calcul" pour aboutir à un résultat R pouvant consister dans le noyau d'un graphe, un préordre complet ou partiel, etc. (Roy, 1997).

Sauf cas exceptionnels, ce résultat ne peut être regardé comme étant la solution du problème concret. Il ne faut pas, en effet, confondre modèle et réalité. Les deux modèles considérés ainsi que la procédure de calcul font intervenir des données et des paramètres auxquels il est nécessaire d'attribuer des valeurs précises pour que la procédure fournisse un résultat. Il s'agit de :

- données et paramètres économiques ou préférentiels : poids des critères, seuils d'indifférence, de préférence, de veto, moyenne et écart-type d'une distribution de probabilité, etc.
- données et paramètres techniques : formes analytiques qui peuvent être envisagées pour une distribution de probabilité, modalités d'encodage d'une grandeur qualitative, niveaux de concordance, types de relations de surclassement à retenir, etc.

Fréquemment, la façon de donner une valeur à chacune de ces données ou à chacun de ces paramètres ne s'impose pas de façon évidente. Chaque instantiation peut alors mener à un résultat jugé réaliste. Cette indétermination peut avoir deux origines :

- soit la nature de notre connaissance lorsque la donnée ou le paramètre admet objectivement une vraie valeur : celle-ci peut être mal connue parce que nos instruments de mesure sont imprécis ou que cette vraie valeur n'existera que dans un futur plus ou moins lointain ;
- soit la nature même de la donnée ou du paramètre lorsqu'il s'agit de purs produits de la modélisation (ou de la procédure de calcul) : il n'existe alors ni n'existera jamais de réalités objectives définissant de vraies valeurs (cas des paramètres d'Electre par exemple) (Roy, 1997).

En pratique, avant l'application de l'une ou l'autre méthode, on effectue le choix d'un jeu de paramètres jugé comme une "bonne approximation" de la réalité. On tente ainsi d'approcher la solution vraie du problème mais, si on se limite à cela, on néglige toute imprécision, incertitude ou mauvaise détermination.

Une première façon de remédier à ce problème est d'effectuer une analyse de sensibilité, c'est-à-dire faire varier chaque paramètre l'un après l'autre afin de voir dans quelle plage de valeurs des paramètres le résultat R reste inchangé. Cette analyse mène souvent à des conclusions limitées voire embarrassantes. Le côté limité vient du fait que l'on fait varier les paramètres isolément. Le côté embarrassant provient du fait que savoir que le résultat varie de telle ou telle façon selon les variations d'un paramètre peut être sans portée opérationnelle claire pour le décideur (Roy, 1997).

Une autre tactique serait d'enregistrer des résultats pour différents jeux de paramètres. Mais même si cela peut être utile, il est plus satisfaisant de pouvoir élaborer des recommandations très synthétiques pour une vaste gamme de valeurs des paramètres économiques et techniques. De telles recommandations doivent être étayées à partir de conclusions que nous qualifierons de robustes. Ces conclusions sont obtenues grâce à l'analyse de la robustesse.

3. CONCLUSIONS ROBUSTES ET ANALYSE DE ROBUSTESSE

3.1. Notations

Ci-après, le terme de paramètre sera réservé aux seules variables dont le champ de valeurs possibles ne peut être, aux yeux de l'analyste, réduit à une seule. Celui de données désignera au contraire toutes les autres variables dont la valeur s'impose pour définir complètement les deux modèles et la procédure de calcul. E et D désigneront dès lors respectivement l'ensemble des paramètres et l'ensemble des données.

Chaque paramètre sera noté h_i ($i : 1, \dots, p$). J sera un jeu quelconque de valeurs prises par les paramètres découlant du choix de l'analyste. Le résultat associé à J sera dès lors noté $R(J)$.

Si $E(h_i)$ désigne l'ensemble des valeurs possibles que l'analyste attribue aux paramètres h_i , on peut définir, à partir de là, l'ensemble \hat{J} de tous les jeux de valeurs J qui mériteraient, si cela était possible, d'être envisagés. Cet ensemble pouvant être très vaste et posséder de nombreuses dimensions, on peut se contenter d'explorer uniquement une partie J de \hat{J} .

3.2. Définitions

De même que les notations ci-dessus, les définitions suivantes sont extraites de Roy (1997).

Définition 1. Étant donné un ensemble de paramètres auxquels est associé un champ de possibilités \hat{J} relatif à un ensemble A d'actions potentielles, un modèle de préférence (mono ou multicritère) et une procédure de calcul conduisant au résultat $R(J)$ défini $J \in \hat{J}$, une conclusion parfaitement robuste sur $J \in \hat{J}$ est une assertion parfaitement formalisée concernant tout ou partie de R , qui est vérifiée par $R(J)$ pour tout $J \in \hat{J}$.

Définition 2. Une conclusion approximativement robuste sur $J \in \hat{J}$ est une conclusion parfaitement robuste sur un sous-ensemble $J' \subset J$, J' non nécessairement clairement identifié mais tel que $J \setminus J'$ ne contienne que des jeux de valeurs négligeables relativement à J ; J est négligeable relativement à J' s'il est jugé beaucoup moins convenable que d'autres éléments de J pour instancier modèles et procédures susceptibles de représenter au mieux l'univers dans lequel la décision sera opérationnelle.

Définition 3. Étant donné un ensemble de paramètres auxquels est associé un champ de possibilités \hat{J} relatif à un modèle A d'actions potentielles, un modèle de préférences (mono ou multicritère) et une procédure de calcul conduisant au résultat $R(J)$ défini $J \in \hat{J}$, une conclusion pseudo-robuste sur $J \in \hat{J}$ est un énoncé plus ou moins formel concernant tout ou partie de R qui est jugé valide pour tout $J \in \hat{J}$.

Définition 4. Par analyse de robustesse, on désigne toute façon de faire qui concourt à l'élaboration de conclusions robustes sur un ou plusieurs ensembles J aussi riches que possible.

Les conclusions robustes qui résultent de l'analyse de robustesse servent en général à asseoir ce qu'on appelle une recommandation.

4. LES DIFFICULTÉS DE L'ANALYSE DE ROBUSTESSE

Il faut bien reconnaître qu'une analyse de robustesse peut s'avérer lourde et coûteuse. C'est pourquoi on y renonce souvent. Pourtant, ce n'est qu'au prix de ce genre d'analyse qu'il est possible d'aider à construire, transformer ou justifier des préférences et d'entamer une discussion critique pour asseoir une recommandation (Roy, Bouyssou, 1993).

Il est clair que la rigueur d'une conclusion robuste décroît selon qu'il s'agit d'une conclusion parfaitement, approximativement ou seulement pseudo-robuste. Mais si on ne se limite pas aux conclusions parfaitement robustes c'est tout d'abord parce qu'elles sont beaucoup plus difficiles à établir que les autres. Ensuite, l'ouverture aux exceptions et, a fortiori, à des

énoncés moins formels peut permettre des conclusions plus riches dans leur contenu (Roy, 1997).

Le principal obstacle à la rigueur provient de la difficulté d'explorer de façon exhaustive un ensemble $J \in \hat{J}$, dès l'instant où J présente un grand nombre d'éléments. C'est évidemment le cas lorsque \hat{J} résulte du produit cartésien des ensembles $E(h_i)$ (cfr 3.1). Il peut alors être fort long et souvent impossible d'échafauder en toute rigueur des conclusions parfaitement robustes voire approximativement robustes.

5. QUELQUES PISTES

Le présent paragraphe a pour objet de présenter différentes voies possibles pour mener une analyse de robustesse lors de l'application des méthodes dites de surclassement.

Tout d'abord, il faut savoir que trouver des résultats différents pour chaque jeu de paramètres ne signifie pas que l'on s'éloigne de la solution de base¹. Il est évident qu'avec des valeurs de fonctionnement significativement différentes, la procédure de calcul ne va que très rarement donner des résultats totalement identiques. Néanmoins, pour rester dans la solution de base, il est fondamental que, entre autres, des actions entre lesquelles il existe un surclassement très fort, conservent les mêmes positions relatives. Cette comparabilité étant appréhendée par ce qui se ramène, selon les méthodes, à des indices de concordance ou de crédibilité, il importe de tenter de déterminer le sens d'évolution du résultat (notamment des incomparabilités) en fonction du sens d'évolution de chaque paramètre. Ainsi par exemple, il faut savoir que poids et veto font appel à la même notion d'importance pour chaque critère (Roy, Bouyssou, 1993). Par conséquent, pour alléger l'analyse de robustesse, on essaiera autant que possible d'imposer aux différents paramètres des variations qui influencent dans le même sens le résultat final (Ex. : renversements de préférences). D'ailleurs, lorsque les paramètres étudiés présentent une certaine forme de dépendance, Maystre *et al.* (1994) suggèrent de ne pas se limiter à une étude de la variation de ces paramètres d'une manière totalement indépendante. La technique proposée est celle dite "du microscope" (**Figure 1**). À chaque nouvelle étape de l'analyse de robustesse, les recherches se limitent dans une sous-région du champ étudié à l'étape précédente mais avec un pouvoir de résolution plus grand. Le choix de cette sous-région se porte là où des variations intéressantes (Ex. : introduction d'une action supplémentaire dans le noyau d'un graphe, modification du rang de certaines actions dans un préordre) apparaissent aux résultats, en tenant compte de l'objectif qui est

¹ Solution obtenue avec les valeurs des paramètres qui paraissent les plus crédibles et les plus réalistes.

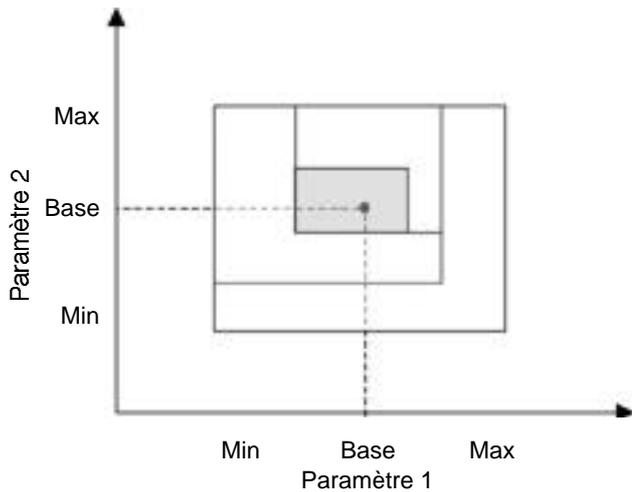


Figure 1. Exemple du “principe du microscope” (figure extraite de l’ouvrage *Méthodes multicritères Electre*, L.Y. Maystre, J. Pictet et J. Simos, ©1994, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne. Reproduit avec l’autorisation de l’éditeur) — *Example of the “Microscope principle” (from the book Méthodes multicritères Electre, L.Y. Maystre, J. Pictet et J. Simos, ©1994, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne. Reproduced with the editor’s authorization).*

d’explorer au mieux le voisinage de la solution de départ.

Maystre *et al.* (1994) suggèrent deux façons de mener une analyse de robustesse, l’une plus systématique (technique “en étoile”), l’autre plus intuitive (technique par coup de sonde). La première consiste à décrire une “étoile” ou un “cristal” (**Figure 2**) autour de la solution de base et comprend les étapes suivantes :

- identification des éléments devant faire l’objet d’une analyse de robustesse ;
- réalisation d’une analyse de robustesse pour chaque élément séparément, en considérant deux valeurs qui encadrent la valeur utilisée dans la solution de base ;
- réalisation d’analyses de robustesse combinant deux puis plusieurs paramètres.

La seconde technique consiste à réaliser des coups de sonde en combinant différentes modifications des paramètres. Elle n’est praticable que par un homme d’étude ayant suffisamment d’expérience pour sentir les faiblesses de la solution de base. L’homme d’étude peu expérimenté utilisera la première méthode, dont les résultats sont plus faciles à analyser.

Les extrémités de l’intervalle de variation de chaque paramètre, de même que sa valeur centrale, peuvent s’avérer intéressantes pour mener une première forme d’analyse de robustesse. Effectivement, comme on l’a déjà mentionné au paragraphe précédent, il peut être long et fastidieux d’explorer tous les intervalles, même réduits, définis pour chacun des paramètres. On

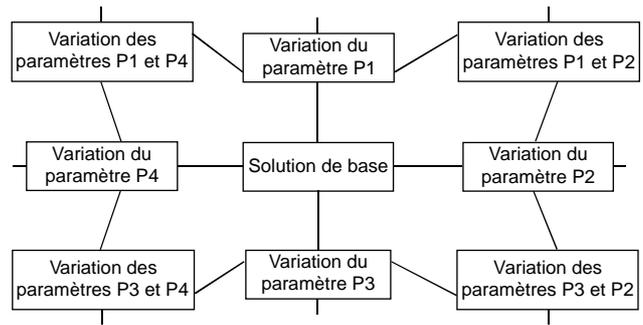


Figure 2. Analyse de robustesse en “étoile” (figure extraite de l’ouvrage *Méthodes multicritères Electre*, L.Y. Maystre, J. Pictet et J. Simos, ©1994, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne. Reproduite avec l’autorisation de l’éditeur — “*Star shape*” *robustness analysis (from the book Méthodes multicritères Electre, L.Y. Maystre, J. Pictet et J. Simos, ©1994, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne. Reproduced with the editor’s authorization).*

peut donc remplacer ces intervalles par leurs valeurs extrêmes et leurs valeurs centrales. On adopte alors, à la place de \mathbf{J} , un ensemble \mathbf{J}_d , produit cartésien des ensembles discrets associés à chaque paramètre. Dans certains cas il sera possible de montrer que la conclusion obtenue à partir de \mathbf{J}_d est valable pour tout l’ensemble \mathbf{J} . Dans d’autres cas, on aura de très fortes raisons de croire qu’il en est de même sans pouvoir le prouver. On devra alors se contenter de conclusions pseudo-robustes (Roy, 1997).

Même si on ne retient que 3 valeurs pour chaque paramètre (valeurs centrale et extrêmes), l’analyse combinatoire qui en résulte nous mène à 3^p jeux de valeurs, si p représente le nombre de paramètres à faire varier. Ce nombre pouvant être élevé, Roy et Bouyssou (1993) proposent alors de démarrer l’analyse de robustesse en ne considérant que les jeux d’une première famille (en nombre restreint), choisis de façon à être suffisamment contrastés pour mettre en évidence les variations auxquelles les conclusions C_0 obtenues initialement sont les plus sensibles. Cela doit permettre d’affiner les conclusions C_0 , éventuellement de les affermir ou, au contraire, de les transformer. Cela peut amener dans certains cas à remplacer le jeu de paramètres initialement retenu, par un autre jeu. On aboutit alors à d’autres conclusions C_1 . Si C_1 est considéré comme suffisamment robuste, on arrête l’analyse. Sinon on utilise une seconde famille pour éprouver plus précisément C_1 .

Dans le cas où le domaine initial \mathbf{J} considéré globalement aboutirait à des conclusions trop pauvres, il faut alors considérer des sous-domaines $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots$ (formant un recouvrement de \mathbf{J}) afin d’obtenir des conclusions robustes suffisamment riches pour chacun

d'eux (Roy, Bouyssou, 1993). Cela s'avère nécessaire lorsque des renversements de préférence ont lieu quand certains paramètres franchissent des valeurs critiques.

6. CONCLUSION

Ce qui précède constitue des pistes plutôt théoriques devant permettre de mener correctement une analyse de robustesse. L'intérêt pratique de ces pistes réside en la façon dont elles pourraient être intégrées dans l'élaboration d'un logiciel qui allégerait le travail de l'homme d'étude lorsqu'il aurait fait tourner une première fois l'une ou l'autre méthode de surclassement. Roy et Bouyssou (1993) ainsi que Roy (1997) donnent à ce sujet quelques recommandations. Dans les méthodes de type Electre (principale famille des méthodes de surclassement), il est très utile de disposer, pour chaque couple d'actions, d'une liste de tous les critères discordants associés à la valeur de l'écart des performances correspondant. Cette liste est en effet invariante face à une variation des poids, seuils de veto et même certains autres paramètres techniques. Elle facilite par conséquent l'interprétation des résultats de la procédure d'exploitation, obtenus relativement à une famille de jeux de valeurs des paramètres. Elle aide également à déceler les valeurs critiques les plus pertinentes. Ces informations peuvent facilement être obtenues par ordinateur, une fois les données encodées.

Il serait bon aussi de créer un logiciel facilitant la manipulation et l'étude d'évolution d'une suite de résultats R(J) obtenus avec une suite de jeux de valeurs J (liste pouvant être très longue). Ce genre de manipulation et d'étude devrait être conçu pour être conduit de manière interactive. Cette interaction serait pilotée en faisant référence aux jeux de valeurs qui sont à l'origine de chacun des résultats observés. L'objectif de ce pilotage serait de faciliter la mise en évidence d'assertions valides, sinon sur la totalité des jeux considérés, du moins sur un très grand nombre d'entre eux ou bien sur un sous-ensemble pouvant être caractérisé par référence aux valeurs des paramètres. À ce jour, certains logiciels proposent une analyse de sensibilité qui se réduit, la plupart du temps, à la présentation d'intervalles de poids au sein desquels aucune modification du résultat de la méthode ne se produit. On est donc encore bien loin de l'analyse de robustesse suggérée dans les paragraphes qui ont précédé. Toutefois, comme annoncé en introduction, le

remaniement du code de programmation d'un logiciel Electre III, devenu ensuite une "macro" Excel®, a permis quelques progrès. En effet, par l'introduction d'un processus itératif, cette macro effectue ce que l'on pourrait nommer une "analyse de sensibilité élargie". En d'autres termes, elle détermine, interactivement, pour chaque paramètre, un intervalle au sein duquel se produisent des modifications mineures du résultat final. Cela signifie que l'utilisateur peut lui-même fixer une variation maximale de rang que chaque action peut subir au sein du classement final. L'utilisateur peut aussi fixer la différence d'indices de crédibilité au-delà de laquelle il n'est plus permis qu'un couple d'actions voie ses composantes intervertir leurs positions dans le classement final. Enfin, la possibilité de ne soumettre à l'analyse que certaines actions et/ou certains critères, et de préciser le degré de précision de l'analyse, permet d'alléger cette dernière (Ben Mena, 2001). En outre, des recherches sont poursuivies en vue d'améliorer la macro et surtout son module d'analyse de sensibilité.

Bibliographie

- Ben Mena S. (2000). Introduction aux méthodes multicritères d'aide à la décision. *Biotechnol. Agron. Soc. Environ.* 4 (2), p. 83–93.
- Ben Mena S. (2001). Une solution informatisée à l'analyse de sensibilité d'Electre III. *Biotechnol. Agron. Soc. Environ.* 5 (1), p. 31–35.
- Lejeune (1998). *Logiciel d'application de Electre III. Notice d'utilisation.* Gembloux : Faculté universitaire des Sciences agronomiques de Gembloux, 6 p. Note à diffusion limitée.
- Maystre LY., Pictet J., Simos J. (1994). *Méthodes multicritères Electre. Description, conseils pratiques et cas d'application à la gestion environnementale.* Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 323 p.
- Roy B. (1997). Un chaînon manquant RO-AD : les conclusions robustes. *Cahier du Lamsade* 144 32 p.
- Roy B., Bouyssou B. (1993). *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas.* Paris : Economica, 695 p.
- Schärlig A. (1985). *Décider sur plusieurs critères, panorama de l'aide à la décision multicritère.* Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 304 p.

(7 réf.)